Joseph Klein
André Voutier

Formes extérieures génératrices de sprays

Annales de l'institut Fourier, tome 18, nº 1 (1968), p. 241-260
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_1_241_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 1 (1968), 241-260

FORMES EXTÉRIEURES GÉNÉRATRICES DE SPRAYS

par Joseph KLEIN et André VOUTIER

Introduction.

Soient (M , g) une variété riemannienne, E la fonction énergie correspondant à g, α la 1-forme canonique sur le fibré tangent TM, forme qui à tout vecteur $Z \in TTM$ fait correspondre

$$\alpha(Z) = g(p'Z , p^T Z)$$

$p'Z$ désignant l'origine et $p^T Z$ la projection de Z sur TM.

Le résultat fondamental de [1] est que le champ de vecteurs G défini sur TM par

$$i_G d\alpha = -dE \qquad (1)$$

est un spray dont les trajectoires ont pour projection sur M les géodésiques de la connexion riemannienne sur (M , g), c'est-à-dire les extrémales de E.

Par une extension naturelle de la notion de spray, on a généralisé ce résultat pour des variétés finslériennes [3].

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier des 2-formes Ω, homogènes, de rang maximum, définissant une fonction énergie ; il en est ainsi lorsque $i_J \Omega = 0$, J désignant le tenseur de type (1,1) définissant sur TM la structure naturelle de variété presque tangente. Nous établissons ensuite les conditions nécessaires et suffisantes pour que

$$i_G \Omega = -dE \qquad (2)$$

définisse un spray. La forme Ω s'écrit alors de la façon suivante

$$\Omega = dd_J E + S$$

avec $S = i_C d\Omega$, C désignant le champ canonique sur TM.

Le cas S = 0 nous redonne en particulier les sprays riemanniens ou finslériens car on montre que $d\alpha = dd_J E$.

Le cas où S est semi-basique se rencontre en Mécanique Analytique ; les trajectoires sont solutions d'un système d'équations de Lagrange avec second membre et sont les géodésiques d'une connexion dite S-finslérienne [5].

En supposant E positif sur $\mathcal{C}M$ et en remplaçant l'énergie E par la norme $\sqrt{2E}$ on est amené à la notion de sprays de directions.

Dans les deux premiers paragraphes nous étudions la structure presque tangente, J, sur TM, les dérivations i_J, d_J de Frölicher-Nijenhuis correspondantes [4], les champs de vecteurs et les formes homogènes, notions fondamentales pour les paragraphes 3 et 4 consacrés à l'étude des 2-formes finslériennes et lagrangiennes engendrant respectivement des sprays de vecteurs et des sprays de directions.

Certaines démonstrations, en particulier celles relatives aux dérivations sont supprimées, parce qu'elles sont des conséquences directes de formules se trouvant dans [4].

1. Structure presque tangente sur TM.

1.1. *Notations.*

Soit M une variété différentiable de dimension n, TM l'espace fibré des vecteurs tangents à M, $\mathcal{C}M$ la variété des vecteurs non nuls tangents à M.

Désignons par p la fibration naturelle de TM $\longrightarrow$ M, par p' celle de TTM $\longrightarrow$ TM et par p^T : TTM $\longrightarrow$ TM l'application linéaire tangente à p. Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} TTM & \xrightarrow{\quad p^T \quad} & TM \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p' = p_{TM}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p = p_M} \\ TM & \xrightarrow[\quad p \quad]{} & M \end{array}$$

Soit (U, φ) une carte locale de M ; $x^1, \ldots, x^n$ les coordonnées de $\varphi(x)$ dans $\mathbf{R}^n$ où $x \in U$; on écrira [2]

$$x \underset{U}{=} (x^1, \ldots, x^n).$$

A la carte (U, φ) correspondent des cartes locales sur TM et TTM. Un point z de TU sera représenté par

$$z \underset{U}{=} (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$$

ou plus simplement par $z \underset{U}{=} (x, y)$.

Un point Z de TTU sera représenté par

$$Z \underset{U}{=} (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, X^1, \ldots, X^n, Y^1, \ldots, Y^n)$$

ou plus simplement par $Z \underset{U}{=} (x, y, X, Y)$.

Nous avons alors

$$p'Z \underset{U}{=} (x, y) \quad \text{et} \quad p^T Z \underset{U}{=} (x, X).$$

Nous désignerons par $\bar{y}$ tout champ de vecteurs sur TM tel que $p'\bar{y} = p^T\bar{y}$; on a

$$\bar{y} \underset{U}{=} (x, y, y, Y).$$

1.2. *Suite exacte fondamentale.*

La suite exacte fondamentale sur TM est par définition la suivante :

$$0 \longrightarrow TM \underset{M}{\times} TM \xrightarrow{\lambda} TTM \xrightarrow{\mu} TM \underset{M}{\times} TM \longrightarrow 0$$

Tous les fibrés de cette suite ont pour base TM ; μ est le morphisme de fibrés vectoriels surjectif défini par

$$\mu = (p', p^T).$$

Nous définissons λ point par point de la façon suivante : soit

$$(y, z) \in TM \underset{M}{\times} TM \quad \text{avec} \quad py = pz = x ;$$

λ_y désigne l'identification naturelle de $T_x M$ et de $T_y T_x M$.

Avec les notations de (1.1) si $y \underset{U}{=} (x, y)$, $z \underset{U}{=} (x, z)$ alors $\lambda(y, z) \underset{U}{=} (x, y, 0, z)$.

L'image de λ, égale au noyau de μ, est le sous-fibré V de TTM formé par les vecteurs verticaux c'est-à-dire les vecteurs tangents aux fibres de TM.

1.3. *Champ de vecteurs et de tenseurs* (1,1) *canoniques.*

L'application $\sigma : \mathrm{TM} \longrightarrow \mathrm{TM} \underset{\mathrm{M}}{\times} \mathrm{TM}$ définie par

$$y \longrightarrow (y\,,y)$$

est une section différentiable de ce fibré vectoriel.

Le champ de vecteurs $\mathrm{C} = \lambda \circ \sigma$, section différentiable de p' : $\mathrm{TTM} \longrightarrow \mathrm{TM}$ est appelé *champ canonique* de TM.

$$\mathrm{C} \underset{\mathrm{U}}{=} (x\,, y\,, 0\,, y)\,.$$

Le tenseur canonique sur TM, J, est défini par

$$\mathrm{J} = \lambda \circ \mu\,.$$

L'exactitude de la suite fondamentale implique

$$\mathrm{J}^2 = 0\,.$$

Avec les notations de 1.1, $\mathrm{JZ} \underset{\mathrm{U}}{=} (x\,, y\,, 0\,, \mathrm{X})$. Pour chaque y de TM, la restriction J_y de J à $\mathrm{T}_y\mathrm{TM}$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathrm{T}_y\mathrm{TM}$, de carré nul, de rang n, dont l'image, égale au noyau, est le sous-espace V_y des vecteurs verticaux. La variété TM munie de J a une *structure de variété presque tangente.* A la forme tensorielle J sont associées les dérivations i_{J} et d_{J} de Frölicher-Nijenhuis ; i_{J} est une dérivation de degré 0, agissant trivialement sur les fonctions ; son action sur les 1-formes ω est définie, pour tout champ Z sur TM, par

$$i_{\mathrm{J}}\,\omega(\mathrm{Z}) = \omega(\mathrm{JZ})\,;$$

on en déduit, si Ω est une 2-forme,

$$i_{\mathrm{J}}\Omega(\mathrm{Z}\,, \mathrm{Z}') = \Omega(\mathrm{JZ}\,, \mathrm{Z}') + \Omega(\mathrm{Z}\,, \mathrm{JZ}')\,.$$

d_{J} est la dérivation de degré 1 définie par :

$$d_{\mathrm{J}} = i_{\mathrm{J}}\,d - d\,i_{\mathrm{J}}\,.$$

Localement, f désignant une fonction sur TM, $d_{\mathrm{J}}f = \dfrac{\partial f}{\partial y^i}\,dx^i$.

1.4. *Formulaire de la structure presque tangente sur* TM.

On établit facilement, à l'aide de coordonnées locales par exemple, que, quels que soient les champs Z et Z′ sur TM

$$[JZ\,,JZ'] = J\,[JZ\,,Z'] + J\,[Z\,,JZ']\,. \tag{1}$$

L'identité (1) est équivalente à la nullité de la torsion de Nijenhuis N_J ou à $d_J^2 = 0$.

On montre de même que, C désignant le champ canonique,

$$[J\,,C] = -\,[C\,,J] = J\,. \tag{2}$$

A partir de là, on obtient les propriétés suivantes, des crochets de deux dérivations

$$[i_J\,,i_Z] = -\,i_{JZ} \quad \text{d'où} \quad [i_J\,,i_C] = 0 \tag{3}$$

$$[i_J\,,\theta_C] = i_J\,, \tag{4}$$

θ_C désignant la dérivée de Lie par rapport au champ canonique C.

$$[i_C\,,d_J] = i_J \tag{5}$$

$$[d_J\,,\theta_C] = d_J \tag{6}$$

$$[i_J\,,d_J] = 0 \tag{7}$$

$$[d\,,d_J] = 0\,. \tag{8}$$

Posons $\quad \dot\theta_Z = [i_Z\,,d_J]$; on a

$$[d_J\,,\dot\theta_Z] = 0\,. \tag{9}$$

Dans ces formules, Z est un champ de vecteurs différentiable arbitraire sur TM. Si $Z = \bar y$ on a

$$\begin{aligned}\dot\theta_{\bar y} &= i_{\bar y} d_J + d_J\, i_{\bar y} \qquad (10)\\ &= \theta_C - i_{[\bar y,\,J]} \quad \text{(voir [4], page 352).}\end{aligned}$$

2. Champs de vecteurs et formes homogènes.

Nous définissons pour les champs de vecteurs, comme pour les formes sur $\mathcal{C}$M, deux types d'homogénéité : une homogénéité au sens restreint, de degré r et une homogénéité au sens large, de degré r.

Notation. – Pour abréger l'écriture nous utiliserons les symboles $\dot{h}(r)$ et $h(r)$; $\dot{h}(r)$ se lit : homogène au sens restreint de degré r, $h(r)$ se lit homogène au sens large de degré r.

2.1. *Champs de vecteurs homogènes au sens restreint.*

On définit classiquement ces champs à l'aide du groupe à un paramètre des homothéties positives. Nous préférons les définir, pour des raisons de commodité, à l'aide de formules généralisant la formule d'Euler pour les fonctions homogènes.

DEFINITION. – *Un champ différentiable* Z *sur* $\mathcal{C}$M *est dit homogène au sens restreint, de degré r, si*

$$\theta_C Z = (r - 1) Z$$

C *désignant le champ canonique.*

PROPRIETES.

1) *Avec les notations de* 1.1 *les composantes* X *de* Z *sont homogènes de degré* $r - 1$ *par rapport aux n variables y ; les composantes* Y *sont homogènes de degré r par rapport à ces variables.*

2) *Si* Z_1 *est* $\dot{h}(r_1)$ *et* Z_2 $\dot{h}(r_2)$ *le crochet* $[Z_1, Z_2]$ *est* $\dot{h}(r_1 + r_2 - 1)$. *Il en résulte que les champs* $\dot{h}(1)$ *forment une Algèbre de Lie.*

Exemples.

1) Le prolongé sur TM d'un champ sur $\mathcal{C}$M est $\dot{h}(1)$.

2) Un *spray* sur M est un champ de vecteurs sur $\mathcal{C}$M $\dot{h}(2)$. c'est-à-dire tel que $[C, G] = G$, et vérifiant la condition $JG = C$ (ou $p'G = p^T G$). Cette définition diffère de celle de [1] où un spray est un champ de vecteurs sur TM et non sur $\mathcal{C}$M seulement. Avec les notations de 1.1 nous avons

$$G \underset{U}{=} (x, y, y, Y)$$

Y étant une fonction homogène de degré 2 par rapport aux y.

2.2. DEFINITION. – *Un champ de vecteurs différentiable* Z *sur* $\mathcal{C}$M *est dit homogène au sens large, de degré r, si*

$$\theta_C Z = (r-1)Z + gC$$

où g est une fonction différentiable sur $\mathcal{T}$M.

Conséquence. – Si Z est $h(r)$, JZ est $\dot{h}(r-1)$.

L'homogénéité au sens restreint implique l'homogénéité au sens large.

2.3. DEFINITION. – *Une forme* Ω *sur* $\mathcal{T}$M *est dite homogène au sens large, de degré r* ($h(r)$),*si*

$$\theta_C \Omega = r\Omega .$$

Conséquence. – Si la p-forme Ω est $h(r)$ et si $Z_1, \ldots, Z_p$ sont p champs $\dot{h}(q)$, $\Omega(Z_1, \ldots, Z_p)$ est $h(pq-p+r)$.

2.4. DEFINITION. – *Une forme* Ω *sur* $\mathcal{T}$M *est dite homogène au sens restreint, de degré r* ($\dot{h}(r)$), *si, pour toute fonction* $f : \mathcal{T}\mathrm{M} \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$\theta_{fC}\Omega = fr\Omega .$$

Conséquences.

1) La définition précédente est équivalente à $\theta_C \Omega = r\Omega$ et $i_C \Omega = 0$ ou à $i_C d\Omega = r\Omega$ et $i_C \Omega = 0$.

2) Si la p-forme Ω est $\dot{h}(r)$ et si $Z_1, \ldots, Z_p$ sont p champs $h(q)$, la fonction $\Omega(Z_1, \ldots, Z_p)$ est $h(pq-p+r)$.

2.5. *Action des dérivations sur les formes homogènes.*

Si Ω est $h(r)$, $d\Omega$ est $h(r)$, $i_J\Omega$ et $d_J\Omega$ sont $h(r-1)$.

Si Ω est $\dot{h}(r)$, $i_J\Omega$ est $\dot{h}(r-1)$; $d\Omega$ est $h(r)$, $\dot{h}(r)$ seulement si $r = 0$; $d_J\Omega$ est $h(r-1)$, $\dot{h}(r-1)$ seulement si $i_J\Omega = 0$.

2.6. DEFINITION. – *Une forme* ω *sur* TM *est dite semi-basique si* $i_v \omega = 0$ *pour tout champ v sur* TM *de vecteurs verticaux.*

Remarque. – Si ω est semi-basique, $i_J \omega = 0$ et $d_J \omega$ est semi-basique alors que $d\omega$ ne l'est pas en général.

PROPOSITION. – *Soit ω une p-forme semi-basique, homogène au sens large de degré r ; pour tout champ $\bar{y}$ sur* TM *tel que* $J\bar{y} = C$ *on a la formule*

$$i_{\bar{y}} d_J \omega + d_J i_{\bar{y}} \omega = (p + r) \omega . \tag{11}$$

Démonstration. – D'après la formule (10) de 1.4, le premier membre de (11) est égal à $\theta_C \omega - i_{[\bar{y},J]} \omega$. ω étant $h(r)$, $\theta_C \omega = r\omega$. Il reste donc à montrer que $i_{[\bar{y},J]} \omega = - p\omega$. Or

$$i_{[\bar{y},J]} \ \omega(Z_1 , \dots , Z_p) = \sum_{i=1}^{p} \omega(Z_1 , \dots , Z_{i-1} , [\bar{y} , J] Z_i , Z_{i+1} , \dots , Z_p)$$

Montrons que $[\bar{y} , J] Z_i$ ne diffère de $- Z_i$ que par un vecteur vertical, c'est-à-dire que

$$J [\bar{y} , J] Z = - JZ$$

or $$[\bar{y} , J] Z = [\bar{y} , JZ] - J [\bar{y} , Z] \quad \text{d'où}$$

$$\begin{aligned} J [\bar{y} , J] Z &= J [\bar{y} , JZ] \quad \text{car} \quad J^2 = 0 \\ &= [C , JZ] - J [C , Z] \quad \text{d'après} \quad N_J = 0 \\ &= - JZ \quad \text{d'après la formule (2) de 1.4.} \end{aligned}$$

La proposition précédente implique le théorème suivant :

THEOREME. – *Toute p-forme ω définie sur* $\mathcal{T}$M, *semi-basique, homogène de degré $r \neq - p$, qui est d_J fermée ($d_J \omega = 0$) est d_J exacte,*

et $$(p + r) \omega = d_J i_{\bar{y}} \omega$$

$\bar{y}$ désignant tout champ sur $\mathcal{T}$M *tel que $p' \bar{y} = p^T \bar{y}$.*

Remarque. – Les formules précédentes sont valables pour un spray G qui est un champ $\bar{y}$ particulier.

3. Etude de 2-formes génératrices de sprays.

3.1. Dans ce chapitre Ω désigne une 2-forme homogène au sens large sur $\mathcal{T}$M, de degré d'homogénéité 1, c'est-à-dire telle que :

$$\theta_C \Omega = \Omega .$$

Nous supposons en plus que Ω est de rang maximum $2n$ sur $\mathcal{T}$M. Dans ces conditions la formule

$$i_Z \Omega = \omega$$

définit un isomorphisme entre l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur $\mathcal{T}$M et celui des 1-formes sur $\mathcal{T}$M et plus particulièrement entre les champs $\dot{h}(2)$ et les 1-formes $h(2)$. En effet

$$\theta_C i_Z \Omega - i_Z \theta_C \Omega = i_{[C,Z]} \Omega ;$$

or $[C , Z] = Z$ puisque Z est $\dot{h}(2)$, donc $\theta_C \omega = 2\omega$ et la forme ω est bien $h(2)$.

Nous faisons une dernière hypothèse : $i_J \Omega = 0$ c'est-à-dire

$$\Omega(JZ , Z') + \Omega(Z , JZ') = 0$$

quels que soient les champs Z et Z$'$ sur $\mathcal{T}$M.

DEFINITION. – *Une 2-forme Ω de rang $2n$ sur $\mathcal{T}$M, homogène de degré 1 sur $\mathcal{T}$M au sens large et telle que $i_J \Omega = 0$ sera dite finslérienne.*

3.2. PROPOSITION. – *Soit Ω une forme finslérienne. L'application $\overline{g} : T\mathcal{T}M \underset{\mathcal{T}M}{\times} T\mathcal{T}M \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $\overline{g}(Z , Z') = \Omega(JZ , Z')$ est une forme bilinéaire symétrique sur $T\mathcal{T}$M qui induit sur M une métrique finslérienne g.*

Démonstration. – Comme $i_J \Omega = 0$, $\Omega(JZ , Z') = \Omega(Z , JZ')$ d'où la symétrie de $\overline{g}$. De la définition de $\overline{g}$ résulte que $\overline{g}(Z , Z')$ ne dépend que de JZ et JZ$'$ c'est-à-dire de p^T Z et p^T Z$'$. La régularité de Ω implique d'autre part que $\overline{g}(Z , Z') = 0$ pour tout champ Z$'$, si et seulement si JZ $= 0$, c'est-à-dire si Z est vertical. A tout point y de $\mathcal{T}$M correspond alors une application bilinéaire symétrique régulière g de $T_{p(y)} M \times T_{p(y)} M$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$g_y(z\,,z') = \bar{g}(Z\,,Z')$$

$$\text{avec} \quad p^T Z = z, \quad p^T Z' = z' \quad \text{et} \quad p'Z = p'Z' = y\,.$$

L'application g définit bien sur M une structure de variété finslérienne.

3.3. DEFINITION. – *On appelle fonction énergie associée à la forme finslérienne* Ω *l'application*

$$E : \mathscr{C}M \longrightarrow \mathbf{R} \quad \textit{définie par}$$

$$y \longrightarrow \frac{1}{2}\, g_y(y\,,y)$$

Propriétés de la fonction énergie.

1) Soit $\bar{y}$ un champ $\dot{h}(2)$ sur $\mathscr{C}M$ tel que $J\bar{y} = C$. D'après la définition de g, la fonction E a pour valeur, en tout point y de $\mathscr{C}M$,

$$E(y) = \frac{1}{2}\,\Omega(C\,,\bar{y})$$

$$= \frac{1}{2}\, i_{\bar{y}}\, i_C\, \Omega\,.$$

L'homogénéité de Ω, C, $\bar{y}$ implique alors que E est une fonction homogène de degré 2 : $E(\lambda y) = \lambda^2 E(y) \quad \forall\, \lambda > 0$.

2) Localement avec les notations de (1.1)

$$\Omega \underset{U}{=} \frac{1}{2}\, a_{ij}\, dx^i \wedge dx^j + g_{ij}\, dy^i \wedge dx^j + \frac{1}{2}\, b_{ij}\, dy^i \wedge dy^j\,.$$

$$i_J \Omega = 0 \Longrightarrow g_{ij} = g_{ij} \quad \text{et} \quad b_{ij} = 0\,.$$

L'homogénéité de Ω implique que les a_{ij} sont $h(1)$, les g_{ij} $h(0)$. La fonction énergie E s'écrit alors

$$E(y) \underset{U}{=} \frac{1}{2}\, g_{ij}\,(x\,,y)\, y^i y^j\,.$$

3.4. PROPOSITION. – *Soit* Ω *une forme finslérienne sur* $\mathscr{C}M$. *Soient* Z *et* Z' *deux champs de vecteurs sur* $\mathscr{C}M$. *Posons* $\omega = i_Z \Omega$ *et* $\omega' = i_{Z'} \Omega$.

Nous avons l'équivalence suivante :

$$Z = JZ' \Longleftrightarrow \omega = - J\omega' .$$

Démonstration. – D'après le formulaire 1.4, $i_J i_{Z'} - i_{Z'} i_J = - i_{JZ'}$ d'où $i_J i_{Z'} \Omega = - i_{JZ'} \Omega$ ou $i_J \omega' = - i_{JZ'} \Omega$.

Si $JZ' = Z$ alors $i_J \omega' = - \omega$ et inversement.

Conséquence. – Soit ω_C la 1-forme correspondant au champ canonique C : $i_C \Omega = \omega_C$. A toute forme ω', $h(2)$, telle que $J\omega' = - \omega$, correspond un spray G défini par $i_G \Omega = \omega'$.

3.5. THEOREME. – *Soit Ω une forme finslérienne sur $\mathcal{T}$M. Si la forme $i_C \Omega$ est d_J fermée alors $i_C \Omega = d_J$ E, E étant l'énergie finslérienne de Ω ; le champ* G *tel que*

$$i_G \Omega = - dE$$

est un spray sur M *appelé spray canonique de Ω.*

Démonstration. – D'après le théorème de 2.6

$$d_J i_C \Omega = 0 \Longrightarrow i_C \Omega = \frac{1}{2} d_J (i_{\bar{y}} i_C \Omega) \quad \text{ou} \quad i_C \Omega = d_J \text{E d'après 3.3.}$$

Comme $d_J E = - i_J (- dE)$, la forme $- dE$ définit bien un spray d'après 3.4.

La forme Ω étant homogène de degré 1

$$\Omega = \theta_C \Omega \quad \text{ou} \quad \Omega = di_C \Omega + i_C d\Omega \quad \text{ou encore}$$

$$\Omega = dd_J E + S \quad \text{avec} \quad S = i_C d\Omega .$$

La décomposition précédente de Ω permet d'énoncer le théorème suivant :

THEOREME. – *Une forme finslérienne Ω d'énergie* E *qui est fermée est exacte et*

$$\Omega = dd_J E .$$

3.6. Un cas intéressant en Mécanique Analytique est celui où la forme Ω se décompose en

$$\Omega = dd_J \mathrm{E} + \mathrm{S}$$

la 2-forme S étant semi-basique.

PROPOSITION. – *Soit Ω une forme finslérienne d'énergie* E. *Pour que la forme $\Omega - dd_J \mathrm{E}$ soit semi-basique, il faut et il suffit que $d_J \Omega$ soit semi-basique.*

Démonstration. — Si $\mathrm{S} = \Omega - dd_J \mathrm{E}$ est semi-basique, alors $d_J \mathrm{S} = d_J \Omega$ est semi-basique d'après les propriétés des formes semi-basiques.

Supposons maintenant $d_J \Omega$ semi-basique. Comme $d_J \Omega = i_J d\Omega$, $i_J d\Omega$ est semi-basique et $i_J i_J d\Omega = 0$ c'est-à-dire

$$d\Omega(\mathrm{JX}, \mathrm{JY}, \mathrm{Z}) + d\Omega(\mathrm{X}, \mathrm{JY}, \mathrm{JZ}) + d\Omega(\mathrm{JX}, \mathrm{Y}, \mathrm{JZ}) = 0$$

quels que soient les champs X, Y, Z sur $\mathscr{T}$M.

Posons $\mathrm{X} = \overline{y}$ avec $\mathrm{J}\overline{y} = \mathrm{C}$; d'où

$$d\Omega(\mathrm{C}, \mathrm{JY}, \mathrm{Z}) + d\Omega(\mathrm{C}, \mathrm{Y}, \mathrm{JZ}) + d\Omega(\overline{y}, \mathrm{JY}, \mathrm{JZ}) = 0$$

Mais $i_J d\Omega$ étant semi-basique $i_J d\Omega(\overline{y}, \mathrm{JY}, \mathrm{Z}) = 0$; d'où

$$d\Omega(\mathrm{C}, \mathrm{JY}, \mathrm{Z}) + d\Omega(\overline{y}, \mathrm{JY}, \mathrm{JZ}) = 0$$

Il en résulte que, quels que soient les champs Y et Z, $d\Omega(\mathrm{C}, \mathrm{Y}, \mathrm{JZ}) = 0$ c'est-à-dire que $i_J\, d\Omega$ est semi-basique.

3.7. Propriétés du spray canonique de Ω.

1) Le spray canonique G étant défini par $i_{\mathrm{G}} \Omega = - d\mathrm{E}$ il en résulte que $i_{\mathrm{G}} d\mathrm{E} = 0$ ou $\theta_{\mathrm{G}} \mathrm{E} = 0$ d'où :

PROPOSITION. – *Le long des trajectoires du spray canonique la fonction énergie est constante.*

2) PROPOSITION. – *Si Ω est une forme finslérienne exacte ($\Omega = dd_J \mathrm{E}$) le spray canonique* G *de Ω a une divergence nulle par rapport à Ω, ce qui équivaut à $\theta_{\mathrm{G}} \Omega = 0$.*

Démonstration. – La divergence de G par rapport à Ω est définie par $(div_\Omega\, G)\,\Omega^n = \theta_G\,\Omega^n$; donc $div_\Omega\, G = 0 \Longleftrightarrow \theta_G\,\Omega = 0$.

Comme $d\Omega = 0$,
$$\begin{aligned}\theta_G\,\Omega &= di_G\,\Omega\\ &= -\,dd\mathrm{E} = 0\,.\end{aligned}$$

3) PROPOSITION. – *Les géodésiques du spray canonique de la forme finslérienne*

$$\Omega = dd_J\,\mathrm{E} + \mathrm{S}\,,$$

S étant une forme semi-basique, sont localement les solutions du système d'équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y^i} - \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x^i} = \mathrm{S}_{ik}\,y^k \quad \textit{avec} \quad y^k = dx^k/dt\,.$$

Si Ω est fermée ($\Omega = dd_J\,\mathrm{E}$) les géodésiques du spray canonique sont les extrémales de la fonction énergie.

Démonstration. – Avec les notations de (1.1) posons

$$\mathrm{X}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathrm{P}_i = \frac{\partial}{\partial y^i}\,.$$

Soit $\Omega = dd_J\mathrm{E} + \mathrm{S}$ avec S semi-basique ; posons :

$$\mathrm{S} \underset{\mathrm{U}}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{S}_{kl}\,dx^k \wedge dx^l\,.$$

Explicitons $\Omega(\mathrm{G}\,,\mathrm{X}_i)$ en utilisant les formules suivantes :

$$\mathrm{P}_i = \mathrm{J}\mathrm{X}_i \quad ; \quad i_G\,d_J\,\mathrm{E} = 2\mathrm{E} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}\,[\mathrm{G}\,,\mathrm{X}_i] = 0\,.$$

$\Omega(\mathrm{G}\,,\mathrm{X}_i) = dd_J\,\mathrm{E}(\mathrm{G}\,,\mathrm{X}_i) + \mathrm{S}(\mathrm{G}\,,\mathrm{X}_i)$ ou

$\Omega(\mathrm{G}\,,\mathrm{X}_i) = \mathrm{G}\,.\,d_J\mathrm{E}(\mathrm{X}_i) - \mathrm{X}_i\,.\,d_J\,\mathrm{E}(\mathrm{G}) - d_J\,\mathrm{E}([\mathrm{G}\,,\mathrm{X}_i]) + \mathrm{S}(\mathrm{G}\,,\mathrm{X}_i)$ ou

$\Omega(\mathrm{G}\,,\mathrm{X}_i) = \mathrm{G}\,.\,(\mathrm{P}_i\,.\,\mathrm{E}) - \mathrm{X}_i\,.\,(2\mathrm{E}) + \mathrm{S}(\mathrm{G}\,,\mathrm{X}_i)\,.$

Or,
$$\begin{aligned}\Omega(\mathrm{G}\,,\mathrm{X}_i) &= -\,d\mathrm{E}(\mathrm{X}_i)\\ &= -\,\mathrm{X}_i\,.\,\mathrm{E}\,.\end{aligned}$$

En égalant les deux expressions de $\Omega(\mathrm{G}\,,\mathrm{X}_i)$ nous obtenons

$$G.(P_i.E) - X_i.E = S(X_i, G). \tag{1}$$

Soit $f : I \longrightarrow M$ une courbe géodésique du spray G, c'est-à-dire une courbe f telle que $f'' = G \circ f'$.

Le long de cette géodésique, de paramètre t,l'équation (1) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial y^i} - \frac{\partial E}{\partial x^i} = S_{ik}\, y^k \quad \text{avec} \quad y^k = dx^k/dt\,.$$

4. Formes génératrices de sprays de directions.

4.1. *Forme lagrangienne associée à une forme finslérienne.*

DEFINITIONS. – Soit Ω une forme finslérienne sur $\mathscr{C}M$,

$$\Omega = dd_J E + S\,,$$

la forme S étant semi-basique. Supposons l'énergie E strictement positive sur $\mathscr{C}M$ et posons $E = \frac{1}{2} L^2$ et $S = LS_0$. La fonction L est appelée *lagrangien* associé à E.

La forme

$$\Omega_0 = dd_J L + S_0$$

est appelée *forme lagrangienne* associée à Ω.

PROPOSITION. – *Soit Ω une forme finslérienne admettant une forme lagrangienne associée Ω_0. La forme Ω_0 possède les propriétés suivantes :*

1) *Ω_0 est $\dot{h}(0)$ c'est-à-dire $i_C\Omega_0 = 0$ et $i_C d\Omega_0 = 0$.*

2) *$i_J\Omega_0 = 0$.*

3) *$d_J\Omega_0$ est semi-basique.*

4) *Si G est le spray canonique de Ω, $i_G\Omega_0 = 0$.*

5) *Ω_0 est de rang $2n - 2$.*

Démonstration.

1) De $\Omega = dd_J \frac{1}{2} L^2 + LS_0$ on déduit que

$$\Omega = L\Omega_0 + dL \wedge d_J L .$$

Comme E est $h(2)$, L est $h(1)$, dL est $h(1)$; $d_J L$ est $h(0)$.

Or $$i_C \Omega = Li_C \Omega_0 + (i_C dL) d_J L - (i_C d_J L) dL \quad \text{ou}$$

$$Ld_J L = Li_C \Omega_0 + Ld_J L \quad \text{donc} \quad i_C \Omega_0 = 0 .$$

Montrons maintenant que $i_C d\Omega_0 = i_C dS_0 = 0$.

Comme $$dS = dL \wedge S_0 + LdS_0 ,$$

$$i_C d_S = (i_C dL) S_0 + dL \wedge i_C S_0 + Li_C dS_0 .$$

Or $$i_C dS = dS , \quad i_C dL = L \quad \text{et} \quad i_C S_0 = 0 \quad \text{donc}$$

$$Li_C dS_0 = 0$$

2) $i_J \Omega_0 = 0$ est une conséquence directe de $i_J \Omega = 0$.

3) $d_J \Omega_0 = d_J S_0$ et $d_J S = d_J L \wedge S_0 + Ld_J S_0$.

Comme $d_J S$, $d_J L$ et S_0 sont semi-basiques, il en est de même de $d_J S_0$.

4) Par définition $i_G \Omega = - dE$. Or

$$i_G \Omega = Li_G \Omega_0 + (i_G dL) d_J L - (i_G d_J L) dL . \tag{1}$$

Comme $$i_G dE = 0 , \quad i_G dL = 0 .$$

D'autre part $$i_G d_J L = i_C dL \quad \text{et} \quad i_C dL = L .$$

L'égalité (1) s'écrit donc sous la forme

$$- LdL = Li_G \Omega_0 - LdL \quad \text{et} \quad i_G \Omega_0 = 0 .$$

5) En tout point y de $\mathscr{C}M$, les vecteurs C et G font partie du sous-espace vectoriel de $T_y \mathscr{C}M$ associé à Ω_0. Ce sous-espace $A_y \Omega_0$ est par définition le noyau $\mathrm{Ker}_y\ \Omega_0$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs Z de $T_y \mathscr{C}M$ tels que $i_Z \Omega_0 = 0$.

Montrons que ce sous-espace est engendré par C et G c'est-à-dire qu'il est de dimension 2 ; il en résultera que Ω_0 est de rang $2n - 2$.

Soit Z un champ sur $\mathcal{T}$M tel que $i_Z \Omega_0 = 0$. Nous avons

$$i_{JZ}\Omega_0 = i_Z i_J \Omega_0 - i_J i_Z \Omega_0 .$$

Donc $i_Z \Omega_0 = 0 \Longrightarrow i_{JZ}\Omega_0 = 0$ (remarquons que $i_C \Omega_0 = 0$ se déduit ainsi directement de $i_G \Omega_0 = 0$).

Or $i_{JZ}\Omega_0 = 0$ est équivalent à $i_{JZ}\Omega = i_{JZ}(dL \wedge d_J L)$ ou à $i_{JZ}\Omega = (i_{JZ} dL) d_J L$ ou à $i_{JZ}\Omega = \dfrac{i_{JZ} dL}{L} d_J E$.

Comme $i_C \Omega = d_J E$ nous avons

$$JZ = \lambda C \quad \text{d'où}$$

$$Z = \lambda G + \mu C ,$$

λ et μ étant des fonctions scalaires sur $\mathcal{T}$M.

Remarquons que la distribution à deux dimensions engendrée sur $\mathcal{T}$M par C et G est invariante sous l'action des homothéties positives et elle est complètement intégrable (conséquence de $[C , G] = G$).

Conséquence. – Le spray G de Ω a, par rapport à Ω_0 les propriétés suivantes :

1) $i_G \Omega_0 = 0$ 2) $\theta_G \Omega_0 = i_G d\Omega_0$

3) $i_G dL = 0$ 4) $\theta_G dL = 0$

5) $i_G d_J L = L$.

Localement les géodésiques du spray G sont les solutions du système différentiel :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = s_{ik}\, y^k \quad \text{avec} \quad y^k = dx^k/dt \quad \text{et} \quad s_{ik}$$

coefficients de S_0 sur U.

4.2. DEFINITION. – *Tout spray* G *tel que* $i_G \Omega_0 = 0$ *est dit engendré par* Ω_0.

PROPOSITION. – *Si* G *et* G' *sont deux sprays engendrés par* Ω_0 , *il existe une fonction scalaire* μ *sur* $\mathcal{T}$M, $h(1)$, *telle que*

$$G' = G + \mu C .$$

Démonstration. – Par hypothèse, $i_G \Omega_0 = 0$ et $i_{G'} \Omega_0 = 0$; en tout point de $\mathcal{C}M$, G et G′ appartiennent donc à l'espace associé à Ω_0 et il existe deux fonctions sur $\mathcal{C}M$, λ et μ telles que

$$G' = \lambda G + \mu C$$

Or $JG' = JG = C$ implique $\lambda = 1$. C.Q.F.D.

DEFINITION. – *La relation entre deux sprays* G *et* G′ : *"il existe une fonction* μ *sur* $\mathcal{C}M$, $h(1)$, *telle que* $G' = G + \mu C$" *est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence est appelée un spray de directions.*

La proposition précédente peut alors s'énoncer ainsi : une forme lagrangienne Ω_0 associée à une forme finslérienne Ω engendre un spray de directions.

L'intérêt des sprays de directions réside dans la proposition suivante.

PROPOSITION. – *Soient* G *et* G′ *deux sprays équivalents. Si* f *est une géodésique de* G, *il existe un changement de paramètre* g, *strictement croissant, tel que* $f \circ g$ *soit une géodésique du spray* G′.

Démonstration. – Soit $f : I \longrightarrow M$ une géodésique de G, c'est-à-dire une courbe telle que $f'' = G \circ f'$. Soit $g : I' \longrightarrow I$ un changement de paramètre. La courbe $F = f \circ g$ n'est plus en général une géodésique de G. En effet pour tout t de I′ on a la formule

$$F''(t) = G \circ F'(t) + \frac{g''(t)}{g'(t)} C \circ F'(t) .$$

F n'est une géodésique de G que si $g'' = 0$, c'est-à-dire si g est une application affine de I′ sur I.

Soit $G' = G + \mu C$ un spray équivalent à G. $F = f \circ g$ est une géodésique de G′ si, et seulement si, g est une solution de l'équation différentielle

$$g'' = g'^2 \mu(f' \circ g) .$$

On montre facilement que cette équation admet des solutions strictement croissantes.

COROLLAIRE. – *Un spray de directions sur* M *définit sur* M *des courbes géométriques appelées géodésiques du spray de directions.*

4.3. DEFINITION. – *Une forme lagrangienne* Ω_0 *sur* $\mathscr{C}$M *est une 2-forme homogène au sens restreint de degré* 0, *de rang* $2n$-2, *telle que les seuls champs verticaux associés soient proportionnels au champ canonique, telle que* $i_J \Omega_0 = 0$ *et que* $d_J \Omega_0$ *soit semi-basique.*

PROPOSITION. – *Une forme lagrangienne* Ω_0 *a pour expression locale sur un ouvert* U *de* $\mathscr{C}$M

$$\Omega_0 \underset{\mathrm{U}}{=} dd_J \mathrm{L} + \mathrm{S}_0$$

où L *est une fonction* $h(1)$, *non nulle, sur* U *et* S_0 *une forme semi-basique* $h(0)$ *sur* U.

A cette expression locale est associée la forme finslérienne locale

$$\Omega \underset{\mathrm{U}}{=} dd_J \mathrm{E} + \mathrm{S}$$

avec $\quad \mathrm{E} = \frac{1}{2} \mathrm{L}^2 \quad$ et $\quad \mathrm{S} = \mathrm{LS}_0$.

Démonstration. – Pour la première partie de la proposition voir [6].

On démontre facilement que la forme locale Ω est $h(1)$, que $i_J \Omega = 0$, que $d_J \Omega$ est semi-basique et que $i_C \Omega = d_J \mathrm{E}$. Montrons seulement que Ω est de rang $2n$.

Supposons qu'il existe sur U un champ Z, non nul, tel que

$$i_Z \Omega = 0 \tag{1}$$

De $[i_J, i_Z]\Omega = - i_{JZ}\Omega$ découle alors que

$$i_{JZ} \Omega = 0 \quad \text{ou que} \tag{2}$$

$$i_{JZ}(\mathrm{L}\Omega_0) = -(i_{JZ}\, d\mathrm{L})\, d_J \mathrm{L}\,. \tag{3}$$

D'autre part l'égalité (1) implique

$$i_C i_Z \Omega = 0 \quad \text{ou} \quad i_Z d_J \mathrm{E} = 0 \quad \text{ou}$$

$$i_Z d_J \mathrm{L} = 0 \quad \text{ou, finalement} \quad i_{JZ}\, d\mathrm{L} = 0$$

Donc d'après (3)

$$i_{JZ}\Omega_0 = 0 \quad \text{et} \quad JZ = \lambda C\,, \quad \lambda \neq 0\,.$$

L'égalité (2) implique alors $i_c \Omega = 0$ ce qui est absurde car

$$i_C \Omega = d_J E \neq 0\,.$$

Remarque fondamentale. – Une forme finslérienne étant définie sur $\mathscr{T}$M, la fonction énergie correspondante est définie globalement sur $\mathscr{T}$M.

Par contre, dans le cas d'une forme lagrangienne Ω_0, le lagrangien L n'est défini que localement, le théorème de 2.6 n'étant plus applicable car $p + r = 0$, et $\theta_C \Omega = 0$ ne permet plus la décomposition de Ω en $di_C \theta + i_C d\theta$. Le lagrangien L n'est défini qu'à l'addition d'une fonction, linéaire en y, près. A Ω_0 correspond donc une famille de formes finslériennes locales admettant localement des sprays canoniques équivalents, d'où la notion de spray local de directions engendré par une forme lagrangienne donnée, non associée à une forme finslérienne globale donnée à priori.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMBROSE, PALAIS, SINGER, Sprays, Acad. Brasileira de Ciencias, Vol. 32, n° 2 (1960), 163-178.

[2] M. BERGER, Lectures on geodesics in riemannian geometry, Tata Institute, Bombay (1965).

[3] P. DAZORD, Sur une généralisation de la notion de spray, *C.R. Acad. Sc. Paris* t. 263 (1966), 543-546.

[4] A. FRÖLICHER et A. NIJENHUIS, Theory of vector-valued differential forms, Part. I, *Proc. Kon. Ned. Akad.* A, 59 (1956) 338-359.

[5] J. KLEIN, Espaces variationnels et Mécanique, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 12 (1962) p. 1-124.

[6] J. KLEIN, Les systèmes dynamiques abstraits. *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 13 (1963) p. 191-202.

[7] A. VOUTIER, Formes et sprays, Publications de l'Institut de Mathématiques Pures, St. Martin d'Hères (1968).

Manuscrit reçu le 15 février 1968.

J. KLEIN et A. VOUTIER
Institut de Mathématiques Pures
Faculté des Sciences, B.P. 116
38-Saint-Martin-d'Hères