

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAURICE BLAMBERT

GEORGES CHEVALIER

**Suites crameriennes et polynômes de  
Dirichlet-Tschebyscheff**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 17, n° 2 (1967), p. 335-358

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1967\\_\\_17\\_2\\_335\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_2_335_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUITES CRAMERIENNES ET POLYNÔMES DE DIRICHLET-TSCHEBYSCHEFF

par Maurice BLAMBERT et Georges CHEVALIER

### Introduction.

On se propose de définir une extension de la notion classique de polynôme de Tschébycheff. Les résultats énoncés ci-dessous sont tributaires, pour la plupart, de la notion de suite cramerienne sur un compact et contiennent, comme cas particuliers, des résultats classiques bien connus. La notion introduite de « suite cramerienne » semble particulièrement féconde et adaptée à son objet dans la voie choisie ici.

L'exposé qui suit n'a pas la prétention d'être exhaustif. D'autres résultats à paraître viendront compléter ceux obtenus ici.

A. — On considère une suite finie, positive, strictement croissante (que l'on convient d'appeler une D-suite finie), que l'on note  $(\lambda_p)$ ,  $p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , (le cas  $\lambda_0 = 0$  n'étant pas exclu), et le polynôme dirichletien,

$$f[(a_i)] : \sum_{p=0}^n a_{n-p} \exp(-z\lambda_p),$$

à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . On désigne par  $f[(a_i), z]$  la valeur en  $z \in \mathbb{C}$  de ce polynôme, et par  $(a_i)$  le point  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ .

Soit un compact  $E \subset \mathbf{C}$ , ne se réduisant pas à un ensemble fini de points. Le nombre complexe  $a_0 \neq 0$ , le compact  $E \subset \mathbf{C}$  et la D-suite  $(\lambda_p)$  étant donnés, on désigne par  $\mathcal{F}$  la famille des applications de  $E$  dans  $\mathbf{C}$ ,

$$z \mapsto f[(a_i), z], \quad z \in E,$$

indexées par  $(a_i)$  sur  $\mathbf{C}^n$ . Le polynôme dirichletien  $f[(a_i)]$  est appelé « *le germe algorithmique dirichletien* » de l'application d'indice  $(a_i)$  de la famille  $\mathcal{F}$  (plus succinctement, on appellera  $f[(a_i)]$  « l'al-germe dirichletien » de l'application d'indice  $(a_i)$  de  $\mathcal{F}$ ). On pose,

$$\forall (a_i) \in \mathbf{C}^n: \quad [\varpi(a_i)] = \text{Max} |f[(a_i), z]|, \quad z \in E.$$

Il est trivial que,

$$\forall (a_i) \in \mathbf{C}^n: \quad \varpi[(a_i)] > 0,$$

puisque  $E$  ne se réduit pas à un ensemble fini. On considère l'application de support  $\mathbf{C}^n$  à valeurs dans  $\mathbf{R}_+^*$ ,

$$(a_i) \mapsto \varpi[(a_i)]$$

et on désigne par  $\Omega(E)$  l'ensemble de ses valeurs, par  $\mu$  l'infimum de cet ensemble, et par  $z(a_i)$  un point considéré de l'ensemble

$$\{z \in E | \varpi[(a_i)] = |f[(a_i), z]| \};$$

cet ensemble n'est pas vide.

On convient de désigner sous le vocable « *support de la famille  $\mathcal{F}$*  » la donnée du nombre complexe  $a_0 \neq 0$ , du compact  $E \subset \mathbf{C}$  et de la D-suite finie  $(\lambda_p)$ ; on le note,

$$S: \{a_0; E; (\lambda_p)\}.$$

On appelle « *polynôme de Dirichlet-Tschebyscheff de support  $S$*  » l'al-germe dirichletien d'une application de la famille  $\mathcal{F}$  de support  $S$ , s'il en existe, dont le maximum de l'ensemble des modules des valeurs, sur le compact  $E$ , est égal à  $\mu$ .

On désigne par  $\mathcal{F}^*$  l'ensemble des polynômes de Dirichlet-Tschebyscheff de support  $S$ , et on se propose d'établir que  $\mathcal{F}^* \neq \emptyset$ .

PROPOSITION (A.1). — L'application de support  $\mathbf{C}^n$ ,

$$(a_i) \rightarrow \varpi[(a_i)]$$

est uniformément continue sur son support.

L'application de  $\mathbf{C}^n$  dans  $\mathbf{C}$ ,

$$(a_i) \rightarrow f[(a_i), z]$$

indexée par  $z$  sur  $E$ , est continue sur  $\mathbf{C}^n$ ; l'application, associée à la précédente, de  $\mathbf{C}^n$  dans l'ensemble des réels positifs,

$$(a_i) \rightarrow |f[(a_i), z]|$$

indexée par  $z$  sur  $E$ , est donc continue sur son support.

Posant

$$v = \text{Max} |\exp(-z\lambda_p)|, \quad p \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad \text{et} \quad z \in E,$$

on a, pour  $(a_i)$  et  $(a'_i)$  quelconques sur  $\mathbf{C}^n$ ,

$$|f[(a_i), z]| - |f[(a'_i), z]| \leq |f[(a_i), z] - f[(a'_i), z]| \leq v \sum_{i=0}^n |a_i - a'_i|.$$

Il en résulte que,  $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ ,  $\exists \alpha_\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$  :

$$|(a_i) - (a'_i)| < \alpha_\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} |\varpi[(a_i)] - |f[(a'_i), z_{(a_i)}||| < \varepsilon, \\ |\varpi[(a'_i)] - |f[(a_i), z_{(a'_i)}||| < \varepsilon. \end{cases}$$

Eu égard à la définition de  $\varpi[(a_i)]$ , on a,

$$\varpi[(a_i)] \geq |f[(a_i), z_{(a_i)}]|$$

et

$$\varpi[(a'_i)] \geq |f[(a'_i), z_{(a_i)}]|.$$

Les quatre nombres figurant dans ces deux dernières relations vérifient l'une au moins des trois relations suivantes :

$$(R_1) \quad \varpi[(a_i)] \geq |f[(a_i), z_{(a'_i)}]| \geq \varpi[(a'_i)] \geq |f[(a'_i), z_{(a_i)}]|$$

$$(R_2) \quad \varpi[(a_i)] \geq \varpi[(a'_i)] \geq |f[(a_i), z_{(a'_i)}]| \geq |f[(a'_i), z_{(a_i)}]|$$

$$(R_3) \quad \varpi[(a_i)] \geq \varpi[(a'_i)] \geq |f[(a'_i), z_{(a_i)}]| \geq |f[(a_i), z_{(a'_i)}]|$$

et les analogues  $(R_4)$ ,  $(R_5)$ ,  $(R_6)$ , obtenues en substituant dans  $(R_1)$ ,  $(R_2)$ ,  $(R_3)$ ,  $(a'_i)$  à  $(a_i)$  et  $(a_i)$  à  $(a'_i)$ . Ainsi, quelle que soit la relation qui est satisfaite, parmi les trois relations ci-dessus, on a :

$$|(a_i) - (a'_i)| < \alpha_\varepsilon \Rightarrow |\varpi[(a_i)] - \varpi[(a'_i)]| < \varepsilon.$$

Considérant le compact  $E \subset \mathbf{C}$ , et la D-suite finie  $(\lambda_p)$ ,  $p \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , on considère l'application suivante de  $E^n$  dans  $\mathbf{C}$ ,

$$(z_i) \mapsto D[(z_i)]$$

où  $D[(z_i)]$  est le déterminant de la matrice

$$\|\exp(-z_i \lambda_{n-j})\|, \quad i \text{ et } j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

PROPOSITION (A.2). — *Il existe au moins un point  $(z_i) \in E^n$  tel que*

$$D[(z_i)] \neq 0.$$

La négation de cette assertion est équivalente à la proposition suivante :

$$\forall (z_i) \in E^n \implies D[(z_i)] = 0.$$

Désignant un point quelconque  $(z_2, \dots, z_n)$  sur  $E^{n-1}$  par  $(z_i)'$ , on considère la famille des applications suivantes de  $E$  dans  $\mathbf{C}$ ,

$$z_1 \mapsto D[z_1, (z_i)'], \quad \text{ou} \quad D[z_1, (z_i)'] = D[(z_i)],$$

indexées par  $(z_i)'$  sur  $E^{n-1}$ . Chaque application de cette famille n'est autre, comme il est évident, que la restriction à  $E$  de la fonction analytique entière sur  $\mathbf{C}$ ,

$$z_1 \mapsto \sum_{j=1}^n A_j \exp(-z_1 \lambda_{n-j})$$

où le nombre  $A_j$  est le cofacteur de  $D[(z_i)]$  relatif au terme  $\exp(-z_1 \lambda_{n-j})$ . Les cofacteurs  $A_j$  dépendent de  $(z_i)'$  mais sont indépendants de  $z_1$ . Comme on sait, cette fonction entière sur  $\mathbf{C}$  ne possède sur  $E$  qu'un ensemble fini de zéro (pouvant être vide). On a donc,

$$\forall (z_i) \in E^n \implies D[(z_i)] = 0 \iff \forall (z_i)' \in E^{n-1} \text{ et } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : A_j = 0.$$

Désignant un point quelconque  $(z_3, \dots, z_n)$  sur  $E^{n-2}$  par  $(z_i)''$ , on considère la famille des applications suivantes de  $E$  dans  $\mathbf{C}$ ,

$$\text{ou} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : \quad \begin{aligned} & z_2 \mapsto A_j[z_2, (z_i)''], \\ & A_j[z_2, (z_i)''] = A_j, \end{aligned}$$

indexées par  $(j, (z_i)'')$ . Itérant sur chacune de ces applications le raisonnement ci-dessus, on obtient,

$$\forall (z_i)' \in E^{n-1} \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : A_j = 0 \\ \iff \\ \forall (z_i)'' \in E^{n-2}, \quad \forall j \quad \text{et} \quad \forall k (\neq j) \in \{1, 2, \dots, n\} : \quad A_{j,k} = 0$$

où  $A_{j,k}$  est le cofacteur de  $A_j$  relatif au terme  $\exp(-z_2 \lambda_{m-k})$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$ . L'itération du raisonnement ci-dessus conduirait au résultat trivialement faux suivant :

$$\exp(-z_n \lambda_p) = 0, \quad \forall p \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

La contradiction établit la validité de la proposition (A.2).

**PROPOSITION (A.3).** — *Étant donnée la famille  $\mathcal{F}$ , de support  $S: \{a_0; E; (\lambda_p)\}$ , d'applications indexées par  $(a_i)$  sur  $\mathbf{C}^n$ , on a,*

$$\forall M \in \Omega(E), \quad \exists \mathcal{C}_M(\text{compact}) \subset \mathbf{C}^n : \quad \{(a_i) \mid [\varpi(a_i)] \leq M\} \subset \mathcal{C}_M.$$

Eu égard à la proposition (A.2),  $\exists (z_r^0) \in E^n$  tel que  $D[(z_r^0)] \neq 0$ . On considère le système suivant des  $n$  relations linéaires par rapport aux coefficients  $a_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

$$\sum_{j=1}^n a_j \exp(-z_r^0 \lambda_{n-j}) = f[(a_i), z_r^0] - a_0 \exp(-z_r^0 \lambda_n), \\ r \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

On désigne par  $D_j[(z_r^0)]$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , le déterminant de la matrice  $\|\alpha_{rk}\|$ , où  $\forall r \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$k = j : \quad \alpha_{rk} = f[(a_i), z_r^0] - a_0 \exp(-z_r^0 \lambda_n) \\ \forall k (\neq j) \in \{1, 2, \dots, n\} : \quad \alpha_{rk} = \exp(-z_r^0 \lambda_{n-k})$$

et par  $D_{j,h}[(z_r^0)]$  le cofacteur de  $D_j[(z_r^0)]$  correspondant à l'élément

$$\alpha_{h,j} = f[(a_i), z_h^0] - a_0 \exp(-z_h^0 \lambda_n), \quad h \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

On sait que,

$$a_j = (-1)^{j+1} D_j[(z_r^0)] / D[(z_r^0)] \\ = [(-1)^{j+1} / D[(z_r^0)]] \sum_{h=1}^n \{ D_{j,h}[(z_r^0)] (f[(a_i), z_h^0] - a_0 \exp(-z_h^0 \lambda_n)) \}.$$

Soit  $M \in \Omega(E)$ . Il existe au moins un point de  $\mathbf{C}^n$ , que l'on note  $(a_i)_M$ , et dans  $\mathcal{F}$  une application (les projections  $a_{i,M}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , de  $(a_i)_M$  sont précisément les valeurs des coefficients  $a_i$  de l'al-gérme dirichletien de cette application) dont le maximum de l'ensemble des modules des valeurs sur  $E$ ,  $\varpi[(a_i)_M]$ , est égal à  $M$ ; on a,

$$|f[(a_i)_M, z_r^0]| \leq M, \quad \forall r \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Posant

$$M'[(z_r^0)] = \text{Max } |a_0 \exp(-z_r^0 \lambda_n)|, \quad r \in \{1, 2, \dots, n\},$$

et

$$D'[(z_r^0)] = \text{Max } |D_{j,h}[(z_r^0)]|, \quad j \text{ et } h \in \{1, 2, \dots, n\},$$

on a,

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : |a_{j,M}| \leq (M + M'[(z_r^0)])nD'[(z_r^0)]/|D[(z_r^0)]|.$$

Désignant par  $\mathfrak{M}[(z_r^0), M]$  la valeur du second membre de cette dernière relation, on considère le sous-ensemble suivant de  $\mathbf{C}^n$ ,

$$\mathcal{C}_M = \{(a_i) \in \mathbf{C}^n \mid |a_i| \leq \mathfrak{M}[(z_r^0), M], i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Il est trivial que  $\mathcal{C}_M \neq \emptyset$ .  $\mathcal{C}_M$  est borné et fermé dans  $\mathbf{C}^n$ ; c'est un compact qui est l'adhérence d'un cube de  $\mathbf{C}^n$ . Tout point  $(a_i) \in \mathbf{C}^n$  tel que  $\varpi[(a_i)] \leq M$ , appartient à  $\mathcal{C}_M$  ( $a_0$  conservant la valeur fixée dans la donnée du support  $S$  de  $\mathcal{F}$ ).

On se propose maintenant de déduire des propositions antérieures que l'ensemble  $\mathcal{F}^*$  des polynômes de Dirichlet-Tschebyscheff, de support  $S$ , est non vide. On pose,

$$M_0 = \text{Max } |a_0 \exp(-z \lambda_n)|, \quad z \in E.$$

Il est trivial que  $\mu \leq M_0 \in \Omega(E)$ . Eu égard à la définition de  $\mu$ , deux cas sont « à priori » possibles :

$$1) \mu \in \Omega(E),$$

ou bien

2)  $\mu \notin \Omega(E)$  mais cependant  $\mu$  appartient à l'adhérence dans  $\mathbf{R}$  de  $\Omega(E)$  (que l'on note  $\overline{\Omega(E)}$ ).

Si  $\mu \in \Omega(E)$ , il est trivial que l'ensemble

$$\mathfrak{K}_\mu = \{(a_i) \in \mathbf{C}^n \mid \varpi[(a_i)] = \mu\}$$

est non vide. Tout polynôme  $f[(a_i)]$  avec  $(a_i) \in \mathfrak{K}_\mu$  est un polynôme de Dirichlet-Tschebyscheff de support  $S$  et réciproquement, tout polynôme de Dirichlet-Tschebyscheff de support  $S$  a un indice appartenant à  $\mathfrak{K}_\mu$ . Ainsi

$$(a_i) \in \mathfrak{K}_\mu \iff [f(a_i)] \in \mathcal{F}^*;$$

$\mathcal{F}^*$  est non vide.

Si  $\mu \in \Omega(E)$ , on a nécessairement, par définition de  $\mu$ , comme on l'a déjà dit,  $\mu \in \overline{\Omega(E)}$ . Il est trivial que  $\mu < M_0$ . On peut extraire de  $\Omega(E)$  une suite infinie strictement positive et strictement décroissante,  $(\mu_n)$ , telle que :  $\mu_n < M_0$  et  $\lim \mu_n = \mu$ ,  $n \uparrow \infty$ . A cette suite, on peut associer la suite des ensembles  $\mathfrak{E}_n$  suivants :

$$\mathfrak{E}_n = \{(a_i) \in \mathbf{C}^n \mid \varpi[(a_i)] = \mu_n\}.$$

Il est trivial que  $\mathfrak{E}^n \neq \emptyset$  (puisque  $\mu_n \in \Omega(E)$ ) et que  $\mathfrak{E}_n \cap \mathfrak{E}_{n'} = \emptyset$  si et seulement si  $n \neq n'$ . On désigne par  $(a_i)_n$  un point pris arbitrairement sur  $\mathfrak{E}_n$ . On associe ainsi à la suite strictement décroissante  $(\mu_n)$  une suite ponctuelle  $((a_i)_n)$ . Chacun des points de cette suite ponctuelle appartient au cube compact  $\mathcal{C}_{M_0}$ . L'adhérence de l'ensemble de ces points appartient aussi à  $\mathcal{C}_{M_0}$ . On désigne par  $(a_i)^*$  un point du dérivé de l'ensemble union des  $(a_i)_n$ . Ce point  $(a_i)^*$  appartient à  $\mathcal{C}_{M_0}$ . Puisque l'application  $(a_i) \rightarrow \varpi[(a_i)]$  est continue au point  $(a_i)^* \in \mathcal{C}_{M_0}$ , on a,

$$\lim \varpi[(a_i)] = \mu, \quad (a_i) \rightarrow (a_i)^*$$

et donc  $\mu = \varpi[(a_i)^*]$ ; ainsi  $\mu \in \Omega(E)$ . Donc si  $\mu \notin \Omega(E)$ , on a aussi  $\mu \notin \Omega(E)$ ;  $\mu$  ne peut pas être alors l'infimum de l'ensemble  $\Omega(E)$ . Le cas (2) est impossible. Ainsi  $\mu \in \Omega(E)$  et donc  $\mathcal{F}^* \neq \emptyset$ .

**B.** — On a prouvé, au paragraphe (A), que l'ensemble  $\mathcal{F}^*$  associé à la famille  $\mathcal{F}$  de support  $S$ , est non vide. On convient de désigner plus particulièrement par  $(a_i^*)$ , au lieu de  $(a_i)$ , avec  $a_i^* = a_i$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , l'indice du polynôme  $f[(a_i)]$  si et seulement si  $f[(a_i)] \in \mathcal{F}^*$ . Au paragraphe (C) de ce chapitre, on se propose d'établir, sous des conditions



convenables, que l'ensemble  $\mathcal{F}^*$  se réduit à un seul élément. Dans ce but, on énonce :

LEMME (B.1). — Si la D-suite finie  $(\lambda_p)$  du support  $S$  se réduit à la D-suite des entiers successifs,  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ , alors pour chaque élément  $f[(a_i^*)]$  de l'ensemble  $\mathcal{F}^*$ , l'ensemble associé

$$\{z \in E \mid |f[(a_i^*), z]| = \mu, \quad \text{avec} \quad \mu = \inf \Omega(E)\}$$

contient au moins  $n + 1$  points (on suppose  $E$  inclus dans une bande du type  $\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi \leq \Im(z - z_0) < \pi\}$  ou du type  $\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi < \Im(z - z_0) \leq \pi\}$ , où  $z_0$  est fixe sur  $\mathbf{C}$ ). La négation de l'assertion de ce lemme est équivalente à la proposition suivante :

PROPOSITION (A'). — Sous les conditions relatives à  $(\lambda_p)$  et  $E$  figurant dans (B.1), on peut trouver dans  $\mathcal{F}^*$  un polynôme  $f[(a_i^*)]$  vérifiant la condition suivante : il existe un entier  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$  et  $p$  valeurs  $z_k \in E$ , pour  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ , deux à deux distinctes telles que  $|f[(a_i^*), z_k]| = \mu$  et

$$\forall z \in E - \bigcup_{k=1}^p z_k : \quad \mu > |f[(a_i^*), z]|.$$

On peut prouver la proposition suivante :

PROPOSITION (B'). — Eu égard à la validité de la proposition (A'), on peut toujours trouver dans la famille  $\mathcal{F}$  une application d'indice  $(a_i)$  telle que  $\varpi[(a_i)] < \mu$ .

Ainsi (A') impliquant (B') conduit à une contradiction, à savoir, l'existence dans  $\mathcal{F}$  d'au moins une application dont le maximum de l'ensemble des modules des valeurs sur  $E$  est strictement inférieur à l'infimum de  $\Omega(E)$ . On désigne par  $\varphi[(\theta_i)]$  le polynôme dirichletien,  $\sum_{p=1}^n \theta_p \exp(-z\lambda_{n-p})$ , à coefficients indéterminés dans  $\mathbf{C}$  et dont la D-suite des exposants  $(\lambda_p)$  se réduit à la suite des entiers successifs  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . On considère l'application  $z \mapsto f[(a_i^*), z]$  d'indice  $(a_i^*)$ , vérifiant la condition de (A'). Eu égard aux conditions satisfaites par  $(\lambda_p)$  et  $E$  la proposition suivante est évidente :

PROPOSITION (B.2). — *Le système des  $p$  équations linéaires  $\varphi[(\theta_i), z_k] = f[(a_i^*), z_k]$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ , avec  $p \leq n$  à  $n$  inconnues  $\theta_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , admet au moins une solution.*

On considère le polynôme dirichletien

$$F[(\alpha_i)] : \sum_{p=0}^n \alpha_{n-p} \exp(-z\lambda_p),$$

où les coefficients  $\alpha_{n-p}$  sont définis de la manière suivante :

$$\alpha_{n-p} = a_{n-p}^* - \alpha \theta_{n-p}, \quad \forall p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{avec } \theta_0 = 0,$$

et l'on a,

$$\forall z \in E : \quad z \longrightarrow F[(\alpha_i), z] = f[(a_i^*), z] - \alpha \varphi[(\theta_i), z],$$

où  $\alpha$  est une constante appartenant à  $]0, 1[$ , où  $f[(a_i^*)] \in \mathcal{F}^*$  satisfait à (A'), et où  $\varphi[(\theta_i)]$  satisfait à (B.2). Il est évident, eu égard à la manière dont  $\varphi[(\theta_i)]$  a été défini, que l'application  $z \longrightarrow F[(\alpha_i), z]$ , de support  $E$ , appartient à  $\mathcal{F}$ . Les applications  $z \longrightarrow f[(a_i^*), z]$  et  $z \longrightarrow \varphi[(\theta_i), z]$  de  $E$  dans  $\mathbb{C}$ , sont uniformément continues sur leur support  $E$ ; on a,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0, \quad \forall z \in \{E \mid |z - z_k| \leq \delta_\varepsilon\} : \\ |f[(a_i^*), z] - f[(a_i^*), z_k]| < \varepsilon,$$

et  $|\varphi[(\theta_i), z] - \varphi[(\theta_i), z_k]| < \varepsilon$ . ( $\delta_\varepsilon$  indépendant de  $k$ ).

On désigne par  $D_{k, \varepsilon}$  l'ensemble compact

$$\{z \in E \mid |z - z_k| \leq \delta_\varepsilon\},$$

et on pose,

$$D_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^p D_{k, \varepsilon} \quad \text{et} \quad E_\varepsilon = E - D_\varepsilon.$$

Si  $z \in D_\varepsilon$ , on peut trouver un indice  $k_z \in \{1, 2, \dots, p\}$  tel que  $z \in D_{k_z, \varepsilon}$ . Par définition de  $D_{k_z, \varepsilon}$  on a,

$$\begin{aligned} |f[(a_i^*), z] - f[(a_i^*), z_{k_z}]| &< \varepsilon, \quad \text{avec} \quad |f[(a_i^*), z]| \leq \mu, \\ \text{et} \quad |\varphi[(\theta_i), z] - \varphi[(\theta_i), z_{k_z}]| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

On pose

$$Z = f[(a_i^*), z] \quad \text{et} \quad Z_{k_z} = f[(a_i^*), z_{k_z}],$$

et on désigne par  $\mathcal{D}_{k_z, \varepsilon}$  le disque

$$\{z' \in \mathbf{C} \mid |z' - Z_{k_z}| < \varepsilon\},$$

et par  $\Gamma$  le disque fermé  $\{z' \in \mathbf{C} \mid |z'| \leq \mu\}$ . On pose,

$$Z_\alpha = \alpha \varphi[(\theta_i), z] \quad \text{et} \quad Z_{k_z, \alpha} = \alpha \varphi[(\theta_i), z_{k_z}]$$

et on désigne par  $\mathcal{D}_{k_z, \varepsilon}^\alpha$  l'ensemble  $\{z' \in \mathbf{C} \mid |z' - Z_{k_z, \alpha}| < \alpha \varepsilon\}$ .

Ainsi

$$z \in D_\varepsilon \Rightarrow Z \in \mathcal{D}_{k_z, \varepsilon} \cap \Gamma \quad \text{et} \quad Z_\alpha \in \mathcal{D}_{k_z, \varepsilon}^\alpha.$$

Eu égard aux relations

$$\varphi[(\theta_i), z_k] = f[(a_i^*), z_k], \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, p\},$$

il est trivial que les points  $z = 0$ ,  $Z_{k_z}$ ,  $Z_{k_z, \alpha}$  sont alignés dans  $\mathbf{C}$ . Les disques ouverts  $\mathcal{D}_{k_z, \varepsilon}$  et  $\mathcal{D}_{k_z, \varepsilon}^\alpha$  sont homothétiques, avec le point  $z = 0$  pour centre d'homothétie.

Il est évident géométriquement que,

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \alpha \in ]0, (\mu - \varepsilon)/(\mu + \varepsilon)[ : \\ \{0\} \notin \mathcal{D}_{k_z, \varepsilon}^\alpha, \quad \mathcal{D}_{k_z, \varepsilon} \cap \mathcal{D}_{k_z, \varepsilon}^\alpha = \emptyset$$

et

$$|Z - Z_\alpha| < \mu.$$

Si, maintenant  $z \in E_\varepsilon$  (l'ensemble  $E_\varepsilon$  n'est pas nécessairement un fermé dans  $E$ ), on pose,

$$\mu_1 = \text{Sup } |f[(a_i^*), z]|, \quad z \in E_\varepsilon$$

et donc  $\mu_1 < \mu$

$$\mu_0 = \text{Max } |\varphi[(\theta_i), z]|, \quad z \in E \\ \mu' = \text{Sup } |F[(\alpha_i), z]|, \quad z \in E_\varepsilon.$$

On a  $\mu' \leq \mu_1 + \alpha \mu_0$ , et donc  $\mu' < \mu$  si  $\alpha$  est choisi appartenant à l'intervalle  $]0, (\mu - \mu_1)/\mu_0[$ . Par suite,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \exists \alpha \in ]0, (\mu - \varepsilon)/(\mu + \varepsilon)[ \cap ]0, (\mu - \mu_1)/\mu_0[ : \\ \text{Max } |F[(\alpha_i), z]| < \mu, \quad z \in E.$$

On en déduit que  $f[(a_i^*)]$  ne peut pas simultanément appartenir à  $\mathcal{F}^*$  et vérifier la condition de (A'). La proposition (A') est donc fausse, et l'égalité  $|f[(a_i^*), z]| = \mu$  est satisfaite en au moins  $n + 1$  points de  $E$ .

Il est intéressant de généraliser le lemme (B.1) en ne se

limitant pas à la considération d'une D-suite  $(\lambda_p)$  qui se réduit à la suite des entiers successifs  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Dans ce but, on convient de dire qu'une D-suite

$$(\lambda_p), p \in \{0, 1, 2, \dots, n\},$$

est cramérienne sur un compact  $E$  de  $\mathbf{C}$  si pour chaque entier  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  à tout système de  $k$  valeurs distinctes de  $E$  on peut associer une sous D-suite de  $k$  termes,  $\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2}, \dots, \lambda_{r_k}$ , avec  $r_k \leq n - 1$ , extraite de  $(\lambda_p)$ , telle que,

$$\det \|\exp(-z_j \lambda_{r_i})\| \neq 0, \quad i \text{ et } j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

On peut alors énoncer :

LEMME (B.1'). — Si la D-suite  $(\lambda_p)$  du support  $S$  est cramérienne sur le compact  $E$  de  $\mathbf{C}$  alors pour chaque élément  $f[(a_i^*)]$  de l'ensemble  $\mathcal{F}^*$ , l'ensemble

$$\{z \in E \mid |f[(a_i^*), z]| = \mu, \text{ avec } \mu = \inf \Omega(E)\}$$

contient au moins  $n + 1$  points.

La démonstration de ce lemme est la même mot pour mot que celle du lemme (B.1) puisque la proposition (B.2) est vraie dans le cas d'un polynôme dirichletien,

$$\varphi[(\theta_i)] : \sum_{p=1}^n \theta_p \exp(-z \lambda_{n-p})$$

à coefficients à déterminer, lorsque la D-suite  $(\lambda_p)$  est cramérienne sur  $E$ .

Remarque. — Si la D-suite  $(\lambda_p)$  se réduit à la suite des entiers successifs  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ , alors cette D-suite particulière est comme on sait cramérienne sur tout sous-ensemble compact  $E$  de  $\mathbf{C}$  appartenant à une bande de  $\mathbf{C}$  du type

$$\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi \leq \Im(z - z_0) < \pi\}$$

ou du type

$$\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi < \Im(z - z_0) \leq \pi\},$$

où  $z_0$  est fixe sur  $\mathbf{C}$ .

C. — Dans la famille  $\mathcal{F}$ , de support  $S: \{a_0; E; (\lambda_p)\}$ , des applications  $z \rightarrow f[(a_i), z]$  de  $E$  dans  $\mathbf{C}$ , on considère

la sous-famille — que l'on désigne par  $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$  — définie de la manière suivante : l'application  $f$  de  $\mathcal{F}$  d'indice  $(a_i)$  appartient à  $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$  si et seulement si  $(a_i) \in \mathbf{R}^n$ . Désignant par  $\Omega_{\mathbf{R}}(E)$  l'ensemble des valeurs de la restriction à  $\mathbf{R}^n$  de l'application de  $\mathbf{C}^n$  dans  $\mathbf{R}_+^*$ ,

$$(a_i) \longrightarrow \varpi[(a_i)],$$

(restriction que l'on convient de noter :  $(a_i) \longrightarrow \varpi_{\mathbf{R}}[(a_i)]$ ) et désignant par  $\mu_{\mathbf{R}}$  l'infimum de  $\Omega_{\mathbf{R}}(E)$ , il est alors trivial que  $\mu_{\mathbf{R}} \geq \mu$ . On désigne par  $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$  un sous-ensemble des al-gèrmes dirichletiens des applications de la famille  $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$ , défini de la manière suivante :

$f[(a_i)] \in \mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites

- 1)  $z \rightarrow f[(a_i), z]$  appartient à  $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$  de support  $S$
- 2)  $\varpi_{\mathbf{R}}[(a_i)] = \mu_{\mathbf{R}}$ .

On remarquera que toutes les propositions antérieures énoncées en considérant la famille  $\mathcal{F}$  de support  $S$  peuvent être transposées en se limitant à la considération de la sous-famille  $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$  de même support  $S$ . Dans ce paragraphe, on se propose de prouver que, dans le cas où  $E$  est un ensemble compact de  $\mathbf{R}$  et où  $(\lambda_p)$  est une D-suite cramérienne sur  $E$ , l'ensemble  $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$  se réduit à un seul élément. Certaines propositions qui suivent sont valables sans les conditions restrictives qu'on vient d'énoncer sur  $E$  et sur  $(\lambda_p)$  et sans se limiter à la sous-famille  $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$ . On rappellera ces conditions et cette limitation dans les cas opportuns.

**PROPOSITION (C.1).** — *L'ensemble  $\mathcal{F}^*$  des polynômes de Dirichlet-Tschebyscheff de support  $S : \{a_0; E; (\lambda_p)\}$  contient une infinité d'éléments ou bien se réduit à un seul élément.*

On sait que  $\mathcal{F}^* \neq \emptyset$ . Si  $\mathcal{F}^*$  ne se réduit pas à un seul élément, on considère deux éléments distincts de cet ensemble dont on note  $(a_{1,i}^*)$  et  $(a_{2,i}^*)$  les indices (deux éléments de  $\mathcal{F}^*$  sont distincts si et seulement si leurs indices sont distincts). On considère en outre la suite des polynômes dirichletiens d'indices  $(a_i^p)$  suivants, indexés par  $p$  sur  $\mathbf{N}^*$  :

$$f[(a_i^p)] : \sum_{j=0}^n a_{n-j}^p \exp(-z\lambda_j), \quad \text{où } a_0^p = a_0, \quad \forall p \in \mathbf{N}^*,$$

dont les indices  $(a_i^p)$  satisfont aux relations de récurrence suivantes :

$$\forall p \in \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 3\} \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \\ a_i^p = \alpha a_i^{p-1} + \beta a_i^{p-2}$$

avec  $a_i^1 = a_{1,i}^*$  et  $a_i^2 = a_{2,i}^*$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes strictement positives vérifiant la condition  $\alpha + \beta = 1$ . Par construction, les applications de  $E$  dans  $\mathbf{C}$  suivantes,  $z \mapsto f[(a_i^p), z]$ , indexées par  $(a_i^p)$ , appartiennent à la famille  $\mathcal{F}$  de support  $S : \{a_0; E; (\lambda_p)\}$ . On a,

$$\forall p \in \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 3\} :$$

$$\text{Max} |f[(a_i^p), z]| \leq \alpha \text{Max} |f[(a_i^{p-1}), z]| + \beta \text{Max} |f[(a_i^{p-2}), z]|, \quad z \in E.$$

Si les polynômes d'indices  $(a_i^{p-1})$  et  $(a_i^{p-2})$  appartiennent à  $\mathcal{F}^*$  (ils appartiennent à  $\mathcal{F}^*$  pour  $p = 3$ , par hypothèse) alors le polynôme d'indice  $(a_i^p)$  appartient aussi à  $\mathcal{F}^*$ ; en effet, on a alors,

$$\varpi[(a_i^p)] \leq \alpha \varpi[(a_i^{p-1})] + \beta \varpi[(a_i^{p-2})] = \mu;$$

en outre,  $\varpi[(a_i^p)]$  ne peut pas être strictement inférieur à  $\mu$ ; donc  $\varpi[(a_i^p)] = \mu$  et  $f[(a_i^p)] \in \mathcal{F}^*$ . Eu égard à cette remarque, tous les polynômes d'indices  $(a_i^p)$  pour  $p$  sur  $\mathbf{N}^*$  appartiennent à  $\mathcal{F}^*$ .

*Remarque.* — La technique utilisée dans la démonstration de la proposition (C.1) montre que si l'ensemble des indices des éléments de  $\mathcal{F}^*$  ne se réduit pas à un point de  $\mathbf{C}^n$  alors cet ensemble est nécessairement une partie convexe de  $\mathbf{C}^n$ . On désigne par  $\mathcal{L}$  l'ensemble des indices des éléments de  $\mathcal{F}^*$ ; ainsi  $(a_i) \in \mathcal{L}$  si et seulement si  $f[(a_i)] \in \mathcal{F}^*$  (cet indice  $(a_i)$  est alors noté de préférence, comme on l'a déjà précisé antérieurement,  $(a_i^*)$ , avec  $a_i^* = a_i$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ). On convient de dire que les deux polynômes d'indices  $(a_{1,i}^*)$  et  $(a_{2,i}^*)$  sont des « *polynômes générateurs* » de la suite  $f[(a_i^p)]$ . On dira aussi que la suite ponctuelle  $((a_i^p))$  est « *la suite récurrentielle de générateurs  $(a_{1,i}^*)$  pondéré par  $\alpha$  et  $(a_{2,i}^*)$  pondéré par  $\beta$*  »; les deux points  $(a_{1,i}^*)$  et  $(a_{2,i}^*)$  constituent une « *base* » de la suite  $(a_i^p)$ .

**PROPOSITION (C.2).** — *Si la D-suite  $(\lambda_p)$  du support  $S : \{a_0; E; (\lambda_p)\}$  est cramerienne sur  $E$  et si  $\mathcal{F}^*$  de support  $S$*

ne se réduit pas à un seul élément alors, les deux points  $(a_{1,i}^*)$  et  $(a_{2,i}^*)$  appartenant à  $\mathcal{L}$  et  $(a_i^p)$  étant une suite récurrentielle dont ces deux points sont des générateurs respectivement pondérés par  $\alpha$  et  $\beta$  strictement positifs, avec  $\alpha + \beta = 1$ , il existe  $n'$  points sur  $E$ , avec  $n' \geq n + 1$  ( $n$  étant l'indice du terme maximum de la D-suite de la base  $S$  de  $\mathcal{F}$ ), que l'on note

$$z_k, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n' - 1\}, \quad \text{tels que} \quad \forall p \in \mathbf{N}^*$$

et  $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n' - 1\}$  :

$$f[(a_{1,i}^*), z_k] = f[(a_{2,i}^*), z_k] = f[(a_i^p), z_k]$$

avec

$$|f[(a_i^p), z_k]| = \mu = \inf \Omega(E).$$

Soit  $p_0 (\geq 3) \in \mathbf{N}$ . Eu égard à la proposition (B.1'), on sait que l'ensemble

$$\{z \in E \mid |f[(a_i^{p_0}), z]| = \mu = \inf \Omega(E)\},$$

contient  $n + 1$  points au moins. On note

$$z_k, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n' - 1\},$$

$n'$  (avec  $n' \geq n + 1$ ) points pris sur cet ensemble. On a,

$$f[(a_i^{p_0}), z_k] = \alpha f[(a_i^{p_0-1}), z_k] + \beta f[(a_i^{p_0-2}), z_k].$$

Or

$$|f[(a_i^{p_0}), z_k]| = \mu \Rightarrow |f[(a_i^{p_0-1}), z_k]| = \mu;$$

en effet, si l'implication était fausse, on aurait nécessairement,

$$|f[(a_i^{p_0-1}), z_k]| = \mu' < \mu$$

puisque, eu égard à  $(a_i^{p_0-1}) \in \mathcal{L}$ , on ne peut pas avoir

$$\max |f[(a_i^{p_0-1}), z]| > \mu, \quad z \in E$$

Il en résulterait,

$$\mu \leq \alpha \mu' + \beta \mu'' < \mu, \quad \text{avec} \quad \mu'' = |f[(a_i^{p_0-2}), z_k]| \leq \mu.$$

La contradiction entraîne la validité de l'implication ci-dessus. Le même raisonnement prouve aussi que,

$$|f[(a_i^{p_0}), z_k]| = \mu \Rightarrow |f[(a_i^{p_0-2}), z_k]| = \mu.$$

Il en résulte que,

$$|f[(a_i^{p_0}), z_k]| = \mu \Rightarrow |f[(a_i^r), z_k]| = \mu, \quad \forall r \in \{1, 2, \dots, p_0-1\}.$$

Enfin, on a,

$$f[(a_i^{p_0-1}), z_k] = f[(a_i^{p_0-2}), z_k],$$

sinon, on aurait nécessairement  $|f[(a_i^{p_0}), z_k]| < \mu$ ; d'où résulte la proposition (C.2).

**PROPOSITION (C.3).** — *Si dans le support  $S: \{a_0; E; (\lambda_p)\}$  les termes de la D-suite  $(\lambda_p)$  sont des entiers et si cette D-suite est cramerienne sur l'ensemble compact  $E$  de  $\mathbf{R}$ , et si  $a_0$  est réel, alors l'ensemble  $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$  des polynômes à coefficients réels de Dirichlet-Tschebyscheff de support  $S$  se réduit à un seul élément.*

Puisque les termes de la suite  $(\lambda_p)$  sont des entiers, il est trivial que tout polynôme dirichletien

$$f[(a_i)]: \sum_{p=0}^n a_{n-p} \exp(-z\lambda_p), \quad \text{avec} \quad a_0 \neq 0,$$

est un polynôme taylorien de degré  $\lambda_n$  par rapport à la variable  $z^* = \exp(-z)$ , ne comportant au plus que les termes de degrés  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Supposons fausse la proposition ci-dessus. L'ensemble  $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$  contient alors une infinité d'éléments. Soient  $(a_i^{*1})$  et  $(a_i^{*2})$  les indices de deux distincts d'entre eux. Eu égard à la proposition (C.2), il existe, sur  $E$ ,  $n'$  points  $z_k$ ,  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n' - 1\}$ , avec  $n' \geq n + 1$ , tels que,

$$\begin{aligned} & \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n' - 1\}: \\ & f[(a_i^{*1}), z_k] = f[(a_i^{*2}), z_k], \quad \text{avec} \quad |f[(a_i^{*1}), z_k]| = \mu. \end{aligned}$$

On considère le polynôme dirichletien

$$\psi_D: \sum_{p=1}^n (a_p^{*1} - a_p^{*2}) \exp(-z\lambda_{n-p}).$$

Ce polynôme admet les  $n'$  valeurs  $z_k \in E$  pour racines. On a,  $\forall z \in E$ ,

$$\psi_T(z^*) = \sum_{p=1}^n (a_p^{*1} - a_p^{*2}) z^{*\lambda_{n-p}}.$$



Le polynôme taylorien  $\psi_T$  est de degré  $\lambda_{n-1}$  au plus par rapport à la variable  $z^*$ . Puisque  $(a_i^{*1}) \neq (a_i^{*2})$ , il existe nécessairement un entier  $p_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$  satisfaisant à la condition,

$$a_p^{*1} = a_p^{*2}, \quad \forall p \in \{0, 1, 2, \dots, p_{0-1}\}, \quad \text{et} \quad a_{p_0}^{*1} \neq a_{p_0}^{*2}.$$

Deux cas sont « à priori » possibles; ce sont :

$$n' > \lambda_{n-1} \quad \text{ou bien} \quad n' \leq \lambda_{n-1}.$$

Or le cas  $n' > \lambda_{n-1}$  est impossible puisque  $(a_i^{*2}) \neq (a_i^{*1})$ .

Soit donc  $n' \leq \lambda_{n-1}$ ; ce qui implique  $\lambda_{n-1} \geq n + 1$ . On a,  $\forall z \in E$ , avec  $z^* = \exp(-z)$

$$\psi_T(z^*) = (a_{p_0}^{*1} - a_{p_0}^{*2}) \prod_{k=0}^{n'-1} (z^* - z_k^*) \psi_{T,1}(z^*),$$

où le polynôme taylorien  $\psi_T$  admet pour racines les  $n'$  valeurs strictement positives  $z_k^*$ , et où  $\psi_{T,1}$  est un polynôme taylorien de la variable  $z^*$ , de degré  $\lambda_{n-1} - n'$  au plus. Or le nombre des variations présentées par la suite des coefficients de  $\psi_T$  est au plus égal à  $n - 1$ ; ce polynôme  $\psi_T$ , eu égard au théorème bien connu de Descartes, admet donc au plus  $n - 1$  racines réelles positives. Ce résultat est en contradiction avec celui obtenu antérieurement où on a mis en évidence l'existence de  $n' \geq n + 1$  racines distinctes strictement positives pour  $\psi_T$ . De cette contradiction résulte, puisque les coefficients de  $\psi_T$  ne sont pas tous égaux à 0, qu'on ne peut pas extraire de  $\mathcal{F}_R^*$  deux éléments distincts.  $\mathcal{F}_R^*$  se réduit donc à un seul élément.

*Remarque.* — La proposition (C.3) reste vraie si, un peu plus généralement, les termes de la D-suite finie  $(\lambda_p)$  sont des éléments de  $Q$ , et non pas seulement de  $N$ , et si cette D-suite est cramerienne sur le compact  $E$  de  $R$ . En effet, si  $\lambda_p \in Q$ ,  $\forall p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , alors il existe  $n_0 \in N^*$  tel que  $\lambda_p = \lambda'_p/n_0$ ,  $\forall p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , où la suite  $(\lambda'_p)$  est une D-suite finie extraite de  $N$ . Soit  $(a_i^*) \in \mathcal{L}_R$  ( $\mathcal{L}_R$  désignant l'ensemble des indices des éléments de  $\mathcal{F}_R^*$ ); on a,

$$f[(a_i^*), z] = \sum_{p=0}^n a_p^* \exp(-z \lambda'_{n-p}/n_0).$$

Supposons fausse l'assertion de (C.3) sous la nouvelle condition relative à  $(\lambda_p)$ . L'ensemble  $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$  est un ensemble convexe (donc un intervalle) qui alors ne se réduit pas à un seul point. Soient  $(a_i^{*1})$  et  $(a_i^{*2})$  deux points de  $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}$ . On considère le polynôme dirichletien,

$$\psi_D: \sum_{p=1}^n (a_p^{*1} - a_p^{*2}) \exp(-z\lambda'_{n-p}/n_0).$$

Posant  $z_1 = z/n_0$ , le raisonnement fait ci-dessus dans la démonstration de (C.3), utilisant le polynôme  $\psi_D$  de la variable  $z$ , est valable ici mot pour mot avec le nouveau polynôme  $\psi_D$ , de la variable  $z_1$ .

Plus généralement, on énonce :

**PROPOSITION (C.4).** — *Si la D-suite  $(\lambda_p)$  du support  $S: \{a_0; E; (\lambda_p)\}$  de  $\mathcal{F}$  est cramérienne sur le compact  $E \subset \mathbb{R}$ , et si  $a_0$  est réel, alors l'ensemble  $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$  des polynômes à coefficients réels de Dirichlet-Tschebyscheff de support  $S$ , se réduit à un seul élément.*

La démonstration de cette proposition est presque mot pour mot la même que celle de (C.3), aux précautions suivantes près : puisque le polynôme

$$\psi_T: \sum_{p=1}^n (a_p^{*1} - a_p^{*2}) z^{*\lambda_{n-p}}$$

n'est plus ici un polynôme à exposants entiers, il suffit pour la validité de la conclusion, de substituer, dans la démonstration antérieure, à l'utilisation du théorème de Descartes celle d'un théorème bien connu et plus général dû à Laguerre.

**D.** — On considère la famille des polynômes dirichletiens  $\mathcal{F}$  de support  $S: \{a_0; E; (\lambda_p)\}$ , où  $E$  est un compact de  $\mathbf{C}$  et où  $(\lambda_p)$  est une D-suite vérifiant la condition suivante,

$$\forall p \in \{1, 2, \dots, n\}: \lambda_p = (p+1)\lambda_0, \text{ avec } \lambda_0 \in \mathbf{R}_+^*.$$

On remarquera qu'une telle D-suite est nécessairement cramérienne sur tout compact de  $\mathbf{C}$  appartenant à une bande de  $\mathbf{C}$  — que l'on désigne par  $\mathcal{B}\{z_0; 2\pi/\lambda_0\}$  — du type

$$\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi/\lambda_0 \leq \Im(z - z_0) < \pi/\lambda_0\}$$

ou du type

$$\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi/\lambda_0 < \Im(z - z_0) \leq \pi/\lambda_0\},$$

où  $z_0$  est une constante de  $\mathbf{C}$ . On convient de dire que  $\mathcal{B}\{z_0; 2\pi/\lambda_0\}$  est une « bande horizontale semi-ouverte de  $\mathbf{C}$ , centrée sur le point  $z_0$ , et d'épaisseur égale à  $2\pi/\lambda_0$  ». La proposition suivante est élémentaire.

**PROPOSITION (D.1).** — *Si  $(\lambda_p)$  est une D-suite satisfaisant à la condition ci-dessus et si  $E$  est un compact appartenant à une bande  $\mathcal{B}\{z_0; 2\pi/\lambda_0\}$  alors l'ensemble  $\mathcal{F}^*$  associé à la famille  $\mathcal{F}$  de support  $S: \{a_0; E; (\lambda_p)\}$  se réduit à un seul élément.*

Dire que la proposition (D.1) est fausse, sous les conditions relatives à  $(\lambda_p)$  et  $E$ , c'est affirmer que  $\mathcal{L}$  (qui n'est pas vide) ne se réduit pas à un seul point. Dans le cas de la validité de cette négation, soient donc  $(a_i^{*1})$  et  $(a_i^{*2})$  deux points de  $\mathcal{L}$ . On considère les deux polynômes de Dirichlet-Tschebyscheff de support  $S$ ,  $f[(a_i^{*1})]$  et  $f[(a_i^{*2})]$ , et le polynôme d'indice  $(a_i^p)$  de la suite récurrentielle de générateurs  $(a_i^{*1})$  pondéré par  $\alpha$  et  $(a_i^{*2})$  pondéré par  $\beta$  ( $\alpha$  et  $\beta$  étant deux constantes strictement positives satisfaisant à la condition  $\alpha + \beta = 1$ ). Puisque  $(\lambda_p)$  est cramérienne sur  $E$  alors, eu égard à la proposition (B.1'), l'ensemble

$$\{z \in E \mid |f[(a_i^p), z]| = \mu; \quad \mu = \inf \Omega(E)\}$$

contient au moins  $n + 1$  points.

On note  $z_k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ ,  $n + 1$  points de cet ensemble. On sait que,

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n + 1\} : \quad f[(a_i^{*1}), z_k] = f[(a_i^{*2}), z_k].$$

Il est trivial que

$$\det \|\exp(-z_k \lambda_p)\|, \quad \text{avec} \quad k \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$$

et

$$p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

est égal à

$$\exp\left(-\lambda_0 \sum_{k=1}^{n+1} z_k\right) \cdot \det \|\exp[-z_k(\lambda_p - \lambda_0)]\|$$

et on sait que  $\det \|\exp [-z_k(\lambda_p - \lambda_0)]\| \neq 0$  est équivalent à

$$\forall k \text{ et } \forall k' \text{ (avec } k \neq k') \in \{1, 2, \dots, n+1\} : \\ z_{k'} \neq z_k + 2\pi t i / \lambda_0, \quad \forall t \in \mathbf{Z}^*.$$

Or il est trivial que  $|\Im(z_k - z_{k'})| < 2\pi/\lambda_0$  puisque  $E$  appartient à une bande  $\mathcal{B}\{z_0; 2\pi/\lambda_0\}$ . Donc le système des  $n+1$  relations

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\} : \quad f[(a_i^{*1}), z_k] = f[(a_i^{*2}), z_k]$$

implique

$$a_i^{*2} = a_i^{*1}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

(on a par définition  $a_0^{*1} = a_0^{*2} = a_0$ ). Donc  $\mathcal{L}$  se réduit à un point et  $\mathcal{F}^*$  se réduit à un élément.

On peut généraliser très facilement la proposition antérieure — comme il est évident — en énonçant :

**PROPOSITION (D.2).** — Si  $(\lambda_p)$  est une D-suite cramérienne sur le compact  $E$  de  $\mathbf{C}$ , alors l'ensemble  $\mathcal{F}^*$  de support  $S : \{a_0; E; (\lambda_p)\}$  se réduit à un élément.

On convient de dire qu'une D-suite finie  $(\lambda_p)$  est cramérienne « au sens strict » sur un compact  $E$  de  $\mathbf{C}$  si :

- 1) elle est cramérienne sur  $E$ ;
- 2) pour tout système de  $n+1$  valeurs (distinctes) extraites de  $E$  — que l'on note  $z_k, k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  — on a  $\det \|\exp (-z_k \lambda_p)\| \neq 0, k \text{ et } p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ .

On montre facilement que (2) implique (1)

Il est à remarquer que la D-suite  $(\lambda_p)$  considérée antérieurement, vérifiant la condition,  $\lambda_p = (p+1)\lambda_0, \forall p \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\lambda_0 \in \mathbf{R}_+^*$ , est cramérienne au sens strict sur tout compact  $E$  de  $\mathbf{C}$  appartenant à une bande  $\mathcal{B}\{z_0; 2\pi/\lambda_0\}$ .

**PROPOSITION (D.3).** —  $f[(a_i^*)]$  étant un élément de l'ensemble  $\mathcal{F}^*$  de support  $S, ((\lambda_p)$  satisfaisant à la condition précisée dans (D.1) et, en outre, étant cramérienne sur  $E$ ), alors il existe dans l'ensemble  $\{z \in E \mid |f[(a_i^*), z]| = \mu; \mu = \inf \Omega(E)\}$  au moins un sous-ensemble de  $n+1$  points — que l'on note  $z_k, k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$  — satisfaisant à la condition

$$\forall k \text{ et } \forall k' \text{ (avec } k \neq k') \in \{1, 2, \dots, n+1\} : \\ z_{k'} - z_k \neq 2\pi t i / \lambda_0, \quad \forall t \in \mathbf{Z}^*.$$

Eu égard au lemme (B.1'), l'ensemble

$$E_\mu = \{z \in E \mid |f[(a_i^*), z]| = \mu; \quad \mu = \inf \Omega(E)\}$$

contient au moins  $n + 1$  points. On désigne par  $E_{n+1}$  tout sous-ensemble de  $E_\mu$  formé de  $n + 1$  points. La négation de l'assertion de (D.3) est équivalente à la proposition suivante :

dans tout  $E_{n+1}$  il existe au moins deux points (dépendant bien entendu du sous-ensemble  $E_{n+1}$  considéré dans  $E_\mu$ )  $z_1$  et  $z_2$ , auxquels on peut associer  $t_{1,2} \in \mathbf{Z}^*$ , tels que  $z_2 - z_1 = 2\pi i t_{1,2} / \lambda_0$ . On se place dans le cas de la négation de (D.3). On considère alors un quelconque sous-ensemble  $E_{n+1}$  de  $E_\mu$  que l'on note  $E_{n+1}^0$  et on a pour cet  $E_{n+1}^0$  considéré,

$$\exists z_\alpha \quad \text{et} \quad z_\beta \in E_{n+1}^0, \quad \exists t_{\alpha,\beta} \in \mathbf{Z}^* : \quad z_\beta - z_\alpha = 2\pi i t_{\alpha,\beta} / \lambda_0.$$

On se propose de prouver que cette relation entre  $z_\beta$  et  $z_\alpha$  est incompatible avec l'appartenance,  $f[(a_i^*)] \in \mathcal{F}^*$ , ou, ce qui est équivalent,  $(a_i^*) \in \mathcal{L}$ . Pour cela, on considère le polynôme dirichletien,

$$\varphi[(\theta_i)] : \quad \sum_{i=1}^n \theta_i \exp [-(n-i+1)\lambda_0 z],$$

à coefficients  $\theta_i$  indéterminés dans  $\mathbf{C}$ . Puisque la suite  $(\lambda_p)$ , avec  $\lambda_p = (p+1)\lambda_0$ , est cramérienne sur  $E$ , le système des  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues  $\theta_i$

$$\varphi[(\theta_i), z_k] = f[(a_i^*), z_k], \quad k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

(où  $E_{n+1}^0$  a été ordonné en une suite  $\{z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}\}$ , avec  $z_n = z_\alpha$  et  $z_{n+1} = z_\beta$ ) admet une solution (et une seule) que l'on désigne par  $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_n^*$ . Puisqu'il existe  $t_{\alpha,\beta} \in \mathbf{Z}^*$  tel que  $z_{n+1} - z_n = 2\pi i t_{\alpha,\beta} / \lambda_0$ , le système des  $n+1$  équations linéaires à  $n$  inconnues  $\theta_i$

$$\varphi[(\theta_i), z_k] = f[(a_i^*), z_k], \quad k \in \{1, 2, \dots, n+1\},$$

est aussi satisfait par le système des  $n$  valeurs  $\theta_i^*$ ; en effet,

$$\varphi[(\theta_i), z_{n+1}] = \varphi[(\theta_i), z_n] \quad \text{et} \quad f[(a_i^*), z_{n+1}] = f[(a_i^*), z_n].$$

On désigne par  $E_{\mu,n+1}^0$  le complémentaire de  $E_{n+1}^0$  par rapport à  $E_\mu$ . On remarquera que deux points quelconques,  $z'$  et  $z''$ ,

de la suite  $(z_p)$ ,  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$  ne peuvent pas satisfaire à la condition,

$$\exists t \in \mathbf{Z} : \quad z'' - z' = 2\pi t i / \lambda_0,$$

puisque la D-suite  $(\lambda_p)$  étant cramérienne sur  $E$  est a fortiori cramérienne sur tout sous-ensemble de  $E_\mu$  contenant au moins  $n$  points.

Soit  $z' \in E_{\mu, n+1}^0$ . On désigne par  $E_{n+1}^{z'}$  l'ensemble des  $n+1$  points formés par les  $n$  points de la suite  $(z_p)$  et le point  $z'$ . Eu égard à la validité de la négation de (II.D.3), on peut trouver un terme de la suite  $(z_p)$  — soit  $z_{p_0}$  un tel terme — tel que,

$$\exists t_{p_0} \in \mathbf{Z}^* : \quad z' - z_{p_0} = 2\pi t_{p_0} i / \lambda_0.$$

Donc, l'ensemble des points  $z'$  de  $E_{\mu, n+1}^0$  peut être réparti en  $n$  classes au plus de points de la forme,

$$\begin{aligned} & \forall p \in \{1, 2, \dots, n\} : \\ \mathcal{C}_p = \{ & z' \in E_{\mu, n+1}^0 \mid \exists t' \in \mathbf{Z}^* : \quad z' - z_p = 2\pi t' i / \lambda_0 \} \end{aligned}$$

(il n'est pas exclu que  $\mathcal{C}_p = \emptyset$  pour des valeurs de l'indice  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ , et peut être pour toutes si  $E_{\mu, n+1}^0 = \emptyset$ ; cas dont l'impossibilité — conditionnellement ou non — n'a été établi par aucun raisonnement dans tout ce qui précède).

Il est à remarquer que,

$$\begin{aligned} & \forall p_1 \quad \text{et} \quad \forall p_2 \quad (\text{avec } p_1 \neq p_2) \in \{1, 2, \dots, n\} : \\ & \mathcal{C}_{p_1} \cap \mathcal{C}_{p_2} = \emptyset. \end{aligned}$$

En effet,  $\mathcal{C}_{p_1}$  et  $\mathcal{C}_{p_2}$  étant respectivement supposés non vides, on considère un point quelconque  $z'_1 \in \mathcal{C}_{p_1}$  et un point quelconque  $z'_2 \in \mathcal{C}_{p_2}$ , et on a,

$$\begin{aligned} \exists t'_1 \in \mathbf{Z}^* : \quad & z'_1 - z_{p_1} = 2\pi t'_1 i / \lambda_0, \\ \exists t'_2 \in \mathbf{Z}^* : \quad & z'_2 - z_{p_2} = 2\pi t'_2 i / \lambda_0, \end{aligned}$$

et donc  $z_{p_1} - z_{p_2} = 2\pi i(t'_1 - t'_2) / \lambda_0$ ; ce qui est impossible puisque  $(\lambda_p)$  est cramérienne sur  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ .

Considérant une quelconque classe non vide  $\mathcal{C}_p$  et un quelconque point  $z' \in \mathcal{C}_p$ , on a,

$$\exists t'_p \in \mathbf{Z}^* : \quad z' - z_p = 2\pi t'_p i / \lambda_0,$$

et donc

$$f[(a_i^*), z'] = f[(a_i'), z_p], \quad \varphi[(\theta_i^*), z'] = \varphi[(\theta_i'), z_p].$$

On considère le polynôme dirichletien,

$$F[(\alpha_i)] : \sum_{p=0}^n \alpha_{n-p} \exp(-z\lambda_p)$$

où les coefficients  $\alpha_{n-p}$  sont déterminés comme dans la démonstration de la proposition (B.2), à savoir :

$$\alpha_{n-p} = a_{n-p}^* - \alpha \theta_{n-p}^*, \quad \forall p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{avec } \theta_0^* = 0,$$

et l'on a,

$$\forall z \in E : \quad z \longrightarrow F[(\alpha_i), z] = f[(a_i^*), z] - \alpha \varphi[(\theta_i^*), z]$$

où  $\alpha$  est une constante appartenant à  $]0, 1[$ . La suite de la démonstration ne diffère qu'à des détails près de celle de (B.2).

Eu égard à la continuité uniforme de  $z \longrightarrow f[(a_i^*), z]$  et  $z \longrightarrow \varphi[(\theta_i^*), z]$  sur leur support, on a,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \forall z' \in E_\mu, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0, \quad \forall z \in \{E \mid |z - z'| \leq \delta_\varepsilon\} : \\ |f[(a_i^*), z] - f[(a_i^*), z']| < \varepsilon \\ |\varphi[(\theta_i^*), z] - \varphi[(\theta_i^*), z']| < \varepsilon. \end{aligned}$$

( $\delta_\varepsilon$  étant indépendant de  $z'$  sur  $E_\mu$ ).

On désigne par  $D_{z', \varepsilon}$  l'ensemble  $\{z \in E \mid |z - z'| \leq \delta_\varepsilon\}$  et par  $D_\varepsilon$  l'union des ensembles  $D_{z', \varepsilon}$  indexés par  $z'$  sur  $E_\mu$ ; on a,

$$D_\varepsilon = \bigcup_{z'} D_{z', \varepsilon}, \quad z' \in E_\mu,$$

et on pose  $E_\varepsilon = E - D_\varepsilon$ .

Soit un point quelconque  $z_0 \in D_\varepsilon$ . On peut toujours trouver un point  $z'_{z_0} \in E_\mu$  tel que  $z_0 \in D_{z'_{z_0}, \varepsilon}$ . Par définition de  $D_{z'_{z_0}, \varepsilon}$ , on a,

$$\begin{aligned} |f[(a_i^*), z_0] - f[(a_i^*), z'_{z_0}]| < \varepsilon, \quad \text{avec } |f[(a_i^*), z_0]| \leq \mu \\ \text{et} \quad |\varphi[(\theta_i^*), z_0] - \varphi[(\theta_i^*), z'_{z_0}]| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Or, ou bien

$$z'_{z_0} \in \{z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}\},$$

et alors

$$f[(a_i^*), z'_{z_0}] = \varphi[(\theta_i^*), z'_{z_0}]$$

ou bien  $z'_{z_0} \in E_{\mu, n+1}^0$  et alors

$$\exists z_{p_0} \in \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \quad \text{et} \quad \exists t_{p_0} \in \mathbf{Z}^* : \\ z'_{z_0} - z_{p_0} = 2\pi i t_{p_0} / \lambda_0,$$

et donc

$$f[(a_i^*), z'_{z_0}] = f[(a_i^*), z_{p_0}] \quad \text{et} \quad \varphi[(\theta_i^*), z'_{z_0}] = \varphi[(\theta_i^*), z_{p_0}]$$

Or

$$f[(a_i^*), z_{p_0}] = \varphi[(\theta_i), z_{p_0}]$$

et ainsi,

$$f[(a_i^*), z'_{z_0}] = \varphi[(\theta_i^*), z'_{z_0}].$$

On poursuit alors le raisonnement comme dans la démonstration des propositions (B.1) et (B.1').

*Remarque (1).* — Eu égard à la définition d'une suite cramerienne sur un compact, la proposition suivante est triviale :

$f[(a_i^*)]$  étant un élément de  $\mathcal{F}^*$  de support  $S((\lambda_p)$  satisfaisant à la condition précisée dans (D.1) et, en outre, étant cramerienne sur  $E$ ) alors pour tout sous-ensemble  $E_n$  de  $n$  points de

$$\{z \in E \mid |f[(a_i^*), z]| = \mu\}$$

on a,

$$\forall z \quad \text{et} \quad \forall z' \quad (\text{avec } z \neq z') \in E_n : \\ z - z' \neq 2\pi i t / \lambda_0, \quad \forall t \in \mathbf{Z}^*.$$

*Remarque (2).* — Si la D-suite  $(\lambda_p)$  satisfait à la condition précisée dans (D.1) et, en outre, est « strictement cramerienne » sur le compact  $E \subset \mathbf{C}$ , alors la proposition (D.3) est triviale. Plus généralement, on énonce :

**PROPOSITION (D.3').** — Si la D-suite  $(\lambda_p)$  vérifie la condition, il existe un nombre  $\nu > 0$  et une suite d'entiers  $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  telle que

$$\forall p \in \{0, 1, 2, \dots, n\} : \quad \nu = t_p / \lambda_p,$$

et si, en outre,  $(\lambda_p)$  est strictement cramerienne sur le compact  $E \subset \mathbf{C}$ , alors il existe au moins un sous-ensemble  $E_{n+1}$  de



$n + 1$  points de

$$\{z \in E \mid |f[(a_i^*), z]| = \mu, \\ \text{où } f[(a_i^*)] \in \mathcal{F}^* \text{ de support } S, \text{ et } \mu = \inf \Omega(E)\}$$

on a,  $\forall z$  et  $\forall z'$  (avec  $z \neq z'$ )  $\in E_{n+1}$  :

$$z - z' \neq 2\pi i v, \quad \forall t \in \mathbf{Z}^*.$$

PROPOSITION (D.4). — *Sous les conditions relatives à  $(\lambda_p)$  et  $E$  précisées dans (D.3), l'ensemble  $\mathcal{F}^*$  se réduit à un seul élément.*

La démonstration de cette proposition est analogue à celle de (D.1).

PROPOSITION (D.4'). — *Sous les conditions relatives à  $(\lambda_p)$  et  $E$  précisées dans (D.3'),  $\mathcal{F}^*$  se réduit à un seul élément.*

(D.4) et (D.4') sont comme (D.1) contenues dans (D.2).

Manuscrit reçu le 11 juillet 1967

Maurice BLAMBERT  
et Georges CHEVALIER,  
Faculté des Sciences de Grenoble  
Institut Fourier  
Place du Doyen Gosse  
38-Grenoble.