



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Ioan BADULESCU, Erez LAPID & Alberto MÍNGUEZ

**Une condition suffisante pour l'irréductibilité d'une induite parabolique de  $GL(m, D)$**

Tome 63, n° 6 (2013), p. 2239-2266.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2013\\_\\_63\\_6\\_2239\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2013__63_6_2239_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2013, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# UNE CONDITION SUFFISANTE POUR L'IRRÉDUCTIBILITÉ D'UNE INDUITE PARABOLIQUE DE $GL(m, D)$

par Ioan BADULESCU, Erez LAPID & Alberto MÍNGUEZ (\*)

---

RÉSUMÉ. — Dans la théorie des représentations de  $GL_n$  (et ses formes intérieures) sur un corps local non-archimédien, nous disposons de deux classifications, dues à Zelevinsky et Langlands, construites à partir de certaines représentations segments  $Z(\Delta)$  et  $L(\Delta)$ . Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour l'irréductibilité de l'induite parabolique  $Z(\Delta) \times L(\Delta')$  des segments  $\Delta, \Delta'$ . On en déduit des nouvelles conditions suffisantes pour l'irréductibilité d'une induite parabolique de représentations quelconques. Ce critère est particulièrement pratique pour les représentations dites en échelle.

ABSTRACT. — In the representation theory of  $GL_n$  (and its inner forms) over a non-archimedean local field there are two classification schemes due to Zelevinsky and Langlands in which the building blocks are certain segment representations  $Z(\Delta)$  and  $L(\Delta)$ . We give a necessary and sufficient criterion for the irreducibility of the parabolic induction  $Z(\Delta) \times L(\Delta')$  of segments  $\Delta, \Delta'$ . As a consequence we obtain new sufficient conditions for irreducibility of parabolic induction of arbitrary representations. This is particularly useful for the so called ladder representations.

## Introduction

Soit  $F$  un corps commutatif localement compact non archimédien, de caractéristique quelconque, et soit  $D$  une  $F$ -algèbre à division de dimension finie et de centre  $F$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on désigne par  $G_n$  le groupe  $GL_n(D)$ .

---

*Mots-clés* : représentation induite, irréductibilité, représentations en échelle.

*Classification math.* : 22E50.

(\*) Le deuxième auteur est partiellement financé par une bourse de la Israel Science Foundation. Le troisième auteur est partiellement financé par ANR-10-BLANC 0114, EPSRC grant EP/G001480/1, MTM2010-19298 et FEDER.

Cet article est motivé par la question suivante : Soient  $\pi_1$  et  $\pi_2$  deux représentations lisses irréductibles complexes de  $G_{n_1}$  et  $G_{n_2}$  respectivement, quelles sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'induite parabolique  $\pi_1 \times \pi_2$  soit irréductible ? Dans le cas où  $D = F$ , Bernstein [9] prouve que, si  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont des représentations irréductibles unitaires, alors la induite  $\pi_1 \times \pi_2$  est toujours irréductible. Ce théorème est utilisé par Mœglin-Waldspurger [19, §1] pour donner – entre autres – des conditions suffisantes dans le cas où  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont des représentations essentiellement de *Speh*, résultat qu'ils utilisent pour la détermination du spectre discret automorphe de  $GL_n$  sur un corps global. Par la suite, Sécherre [20], étend le théorème de Bernstein sur l'irréductibilité de l'induite des représentations unitaires au cas où  $D \neq F$ , via la théorie de types.

Dans le cas où les représentations ne sont pas forcément unitaires, la question est beaucoup plus difficile : Mínguez [15] traite le cas où l'une de deux représentations est cuspidale. Dans cet article, on utilise la technique des foncteurs de Jacquet pour donner une condition suffisante (mais pas nécessaire), basée sur les classifications des représentations irréductibles complexes de  $G_n$ , pour que l'induite  $\pi_1 \times \pi_2$  soit irréductible.

Donnons plus de détails sur notre résultat. Soit un entier  $n \geq 1$  et soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_n$ . Dans [21], on lui associe un caractère non-ramifié  $\nu_\rho$  tel que pour toute représentation cuspidale  $\rho'$ , la représentation induite normalisée  $\rho \times \rho'$  est réductible si et seulement si  $\rho'$  est isomorphe à la représentation tordue  $\rho\nu_\rho$  ou  $\rho\nu_\rho^{-1}$ .

Ceci permet de définir la notion de segment. Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  des entiers tels que  $a \leq b$ . Un *segment* est une suite finie de la forme :

$$\Delta = (\rho\nu_\rho^a, \rho\nu_\rho^{a+1}, \dots, \rho\nu_\rho^b).$$

La longueur de  $\Delta$  est  $b - a + 1$ .

Soit  $\Delta' = (\rho'\nu_{\rho'}^{a'}, \rho'\nu_{\rho'}^{a'+1}, \dots, \rho'\nu_{\rho'}^{b'})$  un autre segment. On dit que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont *liés* si l'on peut extraire de l'une de suites :

$$(0.1) \quad (\rho\nu_\rho^a, \dots, \rho\nu_\rho^b, \rho'\nu_{\rho'}^{a'}, \dots, \rho'\nu_{\rho'}^{b'}) \quad (\rho'\nu_{\rho'}^{a'}, \dots, \rho'\nu_{\rho'}^{b'}, \rho\nu_\rho^a, \dots, \rho\nu_\rho^b)$$

une sous-suite qui est un segment de longueur strictement supérieure aux longueurs de  $\Delta$  et  $\Delta'$ . On dit que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont *juxtaposés* si l'une des suites (0.1) est un segment, c'est-à-dire si  $\rho'\nu_{\rho'}^{a'} \simeq \rho\nu_\rho^{b+1}$  ou  $\rho\nu_\rho^a \simeq \rho'\nu_{\rho'}^{b'+1}$ .

Un *multisegment* est un multi-ensemble (cf. 1.7) de segments de la forme précédente. À tout multisegment  $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \dots + \Delta_N$  on associe deux représentations irréductibles, à la *Zelevinsky* et à la *Langlands*,  $Z(\mathfrak{m})$  et  $L(\mathfrak{m})$  ([24, 21, 17] ; voir Théorèmes 2.5 et 2.6 pour plus de détails) de sorte

que toute représentation irréductible  $\pi$  de  $G_m$  s'écrit sous la forme  $Z(\mathfrak{m})$  (resp.  $L(\mathfrak{m})$ ) pour un unique multisegment  $\mathfrak{m}$ .

Dans [24, 21, 17], il est montré que, si  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont deux segments, l'induite  $Z(\Delta) \times Z(\Delta')$  (resp.  $L(\Delta) \times L(\Delta')$ ) est irréductible si, et seulement si,  $\Delta$  et  $\Delta'$  ne sont pas liés. On en déduit facilement que, si  $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$  sont deux multisegments tels qu'aucun segment de  $\mathfrak{m}$  ne soit lié à un segment de  $\mathfrak{m}'$ , alors l'induite  $Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{m}')$  (resp.  $L(\mathfrak{m}) \times L(\mathfrak{m}')$ ) est irréductible.

Dans cet article, on s'intéresse à l'induite :

$$Z(\Delta) \times L(\Delta').$$

On montre qu'elle est irréductible si, et seulement si,  $\Delta$  et  $\Delta'$  ne sont pas *juxtaposés*. Dans le cas où  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont juxtaposés, l'induite est de longueur 2 et ses sous-quotients irréductibles sont appelés représentations elliptiques de Lubin-Tate dans [10] car ce sont exactement celles qui apparaissent dans la cohomologie des tours de Lubin-Tate.

On en déduit, dans la Section 3, le résultat principal de cet article :

**THÉORÈME 0.1.** — *Soient  $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_N$  et  $\mathfrak{m}' = \Delta'_1 + \cdots + \Delta'_{N'}$ , deux multisegments. Supposons que pour tous  $1 \leq i \leq N$ ,  $1 \leq j \leq N'$ ,  $\Delta_i$  et  $\Delta'_j$  ne sont pas juxtaposés. Alors, les induites :*

$$Z(\mathfrak{m}) \times L(\mathfrak{m}') \quad \text{et} \quad L(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{m}')$$

*sont irréductibles.*

Dans la Section 4 on en déduit quelques applications directes : il semble être, en particulier, un critère intéressant pour étudier le dual unitaire de  $G_m$ . Plus généralement on considère le cas des représentations en échelle (cf. [13], voir paragraphe 4.1 pour la définition), classe qui généralise de façon naturelle celle de représentation de Speh (et qui contient aussi les représentations elliptiques). On montre que la conjecture [5, Conjecture 3.11] sur l'irréductibilité du transfert de Jacquet-Langlands est vraie pour des telles représentations et on répond à la question posée dans [13, Remark 5], qui apparaît aussi naturellement dans [11].

## 1. Notations et conventions

### 1.1.

Soit  $F$  un corps commutatif localement compact non archimédien, de caractéristique résiduelle notée  $p$ , et soit  $D$  une  $F$ -algèbre à division centrale de dimension finie  $d^2$ .

**1.2.**

Soit  $G$  un groupe topologique localement profini. Dans cet article on ne considérera que des représentations lisses complexes de  $G$  et le mot *représentation* voudra toujours dire *représentation lisse complexe*. Si  $\pi$  est une représentation de  $G$ , on désigne par  $\pi^\vee$  sa contragrédiente. Si en outre  $\chi$  est un caractère de  $G$ , on note  $\chi\pi$  ou  $\pi\chi$  la représentation tordue  $g \mapsto \chi(g)\pi(g)$ .

**1.3.**

Pour tout entier  $m \geq 1$ , on désigne par  $M_m(D)$  la  $F$ -algèbre des matrices de taille  $m \times m$  à coefficients dans  $D$  et par  $G_m = GL_m(D)$  le groupe de ses éléments inversibles.

Soit  $\text{Nrd}_m$  la norme réduite de  $M_m(D)$  sur  $F$  et  $|\cdot|_F$  la valeur absolue normalisée de  $F$ . L'application  $g \mapsto |\text{Nrd}_m(g)|_F$  est un caractère de  $G_m$ , qu'on notera simplement  $\nu$ .

**1.4.**

Pour  $m \geq 1$ , on note  $\text{Irr}(G_m)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $G_m$  et  $\mathcal{G}(G_m)$  le groupe de Grothendieck de ses représentations de longueur finie, qui est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de base  $\text{Irr}(G_m)$ . On fait la convention  $\text{Irr}(G_0)$  est la représentation de dimension 1 du groupe trivial et  $\mathcal{G}(G_0) = \mathbb{Z}$ .

Si  $\pi$  est une représentation de longueur finie de  $G_m$ , on pose  $\deg(\pi) = m$  (le degré de  $\pi$ ), et on note  $[\pi]$  l'image de  $\pi$  dans  $\mathcal{G}(G_m)$ . En particulier, si  $\pi$  est irréductible,  $[\pi]$  désigne sa classe d'isomorphisme. Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, il nous arrivera d'identifier une représentation avec sa classe d'isomorphisme.

On désigne par  $\text{Irr}$  la réunion disjointe des ensembles  $\text{Irr}(G_m)$  pour  $m \geq 0$ , et par  $\mathcal{G}$  la somme directe des  $\mathcal{G}(G_m)$  pour  $m \geq 0$ , qui est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de base  $\text{Irr}$ .

**1.5.**

Si  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  est une famille d'entiers positifs ou nuls dont la somme est égale à  $m$ , il lui correspond le sous-groupe de Levi standard  $M_\alpha$

de  $G_m$  constitué des matrices diagonales par blocs de tailles  $m_1, \dots, m_r$  respectivement, que l'on identifie naturellement au produit  $G_{m_1} \times \dots \times G_{m_r}$ . On note  $P_\alpha$  le sous-groupe parabolique de  $G_m$  (de facteur de Levi  $M_\alpha$ ) engendré par  $M_\alpha$  et les matrices triangulaires supérieures, et on note  $U_\alpha$  son radical unipotent.

On note  $r_\alpha$  le foncteur de restriction parabolique normalisé (le foncteur de Jacquet), et  $i_\alpha$  son adjoint à droite, c'est-à-dire le foncteur d'induction parabolique normalisé lui correspondant. Ces foncteurs sont exacts, et préservent l'admissibilité et le fait d'être de longueur finie.

Si, pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on se donne une représentation  $\pi_i$  de  $G_{m_i}$ , on note :

$$(1.1) \quad \pi_1 \times \dots \times \pi_r = i_\alpha(\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r).$$

Si les  $\pi_i$  sont de longueur finie, la quantité  $[\pi_1 \times \dots \times \pi_r]$  ne dépend que de  $[\pi_1], \dots, [\pi_r]$ . L'application :

$$(1.2) \quad ([\pi_1], \dots, [\pi_r]) \mapsto [\pi_1 \times \dots \times \pi_r]$$

induit par linéarité une application multilinéaire de  $\mathcal{G}(G_{m_1}) \times \dots \times \mathcal{G}(G_{m_r})$  dans  $\mathcal{G}(G_m)$ . Ceci munit  $\mathcal{G}$  d'une structure de  $\mathbb{Z}$ -algèbre commutative graduée (voir [24, 21, 7]).

On note également  $r_\alpha^-$  le foncteur de restriction parabolique relativement au sous-groupe parabolique  $P_\alpha^-$  opposé à  $P_\alpha$  relativement à  $M_\alpha$ , c'est-à-dire obtenu de  $P_\alpha$  par transposition, et on note  $\alpha^- = (m_r, \dots, m_1)$  la famille déduite de  $\alpha$  en inversant l'ordre des termes.

**1.6.**

Une représentation irréductible de  $G_m$  est dite *cuspidale* si son image par  $r_\alpha$  est nulle pour toute famille  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  d'entiers compris entre 0 et  $m - 1$  et de somme  $m$ .

On note  $\mathcal{C}(G_m)$  le sous-ensemble de  $\text{Irr}(G_m)$  constitué des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales. On note  $\mathcal{C}$  la réunion disjointe des  $\mathcal{C}(G_m)$ , pour  $m \geq 1$ .

**1.7.**

Étant donné un ensemble  $X$ , un multi-ensemble sur  $X$  est une fonction  $\mathfrak{m} : X \rightarrow \mathbb{N}$  à support fini. L'ensemble des multiensembles sur  $X$  sera noté

$\mathbb{N}(X)$ . Étant donné une représentation irréductible  $\pi$  de  $G_m$ , il existe une famille  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  de somme  $m$  et, pour chaque  $1 \leq i \leq r$ , une représentation irréductible cuspidale  $\rho_i$  de  $G_{m_i}$  telle que  $\pi$  soit isomorphe à une sous-représentation de  $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$ . La somme :

$$[\rho_1] + \dots + [\rho_r]$$

dans  $\mathbb{N}(\mathcal{C})$  est déterminée par  $\pi$  et s'appelle le support cuspidal de  $\pi$  et est notée  $\text{supp}(\pi)$ .

### 1.8.

Dans ce paragraphe, on donne une version combinatoire du lemme géométrique de Bernstein-Zelevinsky ([8], voir [15, Proposition 2.1]). Soient  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  et  $\beta = (n_1, \dots, n_s)$  deux familles d'entiers de sommes toutes deux égales à  $m \geq 1$ . Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $\pi_i$  une représentation irréductible de  $G_{m_i}$ , et posons  $\pi = \pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r \in \text{Irr}(M_\alpha)$ . On note  $M^{\alpha, \beta}$  l'ensemble des matrices  $B = (b_{i,j})$  composées d'entiers positifs ou nuls tels que :

$$\sum_{j=1}^s b_{i,j} = m_i, \quad i \in \{1, \dots, r\}, \quad \sum_{i=1}^r b_{i,j} = n_j, \quad j \in \{1, \dots, s\}.$$

Fixons  $B \in M^{\alpha, \beta}$  et notons  $\alpha_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,s})$  et  $\beta_j = (b_{1,j}, \dots, b_{r,j})$ , qui sont des partitions de  $m_i$  et de  $n_j$  respectivement. Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on écrit :

$$\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i,1}^{(k)} \otimes \dots \otimes \sigma_{i,s}^{(k)}, \quad \sigma_{i,j}^{(k)} \in \text{Irr}(G_{b_{i,j}}), \quad k \in \{1, \dots, r_i\},$$

les différents facteurs de composition de  $\mathbf{r}_{\alpha_i}(\pi_i)$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, s\}$  et toute famille d'entiers  $(k_1, \dots, k_r)$  tels que  $1 \leq k_i \leq r_i$ , on définit une représentation  $\sigma_j$  de  $G_{n_j}$  par :

$$\sigma_j = \mathbf{i}_{\beta_j} \left( \sigma_{1,j}^{(k_1)} \otimes \dots \otimes \sigma_{r,j}^{(k_r)} \right).$$

Alors :

$$[\mathbf{r}_\beta \circ \mathbf{i}_\alpha(\pi)] = \sum_{B \in M^{\alpha, \beta}, (k_1, \dots, k_r)} [\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_s].$$

Les lemmes suivants sont prouvés dans [17, §2.3].

LEMME 1.1. — On suppose qu'il y a un sous-groupe parabolique  $P$  de  $G_n$  de facteur de Levi  $M$  et une représentation irréductible  $\sigma$  de  $M$  telle que la multiplicité de  $\sigma$  dans  $[r_P^{G_n}(i_P^{G_n}(\sigma))]$  est égale à 1. Alors,  $i_P^{G_n}(\sigma)$  (resp.  $i_{P^-}^{G_n}(\sigma)$ ) a une unique sous-représentation (resp. quotient) irréductible, et dont la multiplicité dans  $i_P^{G_n}(\sigma)$  (resp.  $i_{P^-}^{G_n}(\sigma)$ ) est égale à 1.

Le lemme suivant est une conséquence du précédent.

LEMME 1.2. — Soit  $\pi$  une représentation de longueur finie de  $G_n$ . On suppose qu'il y a un sous-groupe parabolique  $P$  de  $G_n$  de facteur de Levi  $M$  et une représentation irréductible  $\sigma$  de  $M$  satisfaisant aux conditions suivantes :

- (1)  $\pi$  est une sous-représentation de  $i_P^{G_n}(\sigma)$  et un quotient de  $i_{P^-}^{G_n}(\sigma)$  ;
- (2) la multiplicité de  $\sigma$  dans  $[r_P^{G_n}(i_P^{G_n}(\sigma))]$  est égale à 1.

Alors  $\pi$  est irréductible.

## 2. Rappels sur les classifications des représentations irréductibles de $G_m$

La classification des représentations irréductibles de  $G_m$  à partir des représentations cuspidales des groupes  $G_k$ ,  $k \leq m$ , est due à Zelevinsky [24] pour le cas  $D = F$  et à Tadić ([21]) pour le cas général. L'article de Tadić est écrit en caractéristique nulle, mais le résultat de [4] permet de l'étendre à toute caractéristique, comme expliqué dans [7]. Dans [16], on peut trouver une preuve indépendante qui n'utilise que des arguments locaux.

### 2.1.

Soit un entier  $n \geq 1$ , soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_n$ . Dans [21], on lui associe un caractère non-ramifié  $\nu_\rho$  de la forme  $\nu_\rho = \nu^{s(\rho)}$ , avec  $s(\rho)$  un entier positif, tel que pour toute représentation cuspidale  $\rho'$ , la représentation induite  $\rho \times \rho'$  est réductible si et seulement si  $\rho'$  est isomorphe à  $\rho\nu_\rho$  ou  $\rho\nu_\rho^{-1}$ . Par exemple, si  $D = F$ , alors  $\nu_\rho$  est indépendant de  $\rho$  et vaut  $|\det|_F$ . On note  $\mathbb{Z}_\rho$  l'ensemble de classes d'équivalence des représentations de la forme  $\rho\nu_\rho^i$  avec  $i \in \mathbb{Z}$ .



## 2.2.

Soit un entier  $n \geq 1$ , soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_n$  et soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  des entiers tels que  $a \leq b$ . Un *segment* est une suite finie de la forme :

$$\Delta = (\rho\nu_\rho^a, \rho\nu_\rho^{a+1}, \dots, \rho\nu_\rho^b).$$

Un tel segment sera aussi noté  $[a, b]_\rho$ . On note :

(2.1)

$$l(\Delta) = b - a + 1, \quad \deg(\Delta) = (b - a + 1)n, \quad a(\Delta) = \rho\nu_\rho^a, \quad b(\Delta) = \rho\nu_\rho^b,$$

respectivement la longueur, le degré et les extrémités de  $\Delta$  et on note :

(2.2)

$$\Delta^\vee = [-b, -a]_{\rho^\vee}$$

le segment contragrédient de  $\Delta$ . Si  $a + 1 \leq b$ , on pose :

(2.3)

$${}^-\Delta = [a + 1, b]_\rho,$$

(2.4)

$$\Delta^- = [a, b - 1]_\rho.$$

## 2.3.

Soient  $\Delta = [a, b]_\rho$  et  $\Delta' = [a', b']_{\rho'}$  des segments. On dit que  $\Delta$  *précède*  $\Delta'$  si l'on peut extraire de la suite :

$$(\rho\nu_\rho^a, \dots, \rho\nu_\rho^b, \rho'\nu_{\rho'}^{a'}, \dots, \rho'\nu_{\rho'}^{b'})$$

une sous-suite qui est un segment de longueur strictement supérieure à  $l(\Delta)$  et  $l(\Delta')$ .

DÉFINITION 2.1.

- (1) On dit que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont *liés* si  $\Delta$  précède  $\Delta'$  ou si  $\Delta'$  précède  $\Delta$ .
- (2) On dit que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont *juxtaposés* si l'une des suites :

$$(\rho\nu_\rho^a, \dots, \rho\nu_\rho^b, \rho'\nu_{\rho'}^{a'}, \dots, \rho'\nu_{\rho'}^{b'}), \quad (\rho'\nu_{\rho'}^{a'}, \dots, \rho'\nu_{\rho'}^{b'}, \rho\nu_\rho^a, \dots, \rho\nu_\rho^b)$$

est un segment.

**2.4.**

Un multisegment est un multi-ensemble (cf. 1.7) de segments de la forme précédente. Le support d'un multisegment  $\mathbf{m}$  est le multi-ensemble de représentations cuspidales défini de la façon suivante : si  $\rho$  est une représentation cuspidale, la multiplicité de  $\rho$  dans le support de  $\mathbf{m}$  est le nombre de fois que cette représentation apparaît dans les différents segments de  $\mathbf{m}$ . Le degré de  $\mathbf{m}$  est la somme des degrés de ses segments, comptés avec leur multiplicités.

On peut associer à tout multisegment  $\mathbf{m} = \sum \Delta_i$  une suite ordonnée finie de segments  $(\Delta_1, \dots, \Delta_N)$  tels que, si  $i < j$ , le segment  $\Delta_i$  ne précède pas  $\Delta_j$ . On dira que  $(\Delta_1, \dots, \Delta_N)$  est une forme rangée du multisegment  $\mathbf{m}$ . Il nous arrivera parfois d'identifier un multisegment à l'une de ses formes rangées.

**2.5.**

Soit  $\Delta = [a, b]_\rho$ ,  $b \geq a$ , un segment. On pose :

$$(2.5) \quad I(\Delta) = \nu_\rho^a \rho \times \cdots \times \nu_\rho^b \rho.$$

DÉFINITION 2.2.

- (1) On note  $Z(\Delta)$  l'unique sous-représentation irréductible de  $I(\Delta)$ .
- (2) On note  $L(\Delta)$  l'unique quotient irréductible de  $I(\Delta)$ .

La représentation  $L(\Delta)$  est essentiellement de carré intégrable (elle généralise la représentation de Steinberg) : en fait toute représentation essentiellement de carré intégrable est de la forme  $L(\Delta)$  pour un certain segment  $\Delta$ . Ces représentations possèdent aussi (voir par exemple [17, Proposition 7.15]) les propriétés suivantes :

PROPOSITION 2.3.

- (1) Si  $k$  est un entier tel que  $a < k < b$ , alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{((k-a)n, (b-k+1)n)}(Z([a, b]_\rho)) &= Z([a, k-1]_\rho) \otimes Z([k, b]_\rho), \\ \mathbf{r}_{((b-k+1)n, (k-a)n)}(L([a, b]_\rho)) &= L([k, b]_\rho) \otimes L([a, k-1]_\rho). \end{aligned}$$

- (2) Si  $k$  est un entier tel que  $a < k < b$ , alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{((b-k+1)n, (k-a)n)}^-(Z([a, b]_\rho)) &= Z([k, b]_\rho) \otimes Z([a, k-1]_\rho), \\ \mathbf{r}_{((k-a)n, (b-k+1)n)}^-(L([a, b]_\rho)) &= L([a, k-1]_\rho) \otimes L([k, b]_\rho). \end{aligned}$$

On a aussi la propriété suivante (voir (2.2) pour la définition de  $\Delta^\vee$ ).

PROPOSITION 2.4.

- (1) On a  $Z(\Delta^\vee) \simeq Z(\Delta)^\vee$ .
- (2) On a  $L(\Delta^\vee) \simeq L(\Delta)^\vee$ .

## 2.6.

Dans [21, 16], les théorèmes suivants sont prouvés :

THÉORÈME 2.5 ([24] si  $D = F$ ).

- (1) Soient  $\Delta_1, \dots, \Delta_N$  des segments tels que, pour tous  $i < j$ , le segment  $\Delta_i$  ne précède pas  $\Delta_j$ . Alors :

$$(2.6) \quad Z(\Delta_1) \times \cdots \times Z(\Delta_N)$$

admet une unique sous-représentation irréductible, ne dépendant que du multisegment  $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_N$  et notée  $Z(\mathfrak{m})$ .

Sa multiplicité comme facteur de (2.6) est égale à 1.

- (2) L'application  $\mathfrak{m} \mapsto Z(\mathfrak{m})$  définit une bijection entre multisegments de degré  $m$  et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $G_m$ .

THÉORÈME 2.6.

- (1) Soient  $\Delta_1, \dots, \Delta_N$  des segments tels que, pour tous  $i < j$ , le segment  $\Delta_i$  ne précède pas  $\Delta_j$ . Alors :

$$(2.7) \quad L(\Delta_1) \times \cdots \times L(\Delta_N)$$

admet un unique quotient irréductible, ne dépendant que du multisegment  $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_N$  et noté  $L(\mathfrak{m})$ . Sa multiplicité comme facteur de (2.7) est égale à 1.

- (2) L'application  $\mathfrak{m} \mapsto L(\mathfrak{m})$  définit une bijection entre multisegments de degré  $m$  et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $G_m$ .

Remarque 2.7. — D'après [16, Remarque 5.7], on peut aussi caractériser  $Z(\mathfrak{m})$  comme l'unique quotient irréductible de  $Z(\Delta_N) \times \cdots \times Z(\Delta_1)$  et  $L(\mathfrak{m})$  comme l'unique sous-représentation irréductible de  $L(\Delta_N) \times \cdots \times L(\Delta_1)$ .

## 2.7.

Dans [24, 21] (voir aussi [16, Proposition 5.9]), on prouve le théorème suivant :

PROPOSITION 2.8. — *Soient  $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$  des multisegments et supposons que, si  $i \neq j$ , aucun segment de  $\mathfrak{m}_i$  ne soit lié à un segment de  $\mathfrak{m}_j$ . Alors :*

$$\begin{aligned} Z(\mathfrak{m}_1) \times \cdots \times Z(\mathfrak{m}_r) &\simeq Z(\mathfrak{m}_1 + \cdots + \mathfrak{m}_r), \\ L(\mathfrak{m}_1) \times \cdots \times L(\mathfrak{m}_r) &\simeq L(\mathfrak{m}_1 + \cdots + \mathfrak{m}_r). \end{aligned}$$

## 2.8. L'involution de Zelevinsky

Dans [24], quand  $D = F$ , Zelevinsky définit une involution du groupe de Grothendieck  $\mathcal{G}(G_m)$ . Cette involution envoie les représentations irréductibles vers des représentations irréductibles [1]. Plus précisément, pour tout multisegment  $\mathfrak{m}$ , elle envoie la représentation  $Z(\mathfrak{m})$  vers  $L(\mathfrak{m})$  (et réciproquement  $L(\mathfrak{m})$  vers  $Z(\mathfrak{m})$ ). Dans [18], Mœglin-Waldspurger définissent un algorithme  $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}^t$  qui permet d'expliciter de façon combinatoire cette involution, c'est-à-dire tel que  $Z(\mathfrak{m}^t) = L(\mathfrak{m})$  (et réciproquement  $L(\mathfrak{m}^t) = Z(\mathfrak{m})$ ) pour tout multisegment  $\mathfrak{m}$ . En particulier, si  $\Delta = [a, b]_\rho$  est un segment, on a :

$$\begin{aligned} Z(\Delta) &= L(\mathfrak{m}_0) \\ L(\Delta) &= Z(\mathfrak{m}_0) \end{aligned}$$

avec  $\mathfrak{m}_0$  le multisegment  $[\rho\nu_\rho^a] + \cdots + [\rho\nu_\rho^b]$ . Dans le paragraphe 4.1, on décrit cet algorithme pour des représentations très particulières, appelées représentations en échelle.

D'après [2, 15] ces résultats sont valables pour  $D$  quelconque.

3. Critère pour l'irréductibilité d'une induite  $Z(\mathfrak{m}) \times L(\mathfrak{m}')$ 

Dans cette section, on montre le résultat principal de cet article, Théorème 3.9.

### 3.1. L'induite $Z(\Delta) \times L(\Delta')$

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — Soient  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux segments. L'induite :

$$(3.1) \quad Z(\Delta) \times L(\Delta')$$

est irréductible si, et seulement si,  $\Delta$  et  $\Delta'$  ne sont pas juxtaposés.

Remarque 3.2.

- (1) Dans le cas où  $D = F$ , ce théorème est une conséquence de [19, Lemme I.6.3]. La preuve de ce lemme, beaucoup plus général que le Théorème 3.1, utilise les résultats de Bernstein [9] sur l'irréductibilité de l'induite d'une représentation unitaire.
- (2) Dans [24, 21, 16] les induites  $Z(\Delta) \times Z(\Delta')$  et  $L(\Delta) \times L(\Delta')$  sont étudiées. Ces représentations sont irréductibles si, et seulement si,  $\Delta$  et  $\Delta'$  ne sont pas liés.
- (3) Si  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont juxtaposés, l'induite  $Z(\Delta) \times L(\Delta')$  est réductible et de longueur 2. La preuve de [24, §2] s'adapte au cas où  $D$  est quelconque. Les sous-quotients irréductibles de cette induite sont appelés représentations de Lubin-Tate dans [10].

*Démonstration.* — La preuve suit [17, Proposition 7.26]. Notons  $\pi$  la représentation (3.1). On suppose que  $\Delta$  et  $\Delta'$  ne sont pas juxtaposés et on va montrer que  $\pi$  est irréductible. Soient  $\rho$  et  $\rho'$  deux représentations irréductibles cuspidales et  $a, a', b, b'$  des entiers tels que  $\Delta = [a, b]_\rho$  et  $\Delta' = [a', b']_{\rho'}$ . D'après le paragraphe 2.8 et la Proposition 2.8, on peut supposer que  $\rho = \rho'$  est une représentation cuspidale de  $G_n$  et que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont liés (et non juxtaposés). Quitte à passer à la contragrédiente, par la Proposition 2.4, on peut supposer que  $\Delta$  précède  $\Delta'$ . Enfin, quitte à tordre par un caractère on peut supposer  $a' = 0$ . La preuve se fait par récurrence sur  $\deg(\Delta) + \deg(\Delta')$ . On la divise en quatre cas différents :

- (1) Initialisation de la récurrence :  $\Delta = [-1, 0]_\rho$  et  $\Delta' = [0, 1]_\rho$ .
- (2)  $a \neq a' - 1$ .
- (3)  $b \neq a'$ .
- (4)  $a = a' - 1$ ,  $b = a'$  et  $b' > b + 1$ .

Prouvons d'abord le cas (1). Dans le cas où  $D = F$  la preuve est dans [24, 11.3]. La représentation  $\pi$ , d'après la Proposition 2.3 est un sous module de

$\rho\nu_\rho^{-1} \times \rho \times L(\Delta')$ . Cette représentation est isomorphe, par la Proposition 2.8, à  $\rho\nu_\rho^{-1} \times L(\Delta') \times \rho$ , qui est une sous-représentation de :

$$(3.2) \quad (\rho\nu_\rho^{-1} \times \rho\nu_\rho) \times (\rho \times \rho).$$

On trouve donc que  $\pi$  est une sous-représentation de (3.2). De la même façon, on montre que  $\pi$  est un quotient de :

$$(\rho \times \rho) \times (\rho\nu_\rho^{-1} \times \rho\nu_\rho).$$

Les représentations  $(\rho\nu_\rho^{-1} \times \rho\nu_\rho)$  et  $(\rho \times \rho)$  sont irréductibles par la Proposition 2.8 et satisfont aux conditions du Lemme 1.2. On déduit que  $\pi$  est irréductible.

Montrons maintenant le cas (2). L'induite  $\pi$ , d'après la Proposition 2.3 est un sous module de  $\rho\nu_\rho^a \times Z([a + 1, b]_\rho) \times L(\Delta')$  et un quotient de  $Z([a + 1, b]_\rho) \times \rho\nu_\rho^a \times L(\Delta')$ , qui par hypothèse est isomorphe à  $Z([a + 1, b]_\rho) \times L(\Delta') \times \rho\nu_\rho^a$ . Par hypothèse de récurrence, puisque les segments  $\Delta'$  et  $[a + 1, b]_\rho$  ne sont pas juxtaposés, l'induite  $Z([a + 1, b]_\rho) \times L(\Delta')$  est irréductible. Par le lemme géométrique, la représentation  $\rho\nu_\rho^a \otimes (Z([a + 1, b]_\rho) \times L(\Delta'))$  apparaît avec multiplicité 1 dans :

$$r_{n, (b+b'-a-a'+1)n} (Z([a + 1, b]_\rho) \times L(\Delta') \times \rho\nu_\rho^a).$$

Le théorème découle alors du Lemme 1.2.

La preuve du cas (3) est analogue. La représentation  $\pi$ , d'après la Proposition 2.3 est un sous module de  $Z([a, b - 1]_\rho) \times \rho\nu_\rho^b \times L(\Delta')$  qui est isomorphe à  $Z([a, b - 1]_\rho) \times L(\Delta') \times \rho\nu_\rho^b$ . D'un autre côté,  $\pi$  est aussi un quotient de  $\rho\nu_\rho^b \times Z([a, b - 1]_\rho) \times L(\Delta')$ . Par hypothèse de récurrence, puisque les segments  $\Delta'$  et  $[a, b - 1]_\rho$  ne sont pas juxtaposés (par l'hypothèse  $b \neq a'$ ), l'induite  $Z([a, b - 1]_\rho) \times L(\Delta')$  est irréductible. Le théorème découle du Lemme 1.2 comme ci-dessus.

Prouvons enfin le cas (4). La représentation  $\pi$ , d'après la Proposition 2.3 est un sous module de  $Z(\Delta) \times \rho\nu_\rho^{b'} \times L([a', b' - 1]_\rho)$  qui, par l'hypothèse  $b' > b + 1$ , est isomorphe à  $\nu_\rho^{b'} \times Z(\Delta) \times L([a', b' - 1]_\rho)$ . D'un autre côté, l'induite  $\pi$  est un quotient de  $Z(\Delta) \times L([a', b' - 1]_\rho) \times \nu_\rho^{b'}$ . Par hypothèse de récurrence, puisque les segments  $\Delta$  et  $[a', b' - 1]_\rho$  ne sont pas juxtaposés, l'induite  $Z(\Delta) \times L([a', b' - 1]_\rho)$  est irréductible. Le théorème découle du Lemme 1.2. □

*Remarque 3.3.* — Dans la preuve de l'irréductibilité d'une induite de la forme  $Z(\Delta) \times Z(\Delta')$  ou  $L(\Delta) \times L(\Delta')$ , la différence par rapport à la preuve du Théorème 3.1 est le cas (1) d'initialisation de la récurrence. Dans ce cas,  $Z([-1, 0]_\rho) \times Z([0, 1]_\rho)$  et  $L([-1, 0]_\rho) \times L([0, 1]_\rho)$  ne sont pas irréductibles.

**3.2. L'induite  $Z(\Delta) \times L(\mathfrak{m}')$**

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

**THÉORÈME 3.4.** — Soient  $\Delta$  un segment et  $\mathfrak{m}' = \Delta'_1 + \dots + \Delta'_{N'}$  un multisegment. Supposons que pour tout  $1 \leq i \leq N'$ ,  $\Delta$  et  $\Delta'_i$  ne sont pas juxtaposés. Alors, l'induite :

$$(3.3) \quad Z(\Delta) \times L(\mathfrak{m}')$$

est irréductible.

*Démonstration.* — Soient  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale et  $a, b$  des entiers tels que  $\Delta = [a, b]_\rho$ . Soit  $\mathfrak{m}_1 = \Delta'_1 + \dots + \Delta'_{N'} + [\rho\nu_\rho^a] + \dots + [\rho\nu_\rho^b]$ . On va montrer que  $L(\mathfrak{m}_1)$  est l'unique sous-représentation irréductible de (3.3) et son unique quotient irréductible. Comme il apparaît avec multiplicité 1 dans (3.3), cela achèvera la preuve de la proposition.

Supposons que  $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{N'})$  est une forme rangée de  $\mathfrak{m}'$ . Pour tout  $a \leq c \leq b$ , soit  $i_c \in \{1, \dots, N'\}$  le plus petit entier  $k$  tel que  $a(\Delta'_k) > c$ , si un tel entier existe. Sinon, on pose  $i_c = N' + 1$  et on fait la convention  $L(\Delta_{N'+1})$  est la représentation de dimension 1 du groupe trivial.

Alors  $Z([a, b]_\rho) \times L(\mathfrak{m}')$  est un quotient de :

$$Z([a, b]_\rho) \times L(\Delta'_1) \times \dots \times L(\Delta'_{N'}).$$

Puisque pour tout  $1 \leq i \leq N'$ ,  $[a, b]_\rho$  et  $\Delta'_i$  ne sont pas juxtaposés, cette dernière représentation est un quotient de :

$$(3.4) \quad L(\Delta'_1) \times \dots \times L(\Delta'_{i_a-1}) \times Z([a+1, b]_\rho) \times \rho\nu_\rho^a \times L(\Delta'_{i_a}) \times \dots \times L(\Delta'_{N'}).$$

Remarquons que pour tout  $1 \leq i \leq i_a - 1$ ,  $[a+1, b]_\rho$  et  $\Delta'_i$  ne sont pas juxtaposés, et que pour tout  $i_a \leq j \leq N'$ ,  $[a, a]_\rho$  ne précède pas  $\Delta'_j$ . Ainsi, la représentation (3.4), est un quotient de :

$$L(\Delta'_1) \times \dots \times L(\Delta'_{i_{a+1}-1}) \times Z([a+2, b]_\rho) \times \rho\nu_\rho^{a+1} \times L(\Delta'_{i_{a+1}}) \times \dots \times \\ \times L(\Delta'_{i_a-1}) \times \rho\nu_\rho^a \times L(\Delta'_{i_a}) \times \dots \times L(\Delta'_{N'}).$$

En répétant ce procédé, on trouve qu'il existe  $(\delta_1, \dots, \delta_{N'+b-a+1})$  une forme rangée du multisegment  $\mathfrak{m}_1$  telle que (3.3) soit un quotient de  $L(\delta_1) \times \dots \times L(\delta_{N'+b-a+1})$  et donc, par le Théorème 2.6,  $L(\mathfrak{m}_1)$  est l'unique quotient irréductible de (3.3) et il y apparaît avec multiplicité 1. On prouve de la même façon que (3.3) est une sous-représentation de  $L(\delta_{N'+b-a+1}) \times \dots \times L(\delta_1)$  et donc, par la remarque 2.7,  $L(\mathfrak{m}_1)$  est aussi l'unique sous-représentation irréductible de (3.3). On déduit que (3.3) est irréductible. □

Le théorème suivant se montre de la même façon (on peut aussi utiliser l'involution de Zelevinsky qui envoie une représentation irréductible vers une représentation irréductible [1]).

**THÉOREME 3.5.** — Soient  $\Delta$  un segment et  $\mathfrak{m}' = \Delta'_1 + \dots + \Delta'_{N'}$  un multisegment. Supposons que pour tout  $1 \leq i \leq N'$ ,  $\Delta$  et  $\Delta'_i$  ne sont pas juxtaposés. Alors, l'induite :

$$L(\Delta) \times Z(\mathfrak{m}')$$

est irréductible.

Dans [15, Théorème 5.1], on prouve le lemme suivant :

**LEMME 3.6.** — Soient  $\pi$  une représentation irréductible de  $G_m$ , et  $\Delta$  un segment. Alors la représentation induite  $Z(\Delta) \times \pi$  (resp.  $\pi \times Z(\Delta)$ ) possède une unique sous-représentation irréductible et un unique quotient irréductible. Ils apparaissent avec multiplicité 1 dans  $[Z(\Delta) \times \pi]$ .

Nous aurons besoin du résultat supplémentaire suivant, dont la preuve suit les lignes de [15, Théorème 5.1].

**LEMME 3.7.** — Soit  $\pi$  une représentation irréductible et soit  $\Delta$  un segment. L'unique sous-représentation irréductible de  $Z(\Delta) \times \pi$  est isomorphe à l'unique quotient irréductible de  $\pi \times Z(\Delta)$ .

*Remarque 3.8.* — Dans le cas où  $D = F$ , la preuve de ce lemme découle facilement d'un résultat de Gelfand et Kazhdan qui dit que, pour toute représentation irréductible  $\pi$  de  $GL_n(F)$ , la représentation  $g \mapsto \pi({}^t g^{-1})$  est isomorphe à la contragrédiente de  $\pi$ , où  ${}^t g$  désigne la transposée de  $g \in GL_n(F)$ . Pourtant cette preuve ne peut s'étendre telle quelle au cas où  $D$  est différente de  $F$  car la transposée d'une matrice inversible de  $M_m(D)$  n'est pas toujours inversible.

*Démonstration.* — La preuve se fait par récurrence sur la longueur de  $\Delta$ . Si  $l(\Delta) = 1$ , alors le lemme est prouvé dans [15, Théorème 7.5]. Supposons donc  $l(\Delta) = l > 1$  et le résultat montré pour des segments de longueur strictement inférieure à  $l$ . Quitte à tordre par un caractère on peut supposer  $\Delta = [0, b]_\rho$ . Soit  $r \geq 0$  un entier maximal tel qu'il existe une représentation irréductible  $\pi'$  avec  $\pi$  une sous-représentation de  $\rho^{\times r} \times \pi'$  où on note :

$$\rho^{\times r} := \underbrace{\rho \times \rho \times \dots \times \rho}_{r \text{ fois}}$$

D'après [14, Corollaire 1.2],  $\pi$  est alors un quotient de  $\pi' \times \rho^{\times r}$ .



Dans [15, Théorème 5.1], on montre qu'il existe un couple d'entiers  $(n_1, n_2)$  de somme  $(b - a - r)n + m$  et deux représentations irréductibles  $\tau_i \in \text{Irr}(G_{n_i})$ ,  $i = 1, 2$  telles que  $Z([1, b]_\rho) \times \pi'$  est une sous-représentation de  $\tau_1 \times \tau_2$  et  $\tau_1 \otimes \tau_2$  apparaît avec multiplicité 1 dans  $\mathfrak{r}_{(n_1, n_2)}(Z([1, b]_\rho) \times \pi')$ . Alors,  $\rho^{\times(r+1)} \times Z([1, b]_\rho) \times \pi'$  est une sous-représentation de  $\rho^{\times(r+1)} \times \tau_1 \times \tau_2$  et, par construction et le lemme géométrique,  $\rho^{\times(r+1)} \otimes \tau_1 \otimes \tau_2$  apparaît avec multiplicité 1 dans :

$$\mathfrak{r}_{((r+1)n, n_1, n_2)} \left( \rho^{\times(r+1)} \times Z([1, b]_\rho) \times \pi' \right).$$

On déduit du Lemme 1.1 que les induites :

$$(3.5) \quad \rho^{\times(r+1)} \times Z([1, b]_\rho) \times \pi'$$

$$(3.6) \quad \pi' \times Z([1, b]_\rho) \times \rho^{\times(r+1)}$$

possèdent respectivement une unique sous-représentation irréductible et un unique quotient irréductible et ils apparaissent avec multiplicité 1 dans les induites respectives. De plus,  $Z(\Delta) \times \pi$  est une sous-représentation de (3.5) et  $\pi \times Z(\Delta)$  est un quotient de (3.6). Soit  $\pi_1$  l'unique sous-représentation irréductible de  $Z([1, b]_\rho) \times \pi'$ . Par hypothèse de récurrence, elle est isomorphe à l'unique quotient irréductible de  $\pi' \times Z([1, b]_\rho)$ . On déduit que l'unique sous-représentation irréductible de  $Z(\Delta) \times \pi$  est une sous-représentation de  $\rho^{\times(r+1)} \times \pi_1$  et l'unique quotient irréductible de  $\pi \times Z(\Delta)$  est un quotient de  $\pi_1 \times \rho^{\times(r+1)}$ . On conclut grâce à [14, Corollaire 1.2].  $\square$

### 3.3. L'induite $Z(\mathfrak{m}) \times L(\mathfrak{m}')$

Dans ce paragraphe, on montre le théorème suivant :

**THÉORÈME 3.9.** — Soient  $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_N$  et  $\mathfrak{m}' = \Delta'_1 + \cdots + \Delta'_{N'}$ , deux multisegments. Supposons que pour tous  $1 \leq i \leq N$ ,  $1 \leq j \leq N'$ ,  $\Delta_i$  et  $\Delta'_j$  ne sont pas juxtaposés. Alors, l'induite :

$$(3.7) \quad Z(\mathfrak{m}) \times L(\mathfrak{m}')$$

est irréductible.

*Démonstration.* — La preuve se fait par récurrence sur  $N$ , le cas  $N = 1$  étant traité au Théorème 3.4. Supposons donc  $N \geq 2$  et le théorème vrai pour  $i < N$ . On identifie  $\mathfrak{m}$  à sa forme rangée  $(\Delta_1, \dots, \Delta_N)$ . L'induite (3.7) est une sous-représentation de :

$$(3.8) \quad Z(\Delta_1) \times Z(\Delta_2 + \cdots + \Delta_N) \times L(\mathfrak{m}').$$

Par hypothèse de récurrence  $Z(\Delta_2 + \dots + \Delta_N) \times L(\mathfrak{m}')$  est irréductible donc, par le Lemme 3.6, la représentation (3.8) possède une unique sous-représentation irréductible  $\pi$  qui apparaît avec multiplicité 1 dans l'induite. On déduit que  $\pi$  est l'unique sous-représentation irréductible de (3.7) et qu'elle apparaît avec multiplicité 1 dans  $[Z(\mathfrak{m}) \times L(\mathfrak{m}')$ .

De même, (3.7) est un quotient de :

$$(3.9) \quad Z(\Delta_2 + \dots + \Delta_N) \times Z(\Delta_1) \times L(\mathfrak{m}')$$

Cette représentation, par le Théorème 3.4, est isomorphe à l'induite :

$$(3.10) \quad Z(\Delta_2 + \dots + \Delta_N) \times L(\mathfrak{m}') \times Z(\Delta_1).$$

Par hypothèse de récurrence  $Z(\Delta_2 + \dots + \Delta_N) \times L(\mathfrak{m}')$  est irréductible donc, par le Lemme 3.6, la représentation (3.10) possède une unique quotient irréductible  $\pi'$  qui apparaît avec multiplicité 1 dans l'induite. On déduit que  $\pi'$  est l'unique quotient irréductible de (3.7) et qu'il apparaît avec multiplicité 1 dans  $[Z(\mathfrak{m}) \times L(\mathfrak{m}')$ . D'après le Lemme 3.7,  $\pi \simeq \pi'$  et donc (3.7) est irréductible. □

*Remarque 3.10.* — Étant données deux représentations irréductibles  $\pi_1$  et  $\pi_2$  on obtient ainsi un critère très pratique pour montrer que l'induite  $\pi_1 \times \pi_2$  est irréductible. D'après les Théorèmes 2.5 et 2.6, il existe des multisegments  $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1^t, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2^t$  tels que :

$$\pi_1 \simeq Z(\mathfrak{m}_1) \simeq L(\mathfrak{m}_1^t) \quad \text{et} \quad \pi_2 \simeq Z(\mathfrak{m}_2) \simeq L(\mathfrak{m}_2^t).$$

L'induite  $\pi_1 \times \pi_2$  est irréductible si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- (1) Pour tous segments  $\Delta$  de  $\mathfrak{m}_1$  et  $\Delta'$  de  $\mathfrak{m}_2^t$ ,  $\Delta$  et  $\Delta'$  ne sont pas juxtaposés.
- (2) Pour tous segments  $\Delta$  de  $\mathfrak{m}_1^t$  et  $\Delta'$  de  $\mathfrak{m}_2$ ,  $\Delta$  et  $\Delta'$  ne sont pas juxtaposés.

Ces conditions, bien sûr, ne sont pas équivalentes : par exemple, si  $\mathfrak{m}_1 = [0, 0]_\rho$  et  $\mathfrak{m}_2 = [0, 0]_\rho + [1, 1]_\rho$ .

*Remarque 3.11.* — Le critère n'est pas nécessaire. Un contre-exemple est  $\mathfrak{m} = [0, 0]_\rho$  et  $\mathfrak{m}' = [0, 1]_\rho + [1, 2]_\rho$ . Les induites  $Z(\mathfrak{m}) \times L(\mathfrak{m}')$  et  $L(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{m}')$  sont irréductibles d'après [15, Théorème 7.4].

## 4. Quelques applications

Dans cette section, on donne quelques applications du Théorème 3.9. On fixe un entier  $n \geq 1$  et une représentation cuspidale  $\rho$  de  $G_n$ . On ne considérera dans cette section que de représentations et de multisegments dont le support est inclus dans la droite  $\mathbb{Z}_\rho$ . Ainsi, pour simplifier les notations, si  $\Delta = [a, b]_\rho$  est un segment, on omet le sous-indice  $\rho$  et on notera simplement  $\Delta = [a, b]$ . On notera aussi  $a([a, b]) = a$  et  $b([a, b]) = b$  les extrémités de  $[a, b]$ .

Si  $\mathbf{m} = [a_1, b_1] + \cdots + [a_N, b_N]$  est un multisegment, on notera :

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(\mathbf{m}) &= \{a_1, \dots, a_N\} \\ \mathfrak{C}(\mathbf{m}) &= \{b_1, \dots, b_N\}\end{aligned}$$

les ensembles des extrémités des segments de  $\mathbf{m}$ .

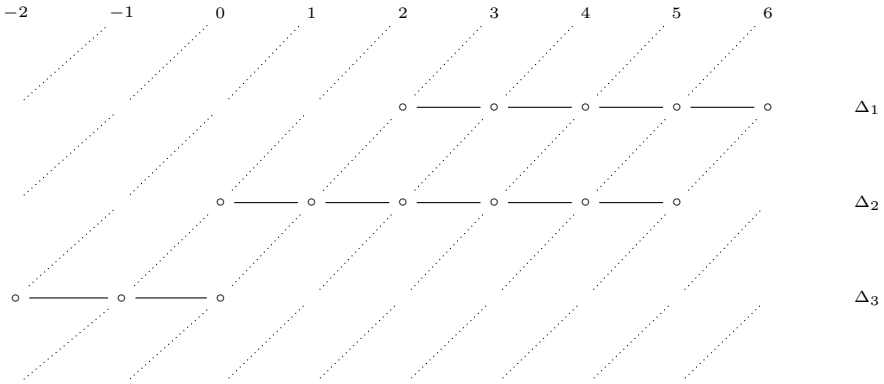
### 4.1. Représentations en échelle

Dans [13], on introduit les représentations en échelle. Une suite de segments  $([a_1, b_1], \dots, [a_N, b_N])$  est dite *en échelle* si  $a_1 > \cdots > a_N$  et  $b_1 > \cdots > b_N$ . Un multisegment est dit en échelle si l'une de ses formes rangées est en échelle. Dans cette section, on identifiera un multisegment  $\mathbf{m}$  en échelle avec l'unique suite  $([a_1, b_1], \dots, [a_N, b_N])$  telle que  $a_1 > \cdots > a_N$  et  $b_1 > \cdots > b_N$ , et  $\mathbf{m} = [a_1, b_1] + \cdots + [a_N, b_N]$ . Remarquons que le multisegment  $\mathbf{m}$  est déterminé par la donnée de  $\mathfrak{B}(\mathbf{m})$  et  $\mathfrak{C}(\mathbf{m})$ .

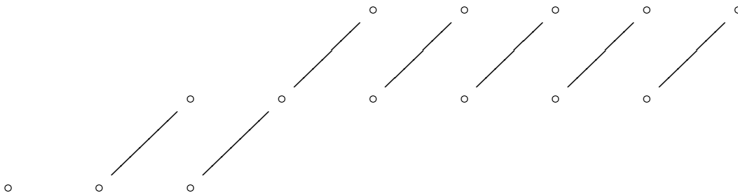
Une représentation  $\pi$  est dite *en échelle*, si  $\pi = L(\mathbf{m})$  avec  $\mathbf{m}$  un multisegment en échelle. Les représentations en échelle généralisent à la fois la notion de représentation elliptique et de représentation de Speh. (Rappelons qu'une représentation irréductible  $\pi$  est dite elliptique si le caractère  $\chi_\pi$  de  $\pi$  n'est pas identiquement nul sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers; il est facile de voir qu'une représentation  $\pi$  est elliptique si et seulement si elle a le même support cuspidal qu'une représentation essentiellement de carré intégrable, si et seulement si son support cuspidal est un segment; en particulier, une représentation elliptique est en échelle.)

La description combinatoire de l'involution de Zelevinsky  $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}^t$  (voir 2.8) est particulièrement simple dans ce cas, comme il est expliqué dans [13]. Étant donné un multisegment en échelle  $\mathbf{m} = ([a_1, b_1], \dots, [a_N, b_N])$ , le multisegment dual  $\mathbf{m}^t = (\Delta'_1, \dots, \Delta'_{N'})$  est tel que  $N' = b_1 - a_N - N + 2$  et  $j \in \Delta'_i$  si et seulement si  $j \in \Delta_{b_1 - i - j + 2}$ .

Exemple 4.1. — Supposons  $\mathbf{m} = [2, 6] + [0, 5] + [-2, 0]$ . On écrit les segments comme suit :



L'involution consiste à faire l'intersection avec les diagonales :



de sorte que le multisegment dual de  $\mathbf{m}$  est le multisegment  $\mathbf{m}^t = [5, 6] + [4, 5] + [3, 4] + [2, 3] + [0, 2] + [-1, 0] + [-2, -2]$ .

L'ensemble des représentations en échelle est stable sous l'involution de Zelevinsky. Le lemme suivant découle directement de l'algorithme :

LEMME 4.2. — Soit  $\mathbf{m} = (\Delta_1, \dots, \Delta_N)$  un multisegment en échelle et soit  $\mathbf{m}^t$  le multisegment dual de  $\mathbf{m}$ . Soit  $k$  un entier. Alors :

- (1)  $k \in \mathfrak{B}(\mathbf{m}^t)$  si et seulement s'il existe  $1 \leq j \leq N$  tel que  $k \in \Delta_j$  et  $k - 1 \notin \Delta_{j+1}$ .
- (2)  $k \in \mathfrak{E}(\mathbf{m}^t)$  si et seulement s'il existe  $1 \leq j \leq N$  tel que  $k \in \Delta_j$  et  $k + 1 \notin \Delta_{j-1}$ ,

(avec la convention  $\Delta_0 = \Delta_{N+1} = \emptyset$ ), c'est-à-dire :

$$\mathfrak{B}(\mathbf{m}^t) = \bigcup_{1 \leq i \leq N} \Delta_i \setminus (\mathfrak{E}(\mathbf{m}) + 1),$$

$$\mathfrak{E}(\mathbf{m}^t) = \bigcup_{1 \leq i \leq N} \Delta_i \setminus (\mathfrak{B}(\mathbf{m}) - 1).$$

*Démonstration.* — Notons  $\mathbf{m} = ([a_1, b_1], \dots, [a_N, b_N])$  et son dual  $\mathbf{m}^t = ([a'_1, b'_1], \dots, [a'_{N'}, b'_{N'}])$ . Soit  $1 \leq i \leq N'$ . Alors,  $a'_i = k$  si et seulement si  $k \in \Delta_{b_1-i-k+2}$  et  $k-1 \notin \Delta_{b_1-i-k+3}$  et  $b'_i = k$  si et seulement si  $k \in \Delta_{b_1-i-k+2}$  et  $k+1 \notin \Delta_{b_1-i-k+1}$ .  $\square$

On déduit du Théorème 3.9 :

PROPOSITION 4.3. — Soit  $\mathbf{m}_1$  un multisegment en échelle et soit  $\mathbf{m}_2$  un autre multisegment tel que  $\mathfrak{B}(\mathbf{m}_2) \subset \mathfrak{B}(\mathbf{m}_1)$  et  $\mathfrak{E}(\mathbf{m}_2) \subset \mathfrak{E}(\mathbf{m}_1)$ . Alors, les induites  $Z(\mathbf{m}_1) \times Z(\mathbf{m}_2)$  et  $L(\mathbf{m}_1) \times L(\mathbf{m}_2)$  sont irréductibles.

En particulier, on trouve :

COROLLAIRE 4.4. — Soit  $\mathbf{m}_1 = \Delta_1 + \dots + \Delta_N$  un multisegment en échelle. Soient  $I$  un sous-ensemble de  $\{1, 2, \dots, N\}$  et  $\mathbf{m}_2 = \sum_{i \in I} \Delta_i$ . Alors, les induites  $Z(\mathbf{m}_1) \times Z(\mathbf{m}_2)$  et  $L(\mathbf{m}_1) \times L(\mathbf{m}_2)$  sont irréductibles.

Exemple 4.5. — Soit  $\mathbf{m} = ([a_1, b_1], \dots, [a_N, b_N])$  un multisegment en échelle. Posons

$$\begin{aligned} \pi &= L(\Delta_1, \dots, \Delta_{N-1}) \times L(\Delta_2, \dots, \Delta_N), \\ \pi_1 &= L(\Delta_1, \dots, \Delta_N) \times L(\Delta_2, \dots, \Delta_{N-1}), \\ \pi_2 &= L([a_1, b_2], \dots, [a_{N-1}, b_N]) \times L([a_2, b_1], \dots, [a_N, b_{N-1}]). \end{aligned}$$

Dans [13] on montre que, dans le groupe de Grothendieck  $\pi = \pi_1 + \pi_2$  ( $\pi_2$  peut être éventuellement 0), et on conjecture que  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont irréductibles (ou nulles). On peut prouver maintenant cette conjecture. En effet, la représentation  $\pi_1$  est irréductible d'après le Corollaire 4.4.

Supposons que  $\pi_2 \neq 0$  et montrons qu'elle est irréductible. Notons  $\mathbf{m}' = (\Delta'_1, \dots, \Delta'_{N'})$  le multisegment dual de  $([a_1, b_2], \dots, [a_{N-1}, b_N])$ . Par le Lemme 4.2, pour tout  $1 \leq i \leq N'$ ,  $a(\Delta'_i) - 1 \notin \{b_2, \dots, b_N\}$  et  $b(\Delta'_i) + 1 \notin \{a_1, \dots, a_{N-1}\}$ . Remarquons que  $b_1 + 1$  et  $a_N - 1$  ne sont pas dans le support de  $\mathbf{m}'$ , donc en fait pour tout  $1 \leq i \leq N'$ ,  $a(\Delta'_i) - 1 \notin \{b_1, \dots, b_N\}$  et  $b(\Delta'_i) + 1 \notin \{a_1, \dots, a_N\}$ . La représentation  $\pi_2$  est alors irréductible d'après le Théorème 3.9.

En fait,  $\pi_1$  est l'unique quotient irréductible de  $\pi$  (et donc la représentation  $\pi_2$ , si elle est non nulle, est son unique sous-représentation irréductible). En effet,  $\pi$  est un quotient de :

$$(4.1) \quad L(\Delta_1) \times L(\Delta_2, \dots, \Delta_{N-1}) \times L(\Delta_2, \dots, \Delta_{N-1}) \times L(\Delta_N).$$

La représentation (4.1) est isomorphe, par le Corollaire 4.4, à :

$$L(\Delta_1) \times L(\Delta_2, \dots, \Delta_{N-1}, \Delta_2, \dots, \Delta_{N-1}) \times L(\Delta_N).$$

Et cette dernière représentation est un quotient de :

$$(4.2) \quad L(\Delta_1) \times L(\Delta_2) \times L(\Delta_2) \times \cdots \times L(\Delta_{N-1}) \times L(\Delta_{N-1}) \times L(\Delta_N).$$

La représentation (4.2) possède  $\pi_1 = L(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_2, \dots, \Delta_{N-1}, \Delta_{N-1}, \Delta_N)$  comme unique quotient irréductible ce qui prouve notre assertion.

### 4.2. Une autre approche

Il existe une autre approche qui permet de démontrer des résultats d'irréductibilité, utilisée dans [3], et basée sur l'algorithme ([18, 2, 15]) de Moeglin-Waldspurger (noté dans la suite MW) et la relation d'ordre entre les multisegments. Cette relation d'ordre partielle entre multisegments d'un même support ([24, 21]) est telle que, si  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{m}'$  sont deux multisegments, alors dans le groupe de Grothendieck on a :

$$(*) \quad L(\mathbf{m}) \times L(\mathbf{m}') = L(\mathbf{m} + \mathbf{m}') + \sum_{\mathbf{m}'' < \mathbf{m} + \mathbf{m}'} a_{\mathbf{m}''} L(\mathbf{m}'')$$

où  $a_{\mathbf{m}''} \in \mathbb{N}$ . De plus,  $\mathbf{m}''$  est obtenu de  $\mathbf{m} + \mathbf{m}'$  par des opérations élémentaires au sens de Zelevinsky. Une opération élémentaire consiste à remplacer deux segments liés par leur intersection et leur réunion. De ce fait, si  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  sont deux multisegments tels que  $\mathbf{m}_1 \leq \mathbf{m}_2$ , alors tout segment de  $\mathbf{m}_2$  est inclus dans un segment de  $\mathbf{m}_1$ . Aussi, le multi-ensemble des fins (respectivement débuts) des segments de  $\mathbf{m}_1$  est inclus dans le multi-ensemble des fins (respectivement débuts) des segments de  $\mathbf{m}_2$ . Si  $\pi, \pi'$  sont des représentations irréductibles, si  $\pi = L(\mathbf{m})$  et  $\pi' = L(\mathbf{m}')$ , on pose  $\pi \leq \pi'$  si  $\mathbf{m} \leq \mathbf{m}'$ . Notons ici  $\iota$  l'involution de Zelevinsky. On a donc, si  $\pi = L(\mathbf{m})$  est irréductible, alors  $\iota(\pi) = L(\mathbf{m}^t)$ .

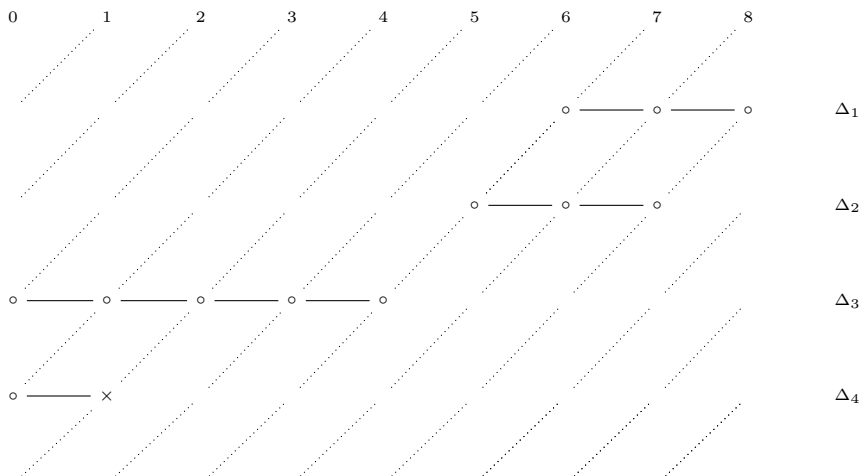
Voici une preuve d'un cas particulier de la Proposition 4.3.

PROPOSITION 4.6.

- (a) Si  $\pi$  est en échelle et  $\pi' < \pi$ , alors on ne peut pas avoir  $\iota(\pi') < \iota(\pi)$ .
- (b) Si  $\pi$  est en échelle, alors  $\pi \times \pi$  est irréductible.

*Démonstration.* — (a) Soit  $\pi = L(\Delta_1, \dots, \Delta_k)$  où  $\Delta_i = [a_i, b_i]_\rho$ , et  $(a_i)$  et  $(b_i)$  sont deux suites strictement décroissantes. Alors  $\pi' = L(\Delta'_1, \dots, \Delta'_k)$  où  $\Delta'_i = [a_{\sigma(i)}, b_i]_\rho$ ,  $\sigma$  une permutation *non triviale* de  $\{1, 2, \dots, k\}$ , telle que  $a_{\sigma(i)} \leq b_i + 1$ . Soit  $i_0$  le plus petit indice tel que  $\sigma(i_0) > \sigma(i_0 - 1)$ . Le dessin plus bas représente les premiers segments de  $\pi$  (où commencent  $\Delta_3$  et  $\Delta_4$  à gauche n'a pas d'importance), et pour suivre le raisonnement général plus bas sur ce dessin particulier le lecteur pourra supposer que  $i_0 = 4$

(i.e.  $\Delta'_4 \subset \Delta'_3$ ). On a marqué par une croix sur le dessin le point qui fournit l'argument. Chaque diagonale qui intersecte les segments définit un segment de  $\iota(\pi)$ .



La première diagonale (de droite à gauche) qui intersecte  $\Delta_{i_0}$  (diagonale qui part de 5 sur le dessin) définit un segment  $S$  de  $\iota(\pi)$  ( $S$  est le segment de  $\iota(\pi)$  qui contient  $b_{i_0}$  et qui finit le plus à droite). Montrons que  $\iota(\pi')$  n'a aucun segment qui contient  $S$ , car ceci prouve que  $\iota(\pi')$  n'est pas inférieur à  $\iota(\pi)$ . Dans un premier temps supposons que :

(xxx) les segments qui sont strictement à droite de cette diagonale (sur notre dessin  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ ) n'ont pas changé entre  $\pi$  et  $\pi'$ .

(On montrera après, que cela est une conséquence immédiate de la minimalité de  $i_0$ ).

Le premier segment (dans l'ordre de l'algorithme) de  $\iota(\pi')$  qui pourrait contenir  $b_{i_0}$  est celui défini par la (même) diagonale qui part de 5. Jusqu'à  $i_0$ , cette diagonale intersecte les mêmes segments pour  $\pi'$  que pour  $\pi$  (par (xxx)), et chacun de ces segments est lié au précédent (par minimalité de  $i_0$ ), mais le segment de  $\iota(\pi')$  ainsi construit s'arrête à  $b_{i_0} + 1$  parce que  $\Delta'_{i_0} \subset \Delta'_{i_0-1}$ . Donc le segment ainsi construit de  $\iota(\pi')$  ne peut pas contenir  $S$  car il ne contient pas  $b_{i_0}$ . Mais les segments qui suivent ne contiennent pas la fin de  $S$  (utilise (xxx)) et donc  $S$  n'est inclus dans aucun segment de  $\iota(\pi')$ . D'où notre résultat.

Pour démontrer (xxx), montrons que, si  $r$  est le plus grand entier tel que  $a_1, a_2, \dots, a_r \geq b_{i_0} + 2$ , alors  $\sigma(i) = i$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ . En effet, si  $j$  serait le plus petit indice entre 1 et  $r$  tel que  $\sigma(j) \neq j$ , alors  $a_{\sigma(j)} < a_j$  et le segment de  $\pi'$  qui commence en  $a_j$  serait inclus dans  $\Delta'_j$ . Son indice

étant strictement supérieur à  $j$  et strictement inférieur à  $i_0$ , on obtient une contradiction.

(b) Posons  $\pi = L(\mathbf{m}_0)$ ,  $\mathbf{m}_0 = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k\}$ . On écrit

$$\pi \times \pi = L(\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_0) + \sum_{\mathbf{m} < \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_0} a_{\mathbf{m}} L(\mathbf{m}),$$

où  $a_m \in \mathbb{N}$ , et en prenant la duale :

$$\iota(\pi) \times \iota(\pi) = L(\mathbf{m}_0^t + \mathbf{m}_0^t) + \sum_{\mathbf{m} < \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_0} a_{\mathbf{m}} L(\mathbf{m}^t),$$

où on a utilisé l'algorithme MW pour vérifier que  $(\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_0)^t = \mathbf{m}_0^t + \mathbf{m}_0^t$ . Par (\*) on a que pour tout  $a_m \neq 0$ ,  $\mathbf{m}^t < \mathbf{m}_0^t + \mathbf{m}_0^t$ . Pour montrer que  $\pi \times \pi$  est irréductible il suffit de montrer que les  $a_m$  sont tous nuls; il suffit donc de montrer que, si  $\mathbf{m} < \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_0$ , on ne peut pas avoir aussi que  $\mathbf{m}^t < \mathbf{m}_0^t + \mathbf{m}_0^t$ . La preuve de ce fait est exactement pareille à celle du point (a).  $\square$

Remarquons que la même preuve permet de montrer que  $\pi \times \pi \times \dots \times \pi$  est irréductible en général. Mais il semble compliqué d'obtenir par cette méthode un résultat aussi général que le Corollaire 4.4.

### 4.3. Représentations de Speh

Les représentations de Speh sont un cas particulièrement intéressant de représentations en échelle. Elles sont associées à des multisegments  $\mathbf{m} = ([a_1, b_1], \dots, [a_N, b_N])$  tels que  $a_i = a_{i-1} + 1$  et  $b_i = b_{i-1} + 1$ , pour tout  $1 < i \leq N$ . Ces représentations permettent de paramétrer le dual unitaire de  $G_n$ . Un cas particulier du Corollaire 4.4 permet de redémontrer un résultat connu, mais non trivial, appelé "énoncé U" dans [7], qui permet de montrer que le produit de deux représentations de Speh est irréductible.

**COROLLAIRE 4.7.** — *Soit  $\mathbf{m}_1 = \Delta_1 + \dots + \Delta_N$  un multisegment tel que  $a_i = a_{i-1} + 1$  et  $b_i = b_{i-1} + 1$ , pour tout  $1 < i \leq N$ . Soit  $\mathbf{m}_2 = \Delta_2 + \dots + \Delta_{N-1}$ . Alors les induites  $Z(\mathbf{m}_1) \times Z(\mathbf{m}_2)$  et  $L(\mathbf{m}_1) \times L(\mathbf{m}_2)$  sont irréductibles.*

### 4.4. Quelques remarques et conséquences

Soit  $G' := GL_n(D)$  une forme intérieure de  $G := GL_{nd}(F)$ , où  $D$  est une algèbre à division centrale de dimension  $d^2$  sur  $F$ . Si  $g \in G$  et  $g' \in G'$ , on dit que  $g'$  correspond à  $g$  si les polynômes caractéristiques de  $g$  et  $g'$  sont



égaux et, de plus, ont des racines simples dans une clôture algébrique de  $F$ . Si  $\pi, \pi'$  sont des éléments des groupes de Grothendieck des représentations de  $G$  et de  $G'$  respectivement, on dit que  $\pi'$  est le transfert (de Jacquet-Langlands) de  $\pi$  si on a la relation  $\chi_\pi(g) = \chi_{\pi'}(g')$  pour tous éléments  $g \in G$  et  $g' \in G'$  qui se correspondent, où  $\chi_\pi$  est le caractère fonction de la représentation  $\pi$  et  $\chi_{\pi'}$  est le caractère fonction de la représentation  $\pi'$ .

Soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$ . On sait qu'il existe un unique élément  $LJ(\pi)$  du groupe de Grothendieck des représentations de  $G'$  tel que  $LJ(\pi)$  soit le transfert de  $\pi$  ([5]), et qu'on a, de plus,  $LJ(\pi_1 \times \pi_2) = LJ(\pi_1) \times LJ(\pi_2)$ . Se pose la question : est-ce que  $LJ(\pi)$  est une représentation irréductible de  $G'$ ? Il devient vite clair que la bonne question est plutôt : est-ce que  $LJ(\pi)$  est toujours soit nulle, soit une représentation irréductible de  $G'$  à un signe près? La réponse à cette question n'est pas connue en général (mais on donnera ici une réponse positive précise dans le cas des représentations en échelle). On sait que c'est le cas si  $\pi$  est essentiellement de carré intégrable ([12] - c'est d'ailleurs ce résultat qui permet d'envisager la suite). Alors  $LJ(\pi) = (-1)^{nd-n}\pi'$  où  $\pi'$  est une représentation essentiellement de carré intégrable de  $G'$ . Par la suite, pour les représentations essentiellement de carré intégrable  $\pi$  comme plus haut, on pose  $\pi' = C(\pi)$  pour respecter la notation de [12]. On sait, plus généralement, quand  $\pi$  est unitaire, que  $LJ(\pi)$  est soit nul, soit une représentation irréductible ([23], [6]) au signe près. On sait également transférer les représentations elliptiques ([5]) : si  $\pi$  est une représentation irréductible elliptique de  $G$ , alors  $LJ(\pi)$  est une représentation irréductible elliptique de  $G'$  au signe près.

La formule (dite des caractères) démontrée dans [13], qui généralise les résultats de [22] et [11], permet de comprendre le transfert des représentations en échelle. Soit en effet  $\pi = L(\mathbf{m}) \in \text{Irr}(G_{nd})$ , où  $\mathbf{m} = ([a_1, b_1]_\rho, \dots, [a_k, b_k]_\rho)$ , avec  $\rho$  une représentation cuspidale d'un  $GL_p(F)$ . Soit  $s$  le plus petit entier tel que  $d$  divise  $sp$ . On sait alors que, si  $\Delta$  est un segment de longueur  $s$  inclus dans  $\mathbb{Z}_\rho$  alors  $\rho' := C(L(\Delta))$  est bien définie et c'est une représentation cuspidale de  $GL_{\frac{sp}{d}}(D)$ . De plus,  $\nu_{\rho'} = \nu^s$ . Plus généralement, si  $\Delta = [a, b]_\rho$ , et  $s$  divise  $b - a + 1$ , alors  $C(L(\Delta)) = L(\Delta')$ , où  $\Delta' = [a', b']_{\rho'}$ , avec  $a' = \frac{a + \frac{s-1}{2}}{s}$  et  $b' = \frac{b - \frac{s-1}{2}}{s}$ . Revenons maintenant à notre représentation en échelle  $\pi$ . Pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ , soit  $B_j = \{b_1^j, b_2^j, \dots, b_{l_j}^j\}$  l'ensemble ordonné en ordre décroissant des  $b_i$  qui sont congrus à  $j$  modulo  $s$ . Soit  $A_j = \{a_1^j, a_2^j, \dots, a_{k_j}^j\}$  l'ensemble ordonné en ordre décroissant des  $a_i$  qui sont congrus à  $j + 1$  modulo  $s$ . Il existe une permutation  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, k\}$  telle que, pour tout  $i$ ,  $s$  divise la longueur du segment  $b_i - a_{\sigma(i)} + 1$  si et seulement si, pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ , on a  $\#A_j = \#B_j$ . Dans ce cas, notons

$\sigma_0$  l'unique permutation correspondant à la bijection de  $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$  sur  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  qui envoie, pour tout  $j$ ,  $B_j$  sur  $A_j$  de façon croissante.

Le théorème est le suivant ( $\pi$  une représentation en échelle comme plus haut).

THÉORÈME 4.8.

- (a) S'il existe un  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$  tel que  $\#A_j \neq \#B_j$ , alors  $LJ(\pi) = 0$ .
- (b) Supposons que, pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ , on ait  $\#A_j = \#B_j$ . Avec les notations plus haut :

- (i) s'il existe  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  tel que  $a_{\sigma_0(i)} > b_i + 1$ , alors  $LJ(\pi) = 0$ ;
- (ii) sinon, soient  $S$  l'ensemble des  $j$  tels que  $A_j$  est non vide, et, pour tout  $j \in S$ ,  $\mathfrak{m}_j$  le multisegment en échelle  $\mathfrak{m}_j = ([a_1^j, b_1^j], [a_2^j, b_2^j], \dots)$ . Posons :

$$\pi'_j := L(C(L([a_1^j, b_1^j])), C(L([a_2^j, b_2^j])), \dots)$$

avec la convention qu'on fait abstraction des segments vides. Alors le produit  $\pi' = \times_{j \in S} \pi'_j$  est irréductible et on a  $LJ(\pi) = (-1)^{nd-n} \text{sgn}(\sigma_0) \pi'$ .

Démonstration. — D'après [13],  $\pi$  étant en échelle, on a la formule suivante dans le groupe de Grothendieck :

$$\pi = \sum_{w \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(w) \mathcal{I}_w$$

où  $\mathcal{I}_w = L([a_{w(1)}, b_1]) \times L([a_{w(2)}, b_2]) \times \dots \times L([a_{w(k)}, b_k])$  avec la convention que  $\mathcal{I}_w = 0$  si pour un  $i$  on a  $a_{w(i)} > b_i + 1$ . Supposons que  $w$  vérifie  $b_i + 1 \geq a_{w(i)}$  pour tout  $i \in \mathfrak{S}_k$ . Si la longueur d'au moins un des segments  $[a_{w(i)}, b_i]$  n'est pas divisible par  $s$  (c'est-à-dire si  $w$  n'envoie pas chaque  $B_j$  sur  $A_j$ ), alors  $\mathcal{I}_w$  se transfère en 0 ([5]). Finalement, restent à transférer les termes attachés aux  $w \in \mathfrak{S}_k$  qui vérifient à la fois

- (1)  $w(B_j) = A_j$  pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$  et
- (2)  $a_{w(i)} \leq b_i + 1$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Or, si  $\sigma_0$  ne vérifie pas (2), aucun autre  $w \in \mathfrak{S}_k$  qui vérifie (1) ne vérifie (2). Ceci démontre déjà les points (a) et (b)(i) du théorème. Si  $w$  vérifie à la fois (1) et (2), alors, le transfert commutant au produit,  $\mathcal{I}_w$  se transfère en  $(-1)^{nd-n} C(L([a_{w(1)}, b_1])) \times C(L([a_{w(2)}, b_2])) \times \dots \times C(L([a_{w(k)}, b_k]))$ . La même écriture sous forme de somme alternée dans le groupe de Grothendieck est valable pour les représentations en échelle  $\pi'_j$  du côté de  $G'$ . Le produit des  $\pi'_j$  est irréductible parce que, si  $j_1 \neq j_2$ , si  $\mathfrak{m}'_1$  et  $\mathfrak{m}'_2$  sont les multisegments définissant  $\pi'_{j_1}$  et  $\pi'_{j_2}$ , aucun segment de  $\mathfrak{m}_1$  n'est lié à

aucun segment de  $\mathfrak{m}_2$  (le décalage n'étant pas divisible par  $s$ ). Nous devons maintenant comparer la formule obtenue par transfert, et la formule produit à partir des formules des  $\pi'_j$ . Pour  $j \in S$  notons  $\mathfrak{S}(B_j)$  l'ensemble des permutations de  $B_j$  et soit  $G := \times_{j \in S} \mathfrak{S}(B_j)$  muni de la signature produit. Le résultat découle alors de la remarque suivante : la composition avec  $\sigma_0^{-1}$  réalise une bijection, compatible avec la signature, entre l'ensemble des  $w \in \mathfrak{S}_k$  telles que  $w(B_j) \subset A_j$  et  $G$ .  $\square$

Ce théorème et la Proposition 4.6 impliquent que, si  $\pi$  est en échelle, alors  $LJ(\pi \times \pi)$  est soit nul, soit une représentation irréductible.

Il existe aussi un lien avec la classification des représentations unitaires de  $GL_m(D)$ . Cette classification, due essentiellement à Tadić, dit en substance qu'une représentation irréductible rigide (c'est-à-dire à support dans une droite  $\mathbb{Z}_\rho$ )  $\pi$  est unitaire si et seulement si  $\pi$  est un produit de représentations de Speh. Soient  $U$  l'ensemble des représentations irréductibles rigides unitaires de  $GL_m(D)$  et  $T$  l'ensemble de ses représentations rigides qui sont des produits de représentations de Speh (la classification de Tadić se traduit donc par  $U = T$ ).

Aujourd'hui on sait démontrer de façon relativement élémentaire ([3]), et indépendante de  $D$ , qu'un produit de représentations de Speh est unitaire irréductible, c'est-à-dire  $T \subset U$ . Mais, pour montrer que  $U \subset T$ , nous ne disposons que d'une preuve astucieuse de Tadić, basée sur le théorème de Bernstein, qui affirme que l'induite parabolique à partir d'une représentation irréductible unitaire est irréductible. La démonstration du théorème de Bernstein est très compliquée quand  $D \neq F$  ([20]). C'est aussi la seule partie de la théorie pour laquelle les cas commutatif ( $D = F$ , utilisant le sous-groupe mirabolique) et non commutatif ( $D \neq F$ , utilisant la théorie des types pour ramener le problème à  $D = F$ ) n'ont pas été unifiés. On aimerait donc trouver des démonstrations simples et générales du fait que  $\pi \in U$  implique  $\pi \in T$  (ceci impliquerait, aussi, le théorème de Bernstein). D'après [6, Proposition 3.9 (d)], si  $\pi$  est irréductible rigide telle que  $\pi \times \pi$  est irréductible, alors  $\pi \in U$  implique  $\pi \in T$ . La démonstration est élémentaire et il semblerait que  $\pi \times \pi$  soit irréductible pour beaucoup de (sinon toutes les) représentations irréductibles. La Proposition 4.6 montre, en tout cas, que ceci est vrai pour les représentations en échelle. Il s'ensuit (sans utiliser Bernstein) qu'une représentation en échelle est unitaire si et seulement si c'est une représentation de Speh (le produit de deux ou plus représentations de Speh ne pouvant pas être en échelle). Les représentations elliptiques étant en échelle, on obtient comme corollaire qu'une

représentation elliptique est unitaire si et seulement si elle est soit de carré intégrable, soit duale de carré intégrable.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.-M. AUBERT, « Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif  $p$ -adique », *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), n° 6, p. 2179-2189.
- [2] A. I. BADULESCU & D. RENARD, « Zelevinsky involution and Mœglin-Waldspurger algorithm for  $GL_n(D)$  », in *Functional analysis IX*, Various Publ. Ser. (Aarhus), vol. 48, Univ. Aarhus, Aarhus, 2007, p. 9-15.
- [3] A. I. BADULESCU, « On  $p$ -adic Speh representations », à paraître au Bulletin de la SMF.
- [4] ———, « Un résultat d'irréductibilité en caractéristique non nulle », *Tohoku Math. J. (2)* **56** (2004), n° 4, p. 583-592.
- [5] ———, « Jacquet-Langlands et unitarisabilité », *J. Inst. Math. Jussieu* **6** (2007), n° 3, p. 349-379.
- [6] ———, « Global Jacquet-Langlands correspondence, multiplicity one and classification of automorphic representations », *Invent. Math.* **172(2)** (2008), p. 383-438, With an appendix by N. Grbac.
- [7] A. I. BADULESCU, G. HENNIART, B. LEMAIRE & V. SÉCHERRE, « Sur le dual unitaire de  $GL(r, D)$  », *Amer. J. Math.* **132** (2010), p. 1365-1396.
- [8] I. N. BERNSTEIN & A. V. ZELEVINSKY, « Induced representations of reductive  $p$ -adic groups. I », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **10** (1977), n° 4, p. 441-472.
- [9] J. N. BERNSTEIN, «  $P$ -invariant distributions on  $GL(N)$  and the classification of unitary representations of  $GL(N)$  (non-Archimedean case) », in *Lie group representations, II (College Park, Md., 1982/1983)*, Lecture Notes in Math., vol. 1041, Springer, Berlin, 1984, p. 50-102.
- [10] P. BOYER, « Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples », *Invent. Math.* **177** (2009), p. 239-280.
- [11] G. CHENEVIER & D. RENARD, « Characters of Speh representations and Lewis Carroll identity », *Represent. Theory* **12** (2008), p. 447-452.
- [12] P. DELIGNE, D. KAZHDAN & M.-F. VIGNÉRAS, « Représentations des algèbres centrales simples  $p$ -adiques », in *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984, p. 33-117.
- [13] E. LAPID & A. MÍNGUEZ, « On a determinantal formula of Tadić », à paraître à Amer. J. of Math.
- [14] A. MÍNGUEZ, « Correspondance de Howe explicite : paires duales de type II », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **41** (2008), n° 5, p. 717-741.
- [15] ———, « Sur l'irréductibilité d'une induite parabolique », *J. Reine Angew. Math.* **629** (2009), p. 107-131.
- [16] A. MÍNGUEZ & V. SÉCHERRE, « Représentations banales de  $GL(m, D)$  », à paraître dans *Compositio Math.*
- [17] ———, « Représentations lisses modulo  $\ell$  de  $GL(m, D)$  », preprint, available at <http://www.math.jussieu.fr/~minguez>.
- [18] C. MœGLIN & J.-L. WALDSPURGER, « Sur l'involution de Zelevinski », *J. Reine Angew. Math.* **372** (1986), p. 136-177.

- [19] ———, « Le spectre résiduel de  $GL(n)$  », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **22** (1989), n° 4, p. 605-674.
- [20] V. SÉCHERRE, « Proof of the Tadić conjecture (U0) on the unitary dual of  $GL_m(D)$  », *J. Reine Angew. Math.* **626** (2009), p. 187-203.
- [21] M. TADIĆ, « Induced representations of  $GL(n, A)$  for  $p$ -adic division algebras  $A$  », *J. Reine Angew. Math.* **405** (1990), p. 48-77.
- [22] ———, « On characters of irreducible unitary representations of general linear groups », *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **65** (1995), p. 341-363.
- [23] ———, « Representation theory of  $GL(n)$  over a  $p$ -adic division algebra and unitarity in the Jacquet-Langlands correspondence », *Pacific J. Math.* **223** (2006), n° 1, p. 167-200.
- [24] A. V. ZELEVINSKY, « Induced representations of reductive  $p$ -adic groups. II. On irreducible representations of  $GL(n)$  », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **13** (1980), n° 2, p. 165-210.

Manuscrit reçu le 6 décembre 2011,  
accepté le 15 mars 2012.

Ioan BADULESCU  
Université Montpellier 2  
Institut de Mathématiques et de Modélisation de  
Montpellier  
Case courrier 051  
34095 Montpellier cedex 5 (France)  
ioan.badulescu@math.univ-montp2.fr

Erez LAPID  
Hebrew University of Jerusalem  
Institute of Mathematics  
Jerusalem 91904 (Israel)  
erezla@math.huji.ac.il

Alberto MÍNGUEZ  
Université Pierre et Marie Curie  
Institut de Mathématiques de Jussieu  
4, place Jussieu  
75005 Paris (France)  
minguez@math.jussieu.fr