ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CLAUDE GODBILLON

Feuilletages ayant la propriété du prolongement des homotopies

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 2 (1967), p. 219-260
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_2_219_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 2 (1967), 219-260.

FEUILLETAGES AYANT LA PROPRIÉTÉ DU PROLONGEMENT DES HOMOTOPIES

par Claude GODBILLON

Introduction.

Les variétés feuilletées, introduites par C. Ehresmann et G. Reeb, ont jusqu'à présent été essentiellement étudiées d'un point de vue géométrique. On peut cependant espérer que les méthodes de la topologie algébrique permettent un abord nouveau et fécond de cette théorie.

Dans cette direction peu de résultats sont actuellement connus. On peut par exemple citer la formule de Poincaré-Reeb pour les feuilletages de codimension 1 définis par une forme de Pfaff complètement intégrable ([17]); on peut aussi mentionner une étude entreprise récemment par R. Deheuvels et utilisant des techniques de géométrie différentielle.

L'objet de ce travail est de faire une étude homologique d'un type de feuilletages dont le comportement est voisin de celui des fibrations : les feuilletages ayant la propriété du prolongement des homotopies.

On peut d'ailleurs rappeler à ce sujet que tout feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension 1 du plan $\mathbf{R}^2$ possède les propriétés suivantes :

1) chaque feuille de $\mathcal{F}$ est fermée et homéomorphe à $\mathbf{R}$ (Bendixon, Kaplan);

2) l'espace des feuilles $\mathbf{R}^2/\rho$ de $\mathcal{F}$ est une variété topologique de dimension 1 (en général non séparée) simplement connexe et à base dénombrable (Haefliger, Reeb);

3) la projection $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2/\rho$ est une fibration localement triviale (Whitney).

Plus généralement, une relation d'équivalence ρ sur un espace topologique X a la propriété du prolongement des homotopies si la condition suivante est satisfaite : « étant données deux simplexes singuliers f et g de même dimension de X équivalents points par points ($f(x) \sim g(x)$ pour tout x), on peut suivre toute déformation de f en une déformation équivalente de g ».

Cette notion généralise celle de fibré au sens de Serre : l'espace topologique quotient X/ρ (ou plus généralement la base du fibré) ne joue ici aucun rôle.

La propriété du prolongement des homotopies est par exemple vérifiée par les relations d'équivalence suivantes :

1) classes à gauche d'un groupe topologique modulo un sous-groupe (généralisation de la fibration localement triviale d'un groupe de Lie sur l'espace homogène associé à un sous-groupe fermé) ;

2) groupe discret opérant continuement et sans point fixe (généralisation des revêtements galoisiens) ;

3) feuilletage transverse à une fibration dans le cas où le groupe structural (discret) de la fibration opère sans point fixe sur la fibre ;

4) feuilletage défini par une forme de Pfaff fermée et sans singularité.

Sous des hypothèses assez faibles sur la topologie de X, la propriété du prolongement des homotopies (restreinte d'ailleurs aux simplexes de dimension 0) entraîne que ρ est une relation d'équivalence ouverte. Cette notion pourrait donc conduire à une étude (à peine esquissée ici) de ces relations d'équivalence dans le cadre de la dynamique topologique.

Le défaut d'une base topologique pour une relation d'équivalence ayant la propriété du prolongement des homotopies rend en général difficile une étude géométrique directe. Par contre le cadre semi-simplicial permet d'obtenir une situation exploitable.

Soit $\mathcal{X}$ le complexe singulier de X; la relation d'équivalence ρ s'étend en une relation d'équivalence, notée encore ρ, sur $\mathcal{X}$: deux simplexes singuliers f et g de dimension n sont équivalents si l'on a $f(x) \sim g(x)$ pour tout $x \in \Delta^n$.

Cette relation d'équivalence est compatible avec la structure semi-simpliciale de $\mathcal{X}$; il existe donc un ensemble semi-simplicial quotient $\mathcal{B} = \mathcal{X}/\rho$.

On peut alors caractériser les relations d'équivalence ayant la propriété du prolongement des homotopies comme celles pour lesquelles $\mathcal{X} \to \mathcal{B}$ est un fibré au sens de Kan.

Par conséquent dans ces conditions, si X est connexe par arcs, les classes d'équivalence de ρ ont même ensemble de composantes connexes; et deux telles composantes connexes ont même type d'homotopie faible. En particulier, si ρ est associée à un feuilletage $\mathcal{F}$, toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont simultanément compactes ou non compactes (dans le premier cas $\mathcal{F}$ définit d'ailleurs une fibration localement triviale).

La théorie générale des fibrés au sens de Kan conduit aussi à l'existence d'une suite exacte d'homotopie, d'une suite spectrale en homologie et en cohomologie, ...

Les fibres de la fibration de Kan $\mathcal{X} \to \mathcal{B}$ s'interprètent comme les complexes singuliers des classes d'équivalence de ρ munies de la topologie induite. Mais, lorsque ρ est associée à un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension p d'une variété paracompacte, ces fibres sont aussi les complexes singuliers des feuilles de $\mathcal{F}$ munies de leur topologie fine; elles ont donc dans ce cas même homologie que des variétés de dimension p (leur homologie est par exemple nulle en dimensions supérieures à p).

L'espace semi-simplicial quotient $\mathcal{B}$ s'identifie à un sous-complexe du complexe singulier de l'espace topologique quotient X/ρ; mais il en est en général distinct (l'égalité caractérise les fibrés au sens de Serre). Par contre, si ρ est associée à un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q dont l'espace des feuilles X/ρ est une variété topologique (séparée ou non) l'espace semi-simplicial quotient a même type d'homotopie que le complexe singulier de X/ρ; son homologie est donc nulle en dimensions supérieures à q.

Mais en général (même dans le cas des variétés feuilletées), l'espace semi-simplicial quotient $\mathcal{B}$ n'est pas de dimension homologique finie.

On peut cependant obtenir des résultats de deux types différents :

1) ceux qui ne font pas intervenir la nature de la base semi-simpliciale $\mathcal{B}$; par exemple : il n'existe pas sur $\mathbf{R}^n$ de relation

d'équivalence ayant la propriété du prolongement des homotopies et pour laquelle les classes d'équivalence soient des sphères homologiques de dimension paire;

2) ceux pour lesquels une étude directe permet d'obtenir des précisions sur la nature de $\mathcal{B}$; par exemple : si $\mathcal{F}$ est un feuilletage de codimension 1 de $\mathbf{R}^n$ ayant la propriété du prolongement des homotopies les feuilles de $\mathcal{F}$ sont simplement connexes et acycliques.

Les résultats de ce travail ont été annoncés dans quatre Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences : [6], [7], [8] et [9].

CHAPITRE I

TOPOLOGIE FINE ASSOCIÉE A UNE FAMILLE D'APPLICATIONS

On considère un espace topologique E dont on désigne par $\mathfrak{T}$ la topologie.

1. Définitions et propriétés.

Soit $\mathfrak{X}$ une famille d'applications continues de but E; on supposera que pour toute application $f \in \mathfrak{X}$ la source de f est connexe.

Définition 1. — *La topologie fine de* E *associée à la famille* $\mathfrak{X}$ *est la topologie la plus fine sur* E *qui rende continues toutes les applications de* $\mathfrak{X}$.

On désignera par $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ cette topologie fine. Plus généralement d'ailleurs, pour toute partie A de E on désignera par $(A, \mathfrak{T})$ (resp. $(A, \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}})$) l'espace A muni de la topologie induite par $\mathfrak{T}$ (resp. par $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$).

Les propositions suivantes sont immédiates :

Proposition 1. — *La topologie* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ *est plus fine que la topologie* $\mathfrak{T}$.

Pour toute partie A de E l'application identique de $(A, \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}})$ dans $(A, \mathfrak{T})$ est donc continue.

Proposition 2. — *Les composantes connexes de* E *pour* $\mathfrak{T}$ *sont ouvertes et fermées pour* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$.

On supposera donc dans la suite que E est un espace connexe. Cette hypothèse n'entraîne pas en général que l'espace $(E, \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}})$ soit connexe.

Un cas particulier important est celui où $\mathfrak{X}$ est la famille $\mathcal{S}$ des simplexes singuliers de E (applications continues dans E dont la source est un simplexe géométrique standard Δ^n) : $\mathcal{S}$ est le complexe singulier de E. On a alors :

Proposition 3. — *Les composantes connexes par arcs de* $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{S}})$ *sont identiques aux composantes connexes par arcs de* $(E, \mathcal{T})$. *Chacune de ces composantes connexes est ouverte et fermée pour* $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.

Proposition 4. — *Soit* C *une composante connexe par arcs de* E. *L'application identique* i *de* $(C, \mathcal{T}_{\mathcal{S}})$ *dans* $(C, \mathcal{T})$ *induit un isomorphisme des complexes singuliers.*

Démonstration.

L'application $i : (C, \mathcal{T}_{\mathcal{S}}) \to (C, \mathcal{T})$ étant continue tout simplexe singulier de $(C, \mathcal{T}_{\mathcal{S}})$ est aussi un simplexe singulier de $(C, \mathcal{T})$.

Réciproquement un simplexe singulier de $(C, \mathcal{T})$, étant dans $\mathcal{S}$, est aussi par définition un simplexe singulier de $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{S}})$, donc de $(C, \mathcal{T}_{\mathcal{S}})$. L'application i induit donc un isomorphisme des complexes singuliers.

Corollaire. — *L'application* $i : (C, \mathcal{T}_{\mathcal{S}}) \to (C, \mathcal{T})$ *induit des isomorphismes des groupes d'homotopie, des groupes d'homologie singulière et des anneaux de cohomologie singulière.*

2. Modèles.

Définition 2. — *Un modèle de* E *est un couple* (M, h) *où* M *est un espace topologique connexe et* h *une application continue et bijective de* M *sur* E *ayant la propriété suivante :*

tout point x *de* M *possède un voisinage* U *tel que* h *soit un homéomorphisme de* U *sur* $h(U)$.

L'application h est donc localement bicontinue; mais elle n'est pas nécessairement un homéomorphisme local.

Exemples. — 1) Soit i l'application identique de E; (E, i) est un modèle de E.

2) Soit V une variété topologique et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de dimension p de V [17]. La topologie fine de V associée à $\mathcal{F}$ détermine pour chaque feuille E de $\mathcal{F}$ (munie de la topologie induite par la topologie initiale de V) un modèle (M, h) pour lequel M est une variété topologique de dimension p.

3) Plus généralement soit X un espace topologique sur lequel est défini un système dynamique généralisé au sens de [18]. La topologie fine de X associée à ce système dynamique détermine pour chaque trajectoire de E un modèle (M, h) pour lequel M est un espace localement connexe.

Proposition 5. — *Soit h une application continue et bijective d'un espace* M *sur* E; *alors h est un homéomorphisme de* M *sur* $(E, \mathcal{C}_{\{h\}})$.

En effet h est tout d'abord une application continue et bijective de M sur $(E, \mathcal{C}_{\{h\}})$; h est de plus une application ouverte : si U est un ouvert de M, $h(U)$ est un ouvert de $\mathcal{C}_{\{h\}}$ car $h^{-1}(hU) = U$.

En particulier si (M, h) est un modèle de E, h est un homéomorphisme de M sur $(E, \mathcal{C}_{\{h\}})$.

Définition 3. — *Un modèle* (M, h) *de* E *est un modèle régulier si pour tout point x de* M *il existe un système fondamental* $(U_i)_{i\in I}$ *de voisinages de x et un système fondamental* $(V_i)_{i\in I}$ *de voisinages de $f(x)$ ayant la propriété suivante :*

pour tout indice $i \in I$ h est un homéomorphisme de U_i *sur la composante connexe de* V_i *contenant* $h(x)$.

Si (M, h) est un modèle régulier de E l'espace M est localement connexe.

Exemples. — Les exemples de modèles donnés précédemment ne sont pas nécessairement réguliers :

1) Pour que (E, i) soit un modèle régulier de E il faut et il suffit que E soit un espace localement connexe.

2) Pour que la topologie fine associée à une feuille E de $\mathcal{F}$ définisse un modèle régulier de E il suffit (mais ce n'est pas nécessaire) que V soit une variété paracompacte; en effet dans ce cas pour tout ouvert distingué U de $\mathcal{F}$, $U \cap E$ est constitué d'une famille dénombrable de plaques.

3) Comme dans l'exemple précédent, pour que les modèles associés aux trajectoires d'un système dynamique généralisé soient réguliers il suffit que l'espace X soit paracompact.

PROPOSITION 6. — *Soient* (M_1, h_1) *et* (M_2, h_2) *deux modèles réguliers de* E. *L'application* $h_2^{-1}\, h_1$ *est un homéomorphisme de* M_1 *sur* M_2.

Démonstration.

Soient x_1 un point de M_1, $y = h_1(x_1)$ et $x_2 = h_2^{-1}(y)$. Soit W un voisinage de x_2; on peut trouver un voisinage $U_2 \subset W$ de x_2, et un voisinage V_2 de y tels que h_2 soit un homéomorphisme de U_2 sur la composante connexe de V_2 contenant y.

On peut aussi trouver un voisinage U_1 de x_1 et un voisinage $V_1 \subset V_2$ de y tels que h_1 soit un homéomorphisme de U_1 sur la composante connexe de V_1 contenant y. On a alors $U_1 \subset h_1^{-1}h_2(U_2) \subset h_1^{-1}h_2(W)$; ce qui montre que $h_2^{-1}h_1$ est continue au point x_1.

On montre de même que $h_1^{-1}h_2$ est continue au point x_2.

c.q.f.d.

Si E possède un modèle régulier, il est donc unique à un homéomorphisme près.

PROPOSITION 7. — *Soit* (M, h) *un modèle régulier de* E. *La topologie* $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$ *est plus fine que la topologie* $\mathfrak{T}_{\{h\}}$.

Cette proposition signifie que h est une application ouverte de M dans $(E, \mathfrak{T}_{\mathcal{S}})$, ou encore que h^{-1} est une application continue de $(E, \mathfrak{T}_{\mathcal{S}})$ dans M (proposition 5).

Démonstration.

Il suffit de montrer que pour toute application σ de $\mathcal{S}$, $h^{-1}\sigma$ est une application continue.

Soient donc $\sigma : \Delta^n \to E$ un simplexe singulier de E, x un point de Δ^n, $y = \sigma(x)$ et $z = h^{-1}(y)$. Soit W un voisinage de z; on peut trouver un voisinage $U \subset W$ de z et un voisinage V de y tels que h soit un homéomorphisme de U sur la composante connexe de V contenant y.

Il existe un voisinage connexe Z de x dans Δ^n tel que $\sigma(Z) \subset V$; on a alors $\sigma(Z) \subset h(U)$ et $h^{-1}\sigma(Z) \subset U \subset W$. Ce qui montre que $h^{-1}\sigma$ est continue en x.

c.q.f.d.

Remarque. — Cette proposition reste vraie si on remplace $\mathcal{S}$ par une famille d'applications continues dont les sources sont des espaces localement connexes.

3. Modèles réguliers et variétés.

LEMME 1. — *Soient* M^p *et* V^q *deux variétés différentiables. Si* h *est un plongement différentiable et régulier de* M *dans* V, (M, h) *est un modèle régulier de* h(M).

Démonstration. — Soit x un point de M. Puisque h est un plongement différentiable et régulier de M on peut trouver un système fondamental $(U_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de voisinages de x et un système fondamental $(V_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de voisinages de $h(x)$ ayant les propriétés suivantes pour tout i :

1) V_i est difféomorphe à la boule unité B^q;

2) $V_i \cap h(M)$ s'identifie à une section plane de B^q;

3) h est un difféomorphisme de U_i sur $V_i \cap h(M)$.

c.q.f.d.

Remarque. — Ce lemme est inexact si l'on ne suppose pas que le plongement h est régulier. Le plongement de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$ dessiné ci-contre en est un contre exemple.

THÉORÈME 1. — *Soit* (M, h) *un modèle régulier de* E *pour lequel* M *est une variété topologique de dimension p. L'application* h *est un homéomorphisme de* M *sur* (E, $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$).

Démonstration. — On a déjà vu que h est une application bijective et ouverte de M sur (E, $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$) (proposition 7); il reste donc à montrer qu'elle est continue.

Soit x un point de M et soit U un voisinage de $h(x)$ dans (E, $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$).

Soit g un homéomorphisme du simplexe Δ^p sur un voisinage de x dans M. Le composé hg est une application continue de Δ^p dans (E, $\mathcal{T}$); hg est donc un élément de $\mathcal{S}$. Par suite $g^{-1}h^{-1}(U)$ est un voisinage de $g^{-1}(x)$ dans Δ^p et $h^{-1}(U) = g(g^{-1}h^{-1}(U))$ est un voisinage de x dans M. Ce qui montre la continuité de h en x.

c.q.f.d.

Remarque. — Soit $\mathcal{S}'$ la famille des applications continues de $\mathbf{R}^p$ dans E; compte tenu de la remarque suivant la proposition 7, on démontre de façon analogue que h est un homéomorphisme de M sur $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{S}'})$.

Corollaire 1. — *Dans les hypothèses du théorème* 1, h *est une équivalence d'homotopie faible de* M *sur* $(E, \mathcal{T})$.

Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème 1 et de la proposition 4. (En fait h induit un isomorphisme des complexes singuliers.)

Corollaire 2. — *Soit* V *une variété topologique paracompacte et soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage de* V. *Si* E *est une feuille de* $\mathcal{F}$ *la topologie fine de* E *associée à* $\mathcal{F}$ *et la topologie fine de* E *associée à la famille* $\mathcal{S}$ *sont identiques.*

En effet la topologie fine de E associée à $\mathcal{F}$ définit un modèle régulier (M, h) de E (munie de la topologie induite par la topologie de V) pour lequel M est une variété topologique (voir exemples 2).

Corollaire 3. — *Dans les hypothèses du corollaire* 2, *l'injection canonique* i *de* E *munie de la topologie fine associée à* $\mathcal{F}$, *dans* E *munie de la topologie induite par la topologie de* V, *définit un isomorphisme des complexes singuliers.*

Remarque. — On peut démontrer directement que l'injection canonique i est une équivalence d'homotopie.

Soit en effet $\mathcal{V}$ le recouvrement ouvert de la feuille E (munie de la topologie induite $\mathcal{T}$) associé à l'atlas définissant le feuilletage $\mathcal{F}$. Le complexe singulier $\mathcal{S}$ de $(E, \mathcal{T})$ a même type d'homotopie que le complexe $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ engendré par les simplexes singuliers « petits d'ordre $\mathcal{V}$ ».

Soit $\mathcal{W}$ le recouvrement ouvert de la feuille E (munie de la topologie fine $\mathcal{T}'$) défini par les plaques de $\mathcal{F}$ contenues dans E. Le complexe singulier $\mathcal{S}'$ de $(E, \mathcal{T}')$ a même type d'homotopie que le complexe $\mathcal{S}_{\mathcal{W}}$ engendré par les simplexes singuliers « petits d'ordre $\mathcal{W}$ ».

Mais si la variété V est paracompacte on a $\mathcal{S}_{\mathcal{V}} = \mathcal{S}_{\mathcal{W}}$.

Corollaire 4. — *Soit* G *un groupe de Lie opérant différentiablement et proprement sur une variété différentiable* M.

Pour tout point x *de* M, *on désigne par* V_x (*resp.* H_x) *la trajectoire de* x (*resp. le sous-groupe d'isotropie de* x). *La bijection canonique* h *de* G/H_x *sur* $(V_x, \mathcal{T}_{\mathcal{G}})$ *est un homéomorphisme.*

On déduit en effet du lemme 1 que $(G/H_x, h)$ est un modèle régulier de V_x.

CHAPITRE II

ENSEMBLE SEMI-SIMPLICIAL QUOTIENT ASSOCIÉ A UNE RELATION D'ÉQUIVALENCE

1. Ensemble semi-simplicial quotient.

On considère dans ce chapitre un espace topologique X sur lequel est donnée une relation d'équivalence ρ (on écrira aussi $x \sim y$ pour $\rho(x, y)$). On note π la projection de X sur X/ρ.

Pour toute classe d'équivalence E de ρ on désignera par $(E, \mathcal{T})$ (resp. $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{S}})$) l'espace E muni de la topologie induite par X (resp. de la topologie fine associée à la famille $\mathcal{S}$ de tous les simplexes singuliers de $(E, \mathcal{T})$).

DÉFINITION 1. — *Deux simplexes f et g de dimension n de X sont équivalents (relativement à ρ) si l'on a $f(x) \sim g(x)$ pour tout $x \in \Delta^n$.*

Cette relation définit une relation d'équivalence, qu'on notera encore ρ, sur le complexe singulier $\mathfrak{X}$ de X.

Il est clair que cette relation d'équivalence est compatible avec les opérateurs de face et de dégénérescence dans $\mathfrak{X}$. On peut donc définir un ensemble semi-simplicial quotient $\mathcal{B} = \mathfrak{X}/\rho$, et une projection semi-simpliciale p de $\mathfrak{X}$ sur $\mathcal{B}$.

DÉFINITION 2. — *L'ensemble semi-simplicial $\mathcal{B} = \mathfrak{X}/\rho$ est l'ensemble semi-simplicial quotient associé à ρ.*

Soit b un sommet de $\mathcal{B}$, et soit (b) le sous-ensemble semi-simplicial de $\mathcal{B}$ engendré par b. Soit x un point de X représentant b dans $\mathfrak{X}$ et soit E la classe d'équivalence de ρ contenant x. On a :

PROPOSITION 1. — *Le sous-ensemble $p^{-1}(b)$ est le complexe singulier de l'espace* $(E, \mathcal{T})$.

Démonstration. — En effet un simplexe singulier f de dimension n de X est dans $p^{-1}(b)$ si et seulement si f est équivalent dans $\mathfrak{X}$ au simplexe singulier défini par l'application constante de Δ^n sur x; donc si l'image de Δ^n par f est contenue dans E.

Corollaire 1. — *Avec les notations précédentes,* $p^{-1}(b)$ *est le complexe singulier de l'espace* $(E, \mathcal{T}_\mathcal{G})$.

Ce corollaire est une conséquence de la proposition 4 du chapitre I. On en déduit (voir corollaire 3, paragraphe 3, chapitre 1) :

Corollaire 2. — *Lorsque* ρ *est la relation d'équivalence associée à un feuilletage de dimension* p *d'une variété topologique paracompacte, le sous-ensemble* $p^{-1}(b)$ *a même type d'homotopie faible que le complexe singulier d'une variété topologique paracompacte de dimension* p.

2. Rapports avec l'espace topologique quotient.

L'ensemble semi-simplicial quotient $\mathcal{B}$ peut s'identifier à un sous-ensemble semi-simplicial du complexe singulier $\mathcal{C}$ de l'espace topologique quotient X/ρ; en effet chaque classe de simplexes singuliers de $\mathfrak{X}$ définit un simplexe singulier de X/ρ.

Mais en général $\mathcal{B}$ est distinct de $\mathcal{C}$: en effet pour que l'on ait $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ il faut et il suffit que tout simplexe singulier de X/ρ se relève en un simplexe singulier de X.

Cette dernière condition n'est par exemple pas vérifiée lorsque ρ est la relation d'équivalence sur le tore T^2 associée à un sous-groupe à un paramètre non compact; dans ce cas la topologie quotient de T^2/ρ est en effet la topologie grossière.

On a cependant :

Proposition 2. — *Soit* (X, f, B) *un fibré au sens de Serre et soit* ρ *la relation d'équivalence sur* X *associée à* f. *Alors :*

1) $(X, \pi, X/\rho)$ *est un fibré au sens de Serre;*

2) *l'ensemble semi-simplicial quotient* $\mathcal{B}$ *est égal au complexe singulier* $\mathcal{C}$ *de* X/ρ;

3) *la bijection canonique continue* h *de* X/ρ *sur* B *induit un isomorphisme des complexes singuliers.*

Démonstration. — On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/\rho \arrow[rr, "h"'] & & B \end{tikzcd}$$

Soient g une application continue de Δ^n dans X et Γ une application continue de $\Delta^n \times I$ dans X/ρ telles que $\pi g(x) = \Gamma(x, 0)$ pour tout $x \in \Delta^n$. On a donc

$$h\pi g(x) = fg(x) = h\Gamma(x, 0) \qquad \text{pour tout} \qquad x \in \Delta^n.$$

Il existe par suite une application continue G de $\Delta^n \times I$ dans X telle que $f \circ G = h \circ \Gamma$, ou encore $\pi \circ G = \Gamma$; ce qui montre 1).

Puisque $(X, \pi, X/\rho)$ est un fibré au sens de Serre, toute application continue d'un polyèdre fini et contractile P dans X/ρ se relève en une application de P dans X; en particulier tout simplexe singulier de X/ρ est la projection d'un simplexe singulier de X; ce qui montre 2).

Enfin, puisque tout simplexe singulier de B se relève en un simplexe singulier de X, h induit un isomorphisme des complexes singuliers.

c.q.f.d.

Proposition 3. — *Si la projection* π *de* X *sur* X/ρ *admet une section locale continue au voisinage de chaque point de* X/ρ, *l'injection canonique de* $\mathcal{B}$ *dans* $\mathcal{C}$ *est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X/ρ par des ouverts U_i sur lesquels il existe une section de π; et soit $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des simplexes singuliers de X/ρ dont l'image est contenue dans un des ouverts U_i. Il est clair que $\mathcal{C}_1$ est contenu dans $\mathcal{B}$.

On peut construire, par subdivision barycentrique, une rétraction r du complexe des chaînes singulières

$$C(X/\rho;\ \mathbf{Z}) = C(\mathcal{C};\ \mathbf{Z})$$

sur le complexe de chaînes $C(\mathcal{C}_1; \mathbf{Z})$ qui soit un inverse homotopique de l'inclusion de $C(\mathcal{C}_1; \mathbf{Z})$ dans $C(X/\rho; \mathbf{Z})$ [4].

De plus la construction de r est telle que sa restriction à $C(\mathcal{B}; \mathbf{Z})$ est une rétraction de $C(\mathcal{B}; \mathbf{Z})$ sur $C(\mathcal{C}_1; \mathbf{Z})$ inverse homotopique de l'inclusion $C(\mathcal{B}; \mathbf{Z}) \leftarrow C(\mathcal{C}_1; \mathbf{Z})$.

c.q.f.d.

COROLLAIRE 1. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage de codimension* p *d'une variété topologique* V *et soit* ρ *la relation d'équivalence sur* V *associée à* $\mathcal{F}$. *Si l'espace des feuilles est une variété topologique de dimension* p *(en général non séparée), l'espace semi-simplicial quotient a même type d'homotopie faible que le complexe singulier de* V/ρ.

En effet si l'espace des feuilles V/ρ est une variété, il existe au voisinage de chaque point de V/ρ une section de la projection π.

COROLLAIRE 2. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage de codimension* 1 *d'une variété topologique* V *simplement connexe tel que toutes les feuilles de* $\mathcal{F}$ *soient fermées dans* V; *et soit* ρ *la relation d'équivalence sur* V *associée à* $\mathcal{F}$. *L'espace semi-simplicial quotient* $\mathcal{B}$ *a même type d'homotopie faible que le complexe singulier d'une variété topologique de dimension* 1.

On a donc en particulier $H_i(\mathcal{B}; \mathbf{Z}) = 0$ pour $i > 1$.

Démonstration. — Un résultat de A. Haefliger [12] assure en effet que dans les hypothèses du corollaire l'espace des feuilles de $\mathcal{F}$ est une variété topologique de dimension 1 (en général non séparée).

c.q.f.d.

CHAPITRE III

PROLONGEMENT DES HOMOTOPIES

On considère un espace topologique X sur lequel est donnée une relation d'équivalence ρ. Toutes les applications seront supposées continues.

1. Le prolongement des chemins.

DÉFINITION 1. — *La relation d'équivalence* ρ *a la propriété du prolongement des chemins si la condition suivante est vérifiée :*

(C) *quelle que soit l'application* f *de* $I = [0, 1]$ *dans* E, *quel que soit le point* x *de* E *équivalent à* $f(0)$, *il existe une application* g *de* I *dans* E *telle que* $g(0) = x$ *et* $g(t) \sim f(t)$ *pour tout* $t \in I$.

Lorsque ρ est la relation d'équivalence associée à un feuilletage $\mathcal{F}$ d'une variété V, on dit aussi que $\mathcal{F}$ a la propriété du prolongement des chemins.

Exemples. — 1) La relation d'équivalence associée à la projection d'une fibration de Serre a la propriété du prolongement des chemins.

2) Soit G un groupe topologique opérant continuement à gauche sur un espace E et soit ρ la relation d'équivalence sur E dont les classes sont les trajectoires des points de E. La relation d'équivalence ρ a la propriété du prolongement des chemins ; en effet si $x = \alpha f(0)$ avec $\alpha \in G$, on peut définir g par $g(t) = \alpha f(t)$.

En particulier la relation d'équivalence définie par les classes à droite d'un groupe modulo un sous-groupe, et la relation d'équivalence dont les classes sont les trajectoires d'un système dynamique topologique au sens de Nemitskii et Stepanov ont la propriété du prolongement des chemins.

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de dimension p d'une variété topologique V^n de dimension n. Le feuilletage $\mathcal{F}$ a la propriété du prolongement des chemins.*

Démonstration. — Soit f une application de I dans V^n et soit $x = f(0)$; on désigne par F la feuille de $\mathcal{F}$ contenant x.

Soit y un point de F; il existe un plongement c du segment $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ dans F tel que $c(0) = x$ et $c(1) = y$.

On peut trouver un voisinage tubulaire T de c dans V fibré en boules ouverts ayant les propriétés suivantes :

— les feuilles de $\mathcal{F}$ sont transverses aux fibres de T;

— $T \cap F$ est un voisinage tubulaire de c dans F;

— il existe une rétraction r de T sur $T \cap F$;

— il existe une application distinguée ([14]) h de T dans $\mathbf{R}^p$;

— les applications r et h définissent une décomposition de T en produit.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que l'image par f du segment $[0, \varepsilon]$ soit contenue dans T; et soit γ une application de $[0, \varepsilon]$ dans $T \cap F$ telle que $\gamma(0) = y$ et $\gamma(\varepsilon) = rf(\varepsilon)$.

On définit alors g par

$$\begin{aligned} g(t) &= (\gamma(t), h(f(t))) && \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ g(t) &= f(t) && \text{pour} \quad \varepsilon \leqslant t \leqslant 1. \end{aligned}$$

c.q.f.d.

On suppose dans la suite de ce paragraphe que chaque point de X possède un système fondamental dénombrable de voisinages connexes par arcs, et que la relation d'équivalence ρ a la propriété du prolongement des chemins.

LEMME. — *Soient x un point de X, $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un système fondamental de voisinages connexes par arcs de x, et $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite de points de X tendant vers x et telle que $x_p \in V_n$ pour $p \geqslant n$. Il existe alors une application f de I dans X telle que $f(0) = x$ et $f\left(\frac{1}{p}\right) = x_p$.*

Démonstration. — Soit s_p une application du segment $\left[\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right]$ dans V_p telle que $s_p\left(\frac{1}{p+1}\right) = x_{p+1}$ et $s_p\left(\frac{1}{p}\right) = x_p$.

On définit f par $f(0) = x$ et $f_t = s_p$ si $t \in \left[\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right]$. L'application f est alors continue.

THÉORÈME 2. — *La relation d'équivalence* ρ *est ouverte.*

Démonstration. — Soit U un ouvert de X et soit V le saturé de U pour ρ. Si V n'est pas un ouvert de X il contient au moins un de ses points frontières; soit donc x un point frontière de V.

On peut trouver un système fondamental $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de voisinages connexes par arcs de x et une suite $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de points de X — V tendant vers x et telle que $x_p \in W_n$ pour $p \geqslant n$. Il existe donc une application f de I dans X telle que $f(0) = x$ et $f\left(\frac{1}{p}\right) = x_p$.

Soit y un point de U équivalent à x; il existe une application g de I dans X telle que $g(0) = y$ et $g(t) \sim f(t)$ pour tout $t \in$ I. Dès que p est assez grand on a $g\left(\frac{1}{p}\right) \in$ U, et par suite $x_p \in$ V; ce qui est une contradiction.

c.q.f.d.

COROLLAIRE 1. — *Si* A *est une partie de* X *saturée pour* ρ, *il en est de même de* $\bar{\mathrm{A}}$.

COROLLAIRE 2. — *Si un point* x *de* X *est adhérent à une classe d'équivalence* F, *la classe d'équivalence de* x *est adhérente à* F.

Ces deux corollaires sont des résultats classiques de dynamique topologique [18].

2. Le prolongement des homotopies.

DÉFINITION 2. — *La relation d'équivalence* ρ *a la propriété du prolongement des homotopies si la condition suivante est vérifiée :*

(H) *quelle que soit l'application* F *de* $\Delta^n \times$ I *dans* X, *quelle que soit l'application* g *de* Δ^n *dans* X *telle que*

$$g(x) \sim F(x,\ 0) \quad \textit{pour tout} \quad x \in \Delta^n,$$

il existe une application G *de* $\Delta^n \times I$ *telle que*

$$\begin{array}{lll} G(x,\ 0) = g(x) & \textit{pour tout} & x \in \Delta^n \\ G(x,\ t) \sim F(x,\ t) & \textit{pour tout} & (x,\ t) \in \Delta^n \times I. \end{array}$$

En particulier ρ a donc la propriété du prolongement des chemins.

Lorsque ρ est la relation d'équivalence associée à un feuilletage $\mathcal{F}$ d'une variété V, on dit aussi que $\mathcal{F}$ a la propriété du prolongement des homotopies.

Exemples. — 1) La relation d'équivalence associée à la projection d'une fibration de Serre a la propriété du prolongement des homotopies.

2) Un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension 1 du plan $\mathbf{R}^2$ a la propriété du prolongement des homotopies.

En effet d'après [15] les feuilles de $\mathcal{F}$ sont fermées et homéomorphes à $\mathbf{R}$; l'espace des feuilles $\mathbf{R}^2/\rho$ de $\mathcal{F}$ est une variété topologique de dimension 1 en général non séparée; la projection de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^2/\rho$ est une fibration localement triviale. (On peut remarquer que, bien que $\mathbf{R}^2/\rho$ soit contractile, cette fibration n'est pas en général triviale; on pourra se reporter à [11] pour une étude plus approfondie de cette situation.)

PROPOSITION 1. — *Soient* G *un groupe topologique et* K *un sous-groupe de* G. *La relation d'équivalence sur* G *dont les classes sont les classes à gauche de* G *modulo* K *a la propriété du prolongement des homotopies.*

Démonstration. — Soient F une application de $\Delta^n \times I$ dans G et γ une application de Δ^n dans G telles que $h(x) = \gamma(x)F(x,\ 0)^{-1}$ appartienne à K pour tout x dans Δ^n.

L'application Γ de $\Delta^n \times I$ dans G définie par $\Gamma(x,\ t) = h(x)F(x,\ t)$ est alors telle que

$$\begin{array}{lll} \Gamma(x,\ 0) = \gamma(x) & \text{pour tout} & x \in \Delta^n \\ \Gamma(x,\ t) \sim F(x,\ t) & \text{pour tout} & (x,\ t) \in \Delta^n \times I. \end{array}$$

c.q.f.d.

Remarque. — Lorsque G est un groupe de Lie et K un sous-groupe fermé de G, cette relation d'équivalence est associée à la projection p d'une fibration localement triviale de G sur G/K. Par contre si K n'est pas fermé $(G, p, G/K)$ n'est pas nécessairement une fibration même au sens de Serre, comme le montre l'exemple d'un sous-groupe à un paramètre non compact du tore T^2 (voir chap. II, § 2).

PROPOSITION 2. — *La condition* (H) *est équivalente à l'une des deux conditions suivantes :*

(H_1) *quel que soit le polyèdre fini* P,
quelle que soit l'application F *de* $P \times I$ *dans* X,
quelle que soit l'application g *de* P *dans* X *telle que*

$$g(x) \sim F(x, 0) \quad \textit{pour tout} \quad x \in P,$$

il existe une application G *de* $P \times I$ *dans* X *telle que*

$$\begin{aligned} G(x, 0) &= g(x) && \textit{pour tout} \quad x \in P, \\ G(x, t) &\sim F(x, t) && \textit{pour tout} \quad (x, t) \in P \times I. \end{aligned}$$

(H_2) *quelle que soit la paire triangulée compacte* (E, A) *telle que* A *soit un rétract par déformation de* E,
quelle que soit l'application F *de* E *dans* X,
quelle que soit l'application g *de* A *dans* X *telle que*

$$g(x) \sim F(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in A,$$

il existe un prolongement G *de* g *à* E *tel que*

$$G(x) \sim F(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in E.$$

La démonstration de cette proposition est analogue à celle donnée par Hu [16] dans le cas des fibrés de Serre.

Lorsque ρ a la propriété du prolongement des homotopies on peut préciser les propositions 2 et 3 du chapitre II de la façon suivante :

PROPOSITION 3. — *Pour que l'ensemble semi-simplicial quotient* $\mathcal{B}$ *soit identique au complexe singulier* $\mathcal{C}$ *de l'espace quotient* X/ρ *il faut et il suffit que* $(X, \pi, X/\rho)$ *soit un fibré au sens de Serre.*

Démonstration. — La condition suffisante a été démontrée au chapitre II. Supposons donc réciproquement que l'on ait $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

Soient G une application de $\Delta^n \times I$ dans X/ρ et f une application de Δ^n dans X telles que $\pi f(x) = G(x, 0)$ pour tout $x \in \Delta^n$.

Puisque $\Delta^n \times I$ est homéomorphe à Δ^{n+1} il existe un relèvement Γ de G dans X; on a alors $f(x) \sim \Gamma(x, 0)$ pour tout $x \in \Delta^n$.

L'hypothèse du prolongement des homotopies entraîne donc l'existence d'une application F de $\Delta^n \times I$ dans X telle que

$$F(x,\ 0) = f(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \Delta^n,$$
$$F(x,\ t) \sim \Gamma(x,\ t), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \pi F(x,\ t) = G(x,\ t)$$

pour tout $(x, t) \in \Delta^n \times I$.

c.q.f.d.

Proposition 4. — *Si* ρ *a la propriété du prolongement des homotopies et si la projection* π *de* X *sur* X/ρ *admet une section locale continue au voisinage de chaque point de* X/ρ, $(X, \pi, X/\rho)$ *est un fibré au sens de Serre.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{U} = (U_i)$ un recouvrement de X/ρ par des ouverts sur lesquels il existe une section de π.

Soit f un simplexe singulier de dimension n de X/ρ. On peut construire une subdivision simpliciale de Δ^n, avec un ordre $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ sur les simplexes de dimension n de cette subdivision, de façon que les conditions suivantes soient vérifiées :

a) pour tout α, $f(\sigma_\alpha)$ est contenu dans un ouvert du recouvrement $\mathcal{U}$;

b) il existe une rétraction par déformation de σ_β sur $\partial\sigma_\beta \cap \bigcup_{\alpha<\beta} \sigma_\alpha$.

Pour tout α le simplexe singulier f_{σ_α} se relève en un simplexe singulier g_α de X.

Puisque ρ a la propriété du prolongement des homotopies, on peut en utilisant l'hypothèse *b* prolonger de proche en proche g_1 en une application g de Δ^n dans X telle que $\pi \circ g = f$.

On déduit alors de la proposition 3 que $(X, \pi, X/\rho)$ est un fibré au sens de Serre.

c.q.f.d.

Corollaire. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage d'une variété topologique* V *ayant la propriété du prolongement des homotopies. Si l'espace des feuilles* V/ρ *est une variété de dimension* p, $(V, \pi, V/\rho)$ *est un fibré au sens de Serre.*

Remarques. — Lorsque $\mathcal{F}$ est un feuilletage d'une variété V pour lequel l'espace des feuilles V/ρ est une variété, chaque feuille de $\mathcal{F}$ est fermée dans V.

On peut d'autre part montrer que si $\mathcal{F}$ a la propriété du prolongement des homotopies, et si de plus chaque feuille de $\mathcal{F}$ est compacte (il suffit d'ailleurs pour cela qu'une seule le soit), alors V/ρ est une variété et $(V, \pi, V/\rho)$ est une fibration localement triviale.

3. Groupes discrets opérant sans point fixe.

Soit Γ un groupe discret dénombrable opérant continuement à gauche sur X.

On suppose que Γ opère sans point fixe sur X, c'est-à-dire que la relation $\gamma x = x$ entraîne $\gamma = e$ (e élément neutre de Γ).

Soit ρ la relation d'équivalence sur X dont les classes sont les trajectoires des points de X.

Théorème 3. — *La relation d'équivalence* ρ *a la propriété du prolongement des homotopies.*

Cette situation généralise celle du groupe discret opérant proprement sans point fixe sur X : dans ce cas en effet $(X, \pi, X/\rho)$ est un revêtement.

On peut étendre les opérations de Γ sur X en des opérations semi-simpliciales de Γ sur $\mathcal{X}$; le groupe Γ opère alors sans point fixe sur $\mathcal{X}$.

La démonstration du théorème 3 repose sur le lemme suivant :

Lemme. — *Soit* Y *un espace topologique connexe, localement compact et localement connexe. Il n'existe pas de partition*

$(A_j)_{j\in J}$ *de* Y *ayant les propriétés suivantes :*

a) J *est un ensemble dénombrable ayant plus d'un élément;*

b) chaque A_j *est un fermé non vide de* Y.

Démonstration du lemme. — Supposons qu'il existe une partition $(A_j)_{j\in J}$ ayant les propriétés *a)* et *b)* du lemme.

Désignons par V_j l'intérieur de A_j, et par $F_j = A_j - V_j$ la frontière de A_j. La réunion F des F_j a les propriétés suivantes :

— F est un fermé de Y (son complémentaire est la réunion des V_j);

— F n'est pas vide (Y est connexe);

— F est réunion disjointe des F_j.

Puisque Y est localement compact, il en est de même de F. Pour obtenir une contradiction il suffit donc, d'après la propriété de Baire, de montrer que les F_j n'ont pas de points intérieurs dans F.

Soit x un point intérieur de F_j dans F. Il existe un voisinage connexe W de x dans Y tel que $F \cap W$ soit contenu dans F_j; donc $F \cap W = F_j \cap W$.

Mais W qui n'est pas contenu dans A_j (x n'est pas intérieur à A_j) rencontre au moins un second fermé A_k, $k \neq j$; W ayant des points dans A_j et dans A_k rencontre donc par raison de connexité la frontière F_k de A_k. Ce qui contredit l'égalité $W \cap F = W \cap F_j$. c.q.f.d.

Démonstration du théorème. — Soient f et g deux applications de Δ^n dans X telles que $f(x) \sim g(x)$ pour tout $x \in \Delta^n$. A chaque point x de Δ^n on peut donc associer un élément γ_x de Γ tel que $g(x) = \gamma_x f(x)$.

D'autre part pour tout élément γ de Γ, les applications $x \to g(x)$ et $x \to \gamma f(x)$ coïncident sur un fermé A_γ de Δ^n. De plus puisque Γ opère sans point fixe sur X on a

$$A_{\gamma_1} \cap A_{\gamma_2} = \emptyset \quad \text{pour} \quad \gamma_1 \neq \gamma_2.$$

On obtient ainsi une partition dénombrable de Δ^n en fermés disjoints. On déduit du lemme précédent que cette partition est triviale, c'est-à-dire qu'il existe un élément γ de Γ tel que $A_\gamma = \Delta^n$; on a donc $g(x) = \gamma f(x)$ pour tout $x \in \Delta^n$.

Si maintenant F est une application de $\Delta^n \times I$ dans X telle que $F(x, 0) = f(x)$ pour tout $x \in \Delta^n$, l'application G de $\Delta^n \times I$ dans X définie par $G(x, t) = \gamma F(x, t)$ est telle que

$$\begin{aligned} G(x, 0) &= g(x) && \text{pour tout} \quad x \in \Delta^n, \\ G(x, t) &\sim F(x, t) && \text{pour tout} \quad (x, t) \in \Delta^n \times I. \end{aligned}$$

c.q.f.d.

4. Feuilletage transverse à une fibration.

Soit B une variété différentiable connexe paracompacte de dimension q, et soit $\eta = (V, p, B)$ un fibré différentiable (au sens de Steenrod [20]) sur B dont la fibre F est une variété différentiable paracompacte.

Un feuilletage différentiable $\mathcal{F}$ de V est transverse à la fibration η si les conditions suivantes sont vérifiées :

— $\mathcal{F}$ est de dimension q;

— en chaque point de V la feuille de $\mathcal{F}$ et la fibre de η se coupent transversalement.

Dans ces conditions un résultat de C. Ehresmann [3] assure que, si la fibre F est compacte, le groupe structural Γ de η est discret et est associé à une représentation de $\pi_1(B)$ (qui est dénombrable) dans le groupe des difféomorphismes de F. Plus précisément, à tout chemin dans B d'origine x et d'extrémité y on peut associer un difféomorphisme de la fibre F_x au-dessus de x sur la fibre F_y au-dessus de y; ce difféomorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin joignant x à y. Si x et y sont confondus au point de base b de B, on obtient ainsi une représentation de $\pi_1(B)$ dans le groupe des difféomorphismes de F_b dont l'image est le groupe structural Γ de η.

Réciproquement d'ailleurs une représentation de $\pi_1(B)$ dans le groupe des difféomorphismes de F (F compacte ou non) permet de construire une variété V fibrée sur B avec F pour fibre, et un feuilletage $\mathcal{F}$ de V transverse à cette fibration [14].

Dans ces conditions la variété V munie de la topologie fine associée à $\mathcal{F}$ est un revêtement de B [14].

Soit donc $\mathcal{F}$ un feuilletage de V transverse à la fibration η et permettant de réduire le groupe structural Γ de η à un groupe discret.

On désigne par ρ la relation d'équivalence sur V associée à $\mathcal{F}$; deux points x et y de V sont équivalents si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

soit r (resp. s) un chemin dans B d'origine $p(x)$ (resp. $p(y)$) et d'extrémité b, et soit h (resp. k) le difféomorphisme de $F_{p(x)}$ (resp. $F_{p(y)}$) sur F_b associé à r (resp. s); alors il existe un élément γ de Γ tel que $k(y) = \gamma h(x)$.

Théorème 4. — *Si le groupe structural* Γ *opère sans point fixe sur* F, *la relation d'équivalence* ρ *a la propriété du prolongement des homotopies.*

Démonstration. — On désigne par d un point de base dans Δ^n.

Soit f une application de Δ^n dans V. Le fibré $\varphi^*(\eta)$ sur Δ^n induit de η par l'application $\varphi = p \circ f$ est trivial. On peut trouver

— une trivialisation de $\varphi^*(\eta)$ isomorphe à $\Delta^n \times F_{\varphi(d)}$,
— une application $\Phi : \Delta^n \times F_{\varphi(d)} \to V$,
— une application α de Δ^n dans $F_{\varphi(d)}$,

de telle sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

1) le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \times F_{\varphi(d)} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & V \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

est commutatif;

2) pour tout $x \in \Delta^n$, le difféomorphisme de $F_{\varphi(d)}$ sur $F_{\varphi(x)}$ défini par la restriction de Φ à $\{x\} \times F_{\varphi(d)}$ est le difféomorphisme associé à l'image par φ d'un chemin quelconque joignant d à x dans Δ^n;

3) $f(x) = \Phi(x, \alpha(x))$.

Si g est une seconde application de Δ^n dans V, le fibré $\psi^*(\eta)$ sur Δ^n induit de η par l'application $\psi = p \circ g$ est aussi trivial. On peut trouver

— une trivialisation de $\psi^*(\eta)$ isomorphe à $\Delta^n \times F_{\psi(d)}$,
— une application Ψ de $\Delta^n \times F_{\psi(d)}$ danc V,
— une application β de Δ^n dans $F_{\psi(d)}$,

de telle sorte que des propriétés analogues aux propriétés 1) et 2) précédentes soient vérifiées et que $g(x) = \Psi(x, \beta(x))$.

Soit alors r (resp. s) un chemin dans B d'origine $\varphi(d)$ (resp. $\psi(d)$) et d'extrémité b, et soit h (resp. k) le difféomorphisme de $F_{\varphi(d)}$ (resp. $F_{\psi(d)}$) sur F_b associé à r (resp. s). Pour que $f(x)$ et $g(x)$ soient équivalents pour tout $x \in \Delta^n$ il faut et il suffit qu'on puisse associer à chaque point x de Δ^n un élément γ_x de Γ de façon que $k(\beta(x)) = \gamma_x h(\alpha(x))$.

D'autre part pour tout élément γ de Γ les applications $x \to k(\beta(x))$ et $x \to \gamma h(\alpha(x))$ coïncident sur un fermé A_γ de Δ^n. De plus puisque Γ opère sans point fixe sur F on a $A_{\gamma_1} \cap A_{\gamma_2} = \emptyset$ pour $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

On obtient ainsi une partition dénombrable de Δ^n en fermés disjoints; le lemme du paragraphe précédent montre alors que cette partition est triviale, c'est-à-dire qu'il existe un élément γ de Γ tel que $k(\beta(x)) = \gamma h(\alpha(x))$, ou encore $g(x) = \Psi(x, k^{-1}\gamma h\alpha(x))$ pour tout $x \in \Delta^n$.

Soit maintenant S une application de $\Delta^n \times I$ dans V telle que $S(x, 0) = f(x)$ pour tout $x \in \Delta^n$. Le fibré $\sigma^*(\eta)$ sur $\Delta^n \times I$ induit de η par l'application $\sigma = p \circ S$ est trivial et isomorphe à $\varphi^*(\eta) \times I$. On peut trouver :

— une trivialisation de $\sigma^*(\eta)$ isomorphe à $\Delta^n \times I \times F_{\varphi(d)}$,
— une application Σ de $\Delta^n \times I \times F_{\varphi(d)}$ dans V,
— une application A de $\Delta^n \times I$ dans $F_{\varphi(d)}$,

de telle sorte que des propriétés analogues aux propriétés 1) et 2) précédentes soient vérifiées et que de plus

— $A(x, 0) = \alpha(x)$ pour tout $x \in \Delta^n$,
— $S(x, t) = \Sigma(x, t, A(x, t))$,
— $\Sigma(x, 0, z) = \Phi(x, z)$ pour tout $(x, z) \in \Delta^n \times F_{\varphi(d)}$.

On définit alors une application T de $\Delta^n \times I$ dans V par $T(x, t) = \Psi(x, k^{-1}\gamma h A(x, t))$. Cette application a les propriétés suivantes :

— $T(x, 0) = g(x)$ pour tout $x \in \Delta^n$,
— $T(x, t) \sim S(x, t)$ pour tout $(x, t) \in \Delta^n \times I$.

c.q.f.d.

Soit ρ' la relation d'équivalence sur F_b associée à l'opération de Γ. Si Γ opère sans point fixe sur F_b, ρ' a la propriété du prolongement des homotopies.

Soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) l'espace semi-simplicial quotient associé à ρ (resp. ρ'). La relation induite par ρ sur F_b est ρ'; il existe donc une injection canonique de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

La démonstration du théorème 4 contient alors la démonstration de la proposition suivante :

Proposition 5. — *L'injection canonique de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme.*

Remarque. — On déduit du théorème 4 que les feuilletages ergodiques et les feuilletages exceptionnels de Denjoy du tore T^2 ont la propriété du prolongement des homotopies.

Ceci montre donc que les feuilles d'un feuilletage ayant la propriété du prolongement des homotopies peuvent être plongées différemment dans la variété feuilletée; en effet les feuilletages de Denjoy possèdent simultanément des feuilles propres et des feuilles exceptionnelles.

5. Feuilletages définis par une forme de Pfaff fermée.

Soit V^n une variété différentiable compacte de dimension n et soit ω une forme différentielle de degré 1 fermée et sans singularité sur V^n; ω définit un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 de V^n [17].

Soit M^{n-1} une feuille de $\mathcal{F}$ et soit ν un point de base dans M^{n-1}. On désigne par π' le sous-groupe de $\pi_1(V^n) = \pi_1(V^n, \nu)$ engendré par les lacets de V^n sur lesquels la période de ω est nulle; π' est un sous-groupe normal de $\pi_1(V^n)$ contenant le sous-groupe des commutateurs; le quotient $Q = \pi_1(V^n)/\pi'$ est un groupe abélien libre de type fini; il est donc indépendant du point de base ν choisi. De plus l'intégration de ω le long d'un lacet représentant un élément de Q détermine un isomorphisme de Q sur un sous-groupe de $\mathbf{R}$.

Soit (W^n, p, V^n) le revêtement galoisien de V^n associé au sous-groupe π'. La forme $p^*\omega$ est une forme de Pfaff fermée et sans singularité sur W^n dont toutes les périodes sont nulles. Il existe donc une fonction différentiable f sur W^n telle que $p^*\omega = df$; la variété W^n est alors difféomorphe à $M^{n-1} \times \mathbf{R}$ ([17]). Le groupe structural Q de ce revêtement opère sur W^n par les translations sur le facteur $\mathbf{R}$.

Théorème 5. — *Le feuilletage $\mathcal{F}$ a la propriété du prolongement des homotopies.*

Démonstration. — Soient F une application de $\Delta^m \times I$ dans V^n et g une application de Δ^m dans V^n telles que l'on ait $F(x, 0) \sim g(x)$ pour tout $x \in \Delta^m$.

Il existe une application Φ de $\Delta^m \times I$ dans W^n et une application γ de Δ^m dans W^n telles que

$$\begin{aligned} &p \circ \Phi = F, \quad p \circ \gamma = g, \\ &\Phi(\Delta^m \times I) \cap M^{n-1} \times \{0\} \neq \emptyset, \\ &\gamma(\Delta^m) \cap M^{n-1} \times \{0\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Soit A (resp. β) l'application de $\Delta^m \times I$ (resp. Δ^m) dans $\mathbf{R}$ obtenue par composition de Φ (resp. γ) avec la projection de $W^n = M^{n-1} \times \mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. Puisque l'on a $F(x, 0) \sim g(x)$ pour tout $x \in \Delta^m$, les images $A(x, 0)$ et $\beta(x)$ sont équivalentes pour les opérations du groupe discret Q dans $\mathbf{R}$.

Il existe donc un prolongement B de β à $\Delta^m \times I$ tel que pour tout $(x, t) \in \Delta^m \times I$, $A(x, t)$ et $B(x, t)$ soient équivalents dans $\mathbf{R}$ pour l'opération de Q (théorème 3 du paragraphe 3).

Cette application B permet de construire un prolongement de γ en une application Γ de $\Delta^m \times I$ dans W^n.

Si l'on pose $G = p \circ \Gamma$ on a alors

$$\begin{aligned} &G(x, 0) = g(x) \qquad \text{pour tout } x \in \Delta^m, \\ &G(x, t) \sim F(x, t) \quad \text{pour tout } (x, t) \in \Delta^m \times I. \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Soit ρ' la relation d'équivalence définie sur $\mathbf{R}$ par le sous-groupe Q; ρ' a la propriété du prolongement des homotopies.

Soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) l'espace semi-simplicial quotient associé à ρ (resp. ρ'). La démonstration du théorème 5 contient aussi la démonstration de la proposition suivante :

Proposition 6. — *La projection p de $\{v\} \times \mathbf{R}$ dans V induit un isomorphisme de $\mathcal{B}'$ sur $\mathcal{B}$.*

On peut alors déduire des résultats du chapitre IV le corollaire suivant :

Corollaire. — *Si Q est un groupe abélien libre ayant s générateurs, $\mathcal{B}$ a même type d'homotopie faible que le tore T^s.*

CHAPITRE IV

ÉTUDE HOMOLOGIQUE

On désigne par $\Delta[n]$ le simplexe semi-simplicial standard de dimension n et par δ^n son simplexe fondamental; $\Lambda_k[n]$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ est le k-ième cornet de $\Delta[n]$, c'est-à-dire le sous-ensemble semi-simplicial de $\Delta[n]$ engendré par les faces $d_i\delta^n$ pour $i \neq k$. On peut prendre pour réalisation géométrique de $\Lambda_k[n]$ la réunion Λ_k^n des faces de dimension $(n-1)$ de Δ^n ayant en commun le k-ième sommet; Λ_k^n est un retract par déformation de Δ^n.

On rappelle que, si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{B}$ sont des ensembles semi-simpliciaux, et $p : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ une application semi-simpliciale, $(\mathcal{X}, p, \mathcal{B})$ est un fibré de Kan lorsque la condition suivante est satisfaite ([21]) :

(K) quelle que soit l'application semi-simpliciale F de $\Delta[n]$ dans $\mathcal{B}$,

quelle que soit l'application semi-simpliciale g de $\Lambda_k[n]$ dans $\mathcal{X}$ telle que $p \circ g = \mathrm{F}|_{\Lambda_k[n]}$,

il existe un prolongement semi-simplicial $\mathrm{G} : \Delta[n] \to \mathcal{X}$ de g à $\Delta[n]$ tel que $p \circ \mathrm{G} = \mathrm{F}$.

1. Prolongement des homotopies et fibration de Kan.

Soit ρ une relation d'équivalence sur un espace X et soit $\mathcal{B} = \mathcal{X}/\rho$ l'espace semi-simplicial quotient associé à ρ (voir chapitre II).

THÉORÈME 1. — *Pour que* ρ *ait la propriété du prolongement des homotopies il faut et il suffit que* $(\mathcal{X}, p, \mathcal{B})$ *soit un fibré au sens de Kan.*

Démonstration. — Soient F une application semi-simpliciale de $\Delta[n]$ dans $\mathcal{B}$ et g une application semi-simpliciale de $[n]$ dans $\mathcal{X}$ telles que $p \circ g = \mathrm{F}|_{\Lambda_k[n]}$.

Soit $\hat{\mathrm{F}} : \Delta^n \to \mathrm{X}$ un simplexe singulier de dimension n de X dont la classe dans $\mathcal{B}$ est $\mathrm{F}(\delta^n)$, et soit $\hat{g}$ une application de Λ_k^n dans X réalisant g; on a $\hat{g}(x) \sim \hat{\mathrm{F}}(x)$ pour tout $x \in \Lambda_k^n$.

Si ρ a la propriété du prolongement des homotopies il existe un prolongement $\hat{\mathrm{G}}$ de $\hat{g}$ à Δ^n tel que $\hat{\mathrm{G}}(x) \sim \hat{\mathrm{F}}(x)$ pour tout $x \in \Delta^n$. Cette application définit une application semi-simpliciale G de $\Delta[n]$ dans $\mathcal{X}$ qui prolonge g et qui est telle que $p \circ \mathrm{G} = \mathrm{F}$. Ce qui montre que $(\mathcal{X}, p, \mathcal{B})$ est un fibré de Kan.

Supposons réciproquement que $(\mathcal{X}, p, \mathcal{B})$ soit un fibré au sens de Kan, et soient $\mathrm{F} : \Delta^n \times \mathrm{I} \to \mathrm{X}$ et $g : \Delta^n \to \mathrm{X}$ deux applications telles que $g(x) \sim \mathrm{F}(x, 0)$ pour tout $x \in \Delta^n$.

Soit h un homéomorphisme de Δ^{n+1} sur $\Delta^n \times \mathrm{I}$ tel que $h(\Lambda_0^{n+1}) = \Delta^n \times \{0\}$. Les applications $\mathrm{F} \circ h$ et $g \circ h$ déterminent deux applications semi-simpliciales $\Phi : \Delta^{n+1} \to \mathcal{B}$ et $\gamma : \Lambda_0[n+1] \to \mathcal{X}$ telles que $p \circ \gamma = \Phi|_{\Lambda_0[n+1]}$. Il existe donc un prolongement semi-simplicial $\Gamma : \Delta[n] \to \mathcal{X}$ de γ à $\Delta[n]$ tel que $p \circ \Gamma = \Phi$; Γ définit alors une application $\hat{\mathrm{G}} : \Delta^n \to \mathrm{X}$ qui prolonge $g \circ h$ et qui est telle que $\hat{\mathrm{G}}(x) \sim \mathrm{F}h(x)$ pour tout $x \in \Delta^{n+1}$.

L'application $\mathrm{G} = \hat{\mathrm{G}} \circ h^{-1}$ de $\Delta^n \times \mathrm{I}$ a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} &\mathrm{G}(x, 0) = g(x) && \text{pour tout} \quad x \in \Delta^n, \\ &\mathrm{G}(x, t) \sim \mathrm{F}(x, t) && \text{pour tout} \quad (x, t) \in \Delta^n \times \mathrm{I}. \end{aligned}$$

c.q.f.d.

PROPOSITION 1. — *Si* ρ *a la propriété du prolongement des homotopies, la fibre du fibré* $(\mathcal{X}, p, \mathcal{B})$ *est le complexe singulier d'une classe d'équivalence de* ρ *(munie de la topologie induite ou de la topologie* $\mathcal{T}_\mathcal{G}$*).*

Cette proposition n'est en effet qu'une reformulation de la proposition 1 et du corollaire 1 du chapitre II.

Lorsque X est un espace connexe par arcs on déduit de la théorie générale des fibrés au sens de Kan le corollaire suivant :

Corollaire 1. — *Si* ρ *a la propriété du prolongement des homotopies ses classes d'équivalence ont des ensembles de composantes connexes isomorphes. Si* E_1 *et* E_2 *sont deux composantes connexes par arcs de classes d'équivalence de* ρ, E_1 *et* E_2 *ont même type d'homotopie faible.*

En particulier :

Corollaire 2. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage de dimension* p *d'une variété paracompacte connexe* V. *Si* $\mathcal{F}$ *a la propriété du prolongement des homotopies toutes les feuilles de* $\mathcal{F}$ *sont simultanément compactes ou non compactes.*

En effet une variété compacte connexe M de dimension p et une variété non compacte N de dimension p ne peuvent avoir le même type d'homotopie : on a par exemple

$$H_p(M, \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2 \qquad \text{et} \qquad H_p(N, \mathbf{Z}_2) = 0.$$

Remarque. — On peut donner une démonstration géométrique directe du corollaire 1 de la façon suivante :

Soient (F, x) et (G, y) deux classes d'équivalence de ρ avec points de base. Soit $\alpha : (S^n, e) \to (F, x)$ une application de la sphère pointée dans F et soit $c : I \to X$ un chemin joignant x à y.

On définit une application $A : S^n \times I \to X$ par $A(s, t) = c(t)$, et une application

$$b : \Sigma = S^n \times \{0\} \cup \{t\} \times I \to X$$

par

$$b(s, 0) = \alpha(s),$$
$$b(e, t) = c(t).$$

On a $b(s, t) \sim A(s, t)$ pour tout $(s, t) \in \Sigma$.

Puisque Σ est un rétract par déformation de $S^n \times I$ on peut prolonger b en une application $B : S^n \times I \to X$ telle que

$$B(s, t) \sim A(s, t) \quad \text{pour tout} \quad (s, t) \in S^n \times I.$$

La restriction de B à $S^n \times \{1\}$ définit une application β de (S^n, e) dans (G, y).

On vérifie alors, comme dans [20] § 16, que la correspondance $\alpha \to \beta$ permet d'établir un isomorphisme de $\pi_n(F, x)$ sur $\pi_n(G, y)$.

2. Suite exacte d'homotopie. Suite spectrale.

On suppose dans ce paragraphe que la relation d'équivalence ρ a la propriété du prolongement des homotopies.

On désignera par A un anneau principal et par F une classe d'équivalence de ρ.

Pour les applications du théorème 1 qui font intervenir les groupes d'homotopie, les groupes d'homologie singulière et l'anneau de cohomologie singulière de F, il n'est pas nécessaire de préciser la topologie dont on munit F; en effet (chapitre II) la topologie induite et la topologie fine $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ conduisent aux mêmes groupes ou anneaux.

Proposition 2. — *Il existe une suite exacte d'homotopie*

$$\cdots \to \pi_n(F) \to \pi_n(X) \to \pi_n(\mathcal{B}) \to \pi_{n-1}(F) \to \cdots$$

En effet cette suite exacte s'obtient par interprétation géométrique des termes de la suite exacte d'homotopie du fibré de Kan $(\mathcal{X}, p, \mathcal{B})$ ([21]).

Corollaire. — *Si F est connexe par arcs et si X est connexe par arcs et simplement connexe, $\mathcal{B}$ est aussi connexe par arcs et simplement connexe.*

Proposition 3. — *Il existe une suite spectrale $(E^r_{p,q}, d^r)$ dont le terme $E^2_{p,q}$ est isomorphe à $H_p(\mathcal{B}, H_q(F; A))$ (homologie de $\mathcal{B}$ à coefficients dans le système local défini par l'homologie des fibres) et qui converge vers $H_*(X; A)$.*

En effet, comme pour la proposition 2, cette suite spectrale s'obtient par interprétation géométrique des termes de la suite spectrale associée au fibré de Kan $(\mathcal{X}, p, \mathcal{B})$.

On a aussi une suite spectrale analogue en cohomologie.

Le système local défini sur $\mathcal{B}$ par l'homologie des fibres est constant si les conditions suivantes sont vérifiées :

— F est connexe par arcs,

— X est connexe par arcs et simplement connexe.

Lorsque ce système local est constant, on sait ([19]) que si X et F ont une homologie de type fini, il en est de même de l'homologie de l'espace semi-simplicial quotient $\mathcal{B}$.

Par contre si X et F sont de dimensions homologiques finies (c'est-à-dire si X et F ont une homologie nulle en grandes dimensions), on ne peut pas en conclure qu'il en est de même pour $\mathcal{B}$ (par exemple : espaces classifiants des groupes de Lie compacts).

On peut cependant dans certains cas dégager des résultats qui sont indépendants de la nature de $\mathcal{B}$ (§ 3); on peut aussi dans d'autres cas démontrer par une étude directe que $\mathcal{B}$ est un espace de dimension homologique finie (§ 4).

3. Généralisation d'un théorème sur les fibrés en sphères ([8]).

Les groupes de cohomologie intervenant ici sont des groupes de cohomologie singulière ou simpliciale à valeurs dans un même anneau commutatif unitaire et sans torsion d'ordre 2.

Proposition 4. — *Soit* X *un espace topologique connexe par arcs, simplement connexe, et tel que*

$$H^{2k}(X) = H^{2k+1}(X) = 0, \quad k > 0.$$

Il n'existe pas de relation d'équivalence sur X *ayant la propriété du prolongement des homotopies et pour laquelle les classes d'équivalence soient des sphères de cohomologie de dimension* $2k$.

Cette proposition généralise donc un résultat classique sur l'impossibilité de fibrer certains espaces en sphères homologiques. La démonstration est aussi analogue à celle du cas classique.

Démonstration. — Soit ρ une relation d'équivalence sur X ayant la propriété du prolongement des homotopies et pour laquelle les classes d'équivalence soient des sphères de cohomologie de dimension $2k$.

Avec ces hypothèses et celles faites sur X, le système local défini sur la base $\mathcal{B}$ par la cohomologie des classes d'équivalence est constant. Il existe donc ([19]) une suite exacte de Gysin dans laquelle l'homomorphisme de $H^i(\mathcal{B})$ dans $H^{i+2k+1}(\mathcal{B})$ est donné par le cup-produit par la classe caractéristique $\Omega \in H^{2k+1}(\mathcal{B})$; de plus on a $2\Omega = 0$.

La suite exacte

$$H^{2k}(X) \to H^0(\mathcal{B}) \to H^{2k+1}(\mathcal{B}) \to H^{2k+1}(X)$$

montre alors que $H^{2k+1}(\mathcal{B})$ est isomorphe à $H^0(\mathcal{B})$ et que la classe caractéristique Ω n'est pas nulle; ce qui est absurde puisque l'anneau des valeurs n'a pas de torsion d'ordre 2.

c.q.f.d.

Corollaire. — *Soit* X *un espace topologique connexe par arcs, simplement connexe et acyclique. Il n'existe pas de relation d'équivalence sur* X *ayant la propriété du prolongement des homotopies et pour laquelle les classes d'équivalence soient des spheres de cohomologie de dimension paire.*

Remarque. — On pourrait aussi, en utilisant les méthodes de A. Borel [1], montrer que sur certains espaces il n'existe pas de relation d'équivalence ayant la propriété du prolongement des homotopies et pour laquelle les classes d'équivalence aient la cohomologie d'un produit de sphères de dimensions impaires.

4. Feuilletages de codimension 1.

Théorème 2. — *Soit* V *une variété de classe* C^2 *paracompacte, connexes et simplement connexe, de dimension* $n \geqslant 3$, *et soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage de classe* C^2 *et de codimension* 1 *de* V *ayant la propriété du prolongement des homotopies. L'injection de chaque feuille de* $\mathcal{F}$ *dans* V *est une équivalence d'homotopie.*

La démonstration de ce théorème utilise les lemmes suivants :

Lemme 1. — *Chaque feuille de* $\mathcal{F}$ *a un groupe d'holonomie nul* (voir [10]).

Lemme 2. — *Chaque feuille de* $\mathcal{F}$ *est fermée dans* V.

Démonstration. — Supposons qu'il existe une feuille F de $\mathcal{F}$ qui ne soit pas fermée dans V. On peut trouver un point x de F et un voisinage distingué U de x tel que l'intersection $U \cap F$ contienne au moins deux plaques de F.

Soit y un point de $U \cap F$ n'appartenant pas à la plaque passant par x. On peut joindre x à y dans F par un chemin γ sans point double. Utilisant un voisinage tubulaire convenable de γ on peut construire un chemin c dans V transverse à $\mathcal{F}$ et joignant x à un point z de U voisin de y.

On peut alors joindre z à x dans U par un chemin c' transverse à $\mathcal{F}$ et obtenir ainsi une transversale fermée de $\mathcal{F}$.

Puisque le groupe d'holonomie de F est nul, un résultat de A. Haefliger ([13]) assure alors que cette transversale définit un élément d'ordre infini de $\pi_1(V, x)$; ce qui est impossible car V a été supposée simplement connexe.

c.q.f.d.

Remarque. — L'hypothèse de différentiabilité de $\mathcal{F}$ intervient dans la démonstration de ce lemme. Mais le résultat est encore valable dans le cas où $\mathcal{F}$ est un feuilletage topologique possédant un champ continu de directions transverses; on utilise pour cela une nouvelle démonstration, due à J. Hector, du théorème de A. Haefliger.

Démonstration du théorème. — On déduit du lemme 2, et du corollaire 2, paragraphe 2, chapitre II, que $H_i(\mathcal{B}, \mathbf{Z}) = 0$ pour $i > 1$.

De plus les feuilles de $\mathcal{F}$ étant connexes par arcs, et V étant connexe et simplement connexe, $\mathcal{B}$ est aussi simplement connexe.

Le fibré de Kan $(\mathcal{X}, p, \mathcal{B})$ a donc une base acyclique; et par suite l'injection de chaque fibre de p dans $\mathcal{X}$ est une équivalence d'homotopie.

c.q.f.d.

Remarque. — On peut démontrer que si les feuilles de $\mathcal{F}$ sont compactes la projection de V sur V/ρ est une fibration localement triviale, et que l'espace des feuilles est une variété séparée.

Dans ce cas si F est une feuille de $\mathcal{F}$, V est homéomorphe à $\mathbf{R} \times F$ et le feuilletage $\mathcal{F}$ est défini par la projection de V sur $\mathbf{R}$.

COROLLAIRE 1. — *Soit* V *une variété compacte connexe et simplement connexe de dimension* $n \geqslant 3$. *Il n'existe pas de feuilletage de codimension* 1 *de* V *ayant la propriété du prolongement des homotopies.*

En effet si F est une feuille de $\mathcal{F}$ on a $H_n(F, \mathbf{Z}) = 0$ et $H_n(V, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$.

Ce corollaire est aussi une conséquence directe du lemme 1 et du théorème de A. Haefliger.

COROLLAIRE 2. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage de codimension* 1 *de* $\mathbf{R}^n (n > 2)$ *ayant la propriété du prolongement des homotopies. Les feuilles de* $\mathcal{F}$ *sont simplement connexes et acycliques.*

Ce résultat est aussi vrai lorsque $n = 2$, dans ce cas d'ailleurs (voir exemple 2, paragraphe 2, chapitre III) les feuilles de $\mathcal{F}$ sont homéomorphes à la droite réelle $\mathbf{R}$.

Remarques. — 1) Le théorème 2 est inexact si V n'est pas simplement connexe : feuilletages ergodiques et exceptionnels du tore T^2.

2) Le corollaire 2 est à rapprocher du résultat suivant de A. Borel et J.-P. Serre : les fibres d'une fibration localement triviale de $\mathbf{R}^n$ sont simplement connexes et acycliques.

5. Un critère de non-finitude de la dimension homologique de $\mathcal{B}$ ([9]).

Ce critère utilise la théorie des bouts dont on va d'abord rappeler quelques propriétés.

Soit X un espace connexe, paracompact, localement connexe et localement compact.

Un bout de X ([5]) est déterminé par la donnée d'une suite $(F_n)_{n \geqslant 0}$ de fermés connexes non vides de X vérifiant les propriétés suivantes :

1) chaque F_n a une frontière compacte non vide;

2) $F_{n+1} \supset F_n$ pour tout $n \geqslant 0$;

3) $\bigcap_n F_n = \emptyset$.

Deux suites $(F_n)_{n \geqslant 0}$ et $(G_n)_{n \geqslant 0}$ définissent le même bout de X si pour $n \geqslant 0$ il existe $m \geqslant 0$ tel que $G_m \subset F_n$.

Soit B l'ensemble des bouts de X et soit $\hat{X}$ la réunion disjointe de X et de B. Il existe sur $\hat{X}$ une topologie et une seule ayant les propriétés suivantes :

1) $\hat{X}$ est compact, connexe et localement connexe;

2) B est fermé dans $\hat{X}$;

3) la topologie induite par $\hat{X}$ sur X est la topologie initiale de X;

4) tout point $b \in B$ possède un système fondamental de voisinages connexes dont les frontières sont des compacts non vides de X.

Dans ces conditions B est un espace totalement discontinu.

Désignons par H (resp. H_c) le foncteur cohomologie de Čech à supports fermés (resp. compacts) et à valeurs dans un anneau commutatif unitaire A.

L'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés de X dont le complémentaire est relativement compact (ordonné par $\supset$) est un système projectif d'ensembles. La famille $(H^0(F))_{F\in\mathcal{F}}$ (avec les morphismes induits par les inclusions) est donc un système inductif de groupes abéliens. On note $H^0_\infty(X)$ la limite inductive de cette famille.

Proposition 5. — *Le groupe* $H^0_\infty(X)$ *est isomorphe au groupe des applications continues de* B *dans* A.

Démonstration. — Soit F un fermé de $\mathcal{F}$; l'adhérence $\hat{F}$ de F dans $\hat{X}$ est la réunion de F et de B; de plus B est intérieur à $\hat{F}$.

Le groupe $H^0(F)$ est isomorphe à l'ensemble des applications continues de F dans A ([4]). Une telle application se prolonge de manière unique en une application continue de $\hat{F}$ dans A. Les deux systèmes inductifs $(H^0(F))_{F\in\mathcal{F}}$ et $(H^0(\hat{F}))_{F\in\mathcal{F}}$ sont donc isomorphes.

La famille $(\hat{F})_{F\in\mathcal{F}}$ est une famille projective de compacts de $\hat{X}$ dont l'intersection est B. Par continuité de la cohomologie de Čech ([4]) on a donc

$$H^0_\infty(X) = \varinjlim H^0(\hat{F}) = H^0(B). \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Corollaire 1. — *Si* B *est fini on a* $H^0_\infty(X) = A^B$.

Corollaire 2. — *Si* A *est un corps et si* B *est infini on a* $\dim._A H^0_\infty(X) = +\infty$.

Proposition 6. — *Il existe une suite exacte*

$$0 \to H^0(X) \to H^0_\infty(X) \to H^1_c(X).$$

Démonstration. — Puisque X est un élément de $\mathcal{F}$ il existe un homomorphisme ψ de $H^0(X)$ dans $H^0_\infty(X)$.

Soit maintenant F un élément de $\mathcal{F}$ et $U = X - F$ le complémentaire de F. On peut trouver un ouvert V de X contenu dans l'intérieur de F et dont le complémentaire est compact. On a alors une suite d'isomorphismes fonctoriels

$$\begin{aligned} H^1_c(U) &= H^1_c(X,\ F) \\ &= H^1_c(X - U,\ F - U) \\ &= H^1(X - U,\ F - U) \\ &= H^1(X,\ F). \end{aligned}$$

Il existe donc un homomorphisme fonctoriel δ_F de $H^0(F)$ dans $H^1_c(X - F)$ qui détermine par passage à la limite inductive un homomorphisme δ de $H^0_\infty(X)$ dans

$$H^1_c(X) = \varinjlim H^1_c(X - F).$$

La suite exacte

$$0 \to H^0(X) \to H^0(F) \to H^1_c(X - F)$$

donne alors par passage à la limite inductive la suite exacte

$$0 \to H^0(X) \to H^0_\infty(X) \to H^1_c(X).$$

c.q.f.d.

Corollaire. — *Lorsque* A *est un corps, pour que l'ensemble des bouts de* X *soit fini il suffit que* $H^1_c(X)$ *soit de dimension finie.*

Soit maintenant V une variété topologique paracompacte simplement connexe de dimension n; et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de dimension p de V ayant la propriété du prolongement des homotopies, et pour lequel l'espace semi-simplicial quotient $\mathcal{B}$ est de dimension homologique finie sur $\mathbf{Z}_2$.

Théorème 3. — *Si le dernier groupe d'homologie modulo* 2 *non nul de* V *est de dimension finie* d *sur* $\mathbf{Z}_2$, *les feuilles de* $\mathcal{F}$ *ont toutes un même nombre fini* b *de bouts, et on a* $b \leqslant d + 1$.

Démonstration. — Soit F une feuille de $\mathcal{F}$ et soit r (resp. s) le plus grand des entiers i tels que $H_i(V,\ \mathbf{Z}_2) \neq 0$ (resp.

$H_i(F, \mathbf{Z}_2) \neq 0$). On a alors les propriétés suivantes :

1) $r \leqslant s$;

2) $s - r$ est le plus grand des entiers i tels que $H_i(\mathcal{B}, \mathbf{Z}_2) \neq 0$;

3) $H_s(V; \mathbf{Z}_2) \simeq H_{s-r}(\mathcal{B}; \mathbf{Z}_2) \otimes H_r(F; \mathbf{Z}_2)$.

L'espace vectoriel $H_r(F; \mathbf{Z}_2)$ est donc de dimension finie inférieure à d sur $\mathbf{Z}_2$.

Trois cas sont à considérer suivant que $r = p$, $r = p - 1$ ou $r < p - 1$.

Si $r = p$ les feuilles de $\mathcal{F}$ sont compactes et n'ont donc pas de bouts.

Si $r = p - 1$, on obtient par dualité de Poincaré que $H^1_c(F; \mathbf{Z}_2)$ est de dimension finie inférieure à d sur $\mathbf{Z}_2$, et on déduit des propositions 5 et 6 que F a au plus $d + 1$ bouts.

Si $r < p - 1$, on obtient encore par dualité de Poincaré que $H^1_c(F; \mathbf{Z}_2) = 0$; F a donc 1 bout.

c.q.f.d.

Corollaire 1. — *Soit* V *une variété paracompacte, simplement connexe ayant le type d'homotopie d'une variété compacte. Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage de* V *ayant la propriété du prolongement des homotopies et tel que l'espace semi-simplicial quotient* $\mathcal{B}$ *associé à* $\mathcal{F}$ *soit de dimension homologique finie sur* $\mathbf{Z}_2$. *Alors les feuilles de* F *ont au plus* 2 *bouts.*

Corollaire 2. — *Soit* V *une variété paracompacte simplement connexe dont le dernier groupe d'homologie modulo* 2 *non nul est de dimension finie* d *sur* $\mathbf{Z}_2$. *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage de* V *ayant la propriété du prolongement des homotopies. Si une feuille de* $\mathcal{F}$ *a plus de* $d + 1$ *bouts, l'espace semi-simplicial quotient* $\mathcal{B}$ *associé à* $\mathcal{F}$ *n'est pas de dimension homologique finie.*

6. Feuilletage transverse à une fibration.

Soit G un groupe discret dénombrable opérant continuement et sans point fixe sur un espace X. La relation d'équivalence ρ associée à l'opération de G sur X a la propriété du prolongement des homotopies (§ 3 du chapitre III); soit $\mathcal{B}$ l'espace semi-simplicial quotient associé à ρ.

La théorie des espaces avec groupes d'opérateurs ([2]) montre qu'il existe une seconde suite spectrale dont le terme $E^2_{p,q}$ est isomorphe à $H_p(G, H_q(X; \mathbf{Z}))$ (homologie du groupe G à coefficients dans le G-module $H_q(X; \mathbf{Z})$) et qui converge vers $H_*(\mathcal{B}; \mathbf{Z})$.

Cette suite spectrale permet donc d'obtenir des informations sur l'homologie de l'espace semi-simplicial quotient $\mathcal{B}$. En particulier :

si X est un espace acyclique et simplement connexe, l'homologie entière de l'espace semi-simplicial quotient $\mathcal{B}$ est isomorphe à l'homologie à coefficients entiers du groupe G.

Exemple. — Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une suite de n nombres réels rationnellement indépendants et soit G le sous-groupe additif de $\mathbf{R}$ engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Le groupe G opère sans point fixe sur $\mathbf{R}$ par les translations, et dans ce cas l'espace semi-simplicial quotient $\mathcal{B}$ a l'homologie entière du tore T^n à n dimensions.

Soit maintenant B une variété paracompacte connexe de dimension r et soit $\eta = (V, p, B)$ une fibration localement triviale de base B dont la fibre est une variété paracompacte de dimension s.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de V transverse à η et permettant de réduire le groupe structural de η à un groupe discret dénombrable. (§ 4 du chapitre III). L'espace semi-simplicial quotient $\mathcal{B}$ associé à $\mathcal{F}$ est dans ces conditions isomorphe à l'espace semi-simplicial quotient associé à l'opération de G sur la fibre de η (proposition 5 du chapitre III).

Supposons maintenant que le groupe structural G opère sans point fixe sur la fibre X de η, et désignons par F une feuille de $\mathcal{F}$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ a alors la propriété du prolongement des homotopies, et on a dans cette situation 4 suites spectrales :

1) une suite spectrale dont le terme $E^2_{p,q}$ est isomorphe à $H_p(\mathcal{B}; H_q(F; \mathbf{Z}))$ et qui converge vers $H_*(V; \mathbf{Z})$;

2) une suite spectrale dont le terme $E^2_{p,q}$ est isomorphe à $H_p(G; H_q(X; \mathbf{Z}))$ et qui converge vers $H_*(\mathcal{B}; \mathbf{Z})$;

3) une suite spectrale dont le terme $E^2_{p,q}$ est isomorphe à $H_p(G; H_q(F; \mathbf{Z}))$ et qui converge vers $H_*(B; \mathbf{Z})$ (suite spectrale du revêtement $p: F \to B$);

4) une suite spectrale dont le terme $E^2_{p,q}$ est isomorphe à $H_p(B; H_q(X; \mathbf{Z}))$ et qui converge vers $H_*(V; \mathbf{Z})$ (suite spectrale du fibré η).

On en déduit :

Proposition 7. — *Si* G *est un groupe de dimension homologique finie, il en est de même de l'espace semi-simplicial quotient* $\mathcal{B}$.

Exemples. — 1) Soit B une surface compacte orientable de genre g. Le groupe fondamental $\pi_1(B)$ rendu abélien (c'est-à-dire $H_1(B, \mathbf{Z})$) est isomorphe à $G = \mathbf{Z}^{2g}$.

La donnée d'une représentation de G comme groupe de translations sans point fixe de $\mathbf{R}$ permet de construire un fibré $\eta = (V, p, B)$ de base B et de fibre $\mathbf{R}$, et un feuilletage $\mathcal{F}$ de V transverse à η. Les résultats précédents montrent alors que $\mathcal{F}$ a la propriété du prolongement des homotopies et que l'espace semi-simplicial quotient $\mathcal{B}$ associé à $\mathcal{F}$ a l'homologie entière du tore T^{2g} de dimension $2g$.

Cet exemple illustre donc le fait que, même sous des hypothèses de triangulation de l'espace V et des feuilles de $\mathcal{F}$, la dimension homologique de l'espace semi-simplicial quotient $\mathcal{B}$ peut être plus grande que la dimension homologique de V.

2) Représentant G non plus comme groupe de translations de $\mathbf{R}$ mais comme un groupe de rotations sans point fixe du cercle S^1, on obtient une situation analogue pour laquelle V est une variété compacte et $\mathcal{B}$ a l'homologie entière du tore T^{2g+1}.

3) On peut aussi aisément modifier ces exemples de façon à obtenir un feuilletage $\mathcal{F}$ ayant la propriété du prolongement des homotopies et pour lequel l'espace semi-simplicial quotient $\mathcal{B}$ est de dimension homologique infinie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Borel, Impossibilité de fibrer une sphère par un produit de sphères, *C.R. Acad. Sc.* Paris, 231, (1950), 943-945.

[2] Séminaire H. CARTAN, (1950-1951), Cohomologie des groupes, Suite spectrale, Faisceaux.

[3] C. EHRESMANN, Sur les espaces fibrés différentiables, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 224, (1947), 1611-1612.

[4] S. EILENBERG et N. STEENROD, Foundations of algebraic topology. *Princeton Univ. Press*, (1952).

[5] H. FREUDENTHAL, Uber die Enden topologischer Raume und Gruppe, *Mat. Zeit.*, 33, (1951), 692-713.

[6] C. GODBILLON, Topologie fine et ensemble semi-simplicial associés à une relation d'équivalence, *C.R. Acad. Sc.* Paris, 262, (1966), 817-818.

[7] C. GODBILLON, Relation d'équivalence et prolongement des homotopies. *C.R. Acad. Sc.* Paris, 262, (1966), 856-858.

[8] C. GODBILLON, Généralisation d'un théorème sur les fibrés en sphères. *C.R. Acad. Sc.* Paris, 262, (1966), 1152-1153.

[9] C. GODBILLON, Cohomologie à l'infini des espaces localement compacts. Applications, *C.R. Acad. Sc.* Paris, 264, (1967).

[10] C. GODBILLON, Holonomie transversale, *C.R. Acad. Sc.* Paris, 264, (1967).

[11] C. GODBILLON et G. REEB, Fibrés sur le branchement simple, A paraître dans *Ens. Math.*

[12] A. HAEFLIGER, Sur les feuilletages des variétés de dimension n par des feuilles fermées de dimension $n - 1$, *Coll. Top.* Strasbourg, (1955).

[13] A. HAEFLIGER, Structure feuilletée et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes, *Comm. Math. Helv.*, 32, (1958), 248-329.

[14] A. HAEFLIGER, Variétés feuilletées, *Ann. Scuola Norm. Sup.* Pisa, 16, (1964), 367-397.

[15] A. HAEFLIGER et G. REEB, Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan, *Ens. Math.*, 3, (1957), 107-125.

[16] S. T. HU, Homotopy theory, *New York Acad. Press*, (1959).

[17] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, *Act. Sc. et Ind.*, Hermann, Paris, (1952).

[18] G. REEB, Sur la théorie générale des systèmes dynamiques, *Ann. Inst. Fourier*, 6, (1955), 89-115.

[19] J. P. SERRE, Homologie singulière des espaces fibrés, *Ann. of Math.*, 54, (1951), 425-505.

[20] N. STEENROD, The topology of fibre bundles, *Princeton Univ. Press*, (1951).

[21] M. ZISMAN, Quelques propriétés des fibrés au sens de Kan. *Ann. Inst. Fourier*, 10, (1960), 345-457.

Manuscrit reçu le 1er juillet 1967.

Claude GODBILLON,
Institut de Recherche
Mathématique Avancée,
rue R. Descartes,
67-Strasbourg.