

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE SAMUEL

Sur les variétés algébroides

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 147-160

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__147_0

© Annales de l'institut Fourier, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES VARIÉTÉS ALGÈBROÏDES

par Pierre SAMUEL (Clermont-Ferrand).

Une variété algébroïde est, par définition, associée à un idéal premier d'un anneau de séries formelles sur un corps ; pour les définitions détaillées des diverses notions utilisées ici, nous renvoyons au mémoire de C. Chevalley [2]. Les problèmes traités ici sont du type suivant : montrer que, dans certaines conditions, une variété algébroïde est algébrique, c'est-à-dire que son idéal est engendré par des polynômes. Un important problème de ce genre a été récemment résolu par W. L. Chow [3], qui a montré que toute variété analytique compacte de l'espace projectif complexe est une variété algébrique. Nous ne traiterons pas ici de questions globales de ce genre, et nous nous bornerons à des problèmes locaux, ce qui nous permettra d'opérer de façon purement algébrique sur un corps de caractéristique quelconque. Pour des raisons de commodité, nous nous placerons sur un « domaine universel » (cf. [8] algébriquement clos et de degré de transcendance infini *non dénombrable* sur son corps premier.

§ 1. — Variétés algébroïdes à sections algébriques.

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit V une variété algébroïde de dimension $d \geq 2$ d'un espace E^n de dimension n ; si, pour tout hyperplan H passant par l'origine, l'intersection de V et H est algébrique, alors V elle-même est variété algébrique.*

Nous nous ramènerons d'abord au cas où V est une hypersurface, c'est-à-dire où $d = n - 1$, en remarquant que V est entièrement déterminée par ses projections sur les sous-espaces vectoriels de

dimension $d+1$ de E^n , et que, si toute section hyperplane de V est algébrique, il en est de même de toute section hyperplane d'une projection de V . Nous supposons donc que V est une hypersurface, c'est-à-dire que son idéal est engendré par une série formelle $F(X_1, \dots, X_n)$.

LEMME. — *Soient V une hypersurface algébroïde, et $\mathfrak{F}$ un faisceau d'hyperplans dont la base n'appartient pas à V ; si, pour tout H l'intersection de V et H est algébrique, V est une nappe d'une variété algébrique.*

Soit, par exemple, $X_1 - tX_2 = 0$ l'équation générale du faisceau $\mathfrak{F}$. Prenons pour t un élément du domaine universel qui soit transcendant sur un corps de définition K de l'idéal (F) de V ; ceci est possible puisque le domaine universel Ω est de degré de transcendance non dénombrable sur son corps premier; Alors, par hypothèse, il existe une série formelle inversible $G(X_2, \dots, X_n)$, à coefficients dans Ω , et telle que $F(tX_2, X_2, \dots, X_n)G(X_2, \dots, X_n)$ soit un polynôme en $X_2, \dots, X_n$, de degré N par exemple. Comme les conditions que doivent remplir les coefficients de G pour que $F(tX_2, X_2, \dots, X_n)G$ soit un polynôme de degré $\leq N$ sont *linéaires*, il existe une série formelle inversible G , à coefficients dans $K(t)$ et répondant à la question. Alors, T étant une indéterminée, on a l'identité

$$F(TX_2, X_2, \dots, X_n)G(X_2, \dots, X_n) = P(X_2, \dots, X_n)$$

où les coefficients de la série formelle G et du polynôme P sont des fractions rationnelles en T ; par multiplication membre à membre, on peut supposer que les coefficients de P sont des polynômes en T .

Développons alors chacun des coefficients de G en série formelle (à exposants éventuellement négatifs) par rapport à T . Nous allons montrer par l'absurde que les ordres de celles-ci sont *bornés inférieurement*. Pour cela posons $F = f_d + f_{d+1} + \dots$ (où f_j est une forme de degré j en $X_1, \dots, X_n$ à coefficients dans K), et

$$G = g_0 + g_1 + \dots$$

(où g_i est une forme de degré i en $X_2, \dots, X_n$ à coefficients dans $K(T)$). Soit q un entier tel que $q+d > N$, et tel qu'un monôme de degré q ait, dans G , un coefficient d'ordre $-m$ strictement inférieur aux ordres de ceux de tous les monômes d'ordre $\leq q$ de G , et inférieur à ceux des monômes de degré q . Nous supposons, en chan-

geant les axes s'il le faut, que f_d n'est pas multiple de X_1 . Du fait que FG est un polynome de degré N, on déduit que l'on a

$$f_d(TX_2, X_2, \dots, X_n)g_q(X_2, \dots, X_n) + f_{d+1}g_{q-1} + \dots + f_{d+q}g_0 = 0.$$

Par multiplication par T^m et réduction des coefficients mod. T on obtient $f_d(O, X_2, \dots, X_n)\bar{g}_q(X_2, \dots, X_n) = 0$, où $\bar{g}_q$ est la forme obtenue par réduction mod. T des coefficients de $T^m g_q$. Comme, par hypothèses, on a $f_d(O, X_2, \dots, X_n) \neq 0$ et $\bar{g}_q \neq 0$, on obtient une contradiction.

Remarque. — Si le faisceau $\mathfrak{F}$ ne contient aucun hyperplan qui fasse partie du « cône des tangentes » $f_d(X_1, \dots, X_n) = 0$ de V (et si on prend K algébriquement clos) le même raisonnement montre que les coefficients de G ont des ordres bornés inférieurement pour chaque valuation du corps de fractions rationnelles K(T).

Par multiplication de G par une puissance convenable de T, on a alors $F(TX_2, X_2, \dots, X_n)G_1(X_2, \dots, X_n, T) = P_1(X_2, \dots, X_n, T)$ où G_1 (resp. P_1) est une série formelle (resp. un polynome) en $X_2, \dots, X_n$, T à coefficients dans K. Considérons les développements

$$\begin{aligned} F(X_1, \dots, X_n) &= u_0(X_2, \dots, X_n) + X_1 u_1(X_2, \dots, X_n) + \dots \\ G(X_2, \dots, X_n) &= v_0(X_2, \dots, X_n) + T v_1(X_2, \dots, X_n) + \dots \end{aligned}$$

Soit m le degré de P_1 par rapport à T. On peut supposer, par multiplication de P_1 et de G_1 par une puissance convenable de X_2 , que v_i est multiple de X_2^i pour $0 \leq i \leq m$. Nous allons montrer par récurrence qu'il en est ainsi pour tout i . En écrivant que, pour $i > m$, le coefficient de T^i dans P_1 est nul, on a

$$v_0 u_i X_2^i + v_1 u_{i-1} X_2^{i-1} + \dots + v_{i-1} u_1 X_2 + v_i u_0 = 0.$$

On déduit de ceci que $v_i u_0$ est multiple de X_2^i , donc que v_i est multiple de X_2^i , si $u_0 = F(O, X_2, \dots, X_n)$ n'est pas multiple de X_2 . Or cette dernière condition signifie que F n'est pas dans l'idéal engendré par X_1 et X_2 , c'est-à-dire que V ne contient pas la base du faisceau $\mathfrak{F}$, ce qu'on a supposé. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} G_1 &= v_0(X_2, \dots, X_n) + TX_2 w_1(X_2, \dots, X_n) + \dots \\ &\quad + T^i X_2^i w_i(X_2, \dots, X_n) + \dots, \end{aligned}$$

ce qui, en substituant X_1 à TX_2 , montre qu'il existe une série formelle $H(X_1, \dots, X_n)$ à coefficients dans K, et telle que

$$F(X_1, \dots, X_n)H(X_1, \dots, X_n) = P_1(X_2, \dots, X_n, X_1/X_2).$$

D'après l'unique factorisation dans les anneaux de séries formelles, le dénominateur du second membre se simplifie, et le produit FH est un polynôme en $X_1, \dots, X_n$. Ceci démontre le lemme.

Remarques. — 1. La condition que V ne contienne pas la base du faisceau $\mathfrak{F}$ est essentielle, comme le montre l'exemple d'une courbe plane.

2. Il peut arriver que, dans les conditions du lemme, V soit effectivement une *nappe* d'une variété algébrique, et non une variété algébrique entière. Considérons, par exemple, le conoïde de Plücker $C(X_1(X_2^2 + X_3^2) - X_2X_3 = 0)$; prenons pour V la nappe de C en O qui contient $X_1 = X_3 = 0$, et pour $\mathfrak{F}$ le faisceau $X_1 - iX_2 = 0$ qui a pour base la génératrice D de C contenue dans l'autre nappe; pour tout plan $H \in \mathfrak{F}$, $H \cap C$ se compose de D et d'une conique passant par o dont l'élément local en o est $V \cap C$.

3. Par hypothèse $G(X_2, \dots, X_n) = G_1(X_2, \dots, X_n, T)$, considérée comme série formelle en $X_2, \dots, X_n$, a un terme constant non nul $r_0(T)$. Nous avons vu d'autre part que, dans $X_2^j G_1(X_2, \dots, X_n, T)$ tout terme en T^i a X_2^i en facteurs, et que l'on peut écrire $G_1(X_2, \dots, X_n, T)X_2^j = H(TX_2, X_2, \dots, X_n)$; ainsi le degré d'un monôme est le même dans H et dans $X_2^j G_1$, considérée comme série formelle en $X_2, \dots, X_n$. Par conséquent la forme de plus bas degré de H est $X_2^j r(T)$, où r est une polynôme de degré $\leq j$, c'est-à-dire une forme de degré j en les seules variables X_1 et X_2 .

Nous allons maintenant déduire le th. 1 du lemme et de la remarque 3). Soit (F) l'idéal de l'hypersurface algébrique V . Puisque V est de dimension ≥ 2 , l'espace ambiant est de dimension $n \geq 3$, et il existe des faisceaux linéaires dont la base n'est pas sur V . Le lemme montre alors qu'il existe des polynômes non nuls dans l'idéal de séries formelles (F) , c'est-à-dire que $(F) \cap K[X_1, \dots, X_n] \neq (0)$. Or l'idéal $(F) \cap K[X_1, \dots, X_n]$ est premier, et est de dimension supérieure à celle $n - 1$ de $(F)([4])$. Il est donc de dimension $n - 1$, et c'est un idéal premier minimal, donc un idéal principal (P) , de $K[X_1, \dots, X_n]$. Ainsi toutes les séries formelles H telles que HF soit un polynôme sont multiples d'une même série formelle H_0 . Avec un choix convenable des axes, la remarque 3) montre qu'il existe des séries formelles H_1, H_2, H_3 telles que $H_i F$ soit un polynôme pour $i = 1, 2, 3$, et que les formes de plus bas degrés de H_1 (resp. H_2, H_3) ne dépendent que de X_2 et X_3 (resp. X_3 et X_1, X_1 et X_2). Comme celles-ci sont multiples de la forme initiale de H_0 , cette dernière est nécessairement une constante, ce qui veut dire que F est associée à un polynôme. CQFD.

Remarques. — Nous n'avons pas utilisé le fait que toutes les sections hyperplanes de V sont algébriques, mais seulement celles de trois

faisceaux linéaires convenablement choisis. On peut même réduire ce nombre à deux pour $n \geq 4$, en prenant les faisceaux $X_1 - tX_2 = 0$ et $X_3 - tX_4 = 0$. En général suffisent des faisceaux linéaires dont les bases n'appartiennent pas à V et engendrent tout l'espace.

Pour terminer ce §, nous allons étudier le problème suivant: *étant donnée une hypersurface algébroïde* $(F(X_1, \dots, X_n) = 0)$ *comment se répartissent les hyperplans* H *passant par* 0 *et dont l'intersection avec* V *est algébrique?* Nous pouvons, sans apporter de restriction essentielle, supposer que l'équation de H est de la forme

$$X_1 = a_2 X_2 + \dots + a_n X_n.$$

L'hypothèse signifie que la série formelle

$$F(X_2, \dots, X_n) = F(a_2 X_2 + \dots + a_n X_n, X_2, \dots, X_n)$$

est associée à un polynome, c'est-à-dire qu'il existe une série formelle inversible $G(X_2, \dots, X_n)$ telle que FG soit un polynome. Soit f_i (resp. g_i) la forme de degré i de F (resp. G); soit

$$\bar{f}_i(X_2, \dots, X_n) = f_i(a_2 X_2 + \dots + a_n X_n, X_2, \dots, X_n)$$

celle de $\bar{F}$. Pour que $\bar{F}G$ soit un polynome de degré $\leq N$, il faut et il suffit que l'on ait $g_0 f_n + g_1 f_{n-1} + \dots + g_n f_0 = 0$ pour tout $n > N$. Pour $N < n \leq N'$ les équations obtenues constituent un système fini $S(N, N')$ d'équations linéaires en les coefficients de $g_0, \dots, g_n$; les coefficients de celles-ci appartiennent à $K[a_2, \dots, a_n]$, K étant un corps de définition de F . Pour que $S(N, N')$ admette une solution telle que $g_0 = 1$, il faut et il suffit que certains déterminants soient nuls, c'est-à-dire que (a) soit un zéro d'un idéal $\alpha(N, N')$ de $K[A_2, \dots, A_n]$. Posons $\alpha(N) = \bigcup_{N' > N} \alpha(N, N')$ (pour N fixe, les idéaux

$\alpha(N, N')$ forment d'ailleurs une suite croissante). Pour qu'il existe une série formelle G telle que $\bar{F}G$ soit un polynome, il faut évidemment que (a) soit un zéro de l'un des idéaux $\alpha(N)$ (ceux-ci forment évidemment une suite décroissante).

Montrons maintenant que cette condition nécessaire est aussi suffisante. Supposons que (a) soit zéro de l'idéal $\alpha(N)$. Pour tout $N' > N$ soit $E(N')$ l'ensemble des polynomes $g_0 + g_1 \dots + g_{N'}$ tels que $g_0 = 1$ et que $g_0 \bar{f}_n + g_1 \bar{f}_{n-1} + \dots + g_n \bar{f}_0 = 0$ pour $N < n \leq N'$; l'ensemble $E(N')$ est évidemment une variété linéaire affine, non

vide par hypothèse. Pour tout n nous noterons p_n le projecteur de $\Omega[X_1, \dots, X_n]$ sur l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$: à un polynôme, p_n fait correspondre la somme de ses termes de degré $\leq n$. Il est clair que, pour $N'' \geq N'$, on a $p_{N'}(E(N'')) \subset E(N')$, et que $p_{N'}(E(N''))$ n'est pas vide. Lorsque, N' restant fixe, N'' croît, il est clair que les $p_{N'}(E(N''))$ forment une suite décroissante de variétés linéaires affines non vides contenues dans $E(N')$. Comme $E(N')$ est de dimension finie, les $p_{N'}(E(N''))$ ont une intersection non vide $B(N')$. Comme on a évidemment $B(N') = p_{N'}(B(N''))$ pour $N'' \geq N'$ il existe une série formelle G telle que la somme des termes de degré $\leq N'$ de G soit élément de $B(N')$, ceci pour tout $N' > N$. On a alors $g_0 \bar{f}_n + \dots + g_n \bar{f}_0 = 0$ pour tout $n > N$, et $\bar{F}G$ est un polynôme de degré $\leq N$. D'où le résultat suivant :

PROPOSITION. 1. — *Étant donnée une hypersurface algébroïde V , l'ensemble E des hyperplans H tels que $V \cap H$ soit algébrique est réunion d'une famille finie ou dénombrable d'ensemble algébriques, tous normalement algébriques sur un corps de définition de V .*

En particulier, si $V \cap H$ est algébrique, il en est de même de $V \cap H'$ pour toute spécialisation H' de H sur un corps de définition de V .

Remarque. — Il peut arriver que l'ensemble E ne soit pas un ensemble algébrique. Par exemple si V a pour équation $\text{Arcsin } z = (y/x) \text{Arcsin } x$, les plans de la forme $y = ax$ qui ont avec V une intersection algébrique sont ceux pour lesquels $a = y/x$ est un nombre rationnel.

7

§ 2. Application au théorème de W. L. Chow.

Nous allons maintenant voir que les résultats précédents permettent de simplifier quelques détails de la démonstration du théorème de W. L. Chow : « toute variété analytique compacte V de l'espace projectif complexe est algébrique » (l'idée générale en restant inchangée) ([3]). Par applications répétées du th. 1 (§ 1), il nous suffira de démontrer ce résultat dans le cas où V est une courbe puisque toute section hyperplane d'une variété analytique compacte est une variété analytique compacte. D'autre part par projections nous sommes ramenés au cas où V est une *courbe plane*.

En appliquant à ce cas le th. III (n° 3) de W. L. Chow ([3]), nous voyons qu'il ne nous reste plus à démontrer que le résultat suivant :

THÉOREME 2. — *Étant donnée une courbe algébrique plane V qui ne soit pas branche d'une courbe algébrique, il existe, pour tout entier N , un cycle algébrique C_n de degré n tel que l'origine soit point d'intersection propre de multiplicité $\geq nN$ de V et de C_n .*

Soit en effet $F(X, Y) = 0$ une équation de V . Les monômes non constants m_j de degré $\leq n$ en X et Y sont au nombre de $n(n+3)/2$, et sont, dans $\Omega[[X, Y]]$, linéairement indépendants mod. F , puisque V n'est pas branche d'une courbe algébrique. Considérons l'anneau local $\mathfrak{o} = \Omega[[X, Y]]/(F)$ de O sur V . Soit $\mathfrak{q}$ un idéal de $\mathfrak{o}$ de longueur $n(n+1)/2$; ceci veut dire que $\mathfrak{o}/\mathfrak{q}$ est de dimension linéaire $n(n+1)/2$ sur Ω , puisque Ω est le corps quotient de $\mathfrak{o}$ par son idéal maximal. Il existe alors une combinaison linéaire P des monômes m_j , à coefficients non tous nuls, et telle que la classe $\bar{P}$ de P mod. F soit dans $\mathfrak{q}$; celle-ci est non nulle par hypothèse. Alors la longueur s de l'idéal $(\bar{P})$ de $\mathfrak{o}$ est supérieure à celle, $n(n+1)/2$ de $\mathfrak{q}$. Or ([5], chap. II, § 2, th. 8 et 9) cette longueur s est la *multiplicité* de $\mathfrak{o}$ considéré comme intersection de V et du cycle algébrique de degré $\leq n$ qui a pour équation $P(X, Y) = 0$. En prenant n tel que $(n+1)/2 \geq N$, le th. 2 est démontré.

Remarque. — Notre th. 2 est, sans la restriction que le corps de base soit celui des nombres complexes, un cas particulier du th. IV, n° 4 de W. L. Chow ([3]). Nous allons déduire de là le cas général.

Prenons d'abord pour V une courbe qui ne soit pas branche d'une courbe algébrique, et située dans un espace de dimension quelconque. Il existe alors une projection plane V' de V qui n'est pas branche d'une courbe algébrique. Pour tout N il existe alors un cycle algébrique plan C' de degré n tel que $i(o; V' \cdot C') \geq nN$. Soit C l'hypercylindre projetant C' . En vertu de la *formule de projection* ([2], II, th. 5) on a $i(o; V \cdot C) = i(o; V' \cdot C') \cdot [C' : C]$. Comme C est de degré n , ceci démontre le th. 4 de W. L. Chow dans le cas d'une courbe.

Soit enfin V une variété de dimension d de E^n , qui ne soit pas nappe d'une variété algébrique. Il existe alors, par applications répétées du th. 1 (§ 1) une variété linéaire L de dimension $n - d + 1$ telle que $V' = V \cdot L$ soit un cycle de dimension 1 qui ne fait pas partie d'un cycle algébrique; on peut, par exemple, prendre L générique sur un corps de définition de V . Pour un entier N donné, soit C' une hypersurface algébrique de degré m telle que $i(O; C' \cdot V') \geq mN$. D'après la *formule d'associativité* des intersections ([2], II, th. 6) on

a $C' \cdot V = C' \cdot (L \cdot V) = (C' \cdot L) \cdot V$. On prend alors pour C le cycle algébrique $C' \cdot L$, qui est de dimension $n-d$ et de degré m , et on a $i(O; C \cdot V) \geq mN$. CQFD.

On remarquera que la dernière partie de ce raisonnement correspond au lemme 4, n° 4 de [3].

§ 3. — Un théorème sur les intersections complètes.

Dans la théorie des composantes singulières d'intersection ([5], chap. VI; [6]; [7]) nous nous sommes, par nécessité, bornés aux cycles X d'une variété algébrique ambiante A qui, au voisinage d'une sous-variété N de A , sont intersections complètes (ou sous multiples d'intersections complètes) de A et d'un cycle algébrique X_1 de l'espace affine (ceci veut dire que $X - A \cdot X_1$ se compose de variétés ne contenant pas N ; nous écrirons ceci " $X \equiv A \cdot X_1$ en N "). Étant donné ([2]) que la théorie des intersections des variétés algébroides est parallèle à celle des variétés algébriques, on pourrait penser à élargir quelque peu les conditions de validité de notre théorie des composantes singulières en supposant seulement que, localement en N , le cycle algébrique X est intersection complète de A et d'un cycle algébroïde X_1 de l'espace. Cependant on a le résultat partiel suivant, qui laisse penser que cette généralisation pourrait n'être qu'illusoire :

THÉORÈME 3. — *Soient A une variété algébrique, N une sous-variété de A , et X un diviseur algébrique de A dont les composantes passant par N sont simples sur A . S'il existe un diviseur algébroïde X_1 de l'espace tel que $X \equiv A \cdot X_1$ en N , il existe aussi un diviseur algébrique X'_1 tel que $X \equiv A \cdot X'_1$ en N .*

Ce résultat n'a d'intérêt que si N est singulière sur A ; sinon il est trivial, tout cycle de A étant intersection complète au voisinage d'une sous-variété simple.

Nous noterons $\mathfrak{o}$ l'anneau local de N sur A , $\bar{\mathfrak{o}}$ son complété, et $x \in \bar{\mathfrak{o}}$ la classe dans $\bar{\mathfrak{o}}$ du premier membre d'une équation du diviseur X_1 . Posons $X_1 \cdot A \equiv \sum_i n_i V_i$ (en N), où les V_i sont des sous-variétés algébriques de A passant par N ; soit $\mathfrak{p}_i$ l'idéal premier de V_i dans $\mathfrak{o}$;

d'après l'hypothèse sur la simplicité de V_i l'anneau de fractions $\mathfrak{o}_{\bar{p}_i}$ est un anneau de valuation discrète. Soient $\bar{p}_{i,j}$ les idéaux premiers de $\bar{\mathfrak{o}}_{\bar{p}_i}$, et $\bar{V}_{i,j}$ les variétés algébroides correspondantes ; on a, au sens des cycles algébroides, $V_i = \sum_j \bar{V}_{i,j}$ ([2], III, p. 65). Comme $\mathfrak{o}_{\bar{p}_i}$ est un anneau de valuation discrète, il en est de même de $\bar{\mathfrak{o}}_{\bar{p}_{i,j}}$ en vertu de la formule de transition ([5], chap. II, § 4) ; donc les seuls idéaux primaires pour $\bar{p}_{i,j}$ sont ses puissances symboliques. Ainsi l'hypothèse que X est intersection complète en N signifie que les composantes primaires isolées de $\bar{\mathfrak{o}}x$ sont les $\bar{p}_{i,j}^{(n_i)}$. Nous posons $\mathfrak{a} = \bigcap_{i,j} \bar{p}_{i,j}^{(n_i)}$; alors $\bar{\mathfrak{o}}x = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ étant l'intersection des composantes immergées de $\bar{\mathfrak{o}}x$.

Comme l'idéal $\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ de $\mathfrak{o}$ est équidimensionnel, $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ est un anneau à noyau ([5], chap. II, § 4), et $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ n'a pas de composantes immergées ([2], I, lemme 9, p. 9). Or ses composantes isolées sont les $\bar{p}_{i,j}^{(n_i)}$ en vertu de la formule de transition ([5], loc. cit.). On a donc $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{p}_i^{(n_i)} = \bigcap_j \bar{p}_{i,j}^{(n_i)}$. En vertu d'un théorème sur les intersections d'idéaux (que nous démontrerons en appendice) on en déduit $\mathfrak{a} = \left(\bigcap_i \mathfrak{p}_i^{(n_i)} \right) \bar{\mathfrak{o}} = r\bar{\mathfrak{o}}$ (cf. [9], lemme 8), en posant $r = \bigcap_i \mathfrak{p}_i^{(n_i)}$. Pour prouver le th. 3, il nous suffira de montrer qu'il existe un idéal principal $\mathfrak{oa}$ de $\mathfrak{o}$ dont les $\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ sont les composantes isolées.

Lorsque $\bar{\mathfrak{o}}x$ n'a pas de composantes immergées, la démonstration de ce point est facile. On a $\bar{\mathfrak{o}}x = r\bar{\mathfrak{o}}$, et on montre que r lui-même est un idéal principal. Soit en effet $(a_1, \dots, a_s)$ un système de générateurs de r ; on a, par hypothèse $x = \sum_i b_i a_i (b_i \in \bar{\mathfrak{o}})$ et $a_i = c_i x (c_i \in \bar{\mathfrak{o}})$; d'où $(1 - \sum_i c_i b_i)x = 0$; alors $1 - \sum_i c_i b_i$ est élément de l'idéal maximal $\bar{\mathfrak{m}}$ de $\bar{\mathfrak{o}}$; ceci implique que l'un au moins des termes $c_i b_i$ soit en dehors de $\bar{\mathfrak{m}}$, et, a fortiori, que l'un c_i des c_i soit inversible ; on a donc $\bar{\mathfrak{o}}x = \bar{\mathfrak{o}}a_i$, d'où $r = \mathfrak{oa}_i$. L'hypothèse que $\bar{\mathfrak{o}}x$ n'a pas de composantes immergées est vérifiée, en particulier, lorsque $\mathfrak{o}$ est un anneau d'intégrité intégralement clos ; or ceci a lieu lorsque la variété A est normale en N , d'après un résultat que nous a communiqué M. O. Zariski et qui se trouve démontré dans le mémoire suivant.

Pour démontrer l'existence de l'idéal principal $\mathfrak{oa}$ dans le cas général, nous introduirons la notion suivante : étant donné un élément y d'un anneau local $\mathfrak{o}$, nous appellerons *degré* de y , et nous

noterons $d(\gamma)$, la multiplicité $e(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}\gamma)$ de l'anneau local quotient $\mathfrak{o}/\mathfrak{o}\gamma$ ([5], chap. II, § 2); le degré de γ ne change pas si on remplace $\mathfrak{o}$ par son complété. Remarquons d'abord que l'on a la formule

$$e(\mathfrak{o}/\mathfrak{r}) = \sum_i e(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i) n_i = \sum_i n_i m(\mathbf{N}; \mathbf{V}_i) \quad (1)$$

où $m(\mathbf{N}; \mathbf{V}_i)$ désigne la multiplicité de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{V}_i$ ([5], chap. V, th. 3); nous noterons l'entier de la formule (1) $m(\mathbf{N}; \mathbf{X})$ (c'est la « multiplicité » de $\mathbf{N}$ sur le cycle $\mathbf{X}$). En effet $\mathfrak{r} = \bigcap_i \mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ est un idéal

équidimensionnel, et $\mathfrak{o}$ est un anneau local géométrique; il suffit alors d'appliquer la formule (1) ([2], I, p. 13), en se souvenant que la multiplicité d'un anneau local est égale à celle d'un système de paramètres « suffisamment général » de celui-ci ([5], chap. II, § 2, th. 5)

D'autre part nous démontrerons (lemme 1) que l'on a

$$e(\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{r}) = e(\bar{\mathfrak{o}}/\bar{\mathfrak{o}}x) = d(x),$$

et aussi (lemme 2) qu'il existe une suite (a_n) d'éléments de $\mathfrak{r}$, tendant vers x au sens de la topologie naturelle de l'anneau local $\bar{\mathfrak{o}}$, et telle que $d(a_n) \leq d(x)$ pour n assez grand. Soit alors U_n un diviseur algébrique de l'espace dont le premier membre de l'équation admette a_n pour classe dans $\mathfrak{o}$; comme $a_n \in \mathfrak{r} = \bigcap_i \mathfrak{p}_i^{(n_i)}$, le diviseur $A \cdot U_n$ est,

en $\mathbf{N}$, de la forme $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$, où $\mathbf{Y}$ est un diviseur positif. Si $\mathfrak{s}$ est l'intersection des composantes isolées de $\mathfrak{o}a_n$, on a $d(a_n) = e(\mathfrak{o}/\mathfrak{s})$ d'après le lemme 1, et $e(\mathfrak{o}/\mathfrak{s}) = m(\mathbf{N}; \mathbf{X} + \mathbf{Y})$ d'après l'analogie de la formule (1). Mais, comme $d(a_n) \leq d(x)$, on en déduit

$$m(\mathbf{N}; \mathbf{X} + \mathbf{Y}) \leq m(\mathbf{N}; \mathbf{X}),$$

ce qui implique $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{O}$ en $\mathbf{N}$, et que le diviseur $\mathbf{X}$ est découpé par U_n sur $\mathbf{A}$. Il ne nous reste plus donc qu'à démontrer les lemmes annoncés.

LEMME 1. — Soient $\mathfrak{o}$ un anneau local, $\mathfrak{a}$ un idéal de dimension r de $\mathfrak{o}$, et $\mathfrak{b}$ un idéal de dimension $s > r$ de $\mathfrak{o}$. Alors les anneaux locaux $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{o}/\mathfrak{ab}$, et $\mathfrak{o}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ ont même multiplicité.

Comme $\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, il nous suffit de démontrer l'égalité des multiplicités de $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{o}/\mathfrak{ab}$. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}$. Prenons un élément x de $\mathfrak{o}$, superficiel par rapport à $\mathfrak{m}$, de classes superficielles par rapport à $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{m}/\mathfrak{ab}$ ([5], chap. II, § 1), et tel que

$a + \mathfrak{o}x$ et $b + \mathfrak{o}x$ soient de dimensions $r - 1$ et $s - 1$. On a alors ([5], chap. II, § 2) $e(\mathfrak{o}/a) = e(\mathfrak{o}/(a + \mathfrak{o}x))$ et $e(\mathfrak{o}/ab) = e(\mathfrak{o}/(ab + \mathfrak{o}x))$. Comme $(a + \mathfrak{o}x)(b + \mathfrak{o}x) \subset ab + \mathfrak{o}x \subset a + \mathfrak{o}x$, il nous suffira de démontrer le lemme pour $a + \mathfrak{o}x$ et $b + \mathfrak{o}x$, c'est-à-dire pour des idéaux de dimensions $r - 1$ et $s - 1$. Par applications successives de ceci, on est ramené au cas où b est de dimension 0, c'est-à-dire est un idéal $\mathfrak{q}$ primaire pour $\mathfrak{m}$, et où a est de dimension > 0 .

Il existe alors un exposant r tel que $a\mathfrak{q} \supset a \cap \mathfrak{q}^r$ ([8], chap. III, lemme 3, p. 47), donc un exposant u tel que $a\mathfrak{q} \supset a \cap \mathfrak{m}^u$. Il suffira donc de montrer que l'on a $e(\mathfrak{o}/a) = e(\mathfrak{o}/(a \cap \mathfrak{m}^u))$. Or, pour $n \geq u$, on a $(a \cap \mathfrak{m}^n) + \mathfrak{m}^n = (a + \mathfrak{m}^n) \cap \mathfrak{m}^n$; donc $(a + \mathfrak{m}^n)/(a \cap \mathfrak{m}^n)$ est isomorphe à $\mathfrak{m}^n/((a + \mathfrak{m}^n) \cap \mathfrak{m}^n) = \mathfrak{m}^n/((a \cap \mathfrak{m}^n) + \mathfrak{m}^n)$. Ainsi, à une constante additive k près ($k = \text{longueur } (\mathfrak{m}^n/(a + \mathfrak{m}^n))$), les longueurs des modules $\mathfrak{o}/(a + \mathfrak{m}^n)$ et $\mathfrak{o}/((a \cap \mathfrak{m}^n) + \mathfrak{m}^n)$ sont égales. Donc, pour $n \geq u$, on a $P_{\mathfrak{m}/a}(n) = P_{\mathfrak{m}/(a \cap \mathfrak{m}^u)}(n) + k$ ([5], chap. I, § 5). Comme $P_{\mathfrak{m}/a}(n)$ est un polynôme de degré > 1 pour n assez grand par hypothèse, il en résulte que les deux polynômes ci-dessus ont même coefficient dominant. CQFD.

LEMME 2. — Soient $\mathfrak{o}$ un anneau local, $\bar{\mathfrak{o}}$ son complété, x un élément de $\bar{\mathfrak{o}}$, et $\mathfrak{r}$ un idéal de $\mathfrak{o}$ tel que $x \notin \mathfrak{r}$. Alors pour toute suite (a_n) d'éléments de $\mathfrak{r}$ tels que $\lim a_n = x$, on a $d(a_n) \leq d(x)$ pour n assez grand.

Soit en effet $F(\bar{\mathfrak{m}}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{\mathfrak{m}}^n/\bar{\mathfrak{m}}^{n+1})$ l'anneau de formes de l'idéal maximal $\bar{\mathfrak{m}}$ de $\bar{\mathfrak{o}}$ ([5], chap. I, § 5). Alors les anneaux de formes $F(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{o}}x)$ et $F(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{o}}a_s)$ sont canoniquement isomorphes à des anneaux quotients $F(\bar{\mathfrak{m}})/\mathfrak{v}$ et $F(\bar{\mathfrak{m}})/\mathfrak{v}_s$ de $F(\bar{\mathfrak{m}})$, $\mathfrak{v}$ (resp. $\mathfrak{v}_s$) étant l'idéal de $F(\bar{\mathfrak{m}})$ engendré par les formes initiales des éléments de $\bar{\mathfrak{o}}x$ (resp. $\bar{\mathfrak{o}}a_s$) ([5], chap. II, § 3). Or $\mathfrak{v}$ est engendré par un nombre fini d'éléments $(f_1, \dots, f_j)$, f_i étant la forme initiale de $z_i x$; soit n_i le degré de f_i ; prenons pour s un entier supérieur à $1 + \max n_i$. Il existe par hypothèse un élément $a_s \in \mathfrak{r}$ tel que $x - a_s \in \bar{\mathfrak{m}}^s$; soient b_i des éléments de $\mathfrak{o}$ tels que $z_i - b_i \in \bar{\mathfrak{m}}^s$ pour tout i . On a alors

$$z_i x - b_i a_s = x(z_i - b_i) + b_i(x - a_s) \in \bar{\mathfrak{m}}^s.$$

Donc, comme $s > n_i$, les éléments $z_i x$ et $b_i a_s$ ont même forme initiale f_i dans $F(\bar{\mathfrak{m}})$. Ceci montre que l'on a $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{v}_s$, donc que l'on a l'inégalité $P_{\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{o}}x}(n) \geq P_{\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{o}}a_s}(n)$ entre les polynômes caractéristiques des idéaux maximaux $\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{o}}x$ et $\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{o}}a_s$. En comparant leurs termes de plus haut degré, on en déduit $d(x) \geq d(a_s)$. CQFD.

APPENDICE

**Intersections d'idéaux dans un anneau local
et dans son complété.**

Soient $\mathfrak{o}$ un anneau local, et $\bar{\mathfrak{o}}$ son complété. Rappelons les propriétés suivantes :

- 1) Tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{o}$ est fermé. L'adhérence de $\mathfrak{a}$ dans $\bar{\mathfrak{o}}$ est $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{o}}$. On a $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{o}} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ ([1]).
- 2) Si $\bar{\mathfrak{o}}$ est un anneau local complet d'idéal maximal $\bar{\mathfrak{m}}$, et si $(\bar{\mathfrak{a}}_n)$ est une suite descendante d'idéaux de $\bar{\mathfrak{o}}$ dont l'intersection se réduit à (0), on a $\bar{\mathfrak{a}}_n \subset \bar{\mathfrak{m}}^{s(n)}$ où $s(n)$ augmente indéfiniment avec n ([1], lemma 7, p. 695).

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 4. — *Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux d'un anneau local $\mathfrak{o}$, et $\bar{\mathfrak{o}}$ le complété de $\mathfrak{o}$; on a alors $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{o}} \cap \mathfrak{b}\bar{\mathfrak{o}} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})\bar{\mathfrak{o}}$.*

Nous traiterons d'abord le cas où $\mathfrak{a}$ est un idéal principal $\mathfrak{o}a$ (cf. [9], lemma 1); alors $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}a$. Remarquons que l'on a

$$\bar{\mathfrak{o}}a \cap \bar{\mathfrak{o}}b = (\bar{\mathfrak{o}}b : \bar{\mathfrak{o}}a)a, \quad \text{et} \quad \bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{o}a \cap \mathfrak{b}) = \bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a)a.$$

Nous sommes ainsi ramenés à montrer que l'on a $(\bar{\mathfrak{o}}b : \bar{\mathfrak{o}}a) = \bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b} : \bar{\mathfrak{o}}a)$. Or l'inclusion $\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a) \subset (\bar{\mathfrak{o}}b : \bar{\mathfrak{o}}a)$ est évidente. Pour démontrer l'inclusion inverse soit $z \in (\bar{\mathfrak{o}}b : \bar{\mathfrak{o}}a)$; comme $\mathfrak{o}$ est dense dans $\bar{\mathfrak{o}}$, on peut écrire $z = x_n + m_n$ où $x_n \in \mathfrak{o}$ et $m_n \in \bar{\mathfrak{m}}^n$; ainsi $(x_n + m_n)a \in \bar{\mathfrak{o}}b$, d'où $x_na \in \bar{\mathfrak{o}}b + \bar{\mathfrak{m}}^na = \bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^na)$; comme $x_na \in \mathfrak{o}$, on a, en vertu de 1), $x_na \in \mathfrak{b} + \mathfrak{m}^na$; on peut donc écrire $(x_n + m'_n)a \in \mathfrak{b}$ où $m'_n \in \mathfrak{m}^n$; comme z est aussi limite de la suite $(x_n + m'_n)$, dont chaque terme appartient à $(\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a)$ x est adhérent à $(\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a)$, et, en vertu de 1), appartient à $\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a)$.

Avant de passer au cas où $\mathfrak{A}$ est un idéal quelconque, nous démontrerons le lemme suivant :

LEMME. — *Les notations étant celles du th. 4, et si $a \notin \mathfrak{o}$, on a $(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n : \mathfrak{o}a) \subset (\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a) + \mathfrak{m}^{s(n)}$ où $s(n)$ augmente indéfiniment avec n .*

Comme $\mathfrak{b}$ est intersection des idéaux $\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n$ (en vertu de 1)), l'intersection des idéaux $(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n : \mathfrak{o}a)$ est $(\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a)$. De même l'intersection des idéaux $(\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n) : \bar{\mathfrak{o}}a)$ est $(\bar{\mathfrak{o}}b : \bar{\mathfrak{o}}a)$, qui est égal à $\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a)$

comme on vient de le voir. Comme l'anneau $\bar{o}/\bar{o}(b : oa)$ est complet, on peut lui appliquer 2), ce qui montre que l'on a

$$(\bar{o}(b + m^n) : \bar{o}a) \subset (\bar{o}b : \bar{o}a) + \bar{m}^{s(n)}$$

ou $s(n)$ augmente indéfiniment avec n . D'après ce qu'on a vu, ceci s'écrit $\bar{o}((b + m^n) : oa) \subset \bar{o}(b : oa) + \bar{m}^{s(n)}$. On en conclut que

$$((b + m^n) : oa) \subset (\bar{o}((b : oa) + m^{s(n)})) \cap o = (b : oa) + m^{s(n)}$$

ce qui démontre le lemme.

Revenons enfin au cas général du th. 4. On a évidemment

$$\bar{o}a \cap \bar{o}b = \bigcap_{a \in \bar{o}A} (\bar{o}a \cap \bar{o}b) \quad (1)$$

Comme $a \in \bar{o}A$, on a $a = \lim a_n$ où $a_n \in A$, avec $a = a_n + m_n$ où $m_n \in \bar{m}^n$. Si $y \in (\bar{o}b : \bar{o}a)$, on a $ya \in \bar{o}b$, donc $ya_n \in \bar{o}b + \bar{m}^n$,

et $y \in (\bar{o}b + \bar{m}^n) : \bar{o}a_n = \bar{o}((b + m^n) : oa_n) \subset \bar{o}((b : oa_n) + m^{s(n)})$

en vertu du lemme. Nous en déduisons $(\bar{o}b : \bar{o}a) \subset \bar{o}((b : oa_n) + m^{s(n)})$, et, comme $a = a_n + m^n$ et $\bar{o}a \cap \bar{o}b = (\bar{o}b : \bar{o}a)a$,

$$\bar{o}b \cap \bar{o}a \subset (\bar{o}(b : oa_n) + \bar{m}^{s(n)})(a_n + m^n);$$

en supposant, ce qui est permis, que l'on a $n \geq s(n)$, ce dernier idéal est contenu dans $\bar{o}(b : oa_n)a_n + \bar{m}^{s(n)} = ((\bar{o}b \cap oa_n) + m^{s(n)})$. Mais, comme $a_n \in A$, on a $b \cap oa_n \subset b \cap a$. Par conséquent

$$\bar{o}a \cap \bar{o}b \subset \bar{o}(b \cap a) + \bar{m}^{s(n)}.$$

Comme $s(n)$ augmente indéfiniment avec n , on en déduit

$$\bar{o}a \cap \bar{o}b \subset \bar{o}(b \cap a).$$

En vertu de (1), on a alors $\bar{o}a \cap \bar{o}b \subset \bar{o}(a \cap b)$. et le th. 4 est démontré puisque l'inclusion inverse est triviale,

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. CHEVALLEY, « On the theory of local rings », *Ann. of Math.*, vol. 44 (1943), pp. 690-708.
- [2] C. CHEVALLEY, « Intersections of algebraic and algebroid varieties », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 57 (1945), pp. 1-85.

- [3] W. L. CHOW, « On compact complex analytic varieties », *Amer. Journ. of Math.*, vol. 71 (1949), pp. 893-914.
- [4] W. KRULL, « Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie », *Math. Zeit.*, vol. 42 (1937), pp. 745-766.
- [5] P. SAMUEL « Sur la notion de multiplicité en Algèbre et en géométrie Algébrique » (Thèse, Paris, 1949), en cours de publication au Journ. Math. pures et appl.
- [6] P. SAMUEL « Multiplicités des composantes singulières d'intersection », *Comptes Rendus*, t. 228 (1949), pp. 292-294.
- [7] P. SAMUEL, « Multiplicités des composantes singulières d'intersection », *Colloque de Géom. Alg.*, Liège (Thone), 1949.
- [8] A. WEIL, « Foundations of Algebraic Geometry », *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, New-York, 1946.
- [9] O. ZARISKI, « Analytical irreducibility of normal varieties » *Ann. of Math.*, vol. 49 (1948), pp. 352-361.

(Parvenu aux Annales en novembre 1950.)
