ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN BERNARD

Caractérisations de certaines parties d'un espace compact muni d'un espace vectoriel ou d'une algèbre de fonctions continues

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 2 (1967), p. 359-382

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_2_359_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 2 (1967), 359-382.

CARACTÉRISATIONS DE CERTAINES PARTIES D'UN ESPACE COMPACT MUNI D'UN ESPACE VECTORIEL OU D'UNE ALGÈBRE DE FONCTIONS CONTINUES

par Alain BERNARD

1. Introduction. Notations.

Dans tout cet article, X désignera un espace topologique compact, A un sous-espace vectoriel de l'espace C(X) des applications continues de X dans **C**.

Pour toute partie K de X, nous noterons A(K) l'espace vectoriel des restrictions à K des éléments de A. Pour tout $f \in A$, nous noterons f/K la restriction de f à K, et $\|f\|_K$ la norme uniforme de f sur K $(\mathrm{Sup}\,\{|f(x)|,\ x \in K\})$.

DÉFINITION 1. — *Une partie* K *de* X *sera qualifiée de frontalière (pour* A*) si pour tout* $f \in A(K)$, *pour tout voisinage* V *de* K, *pour tout couple* (η, ε) *de nombres positifs, il existe* $\tilde{f} \in A$ *telle que :*

i) $\tilde{f}/K = f$

ii) $\|\tilde{f}\|_X \leqslant \|f\|_K + \eta$

iii) $\|\tilde{f}\|_{X-V} \leqslant \varepsilon$.

Nous nous proposons de donner diverses propriétés des parties frontalières de X (Théorèmes 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9). Cette notion de partie frontalière permet de caractériser l'espace vectoriel C(X) (Théorème 7).

Dans le cas particulier où A est une algèbre, les parties frontalières de X sont exactement les intersections d'ensemble pics (cf. [2]). Nos résultats sont alors à rapprocher de ceux contenus dans [2].

Les § 7 et 8 sont consacrés à l'étude de la notion de partie frontalière relativement à d'autres notions définies par A sur X : frontières, mesures représentatives. Dans le § 9 nous obtenons dans un cadre abstrait l'analogue de théorèmes de Fatou et de Rudin sur les fermés de mesure de Lebesgue nulle du cercle unité du plan complexe.

2. Diagrammes associés à un sous-compact K de X.

Soit K une partie compacte de X. Nous utiliserons les diagrammes suivants :

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_0(X-K) \arrow[r] & C(X) \arrow[rr] & & C(K) \arrow[r] & 0 \\
 & & & & A(K) \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & I_K \arrow[r] \arrow[uu] & A \arrow[r] \arrow[uu] & A/I_K \arrow[ur] \arrow[rr, dashed] & & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
0 & M(X-K) \arrow[l] \arrow[dd, "\pi_2"] & M(X) \arrow[l, "r"'] \arrow[dd, "\pi_1"] & & M(K) \arrow[ll, "i"'] \arrow[d, "\pi_3"] & 0 \arrow[l] \\
 & & & & {[A(K)]^*} \arrow[dl, "j"'] \arrow[dd] & \\
0 & I_K^* \arrow[l] \arrow[d, no head] & A^* \arrow[l, "r'"'] \arrow[d, no head] & {[A/I_K]^*} \arrow[l, "i'"'] & & 0 \arrow[ll] \\
 & 0 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Ces deux diagrammes sont constitués d'espaces vectoriels normés et d'applications linéaires continues. Les suites horizontales et verticales sont exactes. Ces diagrammes sont commutatifs.

1^er^ *diagramme.*

C(X) (resp. C(K), resp. $C_0(X-K)$) désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur X (resp. sur K, resp. sur X nulles sur K) muni de la norme de la convergence uniforme sur X (resp. sur K, resp. sur X − K).

I_K est l'espace vectoriel des éléments de A nuls sur K. A et I_K sont munis de la norme de la convergence uniforme sur X.

A/I_K est l'espace normé quotient de A par son sous-espace I_K.

A(K), espace des restrictions à K des éléments de A, est, lui, muni de la norme de la convergence uniforme sur K.

$A/I_K \to A(K)$ est la bijection canonique, continue, non forcément bicontinue.

Toutes les autres applications, canoniques, sont soit des isométries, soit des passages au quotient.

2ᵉ *diagramme.*

C'est le dual du premier. Les espaces vectoriels normés qui y interviennent sont munis de leur norme forte de dual. Sur la première ligne ces duals sont identifiés aux espaces de mesure (par exemple $M(X - K)$ est l'espace des mesures sur X nulles sur K, et $M(X) \to M(X - K)$ l'application « trace »).

L'application $[A(K)]^* \to [A/I_K]^*$ est injective et continue, mais non forcément surjective, ni isométrique.

Les autres applications sont soit des isométries, soit des passages au quotient.

Nous utiliserons ces diagrammes via les deux lemmes suivants, conséquences classiques de la théorie de la dualité (le premier est très simple, pour le deuxième on peut se rapporter par exemple à Bourbaki, EVT, Chap. IV, § 5, ex. 11).

LEMME 1. — *Pour que* $A/I_K \to A(K)$ *soit bicontinue, il faut et il suffit que* $[A(K)]^* \to [A/I_K]^*$ *soit surjective.*

LEMME 2. — *Si* A/I_K *est complet, pour que* $A/I_K \to A(K)$ *soit isométrique, il faut et il suffit que* $[A(K)]^* \to [A/I_K]^*$ *soit isométrique.*

3. Interpolation bornée.

DÉFINITION 2. — *Une partie compacte de* X *sera dite d'interpolation bornée (dans* A*) si la bijection* $A/I_K \to A(K)$ *est bicontinue, à interpolation stricte (dans* A*) si* $A/I_K \to A(K)$ *est isométrique.*

Remarque 1. — En revenant à la définition de la norme sur A/I_K on voit que K d'interpolation bornée équivaut à :

Il existe une constante c telle que, pour tout $f \in A(K)$, il existe $\tilde{f} \in A$, prolongeant f, avec $\|\tilde{f}\|_X \leqslant c\|f\|_K$.

Remarque 2. — Si A/I_K est complet, pour que K soit d'interpolation bornée, il faut et il suffit que $A(K)$ soit fermé dans $C(K)$. En particulier toute partie finie de X est d'interpolation bornée. Remarquons aussi que toute partie frontalière est d'interpolation stricte.

THÉORÈME 1. — *(Caractérisation des parties à interpolation bornée au moyen des mesures orthogonales à* A*).*

Soit A *un sous-espace vectoriel de* $C(X)$. *Soit* K *un sous-compact de* X. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) K *est d'interpolation bornée (dans* A*).*

(ii) $I_K^\perp = A^\perp + M(K)$ (i.e. *toute mesure sur* X *orthogonale à* I_K *peut se décomposer comme somme d'une mesure orthogonale à* A *et d'une mesure portée par* K).

Démonstration. — Montrons que (i) $\Longrightarrow$ (ii).

On a trivialement $M(K) + A^\perp \subset I_K^\perp$. Nous allons montrer l'inclusion opposée en utilisant le deuxième diagramme :

Soit $\mu \in I_K^\perp$. On a $\pi_2 \circ r(\mu) = 0$. Donc $r' \circ \pi_1(\mu) = 0$. Donc $\pi_1(\mu) \in$ Image (i'). D'après l'hypothèse et le lemme 1, j est surjective. Donc $\pi_1(\mu) \in$ Image $(i' \circ j)$. Or π_3 est surjective, donc $\pi_1(\mu) \in$ Image $(i' \circ j \circ \pi_3)$. Il existe donc $\nu \in M(K)$ telle que $\pi_1(\mu) = i' \circ j \circ \pi_3(\nu)$. Par commutativité $\pi_1(\mu) = \pi_1 \circ i(\nu)$. Donc $\pi_1(\mu - i(\nu)) = 0$, soit $\mu - i(\nu) \in A^\perp$.

c.q.f.d.

Montrons que (ii) $\Longrightarrow$ (i).

D'après le lemme 1, il nous suffit de montrer la surjectivité de j (deuxième diagramme) :

Soit $\alpha \in [A/I_K]^*$. π_1 étant surjective, il existe $\mu \in M(X)$ telle que $\pi_1(\mu) = i'(\alpha)$. Or $r' \circ i'(\alpha) = 0$, donc $r' \circ \pi_1(\mu) = 0$, donc $\pi_2 \circ r(\mu) = 0$, donc $\mu \in I_K^\perp$. Alors, par hypothèse, il existe $\mu_1 \in A^\perp$ et $\mu_2 \in M(K)$ tels que $\mu = \mu_1 + i(\mu_2)$. On a $\pi_1(\mu_1) = 0$, donc $\pi_1(\mu) = \pi_1 \circ i(\mu_2)$, donc, par commutativité, $\pi_1(\mu) = i' \circ j \circ \pi_3(\mu_2)$. Or $\pi_1(\mu) = i'(\alpha)$, donc, i' étant injective $\alpha = j \circ \pi_3(\mu_2)$.

c.q.f.d.

Remarque. — Il est trivial que la décomposition de (ii) sera unique (i.e. on aura une somme directe) si et seulement si, de plus, $A(K)$ est dense dans $C(K)$.

Remarque. — Le théorème 1 est à rapprocher de résultats obtenus par I. Glicksberg dans le cas où A est une algèbre [2].

PROPOSITION 1. — *(Une condition suffisante pour que* K *soit d'interpolation stricte).*

Soit A *un sous-espace vectoriel de* $C(X)$. *Soit* K *une partie compacte de* X *telle que* A/I_K *soit complet. Pour que* K *soit d'interpolation stricte (dans* A*), il suffit que toute mesure sur* X *orthogonale à* A *ait une restriction à* K *qui reste orthogonale à* A.

Démonstration. — Nous allons utiliser le deuxième diagramme D'après le lemme 2, il suffit de montrer que j est isométrique :

Soit $\alpha \in [A(K)]^*$. Posons $l = i' \circ j(\alpha)$. Il existe $\mu_1 \in M(K)$ telle que $\pi_3(\mu_1) = \alpha$ et $\|\mu_1\| = \|\alpha\|$. D'autre part, il existe $\mu_2 \in M(X)$ telle que $\pi_1(\mu_2) = l$ et $\|\mu_2\| = \|l\|$.

On a $i' \circ j \circ \pi_3(\mu_1) = l$, donc $\pi_1 \circ i(\mu_1) = l$. Or $\pi_1(\mu_2) = l$, donc $\pi_1(i(\mu_1) - \mu_2) = 0$, donc $i(\mu_1) - \mu_2 \in A^\perp$.

D'après l'hypothèse la restriction à K de $i(\mu_1) - \mu_2$, c'est-à-dire $\mu_1 - \mu_2/K$ est orthogonale à A, soit $\pi_3(\mu_1 - \mu_2/K) = 0$. Or $\pi_3(\mu_1) = \alpha$, donc $\pi_3(\mu_2/K) = \alpha$. Donc $\|\pi_3(\mu_2/K)\| = \|\alpha\|$.

Or $\|\pi_3(\mu_2/K)\| \leqslant \|\mu_2/K\| \leqslant \|\mu_2\| = \|l\|$, donc $\|\alpha\| \leqslant \|l\|$. Or $l = i' \circ j(\alpha)$, donc $\|l\| = \|j(\alpha)\|$. Donc $\|\alpha\| \leqslant \|j(\alpha)\|$, d'où on déduit bien que j est isométrique.

c.q.f.d.

La nature de cette condition suffisante nous permet de préciser la proposition 1.

THÉORÈME 2. — *Soit* A *un sous-espace vectoriel de* $C(X)$. *Soit* K *une partie compacte de* X *telle que* A/I_K *soit complet. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Toute mesure sur* X *orthogonale à* A *a une restriction à* K *orthogonale à* A.

(ii) *Pour tout* $h \in C(X)$, h *ne s'annulant pas sur* X, K *est d'interpolation stricte dans l'espace vectoriel* Ah.

Démonstration :

(i) $\Longrightarrow$ (ii).

En effet (i) entraîne que toute mesure sur X orthogonale à Ah a une restriction à K orthogonale à Ah, et il suffit d'appliquer ensuite la proposition 1 à l'espace vectoriel Ah.

(ii) $\Longrightarrow$ (i).

En effet soit μ une mesure orthogonale à A, et soit $f \in A(K)$. Nous devons montrer que $\int_K f\,d\mu = 0$. Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Il existe $h \in C(X)$, ne s'annulant pas sur X, telle que $h/K = 1$ et $\int_{X-K} \frac{1}{|h|}\,d|\mu| \leqslant \varepsilon$. h étant égale à 1 sur K, $f \in Ah(K)$. K étant d'interpolation stricte dans Ah, il existe $\tilde{f} \in A$ telle que $\|\tilde{f}h\|_X \leqslant \|f\|_K$. $\frac{\mu}{h}$ étant orthogonale à Ah, on a :

$$\int \tilde{f}h\,d\frac{\mu}{h} = 0;$$

soit, grâce au choix de h

$$\int_K f\,d\mu + \int_{X-K} \tilde{f}\,hd\frac{\mu}{h} = 0,$$

puis

$$\left|\int_K f\,d\mu\right| \leqslant \varepsilon\|f\|_K$$

grâce au choix de $\tilde{f}$.

Ceci étant possible quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\int_K f\,d\mu = 0.$$

c.q.f.d.

4. Parties frontalières.

Rappelons que la notation de partie frontalière a été définie dans l'introduction.

THÉORÈME 3. — *(Caractérisations des parties frontalières au moyen des mesures orthogonales à* A*).*

Soit A *un sous-espace vectoriel de* C(X). *Soit* K *une partie* *compacte de* X *telle que* A/I_K *soit complet. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) K *est une partie frontaliere.*

(ii) *Toute mesure sur* X *orthogonale à* A *a une restriction à* K *orthogonale à* A.

(iii) *Toute mesure sur* X *orthogonale à* I_K *a une restriction au complémentaire de* K *qui est orthogonale à* A.

Démonstration :

(i) $\Longrightarrow$ (iii).

En effet soit μ une mesure sur X orthogonale à I_K. Soit $f \in A$. K étant frontalière, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f' \in A$ telle que $f/K = f'/K$ et telle que $\int_{X-K} |f'| d|\mu| \leqslant \varepsilon$. Or $f - f' \in I_K$, donc $\int (f - f')\, d\mu = 0$. Par suite

$$\left|\int_{X-K} f\, d\mu\right| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout ε, (iii) est démontré.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) est trivial. (ii) $\Longrightarrow$ (i) est conséquence immédiate du théorème 2 et du théorème d'Urhyson.

Remarque. — Le théorème 3 est à rapprocher de résultats obtenus par I. Glicksberg dans le cas où A est une algèbre [2].

Corollaire. — *(Lien entre le fait que* K *soit frontalière et l'approximation sur* X — K *des éléments de* A *par des éléments de* A *nuls sur* K*).*

Soit A *un sous-espace vectoriel de* C(X). *Soit* K *un sous-compact de* X *tel que* A/I_K *soit complet. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) K *est frontalier.*

(ii) *Pour tout* $f \in A$, *pour tout voisinage* V *de* K, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $f' \in I_K$ *telle que :*

$$\|f - f'\|_{X-V} \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \|f'\|_X \leqslant 3\|f\|_X.$$

Démonstration :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) est trivial d'après la définition de frontalier.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) est conséquence du théorème précédent, en effet la condition (ii) entraîne immédiatement que toute mesure orthogonale à I_K a une restriction au complémentaire de K qui est orthogonale à A.

THÉORÈME 4. — *(Incidence de l'hypothèse* A *fermée dans* C(X) *sur les parties frontalieres).*

Soit A *un sous-espace vectoriel fermé de* C(X). *Soit* K *un sous-compact de* X. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) K *est frontalier.*

(ii) *Pour tout* $f \in A(K)$, *pour tout voisinage* V *de* K, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\tilde{f} \in A$ *telle que :*

$$\tilde{f}/K = f$$
$$\|\tilde{f}\|_X \leqslant \|f\|_K$$
$$\|\tilde{f}\|_{X-V} \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration :

(ii) $\Longrightarrow$ (i) est trivial. Réciproquement soit K une partie frontalière de X, et soit $f \in A(K)$. Posons $f_n = \dfrac{f}{2^n}$ et $s_n = \sum_1^n f_i$. Il existe $\tilde{f}_1 \in A$, prolongeant f_1, telle que

$$\|\tilde{f}_1\|_X \leqslant \|f_1\|_K + \frac{1}{4}\|f_1\|_K \quad \text{et} \quad \|\tilde{f}_1\|_{X-V} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Nous allons établir, par récurrence, l'existence d'une suite $\tilde{f}_n$, telle que $\tilde{f}_1$ soit l'élément défini ci-dessus, et telle que, pour tout $n > 1$, on ait : (avec $\tilde{f}_n \in A$ et $\tilde{f}_n/K = f_n$)

a_n) $$\|\tilde{f}_n\|_X \leqslant \|f_n\|_K + \frac{1}{2^{n+1}}\|f_n\|_K$$

b_n) $$\left\|\sum_1^n \tilde{f}_i\right\|_X \leqslant \left\|\sum_1^n f_i\right\|_K + \frac{1}{2^{n+1}}\left\|\sum_1^n f_i\right\|_K$$

c_n) Pour tout $x \in X$ tel que

$$\left|\sum_1^{n-1} \tilde{f}_i(x)\right| \geqslant \left\|\sum_1^{n-1} f_i\right\|_K + \frac{1}{2^{n+1}}\left\|\sum_1^{n-1} f_i\right\|_K$$

on a $$|\tilde{f}_n(x)| \leqslant \|f_n\|_K - \frac{1}{2^n}\left\|\sum_1^{n-1} f_i\right\|_K.$$

d_n) $$\|\tilde{f}_n\|_{X-V} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Supposons construits $\tilde{f}_2 \ \ldots \ \tilde{f}_{n-1}$ tels que les conditions soient satisfaites. Montrons alors l'existence de $\tilde{f}_n$:

$\|f_n\|_K - \frac{1}{2^n}\left\|\sum_1^{n-1} f_i\right\|$ étant strictement positif, l'ensemble des x intervenant dans la condition $c_n)$ étant un compact disjoint de K, le fait que K soit frontalier fournit instantanément une fonction $\tilde{f}_n \in A$, telle que $\tilde{f}_n/K = f_n$ et satisfaisant $a_n)$, $c_n)$, $d_n)$. Il reste à montrer $b_n)$:

Soit x tel que $\left|\sum_1^{n-1} \tilde{f}_i(x)\right| \geqslant \left\|\sum_1^{n-1} f_i\right\|_K + \frac{1}{2^{n+1}}\left\|\sum_1^{n-1} f_i\right\|_K$, alors

$$\left|\sum_1^{n} \tilde{f}_i(x)\right| \leqslant |\tilde{f}_n(x)| + \left|\sum_1^{n-1} \tilde{f}_i(x)\right|$$

$$\leqslant \left(\|f_n\|_K - \frac{1}{2^n}\left\|\sum_1^{n-1} f_i\right\|_K\right) + \left(\left\|\sum_1^{n-1} f_i\right\|_K + \frac{1}{2^n}\left\|\sum_1^{n-1} f_i\right\|_K\right)$$

d'après (c_n) et (b_{n-1})

$$\leqslant \left\|\sum_1^{n} f_i\right\|_K$$

Si par contre x est tel que $\left|\sum_1^{n-1} \tilde{f}_i(x)\right| < \left\|\sum_1^{n-1} f_i\right\|_K + \frac{1}{2^{n+1}}\left\|\sum_1^{n-1} f_i\right\|_K$, alors

$$\left|\sum_1^{n} \tilde{f}_i(x)\right| \leqslant \left|\sum_1^{n-1} \tilde{f}_i(x)\right| + |\tilde{f}_n(x)|$$

$$\leqslant \left(\left\|\sum_1^{n-1} f_i\right\| + \frac{1}{2^{n+1}}\left\|\sum_1^{n-1} f_i\right\|_K\right) + \|f_n\|_K + \frac{1}{2^{n+1}}\|f_n\|_K$$

d'après (a_n)

$$\leqslant \left\|\sum_1^{n} f_i\right\|_K + \frac{1}{2^{n+1}}\|f_n\|_K.$$

Ce qui montre donc (b_n).

Considérons maintenant $\tilde{f} = \Sigma\tilde{f}_n$. D'après les conditions $a_n)$, la série converge uniformément et par suite $\tilde{f} \in A$ (car A est fermée). D'autre part, $\|\tilde{f}\|$ est la limite de $\left\|\sum_1^{n} \tilde{f}_i\right\|$, et d'après les conditions $b_n)$, on a $\|\tilde{f}\|_X \leqslant \|\tilde{f}\|_K$. Enfin $\tilde{f}/K = f$ et $\|\tilde{f}\|_{X-V} \leqslant \varepsilon$ d'après les conditions $d_n)$.

c.q.f.d.

Théorème 5. — *(Étude des* G_δ *frontaliers dans le cas où* A *est fermé dans* C(X)*).*

Soit A *un sous-espace vectoriel fermé de* C(X)*. Soit* K *un sous-compact de* X *tel que* K *soit un* G_δ *(intersection dénombrable d'ouverts). Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) K *est frontalier.*

(ii) *Pour tout* $f \in A(K)$, *non nulle, pour tout voisinage* V *de* K, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\tilde{f} \in A$ *telle que :*

— $\tilde{f}/K = f$

— *pour tout* $x \notin K$, $|\tilde{f}(x)| < \|f\|_K$

— $\|\tilde{f}\|_{X-V} \leqslant \varepsilon$.

Démonstration :

(i) $\Longrightarrow$ (ii).

K étant un G_δ, il existe $h \in C(X)$ telle que $h = 1$ sur K et $|h(x)| < 1$ sur $X - K$. On peut de plus prendre h telle que $\|h\|_{X-V} \leqslant \varepsilon$ et pour tout x, $h(x) \neq 0$. K étant frontalier pour A, l'est pour $A \times \frac{1}{h}\cdot$ (Homogénéité de la condition (ii) du théorème 3.) D'après le théorème 4 on peut donc prolonger $f \in A$ en $\tilde{f} \in A$ telle que pour tout $x \in X$,

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant |h(x)|\,\|f\|_K.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) est trivial.

Remarquons d'ailleurs que, par exemple si A contient les constantes, (ii) ne peut avoir lieu que si K est un G_δ. Rappelons aussi que si X est métrisable, tout sous-compact de X est un G_δ.

5. Topologie frontalière.

Théorème 6. — *(Famille des parties frontalières de* X*). Si* A *est un sous-espace vectoriel fermé de* C(X)*, l'ensemble des parties frontalières de* X *est clos pour l'union finie et l'intersection quelconque. De plus si une union dénombrable de parties frontalières est compacte, c'est une partie frontalière.*

Démonstration. — Montrons tout d'abord que l'intersection de deux compacts frontaliers K_1 et K_2 de X en est un. Il suffit d'utiliser la caractérisation (ii) du théorème 3 : Soit μ orthogonale à A. La restriction μ/K_1 de μ à K_1 est orthogonale à A, donc la restriction de μ/K_1 à K_2, c'est-à-dire la restriction de μ à $K_1 \cap K_2$, est orthogonale à A.

Toute intersection finie de compacts frontaliers en est donc un (X lui-même est trivialement frontalier).

Soit maintenant $\{K_i\}_{\iota \in I}$ une famille quelconque de compacts frontaliers. Soit V un voisinage ouvert de $K = \cap \{K_i, i \in I\}$, soit $\varepsilon > 0$, soit $\eta > 0$, soit $f \in A$. Posons $V' = \{x \in X, |f(x)| < \|f\|_K + \eta/2\}$. $V \cap V'$ est un voisinage ouvert de K. Par compacité, il existe une sous-famille finie J de I telle que $K_J = \cap \{K_i, i \in J\}$ soit incluse dans $V \cap V'$. Nous savons que K_J est frontalier. Il existe donc un prolongement $\tilde{f} \in A$ de la restriction à K_J de f tel que :

$$\|\tilde{f}\|_X \leqslant \|f\|_{K_J} + \eta/2 \qquad \text{et} \qquad \|\tilde{f}\|_{X-V} \leqslant \varepsilon.$$

Mais $\tilde{f}$ prolonge à fortiori la restriction à K de f et

$$\|\tilde{f}\|_X \leqslant \|f\|_K + \eta, \qquad \|\tilde{f}\|_{X-V} \leqslant \varepsilon.$$

K est donc bien frontalier.

Soient maintenant K_1 et K_2 deux compacts frontaliers. Montrons que $K_1 \cup K_2$ en est un : utilisons la caractérisation (ii) et le fait que $K_1 \cap K_2$ est frontalier, si μ est orthogonale à A, μ/K_1, μ/K_2 et $\mu/K_1 \cap K_2$ sont orthogonales à A. Donc $\mu/K_1 \cup K_2$ l'est.

Soit enfin $\{K_n\}_{n \in N}$ une famille dénombrable de compacts frontaliers. Supposons que $K = \cup \{K_n, n \in N\}$ soit compact. Montrons que K est frontalier. Du fait que toute union finie de K_n est frontalière, on peut supposer la famille K_n croissante. Le résultat est alors conséquence de la caractérisation (ii) du théorème 3.

Définition 3. — *Soit* A *un sous-espace vectoriel fermé de* C(X). *Nous appellerons topologie frontalière sur* X *(pour* A*) la topologie dont les fermés sont les parties frontalières de* X *(pour* A*). Pour toute partie* H *de* X, *nous noterons* F(H) *son adhérence pour la topologie frontalière.*

THÉORÈME 7. — *(Caractérisation de l'espace vectoriel* $C(X)$*). Soit* A *un sous-espace vectoriel fermé de* $C(X)$, *contenant les constantes. La topologie frontalière est séparée si et seulement si* A *est égal à* $C(X)$.

Démonstration. — En effet si cette topologie est séparée, étant moins fine que la topologie compacte, c'est cette topologie. Donc tout sous-compact de X est frontalier. Soit alors μ orthogonale à A. Pour tout compact K de X la restriction de μ à K est orthogonale à A. Or $1 \in A$, donc $\int_K 1\, d\mu = 0$ pour tout compact K. On en déduit $\mu = 0$. (La réciproque est conséquence du théorème d'Urhyson).

Remarquons encore le théorème suivant, qui généralise au cas d'espaces vectoriels un résultat, dû à Bishop, très utilisé dans le cas d'algèbres.

THÉORÈME 8. — *Soit* A *un sous-espace vectoriel fermé de* $C(X)$. *Soit* K *un sous-compact frontalier de* X. *Soit* K' *un sous-compact de* K, *frontalier dans* K *pour* $A(K)$. *Alors* K' *est frontalier dans* X *pour* A.

Démonstration. — K étant frontalier et A fermée, $A(K)$ est fermée dans $C(K)$. Nous pouvons donc utiliser la caractérisation (ii) du théorème 3. Soit μ sur X orthogonale à A, μ restreinte à K est orthogonale à A, donc μ restreinte à K est orthogonale à $A(K)$, donc μ restreinte à K' est orthogonale à $A(K)$, donc à A.

Ce théorème, en d'autres termes, signifie que si K est frontalier dans X la topologie frontalière définie par $A(K)$ sur K est la topologie induite par celle sur X définie par A.

Remarquons enfin une autre propriété de cette topologie :

THÉORÈME 9. — *Soit* A *un sous-espace vectoriel fermé de* $C(X)$, A *est localement définie pour la topologie frontalière* (i.e. *pour qu'une application* f *de* X *dans* C *soit dans* A, *il suffit que pour tout* $x \in X$, *il existe un voisinage* U *de* x *— pour la topologie frontalière — tel que la restriction de* f *à* U *soit restriction à* U *d'un élément de* A).

Démonstration. — La topologie frontalière étant quasi compacte, il suffit de montrer que si $U_1 \ldots U_n$ est un recouvrement d'ouverts « frontaliers » de X, si f est telle que $f/U_i \in A(U_i)$ pour tout i, alors $f \in A$. A étant fermée, il suffit alors de montrer que si $\mu \in A^\perp$, $\int f\,d\mu = 0$. D'après le théorème 3, pour toute intersection $V = U_i \cap \ldots \cap U_{i_p}$ d'éléments du recouvrement, $\mu/V \in A^\perp$, soit $\int_V f\,d\mu = 0$. On en déduit que $\int f\,d\mu = 0$.

Cette propriété est à rapprocher de la propriété analogue lorsqu'on munit le spectre d'une algèbre de Banach de la « hullkernel » topologie.

6. Cas d'une algèbre : ensembles pics.

Définition 4. — *Une partie* K *de* X *est dite ensemble pic (pour* A*), s'il existe* $h \in A$ *telle que :*

— *pour tout* $x \in K$, $h(x) = 1$

— *pour tout* $x \notin K$, $|h(x)| < 1$.

Théorème 10. — *Soit* A *une sous-algèbre fermée de* C(X)*, contenant les constantes. Soit* K *une partie de* X*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) K *est frontalier (pour* A*).*

(ii) K *est intersection d'ensembles pics (pour* A*).*

Démonstration. — (i) $\Longrightarrow$ (ii) trivialement, d'après le théorème 4.

Ensuite (ii) $\Longrightarrow$ (i) : en effet soit $f \in A(K)$. Soit V un voisinage de K et soit ε et $\eta > 0$. Soit $\tilde{f}_0$ un prolongement de f dans A et soit $V_1 = \{x \in X, |\tilde{f}_0(x)| < \|f\|_K + \eta\}$. $V \cap V_1$ est un voisinage de K. K étant intersection d'ensembles pics, il existe $h \in A$ telle que $\|h\|_X = 1$, pour tout $x \in K, h(x) = 1$, pour tout $x \notin V \cap V_1, |h(x)| < 1$ (par compacité et en utilisant le fait que A est stable par produit). Considérons $\tilde{f}_n = \tilde{f}_0 \times h^n$. On a évidemment $\tilde{f}_n \in A$, $\tilde{f}_n/K = f$, et pour n assez grand $\|\tilde{f}_n\|_X \leqslant \|f\|_K + \eta$ et $\|\tilde{f}_n\|_{X-V} \leqslant \varepsilon$.

c.q.f.d.

Corollaire. — *Soit* A *une sous-algèbre fermée de* C(X)*, contenant les constantes. Soit* K *un sous-compact de* X*. Les* *assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) K *est intersection d'ensembles pics (pour* A*).*

(ii) *Pour tout* $h \in C(X)$, *telle que* $h = 1$ *sur* K, *et ne s'annulant pas sur* X, *il existe* $f \in A$ *telle que* $f = 1$ *sur* K *et* $|f(x)| \leqslant |h(x)|$ *pour tout* $x \in X$.

(iii) *Pour tout* $f \in A(K)$, *pour tout* $h \in C(X)$ *ne s'annulant pas sur* X *et telle que* $|f(x)| \leqslant |h(x)|$ *sur* K, *il existe* $\tilde{f} \in A$, *prolongeant* f, *telle que* $|\tilde{f}(x)| \leqslant |h(x)|$ *sur* X.

Démonstration. — (ii) $\Longrightarrow$ (i) et (iii) $\Longrightarrow$ (ii) sont triviales. Il reste (i) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $f \in A(K)$, soit $h \in C(X)$ telle que $|f(x)| \leqslant |h(x)|$ sur K, et ne s'annulant pas sur X. $\dfrac{f}{h} \in \dfrac{A}{h}$. D'après le théorème 10, K est d'interpolation bornée pour A, donc pour A/h (homogénéité de la condition (ii) du théorème 3), donc, d'après le théorème 4, on peut prolonger $\dfrac{f}{h} \in \dfrac{A}{h}(K)$ en un élément $\dfrac{\tilde{f}}{h} \in \dfrac{A}{h}$ tel que $\left\|\dfrac{\tilde{f}}{h}\right\|_X \leqslant \left\|\dfrac{f}{h}\right\|_K$. Or $\left\|\dfrac{f}{h}\right\|_K \leqslant 1$. Donc pour tout $x \in X$, $|\tilde{f}(x)| \leqslant |h(x)|$.

Remarque. — Si une intersection d'ensembles pics est un G_δ, c'est un ensemble pic : il suffit d'appliquer soit le corollaire précédent, soit directement le théorème 5.

Théorème 11. — *(Une propriété des parties frontalières lorsque* A *est une algèbre).*

Soit A *une sous-algèbre fermée de* $C(X)$, *contenant les constantes séparant les points. Toute partie frontalière de* X *contient une partie frontalière réduite à un point.*

Démonstration. — D'après le théorème de Zorn, et du fait qu'une intersection de parties frontalières est frontalière, tout frontalier contient un frontalier minimal non vide. Il suffit donc de montrer que tout frontalier minimal est réduit à un point. Soit K un frontalier minimal de X. $A(K)$ séparant les points de K, si K n'est pas réduit à un point, il existe $f \in A$, non constante sur K. Soit $x_0 \in X$ tel que $|f(x_0)| = \|f\|_K$. $K' = \{x \in K,\ f(x) = f(x_0)\}$ est trivialement un ensemble pic de K, distinct de K. $A(K)$ étant fermée dans $C(K)$, K' est frontalier dans K, donc dans X (théorème 8). D'où la contradiction cherchée.

Corollaire. — (E. Bishop [1]). *Soit* A *une sous-algèbre de* C(X), *contenant les constantes, séparant les points. L'ensemble des parties frontalières de* X *réduites à un point est une partie dense de la frontière de Silov de* X.

Démonstration. — Soit x_0 un point de la frontière de Silov de X. Soit V un voisinage de x_0. Il existe $f \in A$ telle que $\|f\|_{X-V} < \|f\|_X$. Soit $x_1 \in X$ tel que $|f(x_1)| = \|f\|_X$. $K = \{x,\ f(x) = f(x_1)\}$ est une partie frontalière de X, incluse dans V. D'après le théorème 11, K, donc V, contient un point frontalier. (Il est d'autre part bien évident que tout point frontalier appartient à la frontière de Silov).

c.q.f.d.

Proposition 2. — *(Exemple d'utilisation de la notion de point frontalier).*

Soit A *une sous-algèbre fermée de* C(X), *contenant les constantes, séparant les points. Si* X *est infini et métrisable, il existe un sous-compact infini* K *de* X *tel que* A(K) = C(K) *(*K *pouvant être choisi frontalier).*

Lemme 3. — *Avec les hypothèses ci-dessus, il existe* $x_0 \in X$, *frontalier, non isolé dans* X *(sans supposer* X *métrisable).*

Démonstration du lemme 3. — Supposons tout d'abord que X soit le spectre de A (i.e. son espace de Gelfand). Si A = C(X), X étant infini et tout point de X étant frontalier, le lemme est trivial. Si $A \neq C(X)$ d'après le théorème des idempotents de Silov, il existe une composante connexe K de X non réduite à un point et cette composante connexe est une partie frontalière de X. D'après le théorème 11, cette composante connexe contient un point frontalier, évidemment non isolé.

Il reste à étudier le cas où X n'est pas le spectre de A, le lemme 3 est alors conséquence du lemme suivant :

Lemme 4. — *Si* x_0 *est un point isolé dans la frontière de Silov de* X, x_0 *est un point isolé dans* X *(sans supposer* X *métrisable).*

Démonstration du lemme 4. — Soit S la frontière de Silov de X. Soit x_0 isolé dans S. On a $S = S' \cup \{x_0\}$, avec S' compact disjoint de $\{x_0\}$. Posons

$$N(S') = \{x \in X,\ \forall f \in A,\ |f(x)| \leqslant \|f\|_{S'}\}.$$

S étant la frontière de Silov de X, $x_0 \notin N(S')$. Or $N(S') \cup \{x_0\} = X$ (en effet supposons $x \in X$, $x \notin N(S')$: il existe alors $f \in A$ telle que $f(x) = 1$ et $\|f\|_{S'} \leqslant \frac{1}{2}\cdot$ Si nous supposons de plus $x \neq x_0$, il existe $g \in A$ telle que $g(x) = 1$ et $g(x_0) = 0$. Pour n assez grand $f^n g$ est un élément de A qui n'atteint pas son maximum sur S, contradiction) $N(S')$ étant compact, x_0 est bien isolé dans X. Le lemme 3 est conséquence triviale du lemme 4.

Démonstration de la proposition 3. — D'après les lemmes 3 et 4, il existe un point x_0, frontalier dans X, non isolé dans la frontière de Silov S de X. X étant *métrisable*, il existe une suite $\{x_n\}$ d'éléments de S, tous distincts, convergeant vers x_0. D'après le corollaire du théorème 11, on peut choisir les x_n frontaliers. Posons $K = \bigcup_{n \geqslant 0} \{x_n\}$. K est un compact dénombrable de X, frontalier d'après le théorème 6. En particulier A(K) est fermé dans C(K). Or K est complètement disconnecté, donc, d'après le théorème des idempotents de Silov (ou d'après le théorème 7) A(K) = C(K). c.q.f.d.

7. Parties frontalières, frontières, ensembles zéro-convexes.

DÉFINITION 5. — *Une partie* K *de* X *sera dite normalement convexe (pour* A*) si pour tout* $x \notin K$, *il existe* $f \in A$ *telle que* $|f(x)| > \|f\|_K$. *Une intersection quelconque de normalement convexes l'est. Pour tout* $H \subset X$, *nous noterons* N(H) *l'enveloppe convexe normale de* H : *intersection des normalement convexes contenant* H.

Une partie S de X sera dite *frontière* de H si $N(S) \supset H$.

DÉFINITION 6. — *Une partie* K *de* X *sera dite zéro-convexe (pour* A*) si pour tout* $x \notin K$, *il existe* $f \in A$ *telle que* f *soit nulle sur* K *et non nulle en* x. *Une intersection* *quelconque de zéro-convexes l'est. Pour tout* $H \subset X$, *nous noterons* $O(H)$ *l'enveloppe zéro-convexe de* H : *intersection des zéro-convexes contenant* H.

PROPOSITION 3. — *Soit* A *un sous-espace vectoriel de* $C(X)$ *contenant les constantes. Soit* K *une partie de* X. *On a les implications suivantes :*

(i) K *frontalier* $\Longrightarrow$ K *zéro-convexe* $\Longrightarrow$ K *normalement convexe* $\Longrightarrow$ K *compact.*

(ii) K *normalement convexe d'interpolation stricte* $\Longrightarrow$ K *zéro-convexe.*

(iii) *si* A *est une algèbre, l'union de deux zéro-convexes est zéro-convexe.*

(iv) *si* A *est une algèbre,* K *normalement convexe d'interpolation bornée* $\Longrightarrow$ K *zéro-convexe.*

Démonstration. — (i) est simple conséquence des définitions.

Montrons (ii) :

Soit $x \in O(K)$, soit $f \in A$: puisque K est d'interpolation stricte, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f' \in A$ telle que $f'/K = f/K$ et $|f'(x)| \leqslant \|f\|_K + \varepsilon$. Puisque $x \in O(K)$ on a $f'(x) = f(x)$. Donc $|f(x)| \leqslant \|f\|_K + \varepsilon$ quel que soit $\varepsilon > 0$, donc $|f(x)| \leqslant \|f\|_K$. On en déduit que $x \in N(K)$. Or $N(K) = K$. Donc $x \in K$.

c.q.f.d.

(iii) est simple conséquence du fait que le produit de deux éléments de A est dans A.

(iv) se démontre ainsi :

Soit $x \in O(K)$ puisque K est d'interpolation bornée, il existe une constante c telle que, quel que soit $f \in A$, il existe $f' \in A$ telle que $f'/K = f/K$ et $|f'(x)| \leqslant c\|f\|_K$. Puisque $x \in O(K)$, $f'(x) = f(x)$, donc $|f(x)| \leqslant c\|f\|_K$. Supposons qu'il existe $f \in A$ telle que $|f(x)| > \|f\|_K$. Alors, pour n assez grand $|f^n(x)| > c\|f^n\|_K$, d'où une contradiction. Donc pour tout $f \in A$ $|f(x)| \leqslant \|f\|_K$, i.e. $x \in N(K) = K$.

c.q.f.d.

THÉORÈME 12. — *(Toute partie frontalière coupe « bien » toute frontière.)*

Soit A *un sous-espace vectoriel fermé de* $C(X)$, *contenant* *les constantes. Soit* S *une frontière compacte de* X. *Soit* K *une partie de* X *frontalière (pour* A*). Alors :*

$$K = F(K \cap S) = O(K \cap S) = N(K \cap S).$$

Démonstration. — On a trivialement

$$K \supset F(K \cap S) \supset O(K \cap S) \supset N(K \cap S).$$

Soit ensuite $x \in K$: d'après le théorème de Hahn Banach, il existe une mesure de probabilité m sur S telle que, pour tout $f \in A$, $f(x) = \int f\, dm$. $m - \varepsilon_x$ (ε_x désignant la mesure de Dirac en x) est orthogonale à A. D'après le théorème 3, m est portée par K, donc par $K \cap S$. On en déduit que $x \in N(K \cap S)$.

c.q.f.d.

Théorème 13. — *Soit* A *une sous-algèbre fermée de* C(X), *contenant les constantes. Soit* S *une frontière compacte de* X. *Toute partie de* S *frontalière pour* A(S) *est trace sur* S *d'une partie de* X *frontalière pour* A.

Démonstration. — Soit K une partie de S frontalière pour A(S). Soit $x_0 \in S$, $x_0 \notin K$. Il existe $f \in A$ telle que $f(x) = 1$ pour tout $x \in K$, $\|f\|_S = 1$ et $|f(x_0)| < 1$. Soit $K' = \{x \in X, f(x) = 1\}$. K' est frontalier dans X (pour A), $x_0 \notin K' \cap S$, et $K' \supset K$.

c.q.f.d.

Remarque. — Il est faux que la notion de topologie frontalière soit transitive : Soit K une partie compacte de X, soit K' une partie de K, frontalière pour A(K) : K' n'est pas forcément trace sur K d'une partie frontalière de X pour A. Le théorème 8 montrait la transitivité si K est lui-même frontalier. Le théorème 13 montre cette transitivité dans le cas d'une algèbre, si K est une frontière.

8. Parties frontalières et mesures représentatives : ergodicité.

Définition 7. — *Soit* Y *un espace topologique compact, soit* M *un ensemble de mesures de Radon sur* Y. *Une partie* K *de* Y *sera dite* M-*ergodique si elle est compacte et si pour tout* $\mu \in M$, *on a soit* $|\mu|$ *portée par* K, *soit* $|\mu|$ *nulle sur* K.

PROPOSITION 4. — *L'ensemble des parties* M-*ergodiques de* Y *est clos par union finie et intersection quelconque. Si une union dénombrable de parties* M-*ergodiques est compacte, elle est* M-*ergodique.*

Démonstration. — Simple application de la théorie de la mesure.

DÉFINITION 8. — *Soit* A *un sous-espace vectoriel de* $C(X)$. *Soit* $x \in X$. *Nous appellerons mesure représentative de* x *sur* X *toute mesure de probabilité* m *sur* X *telle que, pour tout* $f \in A$, *on ait* $f(x) = \int f\,dm$. *Nous noterons* $M(X, A)$ *l'ensemble des mesures* m *sur* X *telles qu'il existe* $x \in X$ *tel que* m *soit une mesure représentative de* x.

Remarque. — Soit K une partie $M(X, A)$-ergodique de X. Soit $x \in X$. Si $x \in K$ (resp. $x \notin K$) on a pour toute mesure m représentative de x, $m(K) = 1$ (resp. $m(K) = 0$).

THÉORÈME 14. — *(Ergodicité des parties frontalières.) Soit* A *un sous-espace vectoriel de* $C(X)$, *contenant les constantes: toute partie frontalière de* X *(pour* A*) est* $M(X, A)$-*ergodique.*

Démonstration. — Soit tout d'abord $x \in K$ et m représentant x. Montrons que $m(K) = 1$. Supposons $m(K) < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 1 - m(K)$. Il existe un voisinage V de K tel que $m(V - K) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. K étant frontalier, il existe $f \in A$ telle que $f = 1$ sur K, $\|f\|_X \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{3}$, $\|f\|_{X-V} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Puisque $f(x) = \int f\,dm$, soit

$$f(x) = \int_K f\,dm + \int_{V-K} f\,dm + \int_{X-V} f\,dm,$$

on en déduit :

$$1 \leqslant m(K) + \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right) \times \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

d'où

$$1 \leqslant m(K) + \varepsilon$$

ce qui est contraire au choix de ε.

Soit maintenant $x \notin K$ et m représentant x. Montrons que $m(K) = 0$. Pour tout $f \in A$, $f(x) = \int_K f\,dm + \int_{CK} f\,dm$. Du fait que K est frontalier, on peut comme ci-dessus prendre f égale à 1 sur K et telle que $\int_{CK} f\,dm$ soit aussi petit que l'on veut, ainsi que $f(x)$. On en déduit $m(K) = 0$.

Remarque. — La réciproque est fausse : une partie M(X, A)-ergodique n'est pas forcément frontalière. Nous allons voir pourtant que dans le cas d'une algèbre, la réciproque est vraie pour les parties réduites à un point, et nous verrons plus loin des algèbres particulières où la validité sans restriction de la réciproque est assurée.

THÉORÈME 15. — *Soit* A *une sous-algèbre de* C(X), *contenant les constantes. Soit* x_0 *un élément de* X. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\{x_0\}$ *est* M(X, A)-*ergodique.*

(ii) $\{x_0\}$ *est frontalier* (pour A).

Démonstration. — Il reste à voir que (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit μ une mesure sur X orthogonale à A; d'après le théorème 3 il suffit de montrer que μ n'a pas de masse en x_0. Décomposons μ par rapport à la masse de Dirac ε_{x_0} en x_0 : $\mu = \lambda\varepsilon_{x_0} + \nu$. ν est orthogonale à l'idéal I_{x_0} des éléments de A nuls en x_0 : x_0 n'admettant sur X que la mesure représentative ε_{x_0}, le théorème de F. et M. Riesz nous dit que ν est orthogonale à A. Donc $\lambda\varepsilon_{x_0}$ est orthogonale à A, donc $\lambda = 0$.

c.q.f.d.

COROLLAIRE. — *Soit* A *une sous-algèbre fermée de* C(X), *contenant les constantes. Soit* K *un sous-compact dénombrable de* X. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) K *est* M(X, A)-*ergodique.*

(ii) K *est frontalier (pour* A*).*

Démonstration. — Nous n'avons à montrer que (i) $\Longrightarrow$ (ii). D'après le théorème des idempotents de Silov, A(K) est dense dans C(K) (si A sépare les points sur K, mais on se ramène facilement à ce cas là). Tout point de K est donc M(K, A(K))-ergodique. K étant M(X, A)-ergodique, on en déduit que tout point de K est M(K, A)-ergodique (trivial). Donc d'après le théorème 15, tout point de K est frontalier (pour A). K étant compact et dénombrable, est alors frontalier d'après le théorème 6.

c.q.f.d.

9. Algèbres particulières.

Dans tout ce paragraphe, A désignera une sous-algèbre fermée de C(X), contenant les constantes, séparant les points. S désignera la frontière de Silov de X.

DÉFINITION 9. — A *sera dite fondamentale (sur* X*) si pour tout* $x \in X$ *il existe une seule mesure représentant* x *sur* S. *Cette mesure sera notée* m_x.

DÉFINITION 10. — X *sera dit bien partagé (par* A*) si pour tout* $x \in X$, *notant* $G(x)$ *l'adhérence de la partie de Gleason de* x, *on a* $x \in N(G(x) \cap S)$. *(Ce qui revient à dire qu'il existe une mesure représentative de* x *sur* S *portée par* $G(x)$.*)*

DÉFINITION 11. — *Nous noterons* $\tilde{X}$ *l'ensemble des mesures* m *sur* S *telles qu'il existe* $x \in X$ *tel que* m *représente* x.

PROPOSITION 5. — *Soit* A *une sous-algèbre fermée de* C(X), *contenant les constantes, séparant les points. Soit* S *la frontière de Silov de* X. *Supposons* A *fondamentale et* X *bien partagé par* A. *Alors toute partie de* S *zéro-convexe (pour* A(S)*) est* $\tilde{X}$*-ergodique.*

Démonstration. — Soit K une partie zéro-convexe de S pour A(S) (i.e. pour tout $x \in S$, $x \notin K$, il existe $f \in A$ nulle sur K non nulle en x). Nous devons montrer que pour tout $x \in X$, tel que $m_x(K) > 0$ on a $m_x(K) = 1$ (m_x désignant la mesure représentant x sur S). Supposons donc $m_x(K) > 0$. Soit y dans la partie de Gleason de x : m_x est absolument continue par rapport à m_y, donc $m_y(K) > 0$. D'après la formule de Jensen si $f \in A$ est nulle sur K, f est nulle en y. Nous venons de montrer que $y \in O(K)$ (définition 6), et finalement que $O(K)$ contient la partie de Gleason de x, donc

$$O(K) \supset G(x).$$

On en déduit que $O(K) \cap S \supset G(x) \cap S$. Or $O(K) \cap S = K$, donc

$$K \supset G(x) \cap S.$$

Or, par hypothèse, $x \in N(G(x) \cap S)$, donc $x \in N(K)$, donc $m_x(K) = 1$.

c.q.f.d.

DÉFINITION 12. — *Nous dirons que* A *est bien neutralisée (sur* X*) si toute mesure* μ *sur* S *othogonale à* A *et telle que, pour tout* $x \in X$, μ *soit singulière par rapport à* m_x, *est nulle.*

PROPOSITION 6. — *Soit* A *une sous-algèbre fermée de* $C(X)$, *contenant les constantes et séparant les points. Soit* S *la frontière de Silov de* X. *Supposons* A *fondamentale et bien neutralisée. Soit* K *une partie compacte de* S. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) K est une partie frontalière de S (pour $A(S)$).

(ii) K est $\tilde{X}$-ergodique.

Démonstration. — (i) $\Longrightarrow$ (ii) est trivial après le théorème 14.

Réciproquement, supposons K $\tilde{X}$-ergodique. Soit μ une mesure sur S orthogonale à A. D'après le théorème 3 il suffit de montrer que μ/K est orthogonale à A. A étant fondamentale et bien neutralisée, on peut écrire $\mu = \sum_{x \in X} \mu_x$, la série étant normalement convergente et pour tout $x \in X$, μ_x désignant une mesure sur S, orthogonale à A et absolument continue par rapport à m_x (cf. [3]). On a $\mu/K = \Sigma \mu_x/K$. K étant $\tilde{X}$-ergodique, on a pour tout $x \in X$ soit $\mu_x/K = \mu_x$, soit $\mu_x/K = 0$. Donc μ/K est bien orthogonale à A.

c.q.f.d.

THÉORÈME 16. — *Soit* A *une sous-algèbre fermée de* $C(X)$, *séparant les points, contenant les constantes. Soit* S *la frontière de Silov de* X. *Supposons* A *fondamentale et bien neutralisée. Supposons* X *bien partagé. Soit* K *une partie compacte de* S.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) K *est zéro-convexe dans* S *(pour* A(S)*).*

(ii) K *est d'interpolation bornée (dans* A*).*

(iii) K *est d'interpolation stricte (dans* A*).*

(iv) K *est frontalière dans* S *(pour* A(S)*).*

(v) K *est* $\tilde{X}$*-ergodique.*

Démonstration :

(v) $\Longrightarrow$ (iv) d'après la proposition 6.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) trivialement.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : en effet A étant fondamentale, K est normalement convexe (pour A(S)) donc est zéro-convexe (pour A(S)) d'après la proposition 3.

Enfin (i) $\Longrightarrow$ (v) d'après la proposition 5.

Remarque 1. — Si dans l'énoncé précédent on suppose de plus que K est un G_δ, les assertions (i) ... (v) sont de plus équivalentes aux suivantes :

(i *bis*) Il existe $f \in A$ telle que $K = S \cap f^{-1}(0)$.

(iii *bis*) Tout élément de A(K) peut être prolongé en un élément de A sans augmenter sa norme.

(iv *bis*) Il existe $f \in A$ telle que pour tout $x \in K$ $f(x) = 1$ et pour tout $x \in S$, $x \notin K$, $|f(x)| < 1$.

Il suffit pour le voir d'appliquer le théorème 5.

Remarque 2. — Avec les mêmes hypothèses (sauf X bien partagé, hypothèse inutile) et notations que dans le théorème 16 les assertions suivantes sont équivalentes (K est toujours inclus dans S) :

(i) K est zéro-convexe dans X (pour A).

(ii) $A(K) = C(K)$.

(iii) $A(K) = C(K)$ et K est d'interpolation stricte.

(iv) K est frontalière dans X (pour A).

(v) K est frontalière dans S et $A(K) = C(K)$.

(vi) Pour tout $x \in X - S$, $m_x(K) = 0$.

(vii) Pour tout $x \in X - K$, pour toute m représentative de x sur X, $m(K) = 0$.

(viii) Pour tout $x \in X - K$, $x \notin N(K)$.

Démonstration :

(i) $\Longrightarrow$ (vi) d'après la formule de Jensen.

(vi) entraîne (v) d'après le théorème 16 et du fait que toute partie de K est frontalière dans A(K), ce qui permet d'appliquer le théorème 7.

(v) entraîne (iv) d'après les théorèmes 12 et 13.

(iv) entraîne (vi) d'après le théorème 14.

(v) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) trivialement.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) comme dans le théorème 16.

Enfin (ii) $\Longrightarrow$ (viii) $\Longrightarrow$ (vii) $\Longrightarrow$ (vi) trivialement.

c.q.f.d.

Le théorème 16 s'applique en particulier au cas où X est un compact de **C** de complémentaire connexe, et où A est l'algèbre des limites uniformes sur X de polynômes. Dans le cas où X est le disque unité de **C**, on retrouve des théorèmes de Fatou et de Rudin.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Bishop, A minimal boundary for function algebras, *Pacific J. of Mathematics* 9, n° 3 (1959).

[2] I. Glicksberg, *Trans. Amer. Math. Soc.* 105, (1962), p. 415-535.

[3] I. Glicksberg et J. Wermer, Measures orthogonal to Dirichlet Algebras, *Duke Math. J. Vol.* 30, n° 4 (1963).

Manuscrit reçu le 12 juillet 1967.

Alain Bernard,
Département de Mathématiques Pures
Faculté des Sciences de Grenoble
38-Saint Martin d'Hères.