Jean Dhombres

Sur une classe de moyennes

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 1 (1967), p. 135-156
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_1_135_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 1 (1967), 135-156.

SUR UNE CLASSE DE MOYENNES

par Jean DHOMBRES

Introduction.

Dans cet article, nous nous proposons de caractériser et de construire effectivement une classe de moyennes sur l'algèbre des fonctions presque périodiques. Nous nous sommes efforcés de dégager principalement les propriétés utiles d'analyse fonctionnelle, laissant volontairement de côté les propriétés purement algébriques non indispensables à la bonne cohérence du sujet.

Le plan de l'exposé est le suivant :

Définitions, notations et rappels de propriétés.
Compactifié de Bohr : Equivalence des définitions.
Caractérisation analytique des moyennes.
Caractérisation géométrique des moyennes.
Etude de cas particuliers.
Extensions possibles.

1. Définitions et notations.

Dans la suite, G désigne un groupe topologique abélien localement compact (noté additivement) et C (G) désigne l'espace des fonctions continues définies sur G et à valeurs complexes (cf. Bourbaki [1]).

L'ensemble des caractères χ du groupe G constitue un groupe abélien pour la loi notée additivement : $(\chi_1 + \chi_2)(x) = \chi_1(x)\,\chi_2(x)$. On munit ce nouveau groupe de la topologie de la convergence compacte qui en fait également un groupe abélien localement compact, appelé le groupe dual G et noté $G^{\wedge}$. Cette notation indique et le groupe et sa topologie.

On sait que $(G^{\wedge})^{\wedge} = G$ d'après le théorème de dualité de Pontryagin (cf. Gelfand [6]).

Par convention, les éléments de G sont notés x, y ... et les éléments de $G^{\wedge}$, $\hat{x}, \hat{y}$ .... Pour la valeur du caractère $\hat{x}$ en x, on utilise la notation de dualité entre G et $G^{\wedge}$: $\langle x, \hat{x} \rangle_{G, G^{\wedge}}$ ou encore $\langle x, \hat{x} \rangle$ quand il n'y a aucune ambiguité possible.

On note m_G une mesure de Haar du groupe G et on normalise cette mesure lorsque G est compact par $m_G(G) = 1$ (cf. Gelfand [6]).

Produit de convolution.

Sur un groupe abélien compact, on définit le produit de convolution de deux mesures de Radon par :

$$m_1 * m_2(f) = \int_{G \times G} f(x + y)\, dm_1(x)\, dm_2(y) \tag{1}$$

pour tout élément f de C (G). On connaît les propriétés de commutativité et d'associativité du produit de convolution.

Transformation de Fourier (Gelfand [6]).

Par définition, la transformée de Fourier d'une fonction de C (G) s'écrit (G compact) :

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int_G f(x) \langle x, \hat{x} \rangle\, dm_G(x). \tag{2}$$

Cette fonction est continue sur le dual $G^{\wedge}$. On peut étendre par fermeture cette définition aux fonctions f de $L^1(G)$. De plus, l'application $f \to \hat{f}$ est injective.

En généralisant ce qui précède, on peut définir la transformée de Fourier d'une mesure de Radon m (G compact)

$$\hat{m}(\hat{x}) = \int_G \langle x, \hat{x} \rangle\, dm(x). \tag{3}$$

On a l'importante propriété opératoire suivante

$$(m_1 * m_2)^{\wedge}(\hat{x}) = \hat{m}_1(\hat{x})\, \hat{m}_2(\hat{x}). \tag{4}$$

2. Compactifié de Bohr.

Il suffira de définir l'espace A (G) des fonctions presque périodiques, comme étant la fermeture dans C (G), au sens de la topologie de la convergence uniforme, de l'ensemble des « polynômes trigonométriques » de la forme :

$$P(x) = \sum_{k=1}^{k=N} a_k \langle x, \hat{x}_k \rangle$$

où a_k est un nombre complexe et $\hat{x}_k$ appartient à $G^\wedge$.

On en déduit facilement qu'une fonction presque périodique est uniformément continue et bornée.

Lemme 1. — A (G) *constitue une* C* *algèbre commutative et unitaire.* Simple vérification en utilisant la norme de la convergence uniforme :

$$||f|| = \sup_{x \in G} |f(x)| \tag{5}$$

On sait que toute C* algèbre commutative unitaire A est isométriquement isomorphe à la C* algèbre formée par les fonctions continues à valeurs complexes, définies sur un certain espace compact $A^\wedge$. (Cf. Gelfand [6]). Ce compact $A^\wedge$, appelé spectre de l'algèbre, est constitué par l'ensemble des formes χ, linéaires, continues, de norme 1, ayant les propriétés :

$$\chi(fg) = \chi(f)\,\chi(g)\,; \tag{6}$$

$$\chi(1) = 1 \tag{7}$$

et

$$\chi(\overline{f}) = \overline{\chi(f)} \tag{8}$$

ensemble muni de la topologie de la convergence simple.

Le spectre $A^\wedge$ de A (G) peut, de plus, être muni d'une structure de groupe qui en fait un groupe abélien compact. En effet, pour χ_1 et χ_2 appartenant à $A^\wedge$, on pose :

$$(\chi_1 + \chi_2)(\hat{x}) = \chi_1(\hat{x})\,\chi_2(\hat{x}) \tag{9}$$

pour tout $\hat{x}$ de $G^\wedge$.

Par linéarité et fermeture, on définit $(\chi_1 + \chi_2)$ sur A (G) et on vérifie bien les propriétés exigées.

Il existe alors un homomorphisme naturel g, continu, de G dans A^{Λ} défini par la correspondance :

$$f \to f(x) \qquad \text{pour} \qquad x \in G.$$

L'algèbre A (G) séparant les points de G (cf. Gelfand [6]), l'homomorphisme g est injectif, et le théorème de Stone-Weierstrass (cf. Bourbaki [2]) implique que $g(G)$ est dense dans A^{Λ}.

Nous identifierons alors G et $g(G)$, ce qui revient à dire que toute fonction presque périodique est la restriction à G d'une fonction continue sur A^{Λ} et réciproquement (on note : $f \in A(G) \to F \in C(A^{\Lambda})$).

(On déduit facilement du lemme 1, que pour un groupe abélien compact, les C* algèbres A (G) et C (G) sont isomorphes).

LEMME 2. — A_1 *et* A_2 *désignent deux groupes abéliens compacts. L'existence d'un homomorphisme de norme* 1 *entre les* C* *algèbres unitaires* $C(A_2)$ *et* $C(A_1)$ *permet de définir un homomorphisme continu entre* A_1 *et* A_2.

A toute application spectrale définie sur $C(A_1)$ correspond, avec les hypothèses faites, une application spectrale définie sur $C(A_2)$, ce qui établit une application continue du spectre de $C(A_1)$ dans le spectre de $C(A_2)$. Mais d'après le lemme 1, le spectre de $C(A_i)$ est A_i ; algébriquement et topologiquement. On vérifie bien que l'application ainsi construite est un homomorphisme continu entre A_1 et A_2.

G désigne maintenant un groupe abélien localement compact.

LEMME 3. — *Pour tout groupe abélien compact* G_1 *et tout homomorphisme continu* $j : G \to G_1$, *il existe un homomorphisme continu unique* J *de* $A^{\Lambda} \to G_1$, *tel que* $j = J \circ g$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & G_1 \\ A^{\Lambda} \arrow[ur, "J"'] & \end{tikzcd} \qquad (10)$$

D'après le lemme 2, il suffit de démontrer l'existence d'un homomorphisme continu de C^* algèbres entre $C(G_1)$ et $C(A^\wedge)$ ou encore entre $C(G_1)$ et $A(G)$. Il convient donc de démontrer que $f(j(x))$ est presque périodique pour toute fonction continue f sur G_1 ; ce qui est une conséquence des relations algébriques et topologiques $G_1^\wedge \to G^\wedge$ et

$$A(G_1) = C(G_1).$$

L'unicité de J est facilement acquise grâce à $\overline{g(\bar{G})} = A^\wedge$.

Notons maintenant $(G^\wedge)_d$ le dual de G muni de la topologie discrète et $\bar{G}$ le dual de $(G^\wedge)_d$. On pose donc :

$$((G^\wedge)_d)^\wedge = \bar{G} \tag{11}$$

$\bar{G}$ est un groupe compact (Gelfand [6]) et il existe une injection naturelle, continue g', de G dans $\bar{G}$ déterminée par :

$$\langle \hat{x}, g'(x) \rangle_{\langle (G^\wedge)_d, \bar{G}\rangle} = \langle x, \hat{x} \rangle_{\langle G, G^\wedge \rangle}$$

LEMME 4. — *Le lemme 3 vaut pour* $\bar{G}$ (On remplace partout $A^\wedge$ par $\bar{G}$).

Le lemme 1 assure l'isomorphisme entre $A(\bar{G})$ et $C(\bar{G})$ et par ailleurs il y a isomorphisme entre $A(\bar{G})$ et $A(G)$ puisque $(\bar{G})^\wedge = (G^\wedge)_d$ (théorème de Pontryagin). On peut alors poursuivre comme dans la démonstration du lemme 3.

THÉORÈME. — $A^\wedge$ *et* $\bar{G}$ *sont isomorphes en tant que groupes abéliens compacts.*

Les lemmes 3 et 4 montrent que $A^\wedge$ et $\bar{G}$ sont solutions du même problème universel (10).

DÉFINITION. — *Muni de sa topologie,* $\bar{G}$ *est dit le groupe compactifié de Bohr du groupe* G.

3. Caractérisation analytique des moyennes.

Définissons une moyenne sur A (G), en utilisant une propriété semi-multiplicative mise en évidence par J. Kampé de Fériet [8].

DÉFINITION.

Un opérateur M *appliquant* A (G) *dans lui-même, définit une moyenne (semi-multiplicative) s'il vérifie les cinq conditions suivantes notées* $\mathcal{K}$.

$\mathcal{K}$

(λ) *linéarité*

$$M(f+g) = M(f) + M(g)$$

$$M(\lambda f) = \lambda M(f)$$

(μ) *conservation de l'unité*

$$M(1) = 1$$

(ν) *semi-multiplicativité*

$$M(f\, M g) = (M f)(M g)$$

(ξ) *commutation avec les translations du groupe* G :

$$M(\tau_h f) = \tau_h (M f)$$

(ο) *continuité de* M *pour la topologie de la convergence uniforme sur* A (G).

$\tau_h f$ *est la fonction* $x \to f(x - h)$ $(h \in G)$.

Remarques.

(1) (ξ) et (ο) entraînent que $M(f') = (M f)'$ lorsque f est dérivable $(G = \mathbf{R})$.

(2) (ξ) entraîne que $M(1) = C^{te}$. On normalise cette constante par l'hypothèse (μ).

(3) (μ) et (ν) conditionnent l'idempotence de l'opérateur M.

(4) Je ne démontrerai pas ici quelques résultats intéressants sur l'ensemble $\mathcal{K}$ des moyennes semi-multiplicatives. Notamment que $\mathcal{K}$ possède une structure de semi-groupe abélien pour la loi :

$$(M_1, M_2) \to M_1 \circ M_2$$

de même pour la loi :

$$(M_1, M_2) \to M_1 + M_2 - M_1 \circ M_2 ,$$

les résultats sont rendus explicites par le théorème 1 et sont de nature algébrique.

(5) L'axiome (o) s'écrit

$$\|Mf\|_\infty = \sup_{x \in G} |Mf(x)| \leqslant \|M\| \, \|f\|_\infty \quad \text{(d'ailleurs } \|M\| \geqslant 1).$$

Le problème de la caractérisation de ces moyennes est résolu par le théorème :

THÉORÈME I. — *Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des moyennes semi-multiplicatives définies sur* A (G) *et l'ensemble des sous-groupes du groupe dual de* G.

a) Soit M une moyenne donnée appartenant à $\mathcal{K}$.

$M(\hat{x}) = k(\hat{x})\,\hat{x}$ où $k(\hat{x})$ désigne une fonction à valeurs complexes. Ceci provient de (λ) et (ξ) en cherchant à calculer par deux procédés différents la moyenne de $\hat{x}$.

$k(\hat{x})$ prend les valeurs 1 ou 0 : ceci est une conséquence de (ν) et (μ). D'ailleurs, on déduit très précisément de (ν).

$$k(\hat{x}_1)\,k(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) = k(\hat{x}_1)\,k(\hat{x}_2) \text{ pour tout } \hat{x}_1, \hat{x}_2 \text{ de } G^\wedge$$

L'ensemble Λ formé des $\hat{x}$ de G^Λ tels que $k(\hat{x}) = 1$ est un sous-groupe non vide de G^Λ puisque $\hat{0}$ appartient à Λ ($k(\hat{0}) = 1$) et que si $\hat{x}_1$, et $\hat{x}_2$ appartiennent à Λ, il en est de même pour $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$.

De plus la connaissance de Λ pour une moyenne donnée, permet le calcul effectif de la moyenne sur A (G) grâce à (λ) et à ($\circ$).

$$M(P(x)) = \sum_{j=1}^{j=n} a_j\, M\langle x, \hat{x}_j\rangle = \sum_{j=1}^{j=n} a_j\, k(\hat{x}_j)\,\langle x, \hat{x}_j\rangle$$
$$= \sum_{\substack{j=1 \\ \hat{x}_j \in \Lambda}}^{j=n} a_j\,\langle x, \hat{x}_j\rangle.$$

Le résultat s'obtient par fermeture. On a donc bien associé un sous-groupe Λ à une moyenne $\mathcal{K}$.

b) Réciproquement : donnons-nous un sous-groupe quelconque Λ de G^Λ. Existe-t-il une moyenne M, appartenant à $\mathcal{K}$, telle que le sous-groupe associé à M par le procédé précédent a) soit précisément Λ ?

Pour ce faire on utilise le compactifié de Bohr et un outil supplémentaire.

On appelle annihilateur H d'un sous-groupe Λ de $(G^{\wedge})_d$, l'ensemble des éléments $\bar{x}$ de $\bar{G}$ vérifiant $\langle \hat{x}, \bar{x} \rangle = 1$ pour tous les éléments $\hat{x}$ de Λ dans la dualité $\langle (G^{\wedge})_d, \bar{G} \rangle$.

LEMME 1. — H *est un sous-groupe compact de* $\bar{G}$.

L'ensemble des $\bar{x}$ tels que $(\hat{x}, \bar{x}) = 1$, pour un $\hat{x}$ donné, est un sous-groupe fermé de $\bar{G}$ puisque $\hat{x}$ est un homomorphisme continu sur $\bar{G}$. H est alors l'intersection de tels ensembles lorsque $\hat{x}$ parcourt Λ. Par conséquent, H est un sous-groupe fermé, donc compact, de $\bar{G}$.

En tant que groupe abélien compact, H possède une mesure de Haar normalisée notée m_H. On peut prolonger d'une manière au moins cette mesure à tout $\bar{G}$. Pour tout f de $C(\bar{G})$, on pose.

$$M_H(f) = m_H(f_H)$$

où f_H dénote la restriction de f à H. Le théorème de Riesz-Kakutani assure l'existence de la mesure M_H, extension naturelle de m_H, comme mesure positive de Radon sur $\bar{G}$.

LEMME 2. — *La transformée de Fourier de* M_H *est la fonction caractéristique du sous-groupe* Λ.

On note $\hat{M}_H$ la transformée de Fourier de M_H pour la dualité $\langle (G^{\wedge})_d, \bar{G} \rangle$ et $\hat{M}_H(\hat{x})$ sa valeur au point $\hat{x}$. On peut écrire :

$$\hat{M}_H(\hat{x}) = \int_{\bar{G}} \langle \hat{x}, \bar{x} \rangle \, dM_H(\bar{x}) = \int_H \langle \hat{x}, \bar{x} \rangle \, dm_H(\bar{x})$$

Si $\hat{x}$ appartient à Λ, c'est-à-dire si $\langle \hat{x}, \bar{x} \rangle = 1$ pour $\bar{x} \in H$, la normalisation de m_H assure que $\hat{M}_H(\hat{x}) = \int_H dm_H(\bar{x}) = 1$.

Si $\hat{x}$ n'appartient pas à Λ, on a $\hat{M}_H(\hat{x}) = 0$. En effet, supposons que $\hat{M}_H(\hat{x}) = \alpha$. On peut écrire puisque m_H est la mesure de Haar de H :

$$\alpha = \int_H \langle \hat{x}, \bar{x} \rangle \, dm_H(\bar{x}) = \int_H \langle \hat{x}, \bar{x} + \bar{x}_1 \rangle \, dm_H(\bar{x}) \quad \text{pour} \quad \bar{x}_1 \in H.$$

$$= \int_H \langle \hat{x}, \bar{x} \rangle \langle \hat{x}, \bar{x}_1 \rangle \, dm_H(\bar{x}) = \langle \hat{x}, \bar{x}_1 \rangle \, \alpha$$

Soit :

$$\alpha\,(1 - \langle \hat{x}, \bar{x}_1 \rangle) = 0$$

L'hypothèse $\hat{x} \notin \Lambda$ entraîne $\langle \hat{x}, \bar{x}_1 \rangle \neq 1$, donc $\alpha = 0$.

D'ailleurs ce résultat n'est autre qu'une relation d'orthogonalité classique pour la dualité $\left(\mathrm{H}, \dfrac{(\mathrm{G}^{\Lambda})_d}{\Lambda}\right)$, généralisant les relations d'orthogonalité des fonctions trigonométriques.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{+inx}\, e^{-ipx}\, dx = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = p \\ 0 & \text{si} \quad n \neq p \end{cases}$$

Utilisant les notations des paragraphes 1 et 2, on a le lemme

LEMME 3. — *L'application* $\mathrm{F} \to \mathrm{F} * \mathrm{M_H}$ *est une moyenne appartenant à* $\mathcal{K}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{F} * \mathrm{M_H}\,(\bar{x}) &= \int_{\bar{\mathrm{G}}} \mathrm{F}\,(\bar{x} - \bar{y})\, d\,\mathrm{M_H}\,(\bar{y}) \\ &= \int_{\mathrm{H}} \mathrm{F}\,(\bar{x} - \bar{y})\, dm_{\mathrm{H}}\,(\bar{y}). \end{aligned} \tag{12}$$

La fonction $\bar{x} \to \mathrm{F} * \mathrm{M_H}\,(\bar{x})$ est bien définie puisque H est un groupe compact, elle est continue sur $\bar{\mathrm{G}}$ et il lui correspond une fonction presque périodique notée $\mathrm{M}\,f$ par l'isomorphisme de Gelfand (§ 2). Nous vérifierons simplement les propriétés $\mathcal{K}$ sur $\mathrm{F} * \mathrm{M_H}\,(\bar{x})$ et ces propriétés seront automatiquement vraies pour $\mathrm{M}\,f$.

(λ) la linéarité est acquise par convolution,

(μ) la conservation de l'unité est conséquence de la normalisation de m_{H}.

(ν) la propriété de semi-multiplicativité nécessite une démonstration :

Posant $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}\,(\mathrm{FMG})$ et $\mathrm{M}_2 = (\mathrm{MF})\,(\mathrm{MG})$. On prend les transformées de Fourier des deux expressions.

Il vient d'une part :

$$\mathrm{M}_2 = (\mathrm{F} * \mathrm{M_H})\,(\mathrm{G} * \mathrm{M_H}) = (\mathrm{MF})\,(\mathrm{MG})$$

$$\hat{\mathrm{M}}_2\,(\hat{y}) = (\mathrm{F} * \mathrm{M_H})^{\Lambda} * (\mathrm{G} * \mathrm{M_H})^{\Lambda} = (\hat{\mathrm{F}}\,\hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{H}}) * (\mathrm{G} * \mathrm{M_H})^{\Lambda}.$$

Mais

$$(\mathrm{MG})^{\wedge} (\hat{y} - \hat{x}) = (\mathrm{G} * \mathrm{M_H})^{\wedge} (\hat{y} - \hat{x}) = \hat{\mathrm{G}} (\hat{y} - \hat{x}) \hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{H}} (\hat{y} - \hat{x}).$$

Comme Λ est un sous-groupe, $\hat{y} - \hat{x}$ appartient à Λ pour $\hat{x} \in \Lambda$ si et seulement si $\hat{y} \in \Lambda$. Donc :

$$\hat{\mathrm{M}}_2 (\hat{y}) = \hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{H}} (\hat{y}) \int_{\Lambda} \hat{\mathrm{F}} (\hat{x}) (\mathrm{MG})^{\wedge} (\hat{y} - \hat{x})\, d\hat{x}$$

D'autre part

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{M_H} * (\mathrm{F} (\mathrm{G} * \mathrm{M_H}))$$

$$\hat{\mathrm{M}}_1 (\hat{y}) = \hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{H}} (\hat{y}) \int_{\hat{\mathrm{G}}} \hat{\mathrm{F}} (\hat{x}) (\mathrm{MG})^{\wedge} (\hat{y} - \hat{x})\, d\hat{x}$$

De la même façon on réduit cette intégrale à

$$= \hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{H}} (\hat{y}) \int_{\Lambda} \hat{\mathrm{F}} (\hat{x}) (\mathrm{MG})^{\wedge} (\hat{y} - \hat{x})\, d\hat{x}$$

Comme la transformée de Fourier est injective, les fonctions M (FMG) et (MF) (MG) sont égales.

(ξ) la commutation avec les translations provient de la relation $(\mathrm{F} * \delta_{\mathrm{H}}) * \mathrm{M_H} = (\mathrm{F} * \mathrm{M_H}) * \delta_h$ où δ_h représente la mesure de Dirac au point h de G.

(o) la continuité pour la topologie de la convergence uniforme est une conséquence de la positivité de l'opérateur M :

Si $\mathrm{F}(\bar{x})$ est positive ou nulle pour tout élément de $\bar{\mathrm{G}}$, la fonction $\mathrm{MF}(\bar{x}) = \mathrm{F} * \mathrm{M_H}(\bar{x})$ est positive ou nulle pour tout élément $\bar{x}$ de $\bar{\mathrm{G}}$ puisque la mesure $\mathrm{M_H}$ est positive.

Dès lors : $\|\mathrm{F}\|_\infty - \mathrm{F} \geqslant 0$ a pour conséquence l'inégalité

$$\mathrm{M} (\|\mathrm{F}\|)_\infty - \mathrm{M} (\mathrm{F}) \geqslant 0$$

soit (F à valeurs réelles pour simplifier)

$$\|\mathrm{M(F)}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{F}\|_\infty. \tag{13}$$

L'opérateur M ainsi construit est de norme $\|\mathrm{M}\| = 1$ ($\mathrm{M}(1) = 1$).

Les trois lemmes donnent la réciproque annoncée. En effet, le sous-groupe associé à la moyenne définie par $F \to F * M_H$ est précisément Λ puisque pour $F(\bar{x}) = \langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$ on a :

$$F * M_H(\bar{y}) = \int_{\bar{G}} \langle \bar{y} - \bar{x}, \hat{x} \rangle \, dM_H(\bar{x})$$

$$= \langle \bar{y}, \hat{x} \rangle \int_{H} \langle -\bar{x}, \hat{x} \rangle \, dm_H(\bar{x}) = \langle \bar{y}, \hat{x} \rangle \, \hat{m}_H(\hat{x})$$

$$= \begin{cases} \langle \bar{y}, \hat{x} \rangle & \text{si } \hat{x} \in \Lambda, \\ 0 & \text{si } \hat{x} \notin \Lambda. \end{cases}$$

Nous avons ainsi démontré que la correspondance établie en a) entre l'ensemble des moyennes semi-multiplicatives $\mathcal{K}$ et l'ensemble $\mathcal{G}^{\Lambda}$ des sous-groupes du groupe G^{Λ} était surjective. Cette correspondance est naturellement injective puisque si $M_1 \neq M_2$, on a pour au moins un élément $\hat{x}_0$ de G^{Λ}, $M_1(\hat{x}_0) \neq M_2(\hat{x}_0)$ et donc $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$.

La biunivocité ainsi acquise termine la démonstration du théorème 1.

Remarques.

1) En général, s'il existe un $x \in G$ tel que $F(x) > 0$, on n'a pas nécessairement $MF(x) \geqslant 0$ en ce point. On pourra se reporter aux exemples donnés plus loin.

2) De plus, c'est une conséquence des hypothèses faites tant sur $\mathcal{K}$ que sur l'algèbre considérée A (G) que :

$$M(\bar{f}) = \overline{M(f)}$$

(On le vérifie facilement sur les polynômes « trigonométriques », et par fermeture, on l'étend à toute fonction presque périodique.)

COROLLAIRE. — *Pour un groupe abélien compact* G, *il existe une moyenne propre non stationnaire satisfaisant les conditions* $\mathcal{K}$, *sur l'espace* C (G), *dès que* G^{Λ} *possède un sous-groupe non trivial.*

Une moyenne non stationnaire signifie une moyenne non réduite à une constante. Une moyenne propre signifie une moyenne différente de l'opérateur identique et un sous-groupe non trivial signifie un sous-groupe distinct de $\hat{0}$ ou de G^{Λ}.

4. Caractérisation géométrique des moyennes $\mathcal{K}$.

D'après ce qui précède, il est clair que l'utilisation du groupe de Bohr ramène l'étude au seul cas d'un groupe abélien compact, noté G dans ce quatrième paragraphe.

M est une moyenne donnée, appartenant à $\mathcal{K}$ et Λ son sous-groupe associé par le théorème I. On peut également considérer l'annihilateur H de Λ. Nous dirons que M (f) est la moyenne de f suivant H.

Désignons par $E_H(f)$, l'enveloppe convexe fermée dans C (G), au sens de la topologie de la convergence uniforme sur G, des translatées de la fonction f suivant les éléments du sous-groupe fermé H. Nous désirons généraliser les théorèmes de caractérisation de J. Von Neumann au sujet de la moyenne stationnaire d'une fonction presque périodique (cf. Von Neumann [9]. La différence essentielle avec ces résultats réside en ce que Mf n'étant plus une constante, une propriété de stabilité doit être établie. Nous procèderons en trois lemmes.

LEMME 1. — *La moyenne de f suivant* H *appartient à* $E_H(f)$.

La relation (12) donne

$$Mf(y) = \int_H f(y-x)\, dm_H(x).$$

Comme G est compact, il existe un voisinage V de l'élément neutre tel que $|f(y) - f(y')| < \varepsilon$ pour tous les éléments y et y' de G tels que $(y - y')$ appartienne à V (continuité uniforme). Il existe également un recouvrement fini de G de la forme $a_i + V$ et une partition de l'unité associée, c'est-à-dire des fonctions $g_i(x)$, continues, à valeurs réelles, définies sur G et vérifiant les propriétés suivantes :

$$\left\{\begin{array}{r} \text{Support } g_i(x) \subset a_i + V \\ 0 \leqslant g_i(x) \leqslant 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{i=N} g_i(x) = 1 \end{array}\right.$$

pour tout élément x de G.

Montrons d'abord que

$$\sum_{i=1}^{i=N} f(y-a_i) \int_G g_i(x)\, dm_H(x)$$

est une valeur à ε près de la moyenne Mf. On a

$$\left| \int_G f(y-x)\, dm_H(x) - \sum_{i=1}^{i=N} f(y-a_i) \int_G g_i(x)\, dm_H(x) \right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{i=N} \left| \int_{a_i+V} f(y-x)\, g_i(x)\, dm_H(x) - f(y-a_i) \int_{a_i+V} g_i(x)\, dm_H(x) \right.$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{i=N} \int_{a_i+V} | f(y-x) - f(y-a_i) |\, g_i(x)\, dm_H(x).$$

Cette majoration donne :

$$\leqslant \sum_{i=1}^{i=N} \varepsilon \int_{a_i+V} g_i(x)\, dm_H(x) = \varepsilon.$$

On peut donc approcher à ε près la fonction Mf (au sens de la convergence uniforme sur G) par une combinaison convexe de translatées de f :

$$\sum_{i=1}^{i=N} c_i f(y-a_i) \quad \text{où} \quad c_i = \int_G g_i(x)\, dm_H(x)$$

Or

$$c_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{i=N} c_i = \int_G \left(\sum_{i=1}^{i=N} g_i(x) \right) dm_H(x) = 1$$

ce qu'il fallait montrer.

Lemme 2. — M$f(y)$ *est stable par l'opérateur M.*

Ceci est l'utilisation de l'idempotence de l'opérateur M, ou encore revient à l'égalité $m_H * m_H = m_H$ que l'on déduit de la relation (4).

Lemme 3. — M$f(y)$ *admet le sous-groupe* H *comme sous-groupe de périodes.*

$$\mathrm{M}f(y) = \int_G f(y-x)\, d\mathrm{M}_H(x) = \int_H f(y-x)\, dm_H(x)$$

$$\mathrm{M}f(y+z) = \int_H f(y+z-x)\, dm_H(x) = \int_H f(y-x)\, dm_H(x)$$

si z appartient à H, puisque m_{H} est la mesure de Haar normalisée de H.

(On peut donner effectivement une condition sur f pour que Mf admette H comme groupe de périodes).

Remarque 1.

Le lemme 3 peut encore s'énoncer sous la forme : la moyenne Mf (y) de la fonction f suivant H est un élément de C (G/H).

En effet si $\dot{y}$ désigne la classe de y, pour la relation d'équivalence créée par H, Mf $(\dot{y})$ est bien définie sur $\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}$ et si l'on munit $\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}$ de la topologie quotient, il est facile de voir que Mf $(\dot{y})$ est continue sur $\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}$ (propriété de topologie finale).

Remarque 2.

Une relation analogue à la formule de Fubini permet d'écrire :

$$\int_{\mathrm{G}} f(x)\, dm_{\mathrm{G}}(x) = \int_{\mathrm{G/H}} \mathrm{M}f(\dot{y})\, dm_{\mathrm{G/H}}(\dot{y}) \tag{14}$$

Soit

$$\int_{\mathrm{G}} f(x)\, dm_{\mathrm{G}}(x) = \int_{\mathrm{G/H}} dm_{\mathrm{G/H}}(\dot{y}) \left(\int_{\mathrm{H}} f(y-x)\, dm_{\mathrm{H}}(x)\right)$$

On peut énoncer maintenant le théorème

THÉORÈME II. — *La moyenne de f suivant* H *est l'unique fonction de l'enveloppe convexe fermée des translatées de f suivant* H, *invariante par l'application* $f \to \mathrm{M}f$.

Les lemmes 1 et 2 démontrent ce théorème sauf l'unicité.

Supposons donc avoir trouvé une fonction $h(y)$, satisfaisant les conditions du théorème, à savoir :

$h(y)$ est invariante par M et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des nombre c_i

$$c_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{i=\mathrm{N}} c_i = 1$$

et une suite d'éléments a_i de H donnant l'approximation :

$$\left| h(y) - \sum_{i=1}^{i=N} c_i f(y - a_i) \right| < \varepsilon \tag{15}$$

pour tout y de G.

De plus l'invariance par M s'écrit

$$\int_{\mathrm{H}} h(y - x)\, dm_{\mathrm{H}}(x) = h(y). \tag{16}$$

On peut intégrer la relation (15) afin d'obtenir :

$$\left| \int_{\mathrm{G}} h(y - x)\, dm_{\mathrm{H}}(x) - \sum_{i=1}^{i=N} c_i \int_{\mathrm{G}} f(y - x - a_i)\, dm_{\mathrm{H}}(x) \right| < \varepsilon$$

Puis utiliser l'invariance de m_{H} pour les translations définies par les éléments de H, soit :

$$| h(y) - \mathrm{M}f(y) | < \varepsilon$$

$\left(\text{puisque } \sum_{i=1}^{i=N} c_i = 1\right)$.

Ceci est valable pour tout $\varepsilon > 0$ et donc $\mathrm{M}f(y) = h(y)$

C.Q.F.D.

THÉORÈME III. — *La moyenne de f suivant* H *est l'unique fonction de l'enveloppe convexe fermée des translatées de f suivant* H, *admettant* H *comme sous-groupe de périodes.*

Le lemme 3 assure ce théorème sauf l'unicité et comme par ailleurs dire que h appartient à $\mathrm{C}\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}\right)$ (Remarque 1) revient à dire que $\mathrm{M}h = h$, le théorème III se déduit immédiatement du théorème II.

5. Etude de cas particuliers.

Nous envisagerons successivement le cas d'un groupe compact, le tore, et le cas d'un groupe localement compact, l'axe réel.

On prend pour premier exemple le tore **T** dont le dual est **Z** (ensemble des entiers relatifs). On a différentes possibilités suivant le choix du sous-groupe Λ de $\mathbf{Z}$. Par souci de simplification, f désigne une fonction périodique de période 2π, continue sur l'axe réel. Les théorèmes I, II et III conduisent aux résultats suivants.

a) Si $\Lambda = \{0\}$, le sous-groupe H associé est le tore $\mathbf{T}$ et la moyenne obtenue est une constante :

$$\mathrm{M}f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx.$$

Cette constante est d'ailleurs l'unique constante de l'enveloppe convexe fermée des translatées de f.

b) Si $\Lambda = \{\mathbf{Z}\}$, le sous-groupe associé est l'élément $\{0\}$ et la moyenne se réduit évidemment à l'application identique :

$$\mathrm{M}f(y) = f(y).$$

c) Enfin, si $\Lambda = p(\mathbf{Z})$, désignant par cette écriture le sous-groupe formé des multiples du nombre entier p, on constate que le sous-groupe associé H est constitué des éléments

$$\left[0, \frac{2\pi}{p}, \frac{4\pi}{p} \dots \frac{p-1}{p} 2\pi\right]$$

dont la mesure de Haar est

$$\frac{1}{p}\left(\delta_{(0)} + \delta_{\frac{2\pi}{p}} + \dots + \delta_{\frac{p-1}{p}2\pi}\right)$$

Dès lors :

$$\mathrm{M}f(y) = \frac{1}{p}\left[f(y-0) + f\left(y - \frac{2\pi}{p}\right) + \dots + f\left(y - \frac{p-1}{p} 2\pi\right)\right] \tag{17}$$

De plus, si la fonction f admet pour écriture de Fourier

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} \tag{18}$$

La moyenne selon H admet pour écriture de Fourier

$$\mathrm{M}f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_{pn} e^{ipnx} \tag{19}$$

Le procédé de moyenne constitue donc une sélection, suivant un sous-groupe donné, des harmoniques de la fonction f.

THÉORÈME. — *Toute moyenne satisfaisant* $\mathcal{H}$ *sur l'espace des fonctions continues sur le tore est de l'une des formes précédentes* a), b) *ou* c).

En effet, on remarque que tout sous-groupe propre de $\mathbf{Z}$ est de la forme $p\mathbf{Z}$ où p est le plus petit élément non nul de ce sous-groupe. On utilise ensuite le théorème I.

Remarque.

Tout procédé de sommation à partir des harmoniques (relation (19) : comme par exemple le procédé de Bochner) conduit à la même sommation, avec la même approximation, pour la moyenne Mf.

Comme deuxième exemple, nous considérerons le corps des réels $\mathbf{R}$. le dual de $\mathbf{R}$ est $\mathbf{R}$, pour la topologie usuelle, et l'on note $\overline{\mathbf{R}}$ le compactifié de Bohr de $\mathbf{R}$. On se place sur l'algèbre des fonctions presque périodiques définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs complexes.

a) Si $\Lambda = \{ 0 \}$, $H = \overline{\mathbf{R}}$ et la moyenne associée est une constante. Il s'agit de $\int_{\overline{\mathbf{R}}} F(\bar{x})\, d\bar{x}$. Mais il est facile de voir, en utilisant le théorème II que :

$$M f = \lim_{T\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(x)\, dx. \tag{20}$$

Résultat de J. Von Neumann.

(En se restreignant naturellement aux fonctions à valeurs réelles (ce qui est loisible puisque $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ avec l'équivalence $f(x)$ presque périodique, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont presque périodiques), il suffit de noter que

$$\liminf_{T\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(x)\, dx$$

et

$$\limsup_{T\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(x)\, dx$$

existent et satisfont toutes deux aux conditions du théorème III. L'égalité en découle et la relation (20) est acquise).

b) Si $\Lambda = \{\mathbf{Z}\}$, $M f$ est nécessairement une fonction périodique de période 2π (théorème III).

Si l'écriture de Fourier de f est

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{i\lambda_n x} , \tag{21}$$

l'écriture de Fourier de $\mathrm{M} f$ est

$$\mathrm{M} f \sim \sum_{n=+\infty}^{n=-\infty} a_n k(\lambda_n) e^{i\lambda_n x} \tag{22}$$

où $k(\lambda_n) \begin{cases} = 1 & \text{si } \lambda_n \text{ appartient à } \mathbf{Z}. \\ = 0 & \text{si } \lambda_n \text{ n'appartient pas à } \mathbf{Z}. \end{cases}$

De plus, en utilisant le théorème II, on peut démontrer la formule

$$\mathrm{M} f(x) = \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \frac{1}{2\mathrm{N}+1} \sum_{p=-\mathrm{N}}^{p=+\mathrm{N}} f(x + 2p\pi) \tag{23}$$

Comme précédemment, on démontre l'existence mais aussi la continuité (théorème d'Ascoli) de

$$\limsup_{\mathrm{N} \to +\infty} \frac{1}{2\mathrm{N}+1} \sum_{p=-\mathrm{N}}^{p=+\mathrm{N}} f(x + 2p\pi)$$

et de

$$\liminf_{\mathrm{N} \to +\infty} \frac{1}{2\mathrm{N}+1} \sum_{p=-\mathrm{N}}^{p=+\mathrm{N}} f(x + 2p\pi)$$

(puisqu'une fonction presque périodique est bornée). Elles satisfont toutes deux les conditions du théorème III, sont donc égales et fournissent justement la moyenne cherchée. (Evidemment cette méthode assure le résultat pour une fonction à valeurs réelles et on en déduit le résultat pour une fonction à valeurs complexes).

De façon précise, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La limite de Césaro des translatées suivant* $\theta(\mathbf{Z})$ *d'une fonction presque périodique sur* $\mathbf{R}$, *existe, est uniformément atteinte, est périodique de période* θ.

Si

$$f(x) \sim \sum \mathrm{A}_n e^{i\lambda_n x}$$

Alors

$$(\mathrm{M} f)(x) \sim \sum \mathrm{A}_n k(\lambda_n) e^{i\lambda_n x}$$

où

$$k(\lambda_n) \begin{cases} = 1 \text{ si } \lambda_n \in \dfrac{2\pi}{\theta}(\mathbf{Z}) \\ = 0 \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

(La limite de Césaro désigne la

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{p=-N}^{p=+N} f(x+p\theta) \text{ et } \theta(\mathbf{Z})$$

désigne le sous-groupe formé des multiples du nombre réel θ).

Démonstration. — De façon élémentaire on peut utiliser la relation (24) qui n'est autre que la transcription en langage usuel, des relations d'orthogonalité dans le groupe de Bohr :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{p=-N}^{p=+N} e^{2i\lambda p\pi} = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda \text{ est non entier.} \\ 1 \text{ si } \lambda \text{ est entier.} \end{cases} \tag{24}$$

et poursuivre comme dans Bass-Dhombres [3] en envisageant d'abord le cas d'un polynôme trigonométrique, puis passer à la limite.

On peut également démontrer que les fonctions

$$U_N(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{p=-N}^{p=+N} f(x+p\theta)$$

sont uniformément bornées, uniformément équicontinues et uniformément presque périodiques. Elles convergent de plus au sens de la topologie de l'espace M^2 de Besicovitch, ce qui suffit d'après un théorème de Favard [5] pour assurer la convergence uniforme.

c) Envisageons le cas intéressant où l'on choisit $\Lambda = Q$. Cet exemple répond à une question posée par E. Hewitt [7]. Le sous-groupe H associé à une intersection avec $\mathbf{R}$ réduite à 0, cependant on peut utiliser la formule suivante :

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} e^{2i\pi\lambda m!\nu} = \begin{cases} 1 \text{ si } \lambda \in Q \\ 0 \text{ si } \lambda \notin Q \end{cases} \tag{25}$$

On démontre alors que la moyenne de f est égale à

$$Mf = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} f(x + 2\pi m!\,\nu) \tag{26}$$

Cette limite, en général, n'est pas périodique (2π) et est uniformément atteinte sur **R**. C'est la restriction à **R** de l'expression

$$\int_{\bar{\mathbf{R}}} \mathrm{F}(\bar{x} - \bar{y})\, d\mathrm{M}_{\mathrm{H}}(\bar{y})$$

Pour la démonstration, on utilise l'un ou l'autre des procédés du théorème précédent. Pour obtenir simplement qu'il s'agit bien d'une moyenne selon H (ou Q) on considère

$$\liminf_{m \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} f(x + 2\pi\, m!\, \nu) \right)$$

et

$$\limsup_{m \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\mathrm{N}+1} \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} f(x + 2\pi\, m!\, \nu) \right)$$

pour une fonction réelle (on étend ensuite au cas des fonctions à valeurs complexes) en utilisant le théorème II.

6. Extensions possibles.

Il est naturel de chercher à affaiblir le système $\mathcal{H}$ posé *a priori* pour la définition d'une moyenne. Je n'évoquerai pas ici la possibilité d'un changement d'algèbre (par exemple : algèbre de fonctions moyennes périodiques ou algèbre de fonctions pseudo-aléatoires au sens de M. Bass), ni la possibilité d'un abandon de la structure de groupe abélien. Par contre, j'envisagerai un changement relatif à la propriété (o) de continuité de l'opérateur de moyenne.

On a, dans cette voie, le théorème limitatif auquel on devait s'attendre.

THÉORÈME. — *Si le groupe dual* G *d'un groupe abélien localement compact* G *est connexe, l'identité est l'unique moyenne vérifiant les conditions* $\mathcal{H}'$

$$\mathcal{H}' \left\{ \begin{array}{l} (\lambda),\ (\mu),\ (\nu),\ (\xi) \text{ des conditions } \mathcal{H}, \\ (o) \text{ bis : M est une opération continue pour la topologie de la} \\ \qquad\quad \text{convergence compacte.} \end{array} \right.$$

On prouve d'abord que le sous-groupe Λ est à la fois ouvert et fermé dans G^{Λ}. On s'assure de la continuité de $k(\hat{x})$ en écrivant : $k(\hat{x}) = \dfrac{\langle x, \hat{x} \rangle}{\mathrm{M}(\hat{x})}$

où le dénominateur comme le numérateur sont des fonctions continues de $\hat{x}$. Puis on constate que Λ est le complémentaire dans G^{Λ} de l'ensemble fermé des points où $k(\hat{x}) = 0$. En conséquence Λ est ouvert. Il s'agit également d'un fermé puisque $\Lambda = \{\hat{x} \mid k(\hat{x}) = 1\}$ mais ceci est un résultat général pour un sous-groupe ouvert d'un groupe topologique (cf. Bourbaki [1]).

L'argument de connexité, ou simplement le fait qu'il n'existe pas de sous-groupe propre ouvert dans G^{Λ} (ce qui est équivalent pour un groupe localement compact : cf. Bourbaki [1]), assure le résultat par l'intermédiaire du théorème I, puisque nécessairement $\Lambda = G^{\Lambda}$ donc M est l'identité.

Comme cas particulier, on retrouve un résultat de Mme M. L. Dubreil-Jacotin [4].

Corollaire. — *Si* $\sum_{k=-N}^{k=+N} a_k e^{i\lambda_k x}$ *est positif, il en est de même pour* $\sum_{\substack{k=-N \\ \lambda_k \in \Lambda}}^{k=+N} a_k e^{i\lambda_k x}$ *où* Λ *est un sous-groupe réel quelconque.*

Ceci est une simple conséquence de ce que nous avons démontré sur la positivité de l'opérateur M.

Remarque.

On peut enfin envisager un affaiblissement de la condition (ν) de semi-multiplicativité et la remplacer par la condition de Reynolds.

$$(\nu)\text{ bis}\quad M(fg) = M(f)\,M(g) + M\left((f - M(f))\,(g - M(g))\right)$$

Cependant les résultats acquis sur ce point ne sont pas satisfaisants.

Conclusion.

En particularisant convenablement l'algèbre de fonctions sur laquelle la recherche des moyennes s'effectue, et surtout en utilisant la propriété (o) de continuité, on a pu donner un procédé constructif de certaines moyennes semi-multiplicatives et les caractériser. Le théorème I fournit un joint entre des propriétés d'algèbre pure (sous-groupes d'un groupe) et des propriétés mixtes d'algèbre et d'analyse (notion de moyenne). Nous avons surtout développé le deuxième point.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, Groupes topologiques : Topologie Générale, chapitre 3.

[2] N. Bourbaki, Espaces Fonctionnels, chapitre 10, paragraphe 4.

[3] J. Bass, J. Dhombres, *C.R. Acad. Sciences de Paris,* Tome 262, 29-31.

[4] M. L. Dubreil-Jacotin, Sur les axiomes de moyenne. Corso sulla teoria della turbolenza *CIME Varenna,* 1-10 septembre 1957.

[5] J. Favard, Les fonctions presque périodiques — Gauthier-Villars, Paris (1933).

[6] I. M. Gelfand-Raikov-Chilov, Les anneaux normés commutatifs, Gauthier-Villars, Paris (1964).

[7] E. Hewit, Linear functionals on almost periodic functions, *Trans. Am. Math. Soc.* (1953), tome 74, 303-322.

[8] J. Kampe de Feriet, Problèmes mathématiques de la turbulence homogène, Corso sulla teoria della turbolenza *CIME, Varenna,* 1-10 septembre 1957.

[9] J. von Neumann S. Bochner, Almost periodic functions on groups, *Trans. Am. Math. Soc.* (1935).

Manuscrit reçu le 9 janvier 1967.

Jean Dhombres,
8, avenue du Président Franklin-Roosevelt,
92-Sceaux