ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SZOLEM MANDELBROJT

Exponentielles associées à un ensemble ; transformées de Fourier généralisées

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 1 (1967), p. 325-351

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_1_325_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 1 (1967). 325-351.

EXPONENTIELLES ASSOCIÉES A UN ENSEMBLE TRANSFORMÉES DE FOURIER GÉNÉRALISÉES

par Szolem MANDELBROJT

1. Introduction et notations.

Soit E un ensemble parfait sur la droite réelle, de mesure harmonique positive, sans points irréguliers. Nous appellerons un tel ensemble « ensemble p.m.h.p. ». Désignons par G le complémentaire de E par rapport au plan complexe ($z = x + iy$), si $E \neq \mathbf{R}$, et le demi-plan supérieur ($y > 0$), si $E = \mathbf{R}$.

Nous dirons, avec Achieser et Lévin [1, 2], qu'un domaine dans le plan $\zeta = \xi + i\eta$ est de type A, B, ou C, s'il est respectivement un demi plan $\eta > 0$, un quadrant $\eta > 0$, $\xi > 0$, ou une demi-bande $\eta > 0$, $a < \xi < b$, chacun de ces domaines muni d'un nombre fini ou infini de coupures, perpendiculaires à l'axe réel, partant de cet axe et admettant éventuellement des segments limites seulement sur la frontière du quadrant (si le domaine et de type B) ou de la demi-bande (si le domaine est de type C).

E étant un p.m.h.p., Achieser et Lévin démontrent [2] qu'on peut toujours représenter conformément le demi-plan supérieur ($y > 0$) sur un domaine $\mathcal{D}$ de l'un des types A, B ou C de telle manière que l'ensemble E soit représenté par la base de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire par la partie de la frontière de $\mathcal{D}$ composée des points de l'axe réel.

Soit $\zeta = \varphi(z) = u(z) + iv(z)$ une fonction qui réalise une telle représentation. Nous appellerons une telle fonction « fonction A-L attachée à E » (1). Désignons par I le complémentaire de E par rapport à $\mathbf{R}$.

(1) Dans [5] nous avons appelé « fonction A-L associée à E » la fonction $\omega(z) = \exp(-i\varphi(z))$ que nous appelons dans le travail actuel « exponentielle A-L attachée à E ».

La fonction $\varphi(z)$ peut être prolongée analytiquement, par symétrie, à travers les intervalles composant I, dans tout le domaine G. $\varphi(z)$ est ainsi une fonction multiforme, mais $v(z)$ est une fonction uniforme, positive dans G et égale à zéro sur la frontière E de G. On peut aussi prolonger $\varphi(z)$ à travers les intervalles de E par le principe de symétrie de Schwarz.

Si I est composé d'un nombre fini d'intervalles il existe une seule fonction $\varphi(z)$ dont le développement soit de la forme

$$\varphi(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$$

Par contre, lorsque I est composé d'un nombre infini d'intervalles contigus à E, une simple normalisation ne suffit pas pour pouvoir affirmer que la fonction φ qu'on vient de définir est unique. Ce fait jouera un rôle essentiel dans une des applications que nous avons en vue.

La fonction $\omega(z) = e^{-i\varphi(z)}$ sera appelée « l'exponentielle A-L attachée à E »; son prolongement analytique à travers I n'est donc pas une fonction uniforme, mais son module l'est. On a $\lim\limits_{y=0} |\omega(x+iy)| = 1$ pour $x \in E$, quelle que soit la branche de ω.

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans G (le complémentaire de E par rapport au plan complexe), non nécessairement uniforme, on écrira $f^*(z) = \sup |f(z)|$, le sup. étant pris pour toutes les déterminations de f au point $z \in G$. Supposons que

$$\limsup_{|z|=\infty} \frac{\log f^*(z)}{|z|} < \infty\ ; \tag{1}$$

et, σ étant un nombre non négatif, supposons qu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta > 0$ tel que

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{f^*(z)}{[\omega(z)]^{\sigma+\varepsilon}} = 0 \tag{2}$$

pour $|\arg z \pm \pi/2| < \delta$. Nous dirons alors que f est de type σ par rapport à E. Achieser et Lévin démontrent le théorème suivant [2] : Si E est un p.m.h.p., si f est de type exponentiel σ par rapport à E, et si $f(z)$ tend vers une limite, de module non supérieur à un, lorsque z tend vers un point de E, on a dans G :

$$|f(z)| \leqslant |\omega(z)|^{\sigma}. \tag{3}$$

Ceci est une généralisation d'un fait classique : si $f(z)$ est de type exponentiel σ sur le demi-plan supérieur et si $|f(x)| \leqslant 1$, on a :

$$|f(x+iy)| \leqslant e^{\sigma y}.$$

Pour $\sigma \geqslant 0$ on désignera par K_σ la classe de toutes les fonctions $f(z)$ analytiques dans G, tendant vers une limite lorsque z tend vers un point de E (quelle que soit la branche de f), cette limite étant de module non supérieur à un; ces fonctions possédant, en plus, la propriété suivante : f est une combinaison linéaire de deux fonctions de type exponentiel σ par rapport à E, chacune de ces fonctions tendant vers une limite *réelle* lorsque z tend vers un point de E.

Voici le théorème essentiel démontré dans [2] :

Si $f \in K_\sigma$ avec $\sigma > 0$, si le domaine $\mathcal{D}$ (voir page 1) est de type A ou B, ou de type C, avec $\sigma > \pi/\lambda$, λ étant la largeur de ce domaine (voir page 1, $\lambda = b - a$), on a :

$$|f'(x)| \leqslant \sigma\,|\omega'(x)| \tag{4}$$

en tout point de E où f' et ω' existent.

Lorsque $E = \mathbf{R}$ on obtient le théorème de S. Bernstein : Si $f(z)$ est une fonction entière de type exponentiel σ, et si $|f(x)| \leqslant 1$, on a :

$$|f'(x)| \leqslant \sigma.$$

Dans un Mémoire paru récemment [5], nous avons généralisé les théorèmes d'Achieser et Lévin, au cas où l'on suppose que sur E : $|f(x)| \leqslant e^{C(|x|)}$, la fonction $C(x)$, supposée paire, non-décroissante (pour $x > 0$), ne croissant pas trop rapidement. Nous supposons effectivement que

$$\int_1^\infty \frac{C(x)}{x^2}\,dx < \infty.$$

Nous en tirons des conclusions sur le comportement de $f(z)$ dans G (lorsque $f \in K_\sigma$), et une évaluation de $|f'(x)|$ lorsque $x \in E$. Comme nous n'utilisons pas ce théorème dans les pages qui suivent nous le mentionnons seulement.

Le but de ce Mémoire est de faire jouer à la fonction $\varphi(z)$, attachée à un E, p.m.h.p., et à l'« exponentielle » correspondante $\omega(z) = e^{-i\varphi(z)}$, un rôle qui nous paraît important dans d'autres branches d'Analyse. Ainsi, par exemple, nous allons généraliser le problème de Watson —

problème essentiel dans la théorie de la quasi-analyticité, et nous en fournirons une solution.

D'autre part, le rôle joué par les exponentielles A-L associées aux ensembles p.m.h.p., suggère une généralisation de la notion même de la transformée de Fourier, ainsi d'ailleurs qu'une généralisation de la transformée de Fourier-Carleman d'un couple de fonctions définies dans les demi-plans opposés — généralisation appropriée à un ensemble p.m.h.p. donné.

2. Un problème d'unicité.

Une fonction $f(z)$, non identiquement nulle, holomorphe dans le demi-plan $y > 0$, continue et bornée sur le demi-plan $y \geqslant 0$, satisfait à l'inégalité :

$$\int \frac{\log |f(x)|}{1+x^2}\, dx > -\infty .$$

Si donc $C(x)$ est une fonction non négative, vérifiant la condition

$$\int \frac{C(x)}{1+x^2}\, dx = \infty, \tag{5}$$

la seule fonction $f(z)$, holomorphe dans $y > 0$, continue et bornée sur $y \geqslant 0$, et satisfaisant à l'inégalité

$$\log |f(x)| \leqslant -C(x) \tag{6}$$

est la fonction identiquement nulle.

La conclusion reste valable lorsqu'on suppose que la fonction $f(z)$, holomorphe pour $y > 0$, continue pour $y \geqslant 0$, est de type exponentiel dans $y > 0$ et satisfait à (6), C satisfaisant à (5).

On est ramené au cas précédent en substituant à $f(z)$ la fonction $f_1(z) = f(z)e^{i\sigma z}$, où σ est le type de f.

Par contre, si $C(x)$ est une fonction paire, non décroissante pour $x \geqslant 0$, avec

$$\int_1^\infty \frac{C(x)}{x^2}\, dx < \infty, \tag{7}$$

on peut construire une fonction *entière,* non identiquement nulle de type exponentiel, telle que (6) ait lieu.

Il est clair que si $f(z)$ est holomorphe et de type exponentiel pour $y > 0$, continue pour $y \geqslant 0$, bornée sur $\mathbf{R}$, et si $f(x)$ satisfait à (6) sur un ensemble $E \subset \mathbf{R}$ avec

$$\int_E \frac{C^+(x)}{1+x^2}\,dx = \infty \tag{8}$$

($C^+(x)$ désignant $C(x)$ si $C(x) \geqslant 0$, et 0 si $C(x) < 0$),

on a encore $f(z) \equiv 0$.

Ceci n'est qu'un corollaire bien trivial de ce qui précède. Il est pourtant concevable qu'à chaque E « convenablement riche », au point de vue de la théorie des fonctions, par exemple à chaque p.m.h.p., corresponde une croissance de la fonction $C(x)$ (avec $|x|$, $x \in E$) exprimée par un critère moins trivial que (8) — trivial par rapport aux résultats classiques — et une limitation de la croissance de $f(z)$ dans le plan (si $f(z)$ est une fonction entière), exprimée par une notion généralisée de type, notion liée à l'ensemble E, pour que, de ces conditions et de (6), satisfait sur E, résulte que $f(z)$ est identiquement nulle.

Les notions introduites dans les pages précédentes permettent d'établir des théorèmes dans cet ordre d'idées.

Il nous faut toutefois, avant d'énoncer les résultats correspondants, donner quelques précisions supplémentaires sur les notions mentionnées dans l'introduction, en les modifiant d'ailleurs quelque peu.

Soit donc E un p.m.h.p., et soit I son complémentaire par rapport à $\mathbf{R}$. Si I n'est composé que d'un nombre fini d'intervalles disjoints $I_1 \equiv (a_1, b_1), \dots I_n = (a_n, b_n)$, $\varphi(z)$ (la fonction A-L, attachée à E), est définie par la formule de Cristoffel-Schwarz.

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{(\zeta - c_1)(\zeta - c_2)\dots(\zeta - c_n)}{\sqrt{(\zeta - a_1)(\zeta - b_1)\dots(\zeta - b_n)}}\,d\zeta + \gamma$$

avec les c_k ($a_k < c_k < b_k$) vérifiant les équations

$$\int_{a_k}^{b_k} \frac{(x - c_1)\dots(x - c_n)}{\sqrt{(x - a_1)(x - b_1)\dots(x - b_n)}}\,dx = 0 \qquad (k = 1, \dots, n)$$

la constante γ étant choisie de sorte que $\varphi(z) - z$ tende vers zéro lorsque z tend vers l'infini.

Si I comporte une infinité d'intervalles contigus à E, tous compris dans un intervalle $(-R, R)$ $(R > 0)$, on énumère ces intervalles : $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$, on forme, de la manière qu'on vient d'indiquer, la fonction $\varphi_n(z)$ attachée à $E_n = \mathbf{R} - \bigcup_{k \leqslant n} I_k$; on démontre, qu'en posant

$$\varphi_n(z) = u_n + iv_n(z), \quad \text{on a} \quad v_n(z) - v_m(z) > 0$$

lorsque $n > m$, dans le complémentaire G_m de E_m ; et, comme

$$v_n(z) \lesseqgtr |\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - R^2}|,$$

on conclut que $v_n(z)$ tend vers une fonction harmonique $v(z)$ dans G lorsque n tend vers l'infini; et, du fait que E est un p.m.h.p., il résulte que $v(z)$ tend vers zéro lorsque z tend vers un point de E. Il suffit alors de choisir, en composant $\varphi_n(z)$, une constante additionnelle convenable pour que la limite de $\varphi_n(z)$ fournisse la fonction $\varphi(z)$ qui est la fonction A-L attachée à E.

Si I n'est pas borné, les intervalles I_n étant, chacun, de longueur finie, on opère de la manière suivante. En posant pour $R > 0$ assez grand

$$E_R = E \cup (-\infty, -R] \cup [R, \infty),$$

et, en désignant par $\varphi_R(z) = u_R(z) + iv_R(z)$ la fonction attachée à E_R (construite avec le procédé qu'on vient d'indiquer), on distingue deux cas [2] :

1) $v_R(i)$ est borné (lorsque $R > 0$ varie); comme $v_R(z)$ croît dans G avec R, tout en étant borné dans chaque compact de G, $v_R(z)$ tend vers une fonction harmonique $v(z)$ qui est la partie imaginaire de la fonction $\varphi(z)$ attachée à E.

2) $v_R(i)$ croît vers l'infini avec R.

La famille de fonctions harmoniques

$$v_R^*(z) = \frac{v_R(z)}{v_R(i)}$$

est normale et bornée dans G ; il existe donc une suite $\{R_k\}$ $(R_k \uparrow \infty)$ telle que $v_{R_k}^*(z)$ tende vers une limite harmonique $v(z)$ qu'on démontre ne pas être une constante $(v(z) \not\equiv 1)$. Cette fonction constitue encore la partie imaginaire de la fonction A-L, $\varphi(z)$, attachée à E.

Mais il est clair que toute fonction limite de la famille $v_R^*(z)$ constitue la partie imaginaire d'une fonction A-L attachée à E.

Un ensemble E, p.m.h.p. dont le complémentaire I ne contient que des intervalles de longueur finie étant donné, nous *fixons,* une fois pour toutes la fonction φ, (A-L) qui lui est attachée, par le procédé qu'on vient de préciser. Et, lorsque I n'est pas borné, 2) ayant lieu, *nous fixons, en même temps que la fonction* φ, *la suite* $\{ R_k \}$ *qui la fournit.*

Soit alors $E^0 \subset E$, E^0 étant lui-même un p.m.h.p., chacun des intervales de son complémentaire, par rapport à $\mathbf{R}$ étant de longueur finie. Soit G^0 le complémentaire de E^0 par rapport au plan complexe.

Nous allons faire correspondre à E^0 une fonction $v(z; E^0, E)$, qui dépend aussi (comme l'indique sa notation) de E.

Posons $E_R = E^0 \cup (-\infty, -R] \cup [R, \infty)$ $(R > 0)$,

et soit $\varphi_R^0(z) = u_R^0(z) + iv_R^0(z)$ la fonction attachée à E_R^0. Si 1) a lieu, nous définissons $v(z; E^0, E)$ comme une des fonctions, limites dans G^0 de la famille $v_R^0(z)$ (qui est normale dans G^0). $v(z; E^0, E)$ est alors, soit une fonction harmonique dans G^0 avec $\lim v(z; E^0, E) = 0$ lorsque z tend vers un point de E, soit identiquement égale à $+\infty$ dans G^0. Dans les deux cas nous posons $v(x; E^0, E) = 0$ pour $x \in E$. Si 2) a lieu, et si $\{R_k\}$ est la suite qui fournit la fonction φ attachée à E, nous posons

$$v_k(z; E^0, E) = \frac{v_{R_k}^0(z)}{v_{R_k}(i)}$$

(on remarquera que nous divisons ici par $v_{R_k}(i)$, et non pas par $v_{R_k}^0(i)$). Cette famille est encore normale dans G^0 (sans y être nécessairement bornée); $v(z; E^0, E)$ est une fonction limite de cette famille — fonction harmonique dans G^0, ou identiquement égale à $+\infty$ dans G^0.

Dans le premier cas $\lim v(z; E^0, E) = 0$ lorsque z tend vers un point de E^0. On posera, de toute façon $v(x; E^0, E) = 0$ pour $x \in E^0$.

Nous allons démontrer le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit* $0 < \delta < \pi/2$, *on a dans le domaine*

$$|\arg z \pm \pi/2| \leqslant \delta,$$

l'inégalité

$$v(z; E^0, E) \geqslant v(z).$$

Soit $\{R_k\}$ la suite ayant servi pour la formation de $\varphi(z)$ si 2) a lieu, ou une suite quelconque tendant vers l'infini, si 1) a lieu. Soit $I_1, I_2, ..., I_n ...$, la suite d'intervalles contigus à E_{R_k} (pour k donné), et soit $I_1^0, I_2^0, ..., I_n^0, ...$, la suite d'intervalles contigus à $E_{R_k}^0$. Désignons par $E_{k,n}$ le complémentaire de $\mathcal{I}_n = \bigcup_{p \leqslant n} I_p$ par rapport à $\mathbf{R}$, et par $E_{k,n}^0$ le complémentaire par rapport à $\mathbf{R}$ de l'ensemble qui est la réunion de tous les intervalles I_p^0 qui contiennent un I_q avec $q \leqq n$ et de $\mathcal{I}_n^0 = \bigcup_{p \leqslant n} I_p^0$. Soient $\varphi_{k,n}(z)$ et $\varphi_{k,n}^0(z)$ respectivement les fonctions attachées à $E_{k,n}$ et $E_{k,n}^0$; et soient $v_{k,n}(z)$, $v_{k,n}^0(z)$ respectivement leurs parties imaginaires. $G_{k,n}$ étant le complémentaire de $E_{k,n}$ par rapport au plan complexe, on a, dans $G_{k,n}$: $v_{k,n}^0(z) \geqslant v_{k,n}(z)$.

Pour le démontrer on emploie le raisonnement utilisé dans [2] pour démontrer un fait qui n'est autre que l'affirmation que dans $G_{k,n}$ on a pour $n > m$: $v_{k,n}(z) > v_{k,m}(z)$ (voir page 118 dans [2], où on démontre l'inégalité : $v_n(z) > v_m(z)$ pour $n > m$).

On a, de même, $v_{k,n}^0(z) \geqslant v_{k,m}^0(z)$, pour $n > m$, dans le complémentaire $G_{k,m}^0$ de $E_{k,m}^0$ par rapport au plan complexe.

Lorsque n tend vers l'infini, les fonctions $v_{k,n}(z)$, $v_{k,n}^0(z)$ tendent, dans le demi-plan supérieur (où elles sont bornées par $|\operatorname{Im}\sqrt{z^2 - R^2}|$) respectivement vers $v_{R_k}(z)$ et $v_{R_k}^0(z)$. On a donc, dans le domaine angulaire $|\arg z \pm \pi/2| < \delta$:

$$v_{R_k}^0(z) \geqq v_{R_k}(z),$$

et, en particulier :

$$v_{R_k}^0(i) \geqq v_{R_k}(i).$$

Or $v_{R_k}(z)$ ou $v_{R_k}(z)/v_{R_k}(i)$ tend, selon le cas

$$\varphi_{R_k}(i) < M < \infty, \ \lim \varphi_{R_k}(i) = \infty, \ \text{vers } v(z) ;$$

la fonction $v(z; E^0, E)$ étant une fonction limite soit de la famille $v_{R_k}^0(z)$ soit de la famille $v_{R_k}^0(z)/v_{R_k}(i)$ (selon que 1) ou 2) ait lieu), la conclusion est évidente.

Faisons encore la convention suivante : si $E^0 \subset E$, E^0 n'étant pas un p.m.h.p., ou E^0 étant borné à gauche ou à droite, on définira $v(x; E^0, E)$ par $v(x; E^0, E) = +\infty$, pour tout point x de $\mathbf{R}$.

Soit maintenant $C(x)$ une fonction réelle défine sur E. A tout $c > 0$ faisons correspondre un sous-ensemble E_c de E sur lequel $C(x) \geqq c$.

La famille d'ensembles E_c, correspondant à toutes les valeurs $c > 0$ étant fixée, σ étant une constante positive, posons

$$\mathcal{C}(x; C, \sigma) = \operatorname*{Sup}_{c>0} (c - \sigma \nu(x; E_c, E)).$$

Il est clair qu'à chaque choix particulier de la famille d'ensembles E_c, correspond une fonction $\mathcal{C}$ qui dépend de ce choix.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit* E *un ensemble p.m.h.p. sur* **R** *dont le complémentaire (par rapport à* **R**) *ne contient que des intervalles de longueur finie. Soit $f(z)$ une fonction entière de type exponentiel $\sigma > 0$ relatif à* E.

Supposons que $|f(x)|$ est borné sur **R** *et que pour $x \in E$ on ait :*

$$\log |f(x)| \leqslant - C(x). \tag{10}$$

Si, pour un choix d'ensembles E_c $(c > 0)$, on a

$$\int \frac{\mathcal{C}^+(x; C, \sigma)}{1 + x^2} dx = \infty, \tag{11}$$

la fonction $f(z)$ est identiquement nulle.

L'énoncé du théorème se simplifie si l'on suppose, d'une part, que E est un ensemble symétrique par rapport à l'origine et que, d'autre part, $C(x)$ étant une fonction non décroissante lorsque x varie sur la partie positive de E $(x \in E, x > 0)$, l'inégalité (10) est remplacée par

$$\log |f(x)| \leqslant - C(|x|).$$

Ces conditions étant remplies, désignons par $\nu(x, y)$ la valeur de $\nu(x; E(y), E)$, $E(y)$ étant le sous-ensemble de E sur lequel $|x| \geqslant |y|$. Désignons aussi par x^* le plus petit élément de E non inférieur à $|x|$.

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème I.

THÉORÈME II. — *Soit* E *un ensemble p.m.h.p. sur* **R**, *non borné, symétrique par rapport à l'origine, et soit $C(x)$ une fonction non décroissante sur la partie positive de $E(x > 0)$. Soit $f(z)$ une fonction de type exponentiel $\sigma > 0$ relatif à* E. *Si $|f(x)|$ est borné sur* **R**, *si*

$$\log |f(x)| \leqslant - C(|x|), \quad (x \in E), \tag{12}$$

et si

$$\int_1^\infty \frac{(C(x^*) - \sigma \nu (x, x^*))^+}{x^2} dx = \infty, \tag{13}$$

la fonction $f(z)$ est identiquement nulle.

Remarque 1. — Comme sur E_c, $\nu(x; E_c, E) = 0$, on voit, en posant $c = C(x)$, que

$$\mathcal{C}(x; C, \sigma) \geqslant C(x) \ (x \in E)$$

Il en résulte que

$$\int \frac{\mathcal{C}^+(x; C, \sigma)}{1+x^2} dx \geqslant \int_E \frac{C^+(x)}{1+x^2} dx + \int_I \frac{\mathcal{C}^+(x; C, \sigma)}{1+x^2} dx \tag{14}$$

De la même façon, $C(x)$ étant une fonction non négative, non décroissante pour $x \geqslant 0$, I^* désignant l'ensemble $I \cap (x \geqslant 1)$, on a

$$\int_1^\infty \frac{(C(x^*) - \sigma \nu (x, x^*))^+}{x^2} dx$$
$$\geqslant \int_{E \cap (x \geqslant 1)} \frac{C(x)}{x^2} dx + \int_{I^*} \frac{(C(x^*) - \sigma \nu(x, x^*))^+}{x^2} dx. \tag{15}$$

Les inégalités (14) et (15) montrent l'avantage des théorèmes I et II sur le corollaire trivial du théorème classique (mentionné au début de ce chapitre) qui consiste à affirmer qu'une fonction entière de type exponentiel, bornée sur **R** est satisfaisant à (10) est identiquement nulle, si (8) a lieu.

En effet, l'intégrale (11) peut diverger pour une certaine valeur de σ sans que l'intégrale (8) diverge.

Remarque 2. — Toutefois, lorsque $E = \mathbf{R}$, $C(x)$ étant une fonction paire non décroissante pour $x \geqslant 0$, la condition (13) pour une valeur de σ, implique la condition (8).

En effet, supposons que (13) ait lieu ; si l'intégrale dans (8) convergeait il existerait, comme nous l'avons vu plus haut (voir [6]), une fonction entière de type exponentiel σ, bornée sur **R**, non identiquement nulle satisfaisant à (12), ce qui serait en contradiction, d'après le théorème II, avec la condition (13).

Passons maintenant à la démonstration du théorème I.

Soit donc $c > 0$, E_c étant un sous-ensemble p.m.h.p. de E. Désignons par G_c le complémentaire de E_c par rapport au plan complexe. $\varphi(z)$ étant la fonction A-L correspondant à E, à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta > 0$ tel qu'en posant $\varphi(z) = u(z) + iv(z)$, on a :

$$\lim_{|z|=\infty} f(z)\, e^{-(\sigma+\varepsilon)\, v(z)} = 0 \tag{16}$$

dans $|\arg z \pm \pi/2| \leqslant \delta$.

On voit maintenant facilement que dans ce même domaine angulaire on a :

$$\lim_{|z|=\infty} f(z)\, e^{-(\sigma+\epsilon)\, v(z;\, E_c,\, E)} = 0. \tag{17}$$

Il suffit, en effet, d'appliquer le lemme I. Ainsi $f(z)$ est aussi une fonction de type exponentiel par rapport à E_c (si E_c est un p.m.h.p.).

D'après le théorème cité d'Achieser et Lévin, on voit, par conséquent que dans le domaine G_c, complémentaire de E_c, par rapport au plan, on a

$$|f(z)| \leqslant e^{-c}\, e^{\sigma v(z;\, E_c,\, E)}.$$

Il en résulte que sur **R**

$$\log |f(x)| < -\mathcal{C}(x; C, \sigma). \tag{19}$$

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème cité au début de ce chapitre, où l'inégalité (6) est remplacée par l'inégalité (19) pour tirer la conclusion du théorème I.

Pour la démonstration du théorème II il suffit de remarquer que si $C(x)$ $(x \geqslant 0)$ est une fonction non décroissante, on a

$$C(x^*) - \sigma v(x, x^*) \leqslant \mathcal{C}(x; C_1, \sigma),$$

où C_1 désigne la fonction $C(|x|)$, pour voir que ce théorème est un corollaire du théorème I.

3. Intégrale de Poisson et transformée de Fourier généralisées.

Les ensembles E dont il sera question dans une grande partie de ce chapitre sont des ensembles p.m.h.p. possédant en plus la propriété suivante :

$$\varphi(z) = u(z) + iv(z)$$

étant la fonction A-L attachée à E, il existe une constante $M < \infty$ telle que :

$$v(x) \leqq M. \ (x \in \mathbf{R}). \tag{20}$$

Le complémentaire I de E, par rapport à $\mathbf{R}$, ne possède alors aucun intervalle de longueur infinie, le domaine $\mathcal{D}$ sur lequel $\varphi(z)$ représente conformément le demi-plan supérieur ($y > 0$) est de type A et la relation suivante est vérifiée pour tout $y > 0$:

$$v(z) = \frac{y}{\pi} \int \frac{v(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt + y. \tag{21}$$

On peut, par conséquent, écrire pour tout $y > 0$:

$$0 \leqq v(z) - y \leqq M. \tag{22}$$

Un E, p.m.h.p., sera appelé « ensemble (as) » (asymptotique) si

$$v(iy) \sim y \ (y \to \infty). \tag{23}$$

Un p.m.h.p. possédant la propriété (20) est évidemment un (as).

Des exemples intéressants et importants de p.m.h.p. possédant la propriété (20) sont fournis par les ensembles que nous appellerons « ensembles de Schaeffer », ou « ensembles S ». Ce sont des p.m.h.p. possédant la propriété suivante : Il existe deux constantes positives L et α telles que l'intersection de E avec tout intervalle de longueur L est de mesure non inférieure à α [9]. On démontre précisément [9, 2] qu'un ensemble S possède la propriété (20), avec $M = M(L, \alpha)$.

La fonction $\varphi(z)$, que, jusqu'à maintenant, nous n'avons utilisée que dans le semi-plan supérieur, peut, comme nous l'avons dit dans l'introduction, être prolongée à travers les intervalles de I par symétrie ; la partie imaginaire $v(z)$ de $\varphi(z)$ reste donc positive, si l'on interdit le prolongement de φ à travers les intervalles que peut contenir E.

Si E admet des points intérieurs, donc des intervalles, nous effectuerons le prolongement analytique de φ à travers ces intervalles par le principe de symétrie de Schwarz (rappelons que $v(x) = 0$ pour $x \in E$). Pour éviter toute confusion, nous interdisons dans tout ce qui suit le prolongement de la fonction φ (définie primitivement pour $y > 0$) à travers les intervalles de I.

Nous utilisons donc la lettre φ pour la fonction définie dans le demi-plan supérieur avec $\operatorname{Im} \varphi(z) = v(z) > 0$ ($y > 0$) et, dans le demi-plan inférieur avec $\operatorname{Im} \varphi(z) = -v(\bar{z})$ $(y < 0)$. $\omega(z)$ étant l'exponentielle A-L attachée à E, il est clair que $|\omega(z)| > 1$ pour $y > 0$, et $|\omega(z)| < 1$ pour $y < 0$. Il y a lieu de distinguer la limite de $\varphi(z)$, ainsi que celle de $\omega(z)$, lorsque z tend vers un point de I, selon que $y \to 0$ par valeurs positives ou par valeurs négatives. Dans le cas $y \downarrow 0$ on désignera ces limites respectivement par $\varphi(x)$, $\omega(x)$, et, dans le cas $y \uparrow 0$ par $\bar{\varphi}(x)$ et $\tilde{\omega}(x)$ $(= \exp(-i\bar{\varphi}(x)))$.

Posons pour tout x réel et pour $\zeta = \xi + i\eta$:

$$g(x, \zeta) = \int_{L_1} \omega(x + \zeta\alpha)\, \omega^{-1}(x + \alpha)\, d\alpha, \tag{24}$$

$$h(x, \zeta) = \int_{L_2} \omega(x + \zeta\alpha)\, \omega^{-1}(x + \alpha)\, d\alpha, \tag{25}$$

ω étant l'exponentielle A-L attachée à E, L_1 étant une demi-droite issue de l'origine, située dans le demi-plan supérieur. L_2 est une demi-droite issue de l'origine, située dans le demi-plan inférieur.

LEMME 2. — *Soit* E *un ensemble* (*as*) [1], $g(x, \zeta)$ *représente une fonction holomorphe dans le plan* ζ *découpé suivant la demi-droite* $\xi \geqslant 0$, *et* $h(x, \zeta)$ *représente une fonction holomorphe dans le plan* ζ *découpé suivant la demi-droite* $\xi \leqslant 1$.

En écrivant

$$\Omega(x, \zeta, \alpha) = \omega(x + \zeta\alpha)\, \omega^{-1}(x + \alpha), \tag{26}$$

on constate que, pour $\operatorname{Im}(\zeta\alpha) < 0$, on a

$$\log |\Omega(x, \zeta, \alpha)| \leqslant -v(x + \overline{\zeta\alpha}) - v(x + \alpha),$$

si $\alpha \in L_1$; et

$$\log |\Omega(x, \zeta, \alpha)| \leqslant -v(x + \overline{\zeta\alpha}) + v(x + \bar{\alpha}),$$

si $\alpha \in L_2$.

Il résulte de (23) (voir [2]) que l'ensemble E possède aussi la propriété suivante : quel que soit δ, avec $0 < \delta < \pi/2$, on a dans l'angle

$$\delta < \arg z < \pi - \delta \tag{27}$$

la relation asymptotique

$$v(z) \sim y \quad (|z| \to \infty).$$

(1) Dans ce lemme, nous ne supposons donc pas (20) vérifié.

Il suffit alors d'appliquer (27) pour voir que les intégrales (24) et (25) convergent uniformément par rapport à ζ, ζ appartenant à un compact fixe, quelconque, Δ, du demi-plan $\operatorname{Im}(\alpha\zeta) < \operatorname{Im}\alpha$, α variant, selon le cas, sur L_1 ou sur L_2, les fonctions $\Omega(x, \zeta, \alpha)$ étant holomorphes dans Δ pour tout α sur L_1 ou sur L_2.

On voit de même par un raisonnement classique (application de l'intégrale de Cauchy) que l'intégrale (24) prise suivant deux demi-droites L_1 et L'_1, toutes deux issues de l'origine et situées dans le demi-plan supérieur, fournit pour ζ qui se trouve dans la partie commune des deux demi-plans correspondants

$$\operatorname{Im}(\alpha\zeta) < \operatorname{Im}\alpha, \quad \alpha \in L_1, \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\alpha\zeta) < \operatorname{Im}\alpha, \quad \alpha \in L'_1$$

la même valeur. Un raisonnement semblable s'applique, bien entendu, pour l'intégrale (25). Le lemme en résulte immédiatement, en faisant pivoter L_1 et L_2 autour de l'origine dans leur demi-plan correspondant (demi-plan supérieur et demi-plan inférieur).

Posons pour γ réel :

$$R(x, \gamma) = g(x, i\gamma) + h(x, -i\gamma), \tag{28}$$

et, pour x, y, t réels, avec $(x-t)^2 + y^2 > 0$

$$P(x, t, y) = -\frac{i}{2y} R(x, (x-t)/y). \tag{29}$$

La fonction $P(x, t, y)$ sera appelée « noyau de Poisson associé à E ».

Il est essentiel pour les pages qui suivent d'indiquer des conditions pour que le noyau P, considéré comme fonction de t, appartienne, quel que soit $y > 0$, à L.

On peut indiquer de telles conditions portant sur E, *pourvu que x appartienne lui-même à* E.

Commençons donc par le lemme suivant :

Lemme 2. — *Soit* E *un p.m.h.p. satisfaisant à la condition* (20). *S'il existe une constante* $\beta < 1$ *telle que*

$$\int_{-u}^{0} \bar{\omega}^{-1}(\xi)\, d\xi + \int_{0}^{u} \omega^{-1}(\xi)\, d\xi = (u^\beta) \; (|u| \to \infty) \; (^2) \tag{30}$$

(2) Nous rappelons que, pour ξ réel : $\bar{\omega}(\xi) = e^{-i\bar{\varphi}(\xi)}$ (voir page 337).

$P(x, t, y) \in L$ *(en tant que fonction de t), quel que soit* $y > 0$, *pour tout point intérieur* x *de* E.

Il est évident que, si la fonction $\varphi(z)$ est attachée à un E possédant la propriété (20), la fonction $\varphi(u + z)$ (quel que soit u réel fixe), considérée comme fonction de z, est une fonction attachée à

$$E_u = E - u \,(= \{x \mid x + u \in E\}),$$

l'ensemble E_u possédant également la propriété (20).

Il suffit donc de démontrer que $P(0, t, 1) \in L$ si le point $x = 0$ est un point intérieur de E. Supposons donc que $0 \in E$, et posons

$$P(0, t, 1) = A(t).$$

On a, pour $t \neq 0$:

$$2iA(t) = \int_{L_1} \omega(-ti\alpha)\, \omega^{-1}(\alpha)\, d\alpha + \int_{L_2} \omega(ti\alpha)\, \omega^{-1}(\alpha)\, d\alpha\,, \tag{31}$$

où, en posant $0 < \theta < \pi/2$ si $t > 0$, et $\pi/2 < \theta < \pi$ si $t < 0$, la droite L_1 est définie par $\alpha = re^{i\theta}$, et L_2 par $\alpha = -re^{i\theta}$ $(r \gtreqless 0)$ $(0 \leqq r < \infty)$.

Ecrivons

$$2iA(t) = e^{i\theta}\Big[\int_0^\infty \omega(-ie^{i\theta}tr)\, \omega^{-1}(e^{i\theta}r)\, dr - {}$$

$$- \int_0^\infty \omega(-ie^{i\theta}tr)\, \omega^{-1}(-e^{i\theta}r)\, dr\Big],$$

et, en posant

$$\Phi(t, \xi) = \int_\xi^\infty \omega(-ie^{i\theta}tr)\, dr \tag{32}$$

(cette intégrale converge, en vertu de (20)), on obtient, en intégrant par parties :

$$2iA(t) = e^{i\theta}\Big[-\Phi(t, 0)\, \omega^{-1}(0) - ie^{i\theta}\int_0^\infty \Phi(t, r)\, \varphi'(e^{i\theta}r)\, \omega^{-1}(e^{i\theta}r)\, dr$$

$$+ \Phi(t, 0)\, \tilde{\omega}^{-1}(0) - ie^{-i\theta}\int_0^\infty \Phi(t, r)\, \varphi'(-e^{i\theta}r)\, \omega^{-1}(-e^{i\theta}r)\, dr\Big] \tag{33}$$

On a pour $t \neq 0$:

$$| \Phi (t, \xi) | \leqslant e^{M} \int_{\xi}^{\infty} e^{-|t \cos \theta| r} \, dr = \frac{e^{M - |\cos \theta . t| \xi}}{| t \cos \theta |} \tag{34}$$

$$| \omega^{-1} (re^{i\theta}) | \leqslant e^{M - r \sin \theta} \tag{35}$$

$$| \omega^{-1} (- re^{i\theta}) | \leqslant e^{M + r \sin \theta}, \tag{36}$$

M étant la constante intervenant dans (20).

Et, du fait que $0 \in E$, on a aussi l'*égalité essentielle :*

$$\omega^{-1} (0) = \tilde{\omega}^{-1} (0). \tag{37}$$

On peut affirmer que les fonctions (de r) $| \varphi' (e^{i\theta} r) |$, $| \varphi' (- e^{i\theta} r) |$ (les dérivées étant prises par rapport à $e^{i\theta} r$ et $- e^{i\theta} r$, respectivement) sont bornées pour $r \geqslant 0$. En effet, la famille de fonctions

$$\{ \Psi_r (\zeta) \} = \{ \varphi' (e^{i\theta} r + \zeta) \} \ (r \geqslant 0),$$

ζ variant dans un disque de rayon ε, assez petit, autour de l'origine, est bornée, la famille de fonctions $\{ \Phi_r (\zeta) \} = \{ \varphi (e^{i\theta} r + \zeta) - \varphi (e^{i\theta} r) \}$ holomorphes dans $| \zeta | < \varepsilon$ (du fait que 0 est un point intérieur de E) étant normale $(| v (e^{i\theta} + \zeta) - v (e^{i\theta} r) | \leqslant 2 \, M + \varepsilon)$ et bornée $(\Phi_r (0) = 0)$. Soit $| \varphi' (e^{i\theta} r) | \leqslant N$, $| \varphi' (- e^{i\theta} r) | \leqslant N$.

On peut donc écrire, d'après (33), en tenant compte de (34), (35), (36), (37) et de la borne pour $| \varphi' |$ sur L_1 et L_2, pour t assez grand :

$$\begin{aligned} | A (t) | &\leqslant \frac{N e^{2M}}{| t \cos \theta |} \int_0^{\infty} e^{-t |\cos \theta| r} (e^{r \sin \theta} + e^{-r \sin \theta}) \, dr \\ &= \frac{N e^{2M}}{| t \cos \theta |} \left(\frac{1}{| t \cos \theta | + \sin \theta} + \frac{1}{| t \cos \theta | - \sin \theta} \right) \\ &= O \left(\frac{1}{t^2} \right) (| t | \to \infty). \end{aligned} \tag{38}$$

Donc, quel que soit $c > 0$, on voit, d'après (38) (en choisissant θ suffisamment voisin de 0 ou de π), que $| A (t) | \in L$ sur $[c, \infty)$.

Nous avons pris pour former $A (t) : 0 < \theta < \pi/2$, si $t > 0$, et : $\pi/2 < \theta < \pi$, si $t < 0$. Or, dans (31), la fonction qu'on intègre sur L_1 est continue (pour $t > 0$, fixe) par rapport à α sur tout angle $0 \leqslant \arg \alpha \leqslant \delta < \pi/2$; on peut donc poser, d'après (38) (en utilisant convenablement le théorème de Cauchy), $\arg \alpha = 0$. On peut de même poser dans L_2, $\arg \alpha = \pi$.

On obtient ainsi, pour $t > 0$ (on fera un raisonnement semblable pour $t < 0$) :

$$2\, i\mathrm{A}(t) = \int_0^{\infty} \omega(-itr)\, \omega^{-1}(r)\, dr - \int_0^{\infty} \omega(-itr)\, \tilde{\omega}^{-1}(-r)\, dr,$$

et, en posant

$$\Psi_1(r) = \int_0^r \omega^{-1}(u)\, du, \qquad \Psi_2(r) = \int_0^r \tilde{\omega}^{-1}(-u)\, du,$$

on obtient, en intégrant par parties :

$$2\, i\mathrm{A}(t) = t\left[\int_0^{\infty} \varphi'(-itr)\, \omega(-itr)\, \Psi_1(r)\, dr \right.$$
$$\left. - \int_0^{\infty} \varphi'(-itr)\, \omega(-itr)\, \Psi_2(-r)\, dr\right].$$

On constate encore que $|\varphi'(-itr)| < \mathrm{N} < \infty$; la condition (30) permet alors d'écrire :

$$|(\mathrm{A}(t)| \leqslant \mathrm{K}\, |t| \int_0^{\infty} e^{-|t|r} (|\Psi_1(r) + \Psi_2(-r)|)\, dr$$
$$\leqslant \frac{\mathrm{K}_1}{|t|^{\beta}} \int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho^{\beta}\, d\rho \tag{39}$$

où K et K_1 sont des constantes.

Ainsi $\mathrm{A}(t) \in \mathrm{L}$, aussi dans le voisinage de l'origine. Par conséquent $\mathrm{A}(t) \in \mathrm{L}$ sur **R**.

LEMME 3. — *Soit* E *un p.m.h.p. satisfaisant à la condition* (20). *Désignons, pour tout* $r > 0$, *par* $m(r)$ *la mesure de* $\mathrm{I} \cap (-r, r)$ (I *est le complémentaire de* E *par rapport à* **R**), *et, pour* $0 < a < r$, *par* $n_a(r)$ *le nombre d'intervalles de* I *contigus à* E, *situés dans* $(-r, -a) \cup (a, r)$.

S'il existe un $a > 0$ *et un* $\beta < 1$ *tels que*

$$m(r) + n_a(r) = O(r^{\beta}) \tag{40}$$

la condition (30) *est satisfaite.*

$\varphi(z) = u(z) + iv(z)$ étant la fonction A-L attachée à E, on a, en vertu de (21), pour tout point intérieur x de E ($v(x+iy)$ étant, sur E, une fonction paire de y, avec $v(x) = 0$) :

$$\varphi'(x) = \frac{\partial\varphi(z)}{\partial x} = \frac{\partial u(z)}{\partial x} = \frac{\partial v(z)}{\partial y}_{y=0} .$$

On a donc :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{I}} \frac{v(t)}{(x-t)^2}\, dt + 1. \tag{41}$$

Il en résulte que dans E : $\varphi'(x) \geqslant 1$.

Soit alors (c, d) un intervalle appartenant à E. En écrivant

$$\int_c^d \omega^{-1}(u)\, du = \int_c^d e^{i\varphi(u)}\, du = \int_c^d \frac{1}{\varphi'(u)} e^{i\varphi(u)}\, d\varphi(u), \tag{42}$$

ou, encore, en posant $\varphi(u) = w$, (42) devient

$$\int_\gamma^\delta \mathrm{P}(w)\, e^{iw}\, dw \qquad (\gamma = \varphi(c), \quad \delta = \varphi(\alpha))$$

avec $0 < \mathrm{P}(w) < 1$. En appliquant le théorème de la moyenne, on obtient

$$\left|\int_c^d \omega^{-1}(u)\, du\right| \leqslant 4.$$

La même inégalité est valable lorsqu'on remplace $\omega^{-1}(u)$ par $\tilde{\omega}^{-1}(u)$.

D'autre part la relation (20) donne immédiatement

$$\left|\int_{\mathrm{I}_n} \omega^{-1}(u)\, du\right| \leqslant e^{\mathrm{M}} \cdot \text{longueur de } \mathrm{I}_n ,$$

pour tout $\mathrm{I}_n \subset \mathrm{I} = \complement\mathrm{E}$ (par rapport à $\mathbf{R}$); une inégalité semblable a lieu pour $\tilde{\omega}^{-1}(u)$. La conclusion du lemme 3 est alors immédiate.

Il est évident que $\mathrm{P}(x, t, 1) \in \mathrm{L}$ entraîne pour tout $c > 0$

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_{|t-x|>c} |\mathrm{P}(x, t, y)|\, dt = 0 \tag{43}$$

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_{|t-x|\leqslant c} \mathrm{P}(x, t, y)\, dt = \int \mathrm{P}(x, t, 1)\, dt. \tag{44}$$

On peut donc tirer des lemmes 2 et 3 le lemme évident que voici :

LEMME 4. — *Si la condition* (30) *est satisfaite pour un* E, *p.m.h.p. satisfaisant à* (20), *alors* (43) *et* (44) *ont lieu pour tout point intérieur x de* E.

Si la condition (40) *est satisfaite pour un* E, *p.m.h.p., satisfaisant à* (20), *alors* (43) *et* (44) *ont lieu pour tout point intérieur x de* E.

On a, en définitive, les théorèmes généraux suivants :

THÉORÈME 3. — *Soit* E *un p.m.h.p. satisfaisant à la condition* (20), *et soit* $f(x) \in L_\infty$ *sur* **R**.

Si la condition (30) *est satisfaite, on a*

$$f(x)\int P(x, t, 1)\,dt = \lim_{y \downarrow 0} \int f(t)\,P(x, t, y)\,dt \tag{45}$$

en tout point intérieur x de E *où* $f(x)$ est continue.

THÉORÈME 4. — E *étant un p.m.h.p. satisfaisant à la condition* (20), $f(x) \in L_\infty$, *si la condition* (40) *est satisfaite,* (45) *a lieu en tout point intérieur x de* E, *où* $f(x)$ *est continue.*

A partir des lemmes démontrés, la démonstration du théorème est immédiate. On conclut, en effet, à partir des lemmes 3 et 4 que, les conditions correspondantes du théorème étant satisfaites, les intégrales intervenant dans (45) ont un sens.

Si maintenant, $\varepsilon > 0$ étant donné, on choisit $c > 0$ tel que pour $|x - x_0| < c : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, il suffit d'utiliser le lemme 4 et un raisonnement bien élémentaire pour voir que

$$\overline{\lim_{y \downarrow 0}} \left| \int f(t)\,P(x_0, t, y)\,dt - f(x_0)\int P(x_0, t, 1)\,dt \right| \leqslant \varepsilon \int |P(x_0, t, 1)|\,dt,$$

ce qui permet d'achever la démonstration.

Remarques. — Lorsque E $=$ **R**, les fonctions g, h, P se réduisent aux fonctions élémentaires bien familières, les deux premières indépendantes de x; ce sont les noyaux de Cauchy et de Poisson :

$$g(x, \zeta) = h(x, \zeta) = \frac{i}{1-\zeta}$$

$$\mathrm{P}(x, t, y) = \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}.$$

Le facteur de $f(x_0)$ dans le théorème 4 devient la constante π.

Mais, l'hypothèse essentielle dans l'énoncé du théorème 4 — le fait que x_0 est supposé être un point de E (point intérieur de E) — fait penser que la « formule de Poisson » généralisée ainsi définie (formule (43)) est bien adaptée à l'ensemble E donné. Nous allons montrer que si x_0 n'appartient pas à E les formules qui figurent dans (45) peuvent être dépourvues de sens, les intégrales qui y sont décrites n'étant pas convergentes. Il suffit pour cela de construire un exemple avec E satisfaisant à toutes les conditions du théorème 4, $\mathrm{P}(x_0, t, 1)$ n'appartenant pas à L pour un point x_0 n'appartenant pas à E.

Soit $\mathrm{E} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

On a alors

$$\varphi(z) = \sqrt{z^2 - 1}.$$

La fonction $\Phi(t, \xi)$, définie par (32), peut aussi être écrite sous la forme (en prenant $\theta = 0$ pour $t > 0$ et $\theta = \pi$ pour $t < 0$, ce qui est légitime, comme on le voit facilement) :

$$\Phi(t, \xi) = \int_{\xi}^{\infty} e^{-\sqrt{t^2 r^2 + 1}}\, dr$$

ce qui donne :

$$\Phi(t, 0) \sim \frac{1}{|t|} \quad (|t| \to \infty).$$

Etant donné que $0 \notin \mathrm{E}$, on a :

$$\tilde{\omega}^{-1}(0) - \omega^{-1}(0) \neq 0,$$

ce qui donne, d'après (33) et le raisonnement ayant servi pour (38),

$$|\mathrm{P}(0, t, 1)| \sim \frac{1}{|t|} \quad (|t| \to \infty),$$

et $\mathrm{P}(0, t, 1) \notin \mathrm{L}$.

Les démonstrations qui précèdent, surtout l'introduction des fonctions g et h et les opérations que nous effectuons sur ces fonctions, font penser au « théorème de Fourier » — théorème qui affirme que, dans des conditions appropriées, la transformée de Fourier (inverse) de la transformée de Fourier d'une fonction rétablit la fonction elle-même; ces considérations font surtout penser au théorème de Carleman affirmant que la transformée (inverse) de Fourier-Carleman du couple (F, Φ) (de fonctions définies dans les deux demi-plans, $y > 0$, $y < 0$) qui est la transformée de Fourier-Carleman d'un couple (f, φ) rétablit ce couple (f, φ). Ces théorèmes de Fourier et Carleman se rapportant, bien entendu, au cas où $E = \mathbf{R}$, cas qui correspond à $\varphi(z) = z$.

Il semble naturel d'introduire une transformation fonctionnelle liée à un ensemble donné E, pourvu que celui-ci soit assez riche au point de vue fonctionnel, par exemple, lorsqu'il est p.m.h.p.; cette transformation se réduisant à la transformée de Fourier lorsque $E = \mathbf{R}$.

Notre transformation, que nous désignons par $\mathcal{F}_E$, semble bien adaptée à l'ensemble E auquel elle se rattache. Elle fait correspondre à une fonction f la fonction (pour ξ réel)

$$\hat{f}_E(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, \tilde{\omega}(x\xi)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, e^{-i\bar{\varphi}(x\xi)}\, dx, \tag{46}$$

ou la fonction

$$\hat{f}_E(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, \omega^{-1}(x\xi)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, e^{i\varphi(x\xi)}\, dx \text{ (3)}, \tag{47}$$

où $\varphi(z)$ est la fonction attachée à E.

Nous préférons les transformées définies par (46) et (47), plutôt que celle définie par

$$\hat{f}_E(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, \omega(x\xi)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, e^{-i\varphi(x\xi)}\, dx, \tag{48}$$

car les expressions (46) et (47) ont un sens quel que soit le p.m.h.p. envisagé pourvu que $f \in L$; en effet

$$|\tilde{\omega}^{-1}(x\xi)| = |\omega(x\xi)| = e^{-\nu(x\xi)} \leqq 1 \quad (\nu(z) = \operatorname{Im}(\varphi(z))).$$

(3) Dans la Note [8] (où nous avons désigné $\omega^{-1}(x\xi)$ par $\Phi(x\xi)$) c'est la forme (47) qui a été adoptée.

Et, bien que pour $E = \mathbf{R}$ les expressions (46) et (48) fournissent la même transformée

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx,$$

l'intégrale (48) peut, *a priori,* ne pas converger dans le cas d'un E général, même si $f \in L$, car $|\,\omega(x\xi)\,| > 1$ sur I.

La transformée (47) correspond à la transformée de Fourier inversée : elle se réduit, en effet, pour $E = \mathbf{R}$, à

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, e^{ix\xi}\, dx.$$

Notre but est, en réalité, de généraliser un opérateur plus étendu que la transformée de Fourier d'une fonction. Nous désirons étendre la notion de la transformée de Fourier-Caleman portant sur un couple de fonctions. Et, c'est dans ce domaine que nous fournirons le théorème qui, exprimé rapidement, s'énonce : « la transformée de Fourier de la transformée de Fourier d'une fonction est la fonction elle-même ».

Jusqu'à la fin de cet article nous supposons que E est un p.m.h.p., vérifiant la condition (20), $\varphi(z) = u(z) + iv(z)$ étant la fonction A-L qui lui est attachée.

Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fonctions respectivement holomorphes dans les demi-plans $y > 0$, $y < 0$, continues et bornées sur les demi-plans $y \geqslant 0$, $y \leqslant 0$.

La lettre L, munie d'un indice ou non, désignera une demi-droite issue de l'origine.

Posons

$$G(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L f_1(z)\, \omega(z\zeta)\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L f_1(z)\, e^{-i\varphi(z\zeta)}\, dz \tag{49}$$

$$H(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L'} f_2(z)\, \omega(z\zeta)\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L'} f_2(z)\, e^{-i\varphi(z\zeta)}\, dz, \tag{50}$$

avec L dans $y > 0$ et L′ dans $y < 0$.

On voit facilement que $G(\zeta)$ est une fonction holomorphe dans le plan $\zeta = \xi + i\eta$, découpé suivant la demi-droite $\xi > 0$, et $H(\zeta)$ est holomorphe dans le plan découpé suivant la demi-droite $\xi < 0$.

En rabattant L sur la demi-droite réelle positive et sur la demi-droite réelle négative, ce qui est, comme on le voit facilement, permis, on obtient l'inégalité

$$|G(\zeta)| \leqslant \frac{c}{|\eta|}, \tag{51}$$

où c est une constante; la même inégalité est valable pour H :

$$|H(\zeta)| \leqslant \frac{c}{|\eta|}. \tag{52}$$

On a de même, quel que soit $0 < d < \pi/2$:

$$|G(\zeta)| \leqslant \frac{D}{|\zeta|} \text{ pour } |\arg \zeta - \pi| \leqslant d \tag{53}$$

$$|H(\zeta)| \leqslant \frac{D}{|\zeta|} \text{ pour } |\arg \zeta| \leqslant d, \tag{54}$$

(la constante D dépendant de d).

Posons maintenant

$$g_1(\zeta) = H(\zeta) - G(\zeta), \quad (\eta > 0)$$

$$g_2(\zeta) = H(\zeta) - G(\zeta), \quad (\eta < 0).$$

Nous écrirons

$$(g_1, g_2) = \mathcal{F}_E(f_1, f_2),$$

et nous appellerons cette transformation : « transformation de Fourier-Carleman correspondant à E ». Pour $E = \mathbf{R}$, cette transformation n'est autre que la transformation de Fourier-Carleman. Carleman [3] a considéré sa transformation pour des couples admettant une certaine croissance (comme une puissance de z) à l'infini, et autour de l'origine. Nos résultats s'étendent aussi à de telles fonctions; toutefois, pour simplifier l'écriture nous nous bornerons aux couples (f_1, f_2) bornés.

La classe des couples (f_1, f_2) étant ainsi délimitée, introduisons la « transformée inverse » de la transformée $\mathcal{F}_E$. La transformée inverse, que nous désignerons par $\mathcal{F}_E^*$, portera sur des couples de fonctions $\varphi_1^*(z)$,

$\varphi_2^*(z)$, holomorphes respectivement dans les demi-plans $y > 0$, $y < 0$ et vérifiant dans ces demi-plans les inégalités

$$| \varphi_1^*(z) | \leqslant \frac{c}{|y|}, \quad y > 0 \tag{55}$$

$$| \varphi_2^*(z) | \leqslant \frac{c}{|y|}, \quad y < 0. \tag{56}$$

Posons

$$H^*(\zeta) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{L_1} \varphi_1^*(z)\, z\omega^{-1}(\zeta z)\, dz \tag{57}$$

$$G^*(\zeta) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{L_1'} \varphi_2^*(z)\, z\omega^{-1}(\zeta z)\, dz \tag{58}$$

L_1 et L_1', étant respectivement dans $y > 0$ et $y < 0$.

En posant

$$g_1^*(\zeta) = G^*(\zeta) - H^*(\zeta), \quad \eta > 0\,, \tag{59}$$

$$g_2^*(\zeta) = G^*(\zeta) - H^*(\zeta), \quad \eta < 0\,, \tag{60}$$

nous définissons $\mathcal{F}_E^*$ par :

$$(g_1^*,\ g_2^*) = \mathcal{F}_E(\varphi_1^*,\ \varphi_2^*) \tag{61}$$

Les fonctions g_1^*, g_2^* sont holomorphes dans les demi-plans respectifs $\eta > 0$, $\eta < 0$.

Nous allons maintenant introduire deux fonctions g^* et h^* qui, comme les fonctions g et h, définies par (24) et (25), dépendent uniquement de E.

$$g^*(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1^0} z\omega(\zeta z)\, \omega^{-1}(z)\, dz, \tag{62}$$

$$h^*(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2^0} z\omega(\zeta z)\, \omega^{-1}(z)\, dz, \tag{63}$$

L_1^0 étant dans $y > 0$ et L_2^0 dans $y < 0$. Ces fonctions nous permettent d'introduire deux opérateurs qui jouent un rôle fondamental dans le théorème 5.

L étant situé dans le deuxième quadrant, L_* étant la demi-droite symétrique de L par rapport à l'axe imaginaire, la fonction f_1 étant holomorphe dans le demi-plan supérieur, bornée sur le demi-plan fermé, posons pour $\tau > 0$:

$$T_+ (f_1)_\tau = \int_{L_*} z^{-2} f_1 (z) g^* (i\tau z^{-1}) dz - \int_L z^{-2} f_1 (z) g^* (i\tau z^{-1}) dz.$$

La fonction f_2 possédant des propriétés semblables dans le demi-plan inférieur, L'_* et L' étant les symétriques respectivement de L_* et L par rapport à l'axe réel, posons pour $\tau < 0$:

$$T_- (f_2)_\tau = \int_{L'} z^{-2} f_2 (z) h^* (i\tau z^{-1}) dz - \int_{L'_*} z^{-2} f_2 (z) h^* (i\tau z^{-1}) dz.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 5. — *Soit* E *un p.m.h.p. satisfaisant à* (20). *Soient* $f_1(z)$ *et* $f_2(z)$ *des fonctions holomorphes dans les demi-plans respectifs* $y > 0$, $y < 0$, *continues et bornées sur les demi-plans* $y \geqq 0$, $y \leqq 0$. *Soit*

$$(g_1, g_2) = \mathcal{F}_E (f_1, f_2),$$

et soit

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \mathcal{F}^*_E (g_1, g_2).$$

On a

$$\varphi_1 (i\tau) = T_+ (f_1)_\tau \qquad (\tau > 0)$$

$$\varphi_2 (i\tau) = T_- (f_2)_\tau \qquad (\tau < 0).$$

Remarque. — Si $E = \mathbf{R}$ on a

$$g^* (\zeta) = h^* (\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(1-\zeta)^2}$$

$$T_+ (f_1)_\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_* - L} f_1 (z) \frac{dz}{(z - i\tau)^2} = f'_1 (i\tau) \qquad (\tau > 0)$$

$$T_- (f_2)_\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{L' - L'_*} f_2 (z) \frac{dz}{(z - i\tau)^2} = f'_2 (i\tau) \qquad (\tau < 0).$$

Le théorème contient donc comme cas particulier le théorème de Carleman (pour le cas où les fonctions f_1 et f_2 sont bornées).

Il suffit de suivre quelques passages de la démonstration de Carleman concernant le cas classique $E = \mathbf{R}$ pour aboutir rapidement à la conclusion du théorème.

Posons

$$J(\zeta) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{L_1 - L_1'} \omega^{-1}(z\zeta)\, z\, (H(z) - G(z))\, dz.$$

Il résulte de (54) (en appliquant le théorème de Cauchy), qu'en choisissant L_1 dans le premier quadrant, on a

$$\int_{L_1 - L_1'} \omega^{-1}(z\zeta)\, zH(z)\, dz = 0\ (^4).$$

Il reste

$$J(\zeta) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{L_1} \tilde{\omega}^{-1}(z\zeta)\, zG(z)\, dz$$
$$- \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{L_1'} \omega^{-1}(z\zeta)\, zG(z)\, dz = J_1 + J_2\,.$$

Remplaçons G par son expression (49) et choisissons la demi-droite L_1 de sorte qu'elle fasse avec l'axe imaginaire un angle plus petit que celui que fait L avec cet axe. On obtient pour J_1 :

$$J_1(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \omega^{-1}(\zeta z)\, z \int_{L} f_1(\alpha)\, \omega(z\alpha)\, d\alpha\, dz,$$

et une expression semblable pour J_2.

On a, en définitive, pour $\zeta = \tau i \quad (\tau > 0)$:

$$J(\tau i) = J_1(\tau i) + J_2(\tau i)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{L} f_1(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha^2} \int_{L^0} z\omega(i\tau\alpha^{-1})\, \omega^{-1}(z)\, dz,$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_*} f_1(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha^2} \int_{L_1^0} z\omega(i\tau\alpha^{-1})\, \omega^{-1}(z)\, dz,$$

(4) $\int_{L - L_1'}$ désigne $\int_{L} - \int_{L_1'}$.

où L_1^0 est dans le demi-plan supérieur. Ainsi

$$J(\tau i) = \varphi_1(\tau i) = T_+ (f_1)_\tau \qquad (\tau > 0).$$

On obtient de la même façon

$$\varphi_2(\tau i) = T_- (f_2)_\tau \qquad (\tau < 0).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ACHIESER et LEVIN, *Dokl. Akad. Nauk* U.R.S.S., (N.S.), t. 117 (1957), 735-738.

[2] ACHIESER et LEVIN, Fonctions d'une variable complexe, Problèmes contemporains, Gauthier-Villars (1962), 109-161.

[3] CARLEMAN, L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent, Uppsala (1944).

[4] S. MANDELBROJT, Séries adhérentes, Régularisation des suites, Applications. Gauthier-Villars (1952).

[5] S. MANDELBROJT, *Journal d'Analyse Mathématique*, vol. XIV (1965), 285-296.

[6] S. MANDELBROJT, *Journal d'Analyse Mathématique*, vol. X (1962/1963), 381-404.

[7] S. MANDELBROJT, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 262, 1446-1448.

[8] S. MANDELBROJT, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 263, 730-733.

[9] SCHAEFFER, *Duke. Math. Journal*, vol. 20 (1953), 77-88.

Manuscrit reçu le 7 février 1967.

Szolem MANDELBROJT,
20, rue Leverrier
Paris-6e