

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MASANORI KISHI

## Sur l'énergie en théorie du potentiel par rapport à un noyau non symétrique

*Annales de l'institut Fourier*, tome 17, n° 1 (1967), p. 119-127

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1967\\_\\_17\\_1\\_119\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_1_119_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
http://www.numdam.org/*

# SUR L'ÉNERGIE EN THÉORIE DU POTENTIEL PAR RAPPORT A UN NOYAU NON SYMÉTRIQUE

par **Masanori KISHI**

## Introduction.

Soient  $X$  un espace localement compact séparé et  $G$  un noyau semi-continu inférieurement tel qu'il applique  $X \times X$  dans  $[0, \infty]$  et  $G(x, x)$  soit positif sur la diagonale de  $X \times X$  et  $G(x, y)$  soit fini continu au moins en dehors de la diagonale. Etant donnée une mesure positive  $\mu$ , on définit le potentiel et l'énergie de  $\mu$  par les intégrales suivantes :

$$G\mu(x) = \int G(x, y) d\mu(y),$$
$$\| \mu \|_G^2 = \int G\mu(x) d\mu(x)$$

respectivement. On examine si l'hypothèse :

$$G\mu(x) \geq G\nu(x) \text{ dans } X \text{ et } \mu \text{ d'énergie finie,}$$

implique que l'énergie de  $\nu$  est finie (sous certaines hypothèses sur la régularité)<sup>(1)</sup>. Quand ceci est vrai, nous disons que  $G$  est *héritaire*. Evidemment tous les noyaux symétriques<sup>(2)</sup> sont héritaires.

Dans cet article nous donnons d'abord un exemple d'un noyau  $G$  qui n'est pas héritaire tandis que son adjoint  $\check{G}$ <sup>(3)</sup> est héritaire, les deux noyaux  $G$  et  $\check{G}$  satisfaisant aux principes du maximum dilaté<sup>(4)</sup>

(1) C'est un problème posé par Durier.

(2) Cela veut dire que  $G(x, y) = G(y, x)$  sur  $X \times X$ .

(3) C'est le noyau défini par  $\check{G}(x, y) = G(y, x)$ .

(4) Nous disons qu'un noyau  $G$  satisfait au principe du maximum  $k$ -dilaté, quand pour toute mesure positive

$$\sup_{x \in X} G\mu(x) \leq k \sup_{x \in S\mu} G\mu(x)$$

où  $S\mu$  désigne le support de  $\mu$ .

et de domination dilaté<sup>(5)</sup>. Ensuite nous donnons deux conditions suffisantes pour que  $G$  soit héréditaire. Enfin une conséquence simple d'une condition suffisante est donnée.

### 1. Un exemple.

Soit  $X$  l'espace compact des points  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et  $x_\omega$  tel que chaque  $x_n$  soit isolé et la suite  $\{x_n\}$  converge vers  $x_\omega$ . Nous posons

$$\begin{aligned} G(x_k, x_l) &= \begin{cases} \alpha_l & \text{pour } k > l \\ \gamma_l & \text{pour } k = l \\ \beta_k & \text{pour } k < l \end{cases} \\ G(x_\omega, x_l) &= \alpha_l \\ G(x_k, x_\omega) &= \beta_k \\ G(x_\omega, x_\omega) &= \infty, \end{aligned}$$

où les suites de nombres positifs  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\beta_k\}$ ,  $\{\gamma_k\}$  sont déterminées de manière que

$$\lim \alpha_k = \lim \beta_k = \lim \gamma_k = \infty$$

$$\sum_1^\infty \alpha_k/2^k = \infty$$

$$\sum_1^{k-1} \alpha_n/2^n + \gamma_k/2^k + \beta_k/2^k = \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\sum_1^\infty \alpha_k/4^k, \quad \sum_1^\infty \beta_k/4^k, \quad \sum_1^\infty \gamma_k/4^k \text{ soient convergentes.}$$

Alors nous avons pour

$$\mu = \sum_1^\infty 2^{-n} \varepsilon_{x_n} \quad \text{et} \quad \nu = \varepsilon_{x_\omega},$$

$$G\mu(x) = G\nu(x) \quad \text{partout sur } X$$

$$\| \mu \|_G^2 \leq \sum_1^\infty \alpha_k/4^k + \sum_1^\infty \beta_k/4^k + \sum_1^\infty \gamma_k/4^k < \infty,$$

(5) Nous disons que  $G$  satisfait au principe de domination  $k$ -dilaté, si le fait que  $G\mu(x) \leq G\nu(x)$  sur  $S\mu$  pour une mesure positive  $\mu$  d'énergie finie et pour une mesure positive  $\nu$  implique l'inégalité  $G\mu(x) \leq kG\nu(x)$  dans  $X$ . Quand  $k = 1$ , ce principe se nomme le principe de domination.

tandis que  $\|\nu\|_G = \infty$ . Par suite  $G$  n'est pas héréditaire.

Pour déterminer  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\beta_k\}$ ,  $\{\gamma_k\}$  comme ci-dessus nous prenons deux suites  $\{b_k\}$ ,  $\{c_k\}$  telles que

$$4/3 < b < b_k < c_k < c < 2.$$

Par récurrence nous déterminons  $\{\beta_k\}$  comme suit

$$\beta_1 = 1 \quad b_k \beta_k < \beta_{k+1} < c_k \beta_k.$$

Alors  $\{\beta_k\}$  croît vers  $\infty$  et

$$\sum_1^{\infty} \beta_k / 2^k < \infty.$$

Ensuite nous déterminons la suite  $\{\alpha_k\}$  par

$$\sum_1^k \alpha_n / 2^n = \beta_k.$$

Alors  $\{\alpha_k\}$  croît vers  $\infty$  et

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \alpha_k / 4^k &\leq (c - 1)/2 \sum_1^{\infty} \beta_k / 2^k < \infty \\ \sum_1^{\infty} \alpha_k / 2^k &= \lim \beta_k = \infty. \end{aligned}$$

Enfin la suite  $\{\gamma_k\}$  déterminée par

$$\gamma_k / 2^k = (1 - 2^{-k}) \beta_k - \beta_{k-1}$$

converge vers  $\infty$  et

$$\sum_1^{\infty} \gamma_k / 4^k \leq (c - 1)/2 \sum_1^{\infty} \beta_k / 2^k < \infty.$$

Par notre choix, il existe un nombre fini  $A$  tel que

$$\beta_k \leq A \gamma_k, \quad \gamma_k \leq \alpha_k \leq A \gamma_k$$

pour tous les indices  $k$ . Ces dernières propriétés prouvent que  $G$  et  $\check{G}$  satisfont aux principes du maximum dilaté et de domination dilaté<sup>(6)</sup>. Après le théorème 1 nous noterons que  $\check{G}$  est héréditaire.

(6) Pour cela nous vérifions d'abord que  $G$  et  $\check{G}$  satisfont au principe de continuité, et que l'inégalité :  $G\mu \leq G\varepsilon_x$  sur  $S\mu$  ( $\check{G}\mu \leq \check{G}\varepsilon_x$  sur  $S\mu$ , resp.) pour

**2. Quelques remarques sur le noyau satisfaisant  
au principe du maximum dilaté.**

Nous noterons d'abord

LEMME 1. — *Soit  $\hat{G}$  symétrique. Si  $\hat{G}$  satisfait au principe du maximum  $k$ -dilaté, alors pour toutes mesures positives  $\mu, \nu$*

$$(\mu, \nu)_{\hat{G}} \leq k \|\mu\|_{\hat{G}} \|\nu\|_{\hat{G}},$$

où

$$(\mu, \nu)_{\hat{G}} = \int \hat{G}_{\mu}(x) d\nu(x).$$

Ceci est obtenu originairement par Ninomiya [7], nous citons aussi Choquet [2].

COROLLAIRE. — *Soit  $G$  un noyau non-symétrique satisfaisant au principe du maximum  $k$ -dilaté tel que le noyau adjoint  $\check{G}$  y satisfasse aussi. Alors pour toutes mesures positives  $\mu, \nu$*

$$(\mu, \nu)_G \leq 4k \|\mu\|_G \|\nu\|_G.$$

En effet, nous posons  $\hat{G}(x, y) = G(x, y) + \check{G}(x, y)$ . Puisque  $G$  et  $\check{G}$  satisfont au principe du maximum  $k$ -dilaté,  $\hat{G}$  satisfait au principe du maximum  $2k$ -dilaté. Alors notre inégalité résulte du lemme 1.

LEMME 2. — *Soit  $G$  un noyau satisfaisant au principe du maximum  $k$ -dilaté tel que le noyau adjoint  $\check{G}$  y satisfasse aussi et soit régulier (7). Si  $\nu$  est une mesure positive telle que  $(\nu, \lambda)_G$  soit fini pour toutes mesures*

une mesure positive  $\mu$  et pour un point  $x$  à l'extérieur de  $S\mu$ , implique  $\int d\mu \leq A$ . Ceci montre que  $G$  ( $\check{G}$ , resp.) satisfait au principe du maximum  $A$ -dilaté (cf. [5], Theorem II.8). Ensuite nous vérifions que l'inégalité ci-dessus implique que  $G\mu \leq A'G\varepsilon_x$  sur  $X$ , avec  $A' = \max(A^2, A + 1)$ . Ceci montre que  $G$  et  $\check{G}$  satisfont au principe de domination  $A'$ -dilaté (cf. [5], Theorem II.4).

(7) Nous disons qu'un compact  $L$  est  $\check{G}$ -régulier si le fait que  $G\mu(x) \geq h(x)$  à p.p. sur  $L$  implique la même inégalité partout sur  $L$  pour toute mesure positive  $\mu$  et pour toute fonction continue positive  $h$ .

Quand, pour tout compact  $K$  et tout voisinage  $\omega$  de  $K$ , il existe un compact  $\check{G}$ -régulier  $L$  tel que  $K \subset L \subset \omega$ , nous disons que  $G$  est régulier.

positives  $\lambda$  d'énergie finie, alors ou bien  $\nu = 0$  ou bien  $S\nu$  est de capacité positive (8) (9).

*Démonstration.* — Nous pouvons supposer que  $\nu \neq 0$  et  $S\nu$  est compact. Nous démontrerons que  $K = S\nu$  est de capacité positive. Nous posons

$$c(K) = \sup \{ \mu(K); \mu \text{ mesure positive portée par } K \},$$

$$G_\mu(x) \leq 1 \text{ dans } X$$

La fonction  $c(K)$  de compacts est continue à droite (10), donc si  $c(K) = 0$ , il existerait, pour une suite  $\{ \varepsilon_n \}$  de nombres positifs telle que

$$\sum_1^\infty \varepsilon_n < \infty,$$

des ensembles ouverts  $\omega_n$  contenant  $K$  tels que pour tous les compacts  $L$ ,  $K \subset L \subset \omega_n$ ,  $c(L) < \varepsilon_n$ .  $\check{G}$  étant régulier nous pouvons prendre des compacts  $\check{G}$ -régulier  $L_n$  tels que  $K \subset L_n \subset \omega_n$ . Alors par le théorème d'existence (11) il existe des mesures positives  $\mu_n$  et  $\lambda_n$  portées par  $L_n$  telles que

$$\begin{cases} G_{\mu_n}(x) \geq 1 \text{ à p.p.p. sur } L_n & (12) \\ G_{\mu_n}(x) \leq 1 \text{ sur } S\mu_n \\ \check{G}_{\lambda_n}(x) \geq 1 \text{ sur } L_n \\ \check{G}_{\lambda_n}(x) \leq 1 \text{ sur } S\lambda_n. \end{cases}$$

Par le principe du maximum  $k$ -dilaté,  $G_{\mu_n}(x)$  et  $\check{G}_{\lambda_n}(x)$  sont inférieurs à  $k$  dans  $X$ . Nous notons :

$$\lambda_n(X) \leq k^2 c(L_n) \leq k^2 \varepsilon_n^2.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \lambda_n(X) &\leq \int G_{\mu_n} d\lambda_n = \int \check{G}_{\lambda_n} d\mu_n \\ &\leq k \mu_n(X) \leq k^2 c(L_n) \leq k^2 \varepsilon_n^2. \end{aligned}$$

(8) Quand un compact  $K$  porte au moins une mesure positive non-nulle d'énergie finie,  $K$  est dit être de capacité positive ; sinon  $K$  est de capacité nulle.

(9) Nous notons que la mesure  $\nu$  de notre exemple dans le paragraphe 1 possède la propriété :  $(\nu, \lambda)_G < \infty$  pour toutes mesures positives  $\lambda$  d'énergie finie, mais  $S\nu$  est de capacité nulle, bien que  $G$  et  $\check{G}$  satisfont au principe du maximum dilaté.

(10) Voir Brelot [1], Part. III, Theorem 7.

(11) Voir [5] (Theorem I.1), [6] et Durier [3] (Lemme 1).

(12) Cela veut dire que l'ensemble exceptionnel  $\{x \in L_n; G_{\mu_n}(x) < 1\}$  ne contient pas de compact de capacité positive.

Nous posons :

$$\lambda = \sum_1^{\infty} \lambda_n.$$

Alors

$$\begin{aligned} \lambda(X) &= \sum_1^{\infty} \lambda_n(X) \leq k^2 \sum_1^{\infty} \varepsilon_n^2 < \infty \\ \|\lambda\|_G^2 &= \sum_{n,m} \int G \lambda_n d\lambda_m \leq 4k \sum_{n,m} \|\lambda_n\|_G \|\lambda_m\|_G \\ &\leq 4k^4 \left( \sum_1^{\infty} \varepsilon_n \right)^2 < \infty, \end{aligned}$$

tandis que  $\check{G}\lambda(x) = \infty$  sur  $K$  et  $(v, \lambda)_G = \infty$ . Cette contradiction montre que  $c(K)$  est positive et par suite  $K$  est de capacité positive.

Du lemme 3 au lemme 6, nous supposons :

[P] tout ensemble ouvert non-vide est de capacité positive ou

[P']  $G(x, y) > 0$  sur  $X \times X$ .

**LEMME 3.** — Soit  $\check{G}$  un noyau satisfaisant au principe de domination  $k$ -dilaté. Alors  $G$  satisfait localement au principe du maximum dilaté.

Ceci est une remarque faite par Ninomiya [7].

**LEMME 4.** — Soit  $G$  un noyau non-symétrique tel que  $\check{G}$  satisfasse au principe de continuité. Si  $G$  satisfait au principe de domination  $k$ -dilaté, alors  $\check{G}$  y satisfait aussi.

Voir [5], Theorem II.4.

**LEMME 5.** — Soit  $G$  un noyau non-symétrique satisfaisant au principe de domination  $k$ -dilaté tel que le noyau adjoint satisfasse au principe de continuité. Alors pour tout compact  $K$  il existe un nombre fini  $k'$  tel que

$$(\mu, v)_G \leq k' \|\mu\|_G \|v\|_G$$

pour toutes mesures positives  $\mu, v$ , portées par  $K$ .

Ceci résulte immédiatement du lemme 3, du lemme 4 et du corollaire du lemme 1.

LEMME 6. — Soit  $G$  un noyau non-symétrique satisfaisant au principe de domination  $k$ -dilaté tel que  $\check{G}$  soit régulier et satisfasse au principe de continuité. Si  $\nu$  est une mesure positive telle que  $(\nu, \lambda)_G$  soit fini pour toutes mesures positives  $\lambda$  d'énergie finie, alors ou bien  $\nu = 0$  ou bien  $S\nu$  est de capacité positive.

En effet, sans diminuer la généralité nous pouvons supposer que  $S\nu$  est compact. Alors ce lemme résulte des lemmes 2 et 5 (13).

### 3. Deux conditions suffisantes.

THÉORÈME 1. — Soit  $G$  un noyau non-symétrique satisfaisant au principe du maximum  $k$ -dilaté tel que  $\check{G}$  y satisfasse aussi. Si  $\check{G}$  est régulier,  $G$  est héréditaire.

*Démonstration.* — Soient  $\mu$  et  $\nu$  des mesures positives telles que  $G\nu(x) \leq G\mu(x)$  dans  $X$  et  $\mu$  soit d'énergie finie. Nous posons :

$$\begin{aligned} E_n &= \{x ; G\nu(x) \leq n\} \quad n = 1, 2, \dots \\ E_\infty &= \{x ; G\nu(x) = \infty\}. \end{aligned}$$

D'abord nous montrons :  $\nu(E_\infty) = 0$ . En effet, s'il existait un compact  $K$  dans  $E_\infty$  tel que  $\nu(K) > 0$ , la mesure  $\nu_K$ , la restriction de  $\nu$  à  $K$ , posséderait la propriété :

$$\begin{aligned} (\nu_K, \lambda)_G &= \int G\nu_K d\lambda \leq \int G\nu d\lambda \\ &\leq \int G\mu d\lambda \leq 4k \|\mu\|_G \|\lambda\|_G < \infty \end{aligned}$$

pour toutes mesures positives  $\lambda$  d'énergie finie. C'est contradictoire avec le lemme 2, parce que  $K$  est de capacité nulle.

Donc  $\nu(E_\infty) = 0$  et la suite  $\{\nu_n\}$  de mesures qui sont les restrictions de  $\nu$  à  $E_n$  converge vaguement vers  $\nu$ . En restreignant les mesures à des compacts nous obtenons un filtre  $\{\nu_\alpha\}$  de mesures positives croissant

(13) Nous pouvons le démontrer utilisant la notion de « contenance » et le théorème de Fuglede (cf. [4], Théorème 1.1).

vers  $v$  tel que  $v_\alpha$  soit de masse totale finie et  $Gv_\alpha$  soit borné sur  $Sv_\alpha$ . Alors  $v_\alpha$  est d'énergie finie et par le corollaire du lemme 1

$$\begin{aligned} \|v_\alpha\|_G^2 &= \int Gv_\alpha \, dv_\alpha \leq \int Gv \, dv_\alpha \\ &\leq \int G\mu \, dv_\alpha \leq 4k \|\mu\|_G \|v_\alpha\|_G. \end{aligned}$$

Donc

$$\|v_\alpha\|_G \leq 4k \|\mu\|_G$$

et

$$\|v\|_G = \lim \|v_\alpha\|_G \leq 4k \|\mu\|_G < \infty.$$

Ceci prouve que  $G$  est héréditaire.

*Remarque.* — Notre exemple dans le § 1 montre que, bien que  $G$  et  $\check{G}$  satisfassent au principe du maximum dilaté,  $G$  n'est pas nécessairement héréditaire, si  $\check{G}$  n'est pas régulier.

Nous notons encore que le noyau  $\check{G}$  de notre exemple est héréditaire, parce que  $G$  est régulier.

**THÉORÈME 2.** — *Soit  $G$  un noyau non-symétrique satisfaisant au principe de domination  $k$ -dilaté tel que  $\check{G}$  soit régulier et satisfasse au principe de continuité. Si tout ouvert non-vide est de capacité positive ou  $G(x, y) > 0$  dans  $X \times X$ , alors  $G$  est localement héréditaire* (14).

*Démonstration.* — Le procédé utilisé dans la démonstration du théorème 1 est applicable grâce aux lemmes 5 et 6.

Nous terminons cet article par une conséquence simple du théorème 2.

**COROLLAIRE.** — *Soit  $G$  un noyau non-symétrique satisfaisant aux principes de balayage et de continuité tel que  $\check{G}$  soit régulier. Si tout ouvert non-vide est de capacité positive ou  $G(x, y) > 0$  dans  $X \times X$ , alors pour toute mesure  $\mu$  d'énergie finie et à support compact, la mesure balayée sur un compact est d'énergie finie.*

(14) Si  $G\mu(x) \geq Gv(x)$  dans  $X$  pour des mesures positives à support compact  $\mu, v$ , avec  $\mu$  d'énergie finie, alors  $v$  est d'énergie finie.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BRELOT, Lectures on potential theory. *Tata Inst. fund. Research*, Bombay (1960).
- [2] G. CHOQUET, L'intégrale d'énergie en théorie du potentiel. *Séminaire de la théorie du potentiel*, 3<sup>e</sup> année (1958-59), n° 3, p. 11.
- [3] R. DURIER, Principe des condensateurs pour un noyau dissymétrique. *Séminaire de la théorie du potentiel*, 10<sup>e</sup> année (1965-66), n° 9, p. 22.
- [4] B. FUGLEDE, Le théorème du minimax et la théorie fine du potentiel. *Ann. Inst. Fourier*, 15 (1965), 65-88.
- [5] M. KISHI, Maximum principles in the potential theory. *Nagoya Math. J.*, 23 (1963), 165-187.
- [6] M. KISHI, An existence theorem in potential theory. *Nagoya Math. J.*, 27 (1966), 133-137.
- [7] N. NINOMIYA, Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique. *J. Inst. Polyt. Osaka City Univ.*, 6 (1955), 147-179.

Manuscrit reçu le 21 octobre 1966.

Masanori KISHI,  
Institut de Mathématiques,  
Université de Nagoya,  
Nagoya (Japon)