ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JOSIANE LEHMANN-LEJEUNE

Intégrabilité des G-structures définies par une 1-forme 0-déformable à valeurs dans le fibré tangent

Annales de l'institut Fourier, tome 16, nº 2 (1966), p. 329-387
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_2_329_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
16, 2 (1966), 329-387.

INTÉGRABILITÉ DES G-STRUCTURES DÉFINIES PAR UNE 1-FORME 0-DÉFORMABLE A VALEURS DANS LE FIBRE TANGENT

par J. LEHMANN-LEJEUNE

Introduction.

Dans un récent article, (cf. [12]), E. T. Kobayashi considérait une 1-forme J sur une variété différentiable V, à valeurs dans le fibré tangent T(V) de V, et 0-déformable, c'est-à-dire pour laquelle il existe une matrice μ telle que, en tout point x de V, il existe un repère de l'espace tangent $T_x(V)$ à V en x, dans lequel l'expression de J soit μ; l'ensemble de ces repères, pour tous les x de V, détermine une G-structure; Kobayashi montrait que la nullité du tenseur de Nijenhuis :

$$\begin{aligned}(X, Y) \to T(X, Y) \\ = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] + J^2[X, Y],\end{aligned}$$

condition nécessaire d'intégrabilité pour la G-structure, était aussi une condition suffisante dans d'autres cas que le cas presque complexe, ($J^2 = - Id$); il donnait en même temps l'exemple d'une 1-forme J, 0-déformable, vérifiant

$$J^2 = 0, \qquad T(X, Y) = 0,$$

et déterminant une G-structure non intégrable, puisque le sous-fibré, Ker J, de T(V) n'était pas stable pour le crochet des champs de vecteurs.

Par ailleurs, dans sa thèse sur les G-structures, (cf. [1]), D. Bernard étudiait le tenseur de structure et montrait que sa nullité, équivalente à l'existence locale d'une G-connexion à torsion nulle, était une condition nécessaire d'intégrabilité. L'objet de ce travail est de montrer que, dans le cas d'une

1-forme 0-déformable, c'est aussi une condition suffisante. On verra que cette condition entraîne la nullité du tenseur de Nijenhuis, ainsi que d'autres conditions géométriques. Ainsi, pour ce type de G-structures, il est inutile de considérer, en ce qui concerne l'intégrabilité, les tenseurs de structure d'ordre supérieur, étudiés par V. W. Guillemin dans sa thèse, (cf. [7]).

CHAPITRE I. Notations et rappels sur les G-structures réelles..... 333
1. Intégrabilité.
G-structure définie par un tenseur.
2. G-connexion.
3. Tenseur de structure.

CHAPITRE II. G-structures définies par une 1-forme 0-déformable J.... 340
— Définition d'une 1-forme 0-déformable.
— Décomposition du fibré tangent en somme directe.

$$T(V) = \bigoplus_{j=1}^{g} \theta_j$$

θ_j, sous-fibré vectoriel associé soit à une valeur propre réelle, soit à un couple de valeurs propres imaginaires conjuguées.
— Bases adaptées. Forme canonique d'une matrice nilpotente (se déduisant de la forme canonique de Jordan par une permutation sur l'ordre des vecteurs de base).
— Définition des G_J-structures.
Caractérisation des G_J-connexions.

CHAPITRE III. Intégrabilité des G_J-structures..... 350
— Énoncés des théorèmes.
On suppose ensuite le tenseur de structure nul.

A. On montre que :
— le tenseur de Nijenhuis est nul;
— les fibrés $\theta_i \oplus \theta_j$ sont stables pour le crochet des champs de vecteurs;
— localement, on a une variété produit;
— on peut se ramener (cf. proposition III, 2) au cas où J a, soit une seule valeur propre réelle, soit un seul couple de valeurs propres imaginaires conjuguées, c'est-à-dire au cas où le polynôme minimal est :

$$p(\lambda)^{r_i+1},$$

$p(\lambda)$ irréductible sur les réels.

B. Degré $p(\lambda) = 1$.
La partie nilpotente N de J définit la même G-structure et on est ramené, dans ce cas, à montrer l'intégrabilité pour une 1-forme 0-déformable et nilpotente.

On montre qu'en plus de la nullité du tenseur de Nijenhuis associé à N, un certain nombre de sous-fibrés vectoriels du fibré tangent sont stables pour le crochet des champs de vecteurs (cf. proposition III, 3).

1. On en déduit l'existence de coordonnées d'un certain type.
   On démontre l'intégrabilité par récurrence : on suppose qu'il existe un système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$, au voisinage de tout point, qui traduise l'intégrabilité de N restreint à une variété intégrale de Im N. Le premier pas de cette récurrence est vérifié.
2. A tout système de coordonnées de ce dernier type, on associe un certain champ de repères adaptés.
3. A l'aide de la nullité du tenseur de Nijenhuis, pour ce champ de repères adaptés, on montre qu'on peut faire une hypothèse supplémentaire sur le système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$ du paragraphe 1.
4. On définit une hypothèse de récurrence pour le système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$ du paragraphe 1; le paragraphe 3 signifie que le premier pas de cette récurrence est vérifié. L'intégrabilité résultera de cette récurrence.
5. En supposant que le système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$ satisfait à l'hypothèse de récurrence du paragraphe 4, on déduit de la nullité du tenseur de Nijenhuis, pour le champ de repères adaptés correspondant, un certain nombre de relations.
6. On considère un nouveau système de coordonnées défini par un certain nombre de fonctions inconnues H des coordonnées $u_1, \ldots, u_n$. On montre que ce système de coordonnées satisfait à l'hypothèse de récurrence du paragraphe 4, pour un pas de plus, si les fonctions H sont solutions d'un certain nombre d'équations.
7. On montre par récurrence que ces équations ont des solutions, à l'aide des relations du paragraphe 5 et de la stabilité pour le crochet des champs de vecteurs des sous-fibrés vectoriels Ker N^s.

C. Degré de $p(\lambda) = 2$.

A l'aide de la partie complètement réductible S de J, on munit V d'une structure presque complexe, qui est intégrable; V est alors la variété réelle sous-jacente d'une variété complexe $\tilde{V}$. La partie nilpotente N de J induit sur $\tilde{V}$ une 1-forme nilpotente $\tilde{N}$ qui est holomorphe. Les mêmes calculs que dans le cas réel donne les théorèmes.

D. Dans ce paragraphe, on ne suppose plus que le tenseur de structure est nul, mais seulement que le tenseur de Nijenhuis est nul.

On montre alors que :

— la partie complètement réductible S de J définit une G_S-structure intégrable;

— si la partie nilpotente de J satisfait à certaines hypothèses, la G_J-structure est intégrable.

CHAPITRE PREMIER

NOTATIONS ET RAPPELS SUR LES G-STRUCTURES RÉELLES [1]

Toutes les variétés considérées sont supposées différentiables de classe C^∞, ainsi que tous les fibrés, champs de tenseurs et fonctions qui interviennent.

Soit V une variété de dimension n; on désignera par:

D(V) l'anneau des fonctions différentiables sur V à valeurs réelles,

T(V) le fibré tangent de V,

$T(V)^*$ le fibré dual,

E le fibré principal des repères linéaires de V, de groupe structural Gl (n, R).

$T_x(V)$ l'espace tangent à V en x.

1. Définitions.

Une G-structure sur V est définie par la donnée d'un sous-fibré principal P de E, de groupe structural G, sous-groupe de Gl (n, R).

On dit qu'une G-structure est intégrable, si, pour tout x de V, il existe un voisinage ouvert U de x, muni d'un système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$ tel que les repères naturels,

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}\right)_{x \in U},$$

définissent une section de P au-dessus de U.

Soit $\mathcal{R}$ une représentation linéaire de $Gl(n, R)$ dans un espace vectoriel M.

[1] Pour plus de détails sur les définitions et théorèmes de ce chapitre, voir D. Bernard [1].

Les sections du fibré vectoriel M[P], de fibre-type M, modelé sur P, sont en correspondance biunivoque avec les fonctions f sur P, à valeurs dans M, de type $\mathfrak{R}(G)$, (c'est-à-dire telles que $f(p.g) = \mathfrak{R}(g^{-1}).f(p)$, pour tout g de G et pour tout p de P).

On note $\tilde{\sigma}$ la fonction sur P, associée à la section σ, $\underline{M[P]}$ le D(V)-module des sections de M[P].

G opère sur son algèbre de Lie $\underline{G}$, sous-espace vectoriel de $R^{n*} \otimes R^n$, par la représentation adjointe, qui est la restriction à G de la représentation naturelle de $Gl(n, R)$ dans $R^{n*} \otimes R^n$; le fibré modelé $\underline{G}[P]$ est donc un sous-fibré vectoriel du fibré modelé $(R^{n*} \otimes R^n)[P]$, soit :

$$\underline{G}[P] \subset T(V)^* \otimes T(V). \tag{1}$$

On dit que la G-structure, d'espace de repères P, est « définie par un tenseur », σ, section du modelé M[E], s'il existe un élément u de M tel que P soit l'ensemble des repères p de E tels que :

$$\tilde{\sigma}(p) = u.$$

G est alors le groupe d'isotropie de u, c'est-à-dire l'ensemble des g de $Gl(n, R)$ tel que $\mathfrak{R}(g).u = u$.

2. G-connexions.

Une G-connexion est une connexion sur le fibré P.

Une G-connexion, de forme ω, s'étend de façon unique en une connexion sur E (connexion linéaire) et est canoniquement associée à une loi de dérivation covariante D sur les fibrés obtenus par modelage sur P :

$$\widetilde{D_X\sigma} = \overline{X}.\tilde{\sigma} + \tilde{\mathfrak{R}}(\omega(\overline{X})).\tilde{\sigma}, \tag{2}$$

où

X est un champ de vecteurs sur V,

$\overline{X}$ un champ de vecteurs sur P, dont la projection sur V est X,

$\tilde{\mathfrak{R}}$ la représentation de $\underline{G}$, induite par la représentation $\mathfrak{R}$ de G dans M,

σ une section du modelé M[P] de M sur P;

ou encore, ce qui est équivalent :

$$\widetilde{D_X\sigma} = X^*.\tilde{\sigma}, \tag{2'}$$

où X^* est le relèvement horizontal du champ de vecteurs X de V dans P.

Par convention, on identifiera toute G-connexion à son extension à E et on dira G-connexion indifféremment pour une G-connexion sur P ou la loi de dérivation associée.

Proposition I.1. — *Soit* D *une* G-*connexion*, h *une* 2-*forme sur* V *à valeurs dans* T(V). *La loi de dérivation :*

$$D'_X Y = D_X Y + h_X Y,$$

(X, Y *champs de vecteurs de* V), *est une* G-*connexion si et seulement si :*

$$h \in \underline{T(V)}^* \otimes \underline{G}[P]. \tag{3}$$

En effet, considérons 2 lois de dérivation D et D′, associées à 2 G-connexions, de forme ω et ω' respectivement. Pour tous les champs de vecteurs X, Y de V, on a :

$$D'_X Y - D_X Y = h_X Y,$$

où $X \to h_X$ est une 1-forme sur V à valeurs dans $T(V)^* \otimes T(V)$.

D'après (2) :

$$\widetilde{h_X Y} = (\omega' - \omega)(\tilde{X}).\tilde{Y},$$

donc $X \to h_X$ est la 1-forme sur V, qui est, en fait, à valeurs dans $\underline{G}[P]$ (cf. (1)), associée à la 1-forme $\omega' - \omega$ sur P à valeurs dans $\underline{G}$, de type adj. (G). (cf. A. Lichnérowicz [16]).

Inversement, si D est une loi de dérivation associée à une G-connexion, h un élément de $\underline{T(V)}^* \otimes \underline{G}[P]$, la loi de dérivation D′ définie par :

$$D'_X Y = D_X Y + h_X Y,$$

est associée à une G-connexion.

Cas d'une G-*structure définie par un tenseur* σ.

Théorème I, 1. — *Soit une* G-*structure sur* V *définie par un tenseur* σ. *Pour qu'une connexion linéaire soit l'extension*

à E *d'une* G-*connexion, il faut et il suffit que la dérivée covariante de* σ, *par rapport à tout champ de vecteurs de* V, *soit nulle.*

De (2′), on déduit que la fonction $\widetilde{D_X\sigma}$ est nulle sur P, donc sur E tout entier, puisque elle est de type $\mathfrak{R}$ (Gl(n, R)). D'où :

$$D_X\sigma = 0,$$

pour tout champ de vecteurs X.

Inversement, supposons $D_X\sigma = 0$ pour une certaine connexion linéaire.

De (2′), on en déduit que :

$$X^*.\tilde{\sigma} = 0,$$

pour tout champ projetable X^* de vecteurs horizontaux de E; donc, en particulier, tout vecteur horizontal en un point p de P est un vecteur tangent à P; par suite la connexion linéaire considérée est l'extension d'une G-connexion.

Si V est paracompacte, l'existence d'une G-connexion sur P est assurée; sinon, pour tout x de V, il existe un ouvert U contenant x et une G-connexion sur P/U.

3. Tenseur de structure.

Soient D et D′ deux G-connexions, T (resp. T′) la torsion de D (resp. D′) :

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$$

pour tous les champs de vecteurs X, Y de V.

$$T \in \Lambda^2 \underline{T(V)}^* \otimes \underline{T(V)} = \delta(\underline{T(V)}^* \otimes \underline{T(V)}^* \otimes \underline{T(V)}),$$

où δ est l'opérateur canonique d'antisymmétrisation.

On pose :

$$D'_X Y = D_X Y + h_X Y,$$

donc :

$$T'(X, Y) - T(X, Y) = h_X Y - h_Y X.$$

D'après (1) et la proposition I, 1 :

$$T' - T \in \delta(\underline{T(V)}^* \otimes \underline{G[P]}) \subset \delta(\underline{T(V)}^* \otimes \underline{T(V)}^* \otimes \underline{T(V)}).$$

Désignons par π la projection canonique de $\Lambda^2\,\underline{T(V)}^*\otimes\underline{T(V)}$ sur l'espace-quotient

$$\Lambda^2\underline{T(V)}^*\otimes\underline{T(V)}/\partial(\underline{T(V)}^*\otimes\underline{G}[P]).$$

$t_G = \pi T$ est donc indépendant de la G-connexion; t_G est appelé « tenseur de structure » (2).

Remarque 1. — Pour définir le tenseur de structure, il n'est pas nécessaire de supposer l'existence de G-connexions sur tout le fibré P : il suffit d'avoir un recouvrement de V par des ouverts U_i et des G-connexions sur les fibrés P/U_i, ce qui est toujours possible.

Inversement, soit :

$$\Sigma \in \Lambda^2\underline{T(V)}^*\otimes\underline{T(V)},$$

telle que :

$$\pi\Sigma = t_G.$$

Supposons qu'il existe une G-connexion D, sur P, de torsion T; donc :

$$\pi\Sigma = \pi T,$$

ce qui équivaut à :

$$\Sigma - T \in \partial(\underline{T(V)}^*\otimes\underline{G}[P]).$$

En particulier :

$$\Sigma - T \in \underline{T(V)}^*\otimes\underline{G}[P]).$$

Toutes les 2-formes Σ_1 sur V telles que :

$$\begin{cases}\Sigma_1 \in \underline{T(V)}^*\otimes\underline{G}[P],\\ \partial\Sigma_1 = \Sigma - T,\end{cases}$$

s'écrivent :

$$\Sigma_1 = \Sigma - T + S,$$

avec $S \in (\underline{T(V)}^*\otimes\underline{G}[P]) \cap \underline{S^2(V)}$, où $\underline{S^2(V)}$ désigne l'ensemble des 2-formes symmétriques sur V, à valeurs dans T(V).

(2) Dans la terminologie de D. Bernard [1], le tenseur de structure est la fonction sur P, $\tilde{t}_G$, à valeurs dans $\Lambda^2R^{n*}\otimes R^n/\partial(R^{n*}\otimes\underline{G})$, de type $\rho(G)$, où ρ est la représentation de G dans $\Lambda^2R^{n*}\otimes R^n/\partial(R^{n*}\otimes\underline{G})$, déduite canoniquement de la représentation naturelle de $Gl(n, R)$ dans $\Lambda^2R^{n*}\otimes R^n$.

D'après la proposition I, 1 :

$$D'_X Y = D_X Y + \frac{1}{2}(\Sigma - T + S)(X, Y),$$

définit, pour toute S de $(\underline{T(V)}^* \otimes \underline{G}[P]) \cap \underline{S^2(V)}$, une G-connexion, dont on vérifie facilement que la torsion est Σ.

Posons :

$$g^1 = (R^{n*} \otimes \underline{G}) \cap S^2(R^{n*})$$

où $S^2(R^{n*})$ désigne l'ensemble des 2 formes symmétriques sur R^n, à valeurs dans R^n.

D'après ce qui précède, si $g^1 = \{0\}$, il n'existe qu'une seule G-connexion dont la torsion soit Σ.

THÉORÈME I, 2. — 1. *Pour toute* G-*structure, on définit un élément* t_G *de*

$$\Lambda^2 \underline{T(V)}^* \otimes \underline{T(V)}/\partial(\underline{T(V)})^* \otimes \underline{G}[P]).$$

t_G *est le tenseur de structure.*

2. *Si* V *est paracompacte, pour qu'une* 2-*forme* Σ, *sur* V, *à valeurs dans* T(V), *soit la torsion d'une* G-*connexion, il faut et il suffit que :*

$$\pi\Sigma = t_G.$$

Dans le cas particulier où il existe, sur V, *un fibré vectoriel* W, *qui est le modelé sur* P *d'un supplémentaire de* $\partial(R^{n*} \otimes \underline{G})$ *dans* $\Lambda^2 R^{n*} \otimes R^n$, *invariant par la représentation naturelle de* G :

$$\Lambda^2 T(V)^* \otimes T(V) = \partial(T(V)^* \otimes \underline{G}[P]) \oplus W \quad \textit{(somme de Whitney)},$$

la torsion T *d'une* G-*connexion quelconque est égale à :*

$$T = T_1 + T_2, \qquad T_1 \in \partial(\underline{T(V)}^* \otimes \underline{G}[P]), \qquad T_2 \in \underline{W}.$$

T_2 *est indépendant de la* G-*connexion et* t_G *s'identifie canoniquement à* T_2.

Il existe une G-*connexion dont la torsion est exactement* T_2. *Si* $g^1 = \{0\}$, *cette* G-*connexion est unique.*

Remarque 2. — Si $g^1 = \{0\}$, sans qu'on ait besoin de supposer V paracompacte, il existe une unique G-connexion,

définie sur P tout entier, dont la torsion est égale au tenseur de structure dans les 2 cas suivants :

a) le tenseur de structure est nul.

b) il existe un fibré vectoriel W, modelé sur P, tel que :

$$\Lambda^2 T(V)^* \otimes T(V) = \partial(T(V)^* \otimes \underline{G}[P]) \oplus W.$$

En effet, on est assuré alors de l'existence sur V d'une 2-forme Σ à valeurs dans T(V) telle que $\pi\Sigma = t_G$.

Considérons un recouvrement de V par des U_i, tel qu'il existe une G-connexion sur P/U_i; il existe alors une G-connexion unique D^i sur P/U_i, pour tout i, dont la torsion soit égale à t_G/U_i. De plus :

$$D^i/U_i \cap U_j = D^j/U_i \cap U_j$$

d'où la G-connexion unique sur V tout entier.

Corollaire I,2. — *Pour qu'une* G-*structure admette localement une* G-*connexion à torsion nulle, il faut et il suffit que son tenseur de structure soit nul.*

Théorème I,3. — *Une* G-*structure intégrable a un tenseur de structure nul.* Considérons une G-structure intégrable, et, pour tout x de V, un ouvert U, contenant x, muni d'un système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$ tel que les repères naturels

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}\right)_{x \in U}$$

déterminent une section σ de P/U. Les espaces tangents à $\sigma(U)$ et les espaces qu'on en déduit par translation à droite, déterminent sur P/U les espaces horizontaux d'une G-connexion. La loi de dérivation associée, d'après (2′), satisfait à :

$$D_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j} = 0,$$

en tout point de U, pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

La torsion est donc nulle et le théorème I, 3 résulte du corollaire I, 2.

CHAPITRE II

G-STRUCTURES DÉFINIES PAR UNE I-FORME O-DÉFORMABLE

Une I-forme J sur V, à valeurs dans T(V), O-déformable, est un morphisme de T(V) dans T(V), pour lequel il existe une matrice μ, telle que, pour tout x de V, il existe un repère de l'espace tangent T_x en x à V, dans lequel l'expression de J_x soit μ.

Suivant E. T. Kobayashi [12], considérons la décomposition du polynôme minimal, $p(\lambda)$, de J_x, qui est à coefficients constants sur V :

$$[p_1(\lambda)]^{r_1^1+1}\ [p_2(\lambda)]^{r_1^2+2}\ p_3 \ldots [p_g(\lambda)]^{r_1^g+1},$$

où les $p_j(\lambda)$, $1 \leqslant j \leqslant g$, sont des polynômes en λ, irréductibles sur les réels, premiers deux à deux.

D'après N. Jacobson [11], il existe des polynômes en λ, $e_j(\lambda)$, $1 \leqslant j \leqslant g$, à coefficients constants (réels) sur V, tels que les endomorphismes de T(V), $e_j(J)$, forment un système de projecteurs :

$$\sum_{j=1}^{g} e_j(J) = \text{Identité},$$

$$[e_j(J)]^2 = e_j(J),$$

$$e_i(J).e_j(J) = 0, \qquad \text{pour} \qquad i \neq j,$$

et :

$$e_j(J_x)T_x(V) = \{X_x \in T_x(V),\ p_j(J_x)^{r_1^j+1}\ X_x = 0\}.$$

A chaque facteur irréductible $p_j(\lambda)$, on associe un sous-fibré vectoriel θ_j, de dimension [3] n_j de T(V) :

$$\theta_j = e_j(J).T(V).$$

[3] Par « dimension d'un fibré vectoriel », on entendra toujours la dimension des fibres.

On a :

$$T(V) = \bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant g} \theta_j,$$

$$n = \sum_{j=1}^{g} n_j.$$

On pose :

$$s_j = \sum_{i=1}^{j} n_j;$$

donc :

$$s_g = n.$$

Pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant g$, J/θ_j est un morphisme de θ_j dans lui-même; il en est de même pour tout H/θ_j, où H est un polynôme en J à coefficients réels.

Si $p_j(\lambda)$ est du 1° degré, J/θ_j admet une seule valeur propre réelle λ_j et l'endomorphisme de T(V), $N_j = J - \lambda_j I\, d_{T(V)}$, où $I\, d_{T(V)}$ désigne la 1-forme identité sur V, est régulier sur le sous-fibré vectoriel $\sum_{i=1,\, i \neq j}^{g} \theta_i$.

On a, en outre :

$$[N_j/\theta_j]^{r_1^j+1} = 0, \qquad [N_j/\theta_j]^{r_1^j} \neq 0.$$

Si $p_j(\lambda)$ est du 2^d degré, considérons le complexifié θ_j^c de θ_j; J/θ_j s'étend canoniquement à θ_j^c : c'est la restriction J^c/θ_j^c à θ_j^c de l'extension J^c de J au complexifié $T^c(V)$ de T(V) :

$$J_x^c(X_x + iY_x) = J_x X_x + iJ_x Y_x,$$

pour tous les vecteurs X_x et Y_x de T_x.

Soient $\sigma_j \pm i\tau_j$ les racines de $p_j(\lambda)$. Le polynôme minimal de J_x^c/θ_{jx}^c, qui est à coefficients constants (complexes) sur V, est alors :

$$[\lambda - (\sigma_j + i\tau_j)]^{r_1^j+1}\, [\lambda - (\sigma_j - i\tau_j)]^{r_1^j+1}.$$

D'après Jacobson [11], il existe des polynômes en λ, de degré $\leqslant 2r_1^j + 1$, $\varepsilon_j^k(\lambda)$, $1 \leqslant k \leqslant 2$, à coefficients complexes tels que les endomorphismes de θ_j^c, $\varepsilon_j^k(J^c)/\theta_j^c$, forment un système de projecteurs :

$$\varepsilon_j^1(J^c)/\theta_j^c + \varepsilon_j^2(J^c)/\theta_j^c = I\, d_{\theta_j^c},$$
$$[\varepsilon_j^k(J^c)]^2/\theta_j^c = \varepsilon_j^k(J^c)/\theta_j^c,$$
$$\varepsilon_j^1(J^c) \,.\, \varepsilon_j^2(J^c)/\theta_j^c = \varepsilon_j^2(J^c) \,.\, \varepsilon_j^1(J^c)/\theta_j^c = 0,$$

et :

$$\varepsilon_j^1(J_x^c)\theta_{jx}^c = \{X_x \in \theta_{jx}^c,\ [J_x^c - (\sigma_j + i\tau_j)I\, d_x]^{r_1^j+1} X_x = 0\},$$
$$\varepsilon_j^2(J_x^c)\theta_{jx}^c = \{X_x \in \theta_{jx}^c,\ [J_x^c - (\sigma_j - i\tau_j)I\, d_x]^{r_1^j+1} X_x = 0\}.$$

θ_j^c est somme directe des 2 fibrés vectoriels complexes, imaginaires conjugués θ_j^1 et θ_j^2, de dimension (complexe) n_j' $(2n_j' = n_j)$:

$$\theta_j^k = \varepsilon_j^k(J^c)\theta_j^c, \qquad k = 1,2.$$

Pour $k = 1,2$, J^c/θ_j^k est un endomorphisme de θ_j^k; il en est de même pour tout H/θ_j^k, où H est un polynôme en J^c à coefficients complexes.

Posons :

$$\varepsilon_j^k(J^c) = P_j^k(J^c) + iQ_j^k(J^c), \qquad k = 1,2,$$

où P_j^k et Q_j^k sont des polynômes en J^c à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2r_1 + 1$.

Pour tout vecteur Z de θ_{jx}^c, posons :

$$Z^k = \varepsilon_j^k(J_x^c)Z, \qquad k = 1,2.$$

Z s'écrit de manière unique

$$Z = Z^1 + Z^2, \quad (Z^k \in \theta_{jx}^k, \quad k = 1,2).$$

D'autre part :

$$\overline{Z} = \overline{Z}^1 + \overline{Z}^2, \quad (\overline{Z}^1 \in \theta_{jx}^2,\ \overline{Z}^2 \in \theta_{jx}^1).$$

Z réel, équivaut à $Z = \overline{Z}$, soit, encore, à :

$$\overline{Z}^1 = Z^2, \qquad \overline{Z}^2 = Z^1.$$

$\varepsilon_j^1(J_x^c)$ et $\varepsilon_j^2(J_x^c)$ transforment donc tout vecteur réel de θ_{jx}^c en 2 vecteurs imaginaires conjugués; par suite, $\varepsilon_j^1(J^c)$ et $\varepsilon_j^2(J^c)$ sont des polynômes en J^c, à coefficients imaginaires conjugués : en effet, à cause de leur degré, on a les égalités de polynômes :

$$P_j^1(J^c) = P_j^2(J^c),$$
$$Q_j^1(J^c) = -\,Q_j^2(J^c).$$

Posons :

$$N_j^1 = J^c - (\sigma_j + i\tau_j)I\, d_{T^c(V)},$$
$$N_j^2 = J^c - (\sigma_j - i\tau_j)I\, d_{T^c(V)}.$$

Le morphisme $N_j^1 . N_j^2$ est régulier sur le complexifié du fibré vectoriel $\sum_{i=1,\, i\neq j}^{g} \theta_i$; N_j^1 (resp. N_j^2) est régulier sur θ_j^2 (resp. θ_j^1).

On a en outre :

$$[N_j^1/\theta_j^1]^{r_1^j+1} = 0, \quad (\text{resp. } [N_j^2/\theta_j^2]^{r_1^j+1} = 0);$$
$$[N_j^1/\theta_j^1]^{r_1^j} \neq 0, \quad (\text{resp. } [N_j^2/\theta_j^2]^{r_1^j} \neq 0).$$

Le morphisme

$$N_j^1 . \varepsilon_j^1(J^c) + N_j^2 . \varepsilon_j^2(J^c)$$

coïncide, sur θ_j^c, avec le morphisme

$$J^c - \sigma_j I\, d_{T^c(V)} + 2\tau_j Q_j^1(J^c).$$

Posons :

$$N_j = J - \sigma_j I\, d_{T(V)} + 2\tau_j Q_j^1(J).$$

On a :

$$[N_j/\theta_j]^{r_1^j+1} = 0, \qquad [N_j/\theta_j]^{r_1^j} \neq 0.$$

Convenons que :
pour $1 \leqslant j \leqslant g_1$, $p_j(\lambda)$ est du 1° degré,
pour $g_1 + 1 \leqslant j \leqslant g$, $p_j(\lambda)$ est du 2° degré, avec $0 \leqslant g_1 \leqslant g$,
si 0 est valeur propre, $p_1(\lambda) = \lambda$.

Posons :

$$N = \sum_{j=1}^{g} N_j . e_j(J).$$

N, polynôme en J, à coefficients réels, est la partie nilpotente de J. Le polynôme en J, à coefficients réels $S = J - N$ est la partie complètement réductible (ou semi-simple) de J. On a aussi :

$$S = \sum_{j=1}^{g_1} \lambda_j e_j(J) + \sum_{j=g_1+1}^{g} [(\sigma_j + i\tau_j)\varepsilon_j^1(J) + (\sigma_j - i\tau_j)\, \varepsilon_j^2(J)]e_j(J),$$

donc :

$$p(S) = 0.$$

Bases adaptées.

Pour tout x de V, on va construire, dans un voisinage U de x, n_j champs de vecteurs de θ_j, linéairement indépendants sur l'anneau D(U) des fonctions différentiables sur U. Pour cela, désignons par :

θ le fibré vectoriel réel (resp. complexe) θ_j, (resp. θ_j^1) où

$$1 \leqslant j \leqslant g_1 \quad (\text{resp. } g_1 + 1 \leqslant j \leqslant g);$$

N l'endomorphisme de θ, N_j/θ_j (resp. N_j^1/θ_j^1),
r_1 l'entier r_1^j, $1 \leqslant j \leqslant g$.

Les champs de vecteurs et les dimensions de sous-fibrés vectoriels dont il sera question, seront réels (resp. complexes) si θ est associé à une valeur propre réelle (resp. complexe).

Pour tout r compris entre 0 et $r^1 + 1$, $N^r\,\theta$ est un sous-fibré vectoriel de θ et on a les inclusions suivantes :

$$(4)\quad N^0\,\theta \supset N\theta \supset N^2\theta \supset \cdots \supset N^r\theta \supset N^{r+1}\,\theta \supset \cdots \supset N^{r_1}\,\theta \supset N^{r_1+1}\theta = 0,$$

avec

$$0 \leqslant r \leqslant r_1\ (^4).$$

Soit p_1 la dimension du sous-fibré vectoriel $N^{r_1}\theta$.

Pour tout x de V, il existe un voisinage U de x et p_1 champs de vecteurs $Z_1, \ldots, Z_{p_1}$ qui forment une base de $N^{r_1}\theta/U$. En restreignant au besoin U, on peut trouver p_1 champs de vecteurs $Y_1, \ldots, Y_{p_1}$ dans U, tels que :

$$Z_i = N^{r_1}\,Y_i, \qquad (1 \leqslant i \leqslant p_1).$$

Lemme II, 1. — *La famille* $(N^r Y_i)_{\substack{0 \leqslant r \leqslant r_1 \\ 1 \leqslant i \leqslant p_1}}$ *est linéairement indépendante dans* U.

En effet, soit :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p_1 \\ 0 \leqslant r \leqslant r_1}} \alpha_i^r N^r Y_i = 0.$$

Supposons que les α_i^r ne sont pas tous nuls et soit r_0 la plus petite valeur de r pour laquelle il existe un indice i, $(1 \leqslant i \leqslant p_1)$ tel que $\alpha_i^{r_0} \neq 0$.

On a :

$$N^{r_1 - r_0}\Big(\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p_1 \\ 0 \leqslant r \leqslant r_1}} \alpha_i^r N^r Y_i\Big) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p_1 \\ r_0 \leqslant r \leqslant r_1}} \alpha_i^r N^{r_1 + r - r_0} Y_i$$
$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant p_1} \alpha_i^{r_0} N^{r_1} Y_i = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p_1} \alpha_i^{r_0} Z_i.$$

Or les Z_i sont linéairement indépendants; donc $\alpha_i^{r_0} = 0$, pour $1 \leqslant i \leqslant p_1$, ce qui est contraire à la définition de r_0.

Compte tenu de (4), on déduit du lemme II, 1 que la dimension de $N^r\theta$ $(0 \leqslant r \leqslant r_1)$ est supérieure ou égale à

$$(r_1 - r + 1)p_1.$$

(4) Par convention, pour tout morphisme H d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ dans lui-même, on pose : $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} = H^0$.

S'il n'y a pas toujours égalité, soit r_2 l'entier tel que :

$$\dim N^{r_2+1}\theta = (r_1 - r_2)p_1; \qquad \dim N^{r_2}\theta > (r_1 - r_2 + 1)p_1.$$

On pose :

$$p_2 = \dim N^{r_2}\theta - (r_1 + 1 - r_2)p_1.$$

p_2 est strictement positif.

En restreignant au besoin U, on peut trouver :

p_2 champs de vecteurs $Z_{p_1+1}, \ldots, Z_{p_1+p_2}$ dans U, qui, avec les $N^r Y_i$, $(1 \leqslant i \leqslant p_1,\ r_2 \leqslant r \leqslant r_1)$, forment une base de $N^{r_2}\theta/U$, et tels que $NZ_{p_1+i} = 0$, $(1 \leqslant i \leqslant p_2)$.

p_2 champs de vecteurs $Y_{p_1+1}, \ldots, Y_{p_1+p_2}$ dans U tels que

$$N^{r_2}Y_{p_1+i} = Z_{p_1+i}, \quad (1 \leqslant i \leqslant p_2).$$

Plus généralement, on suppose qu'on a défini $r_1, r_2, \ldots,$ jusqu'à $r_k (r_1 > r_2 > \cdots > r_k)$, $p_1, p_2, \ldots,$ jusqu'à p_k, et montré l'existence de $p_1 + \cdots + p_k$ champs de vecteurs Y_i

$$(1 \leqslant i \leqslant p_1 + \cdots + p_k)$$

dans U tels que :

a) $N^{r_h+1} Y_{p_1+\cdots+p_{h-1}+t} = 0 \quad (1 \leqslant t \leqslant p_h,\ 1 \leqslant h \leqslant k)$;

b) les $N^r Y_i$ (pour $0 \leqslant r \leqslant r_k$, $1 \leqslant i \leqslant p_1 + \cdots + p_k$, pour $r_{h+1} + 1 \leqslant r \leqslant r_h$, $1 \leqslant h \leqslant k - 1$, $1 \leqslant i \leqslant p_1 + \cdots + p_h$) sont linéairement indépendants.

c) les $N^{r_k} Y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p_1 + \cdots + p_k)$, et les $N^r Y_i$, $(r_{h+1} + 1 \leqslant r \leqslant r_h,\ 1 \leqslant h \leqslant k - 1,\ 1 \leqslant i \leqslant p_1 + \cdots + p_h)$ forment une base de $N^{r_k}\theta/U$.

De (4), on déduit que, pour $0 \leqslant r \leqslant r_k$:

$$\dim N^r \theta \geqslant (r_1 + 1 - r)p_1 + \cdots + (r_k + 1 - r)p_k.$$

S'il n'y a pas toujours égalité, soit r_{k+1} $(0 \leqslant r_{k+1} < r_k)$ l'entier tel que :

$$\dim N^{r_{k+1}+1}\theta = (r_1 - r_{k+1})p_1 + \cdots + (r_k - r_{k+1})p_k,$$
$$\dim N^{r_{k+1}}\theta > (r_1 - r_{k+1} + 1)p_1 + \cdots + (r_k - r_{k+1} + 1)p_k.$$

On pose :

$$p_{k+1} = \dim N^{r_{k+1}}\theta - (r_1 - r_{k+1} + 1)p_1 - \cdots - (r_k - r_{k+1} + 1)p_k;$$

p_{k+1} est strictement positif.

En restreignant au besoin U, on peut trouver :

p_{k+1} champs de vecteurs $Z_{p_1+\cdots+p_k+i}(1 \leqslant i \leqslant p_{k+1})$ dans U, qui, avec les $N^r Y_j$, (pour $r_{k+1} \leqslant r \leqslant r_k$,

$$1 \leqslant j \leqslant p_1 + \cdots + p_k;$$

pour $r_{h+1} + 1 \leqslant r \leqslant r_h$, $1 \leqslant h \leqslant k-1$,

$$1 \leqslant j \leqslant p_1 + \cdots + p_h),$$

forment une base de $N^{r_{k+1}}\theta/U$ et tels que :

$$NZ_{p_1+\cdots+p_k+i} = 0, \quad (1 \leqslant i \leqslant p_{k+1});$$

p_{k+1} champs de vecteurs $Y_{p_1+\cdots+p_k+i}$, $(1 \leqslant i \leqslant p_{k+1})$ dans U, tels que :

$$N^{r_{k+1}} Y_{p_1+\cdots+p_k+i} = Z_{p_1+\cdots+p_k+i}, \quad (1 \leqslant i \leqslant p_{k+1}).$$

Lemme II, 2. — *Les* $N^r Y_i$, (*pour* $0 \leqslant r \leqslant r_{k+1}$,

$$1 \leqslant i \leqslant p_1 + \cdots + p_{k+1},$$

pour $r_{h+1} + 1 \leqslant r \leqslant r_h$, $1 \leqslant h \leqslant k$,

$$1 \leqslant i \leqslant p_1 + \cdots + p_h)$$

sont linéairement indépendants dans U.

En effet, soit :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \\ 0 \leqslant r}} \alpha_i^r N^r Y_i = 0.$$

Supposons que les α_i^r ne sont pas tous nuls et soit r_0 la plus petite valeur de r pour laquelle il existe un indice i tel que $\alpha_i^{r_0} \neq 0$.

Si $r_0 < r_{k+1}$:

$$N^{r_{k+1}-r_0}\left(\sum_{\substack{1 \leqslant i \\ 0 \leqslant r}} \alpha_i^r N^r Y_i\right) = \sum_{r_0 \leqslant r} \alpha_i^r N^{r_{k+1}+r-r_0} Y_i = 0;$$

si $r_0 \geqslant r_{k+1}$:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \\ 0 \leqslant r}} \alpha_i^r N^r Y_i = \sum_{r_{k+1} \leqslant r_0 \leqslant r} \alpha_i^r N^r Y_i = 0.$$

Dans les 2 cas, on a une combinaison linéaire de champs de vecteurs d'une base, d'après l'hypothèse de récurrence et le choix des $Y_{p_1+\cdots+p_k+i}$, $(1 \leqslant i \leqslant p_{k+1})$.

Donc, en particulier :

$$\alpha_i^{r_0} = 0,$$

ce qui est contraire à la définition de r_0 ; d'où le lemme.

On définit ainsi par récurrence, une suite strictement décroissante d'entiers :

$$r_1 > r_2 > \cdots > r_k > r_{k+1} > \cdots > r_l \geqslant 0,$$

et des entiers strictement positifs $p_1, \ldots, p_l$. l est l'indice tel que, pour $0 \leqslant r \leqslant r_l$:

$$\dim \mathrm{N}^r\theta = (r_1 + 1 - r)p_1 + \cdots + (r_l + 1 - r)p_l.$$

Posons :

$$a(h) = p_1 + \cdots + p_h,$$
$$b(h) = (r_{h+1} + 1)p_{h+1} + \cdots + (r_1 + 1)p_1,$$

et

$$\mathrm{Y}_{ra(l)+i} = \mathrm{N}^r\mathrm{Y}_i,$$

où

$$0 \leqslant r \leqslant r_l, \qquad 1 \leqslant i \leqslant a(l);$$
$$\mathrm{Y}_{ra(k)+b(k)+i} = \mathrm{N}^r\mathrm{Y}_i,$$

où

$$r_{k+1} + 1 \leqslant r \leqslant r_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant l - 1,$$
$$1 \leqslant i \leqslant a(k).$$

Dans la base $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_{b(0)}$, N/U s'écrit :

$$(5) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} & p_l & & p_{l-1} & & p_{k+1} & & p_k & & & p_2 & & p_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ 4 \\ 5 \\ \\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1 & a(l) \\ 2 & r_l a(l) + a(l-1) \\ 3 & [r_{l-1} - (r_l + 1)]a(l-1) + a(l-2) \\ 4 & [r_k - (r_{k+1} + 1)]a(k) + a(k-1) \\ 5 & [r_{k-1} - (r_k + 1)]a(k-1) + a(k-2) \\ 6 & [r_1 - (r_2 + 1)]p_1, \end{array}$$

où 1 désigne des matrices unités, 0 des matrices nulles.

(5) n'est pas exactement la forme de Jordan de N, mais on obtient cette dernière en écrivant N dans la base obtenue à partir des $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_{b(0)}$, en effectuant une permutation convenable sur l'ordre de ces vecteurs.

On a les inclusions suivantes de fibrés vectoriels :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ker} N^{r_1+1} = N^0\theta &\supset \operatorname{Ker} N^{r_2+1} + N\theta \supset \cdots \supset \operatorname{Ker} N^{r_l+1} + N\theta \\
&\supset \cdots \supset \operatorname{Ker} N^{r_l+1} + N\theta \supset N\theta \supset \cdots \supset N^r\theta \\
&\supset (\operatorname{Ker} N^{r_2-r+1} \cap N^r\theta) + N^{r+1}\theta \\
&\supset \cdots \supset (\operatorname{Ker} N^{r_i-r+1} \cap N^r\theta) + N^{r+1}\theta \\
(6) \qquad &\supset \cdots \supset (\operatorname{Ker} N^{r_l-r+1} \cap N^r\theta) + N^{r+1}\theta \\
&\supset N^{r+1}\theta \supset \cdots \supset N^{r'}\theta \supset (\operatorname{Ker} N^{r_2-r'+1} \cap N^{r'}\theta) + N^{r'+1}\theta \\
&\supset \cdots \supset (\operatorname{Ker} N^{r_k-r'+1} \cap N^{r'}\theta) + N^{r'+1}\theta \\
&\supset \cdots \supset (\operatorname{Ker} N^{r_j-r'+1} \cap N^{r'}\theta) + N^{r'+1}\theta \\
&\supset N^{r'+1}\theta \supset \cdots \supset N^{r_2+1}\theta \supset \cdots \supset N^{r_2+r''}\theta \supset \cdots \supset N^{r_1}\theta
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{gathered}
0 \leqslant r \leqslant r_l, \qquad 2 \leqslant i \leqslant l, \\
r_{j+1} + 1 \leqslant r' \leqslant r_j, \qquad 2 \leqslant k \leqslant j \leqslant l-1, \\
1 \leqslant r'' \leqslant r_1 - r_2.
\end{gathered}
$$

En restreignant au besoin U, on construit un champ de repères de T(V) au-dessus de U de la manière suivante :

pour $1 \leqslant j \leqslant g_1$, on prend le champ de repères de θ_j, au-dessus de U, dont les champs de vecteurs de base sont :

$$X_{s_{j-1}+i} = Y_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n_j)$$

les Y_i étant les champs de vecteurs de θ précédemment déterminés ;

pour $g_1 + 1 \leqslant j \leqslant g$, considérons les champs de vecteurs $\overline{Y}_k$ de θ_j^2, imaginaires conjugués des Y_k de θ_j^1. Les Y_k et $\overline{Y}_k$ déterminent un champ de repères complexes de θ_j^c. Les champs de vecteurs sur U :

$$
\begin{aligned}
X_{s_{j-1}+k} &= Y_k + \overline{Y}_k, \qquad (1 \leqslant k \leqslant n'_j), \\
X_{s_{j-1}+n'_j+k} &= i(Y_k - \overline{Y}_k), \quad (1 \leqslant k \leqslant n'_j),
\end{aligned}
$$

déterminent un champ de repères réels de θ_j au-dessus de U.

Dans la base $X_1, X_2, \ldots, X_n$, J/U (resp. la partie complètement réductible S/U) s'écrit :

$$
(7) \qquad \begin{pmatrix}
M_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
0 & M_2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \ldots & M_j & \ldots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & M_g
\end{pmatrix},
$$

M_j matrice carrée d'ordre n_j ;

— pour $1 \leqslant j \leqslant g_1$:

$$M_j = \lambda_j 1 + N_j \quad (\text{resp. } \lambda_j 1)$$

où 1 désigne la matrice unité et N_j une matrice de la forme (5).

— pour $g_1 + 1 \leqslant j \leqslant g$:

$$M_j = \begin{pmatrix} \sigma_j 1 + N_j & -\tau_j 1 \\ \tau_j 1 & \sigma_j 1 + N_j \end{pmatrix}, \qquad \left(\text{resp.} \begin{pmatrix} \sigma_j 1 & -\tau_j 1 \\ \tau_j 1 & \sigma_j 1 \end{pmatrix}\right),$$

où 1 désigne la matrice unité d'ordre n'_j, N_j une matrice d'ordre n'_j de la forme (5).

Définition. — *On appelle « base adaptée » en x, toute base de* $T_x(V)$ *dans laquelle* J_x *s'écrit sous la forme* (7).

Considérons le sous-groupe G_J des matrices de Gl (n, R) qui commutent avec (7); il est fermé dans Gl (n, R); muni de la topologie induite par celle de Gl (n, R), il admet une unique structure de sous-groupe de Lie de Gl (n, R).

Soit P l'ensemble des bases adaptées en tous les points de V; on a vu que, pour tout x de V, il existait un voisinage U de x et une section différentiable de E/U à valeurs dans P. Puisque G_J est un sous-groupe de Lie topologique de Gl(n, R), on déduit de la proposition 1, 5, 2 de D. Bernard [1], que P est un sous-fibré principal différentiable de E et détermine une G_J-structure; c'est une G_J-structure définie par un tenseur : la section J du fibré vectoriel $T(V)^* \otimes T(V)$.

Les G_J-connexions D sont caractérisées, d'après le Théorème I. 1, par $D_X J = 0$ pour tout champ de vecteurs X, soit par $D_X JY = JD_X Y$ pour tous les champs de vecteurs X et Y.

La partie complètement réductible S, qui est un polynôme en J à coefficients réels est 0-déformable et définit sur V une G_S-structure; appelons P_S l'espace fibré des repères adaptés correspondant. On a :

$$P \subset P_S.$$

CHAPITRE III

INTÉGRABILITÉ DES G_J-STRUCTURES

Dans ce chapitre, on se propose de démontrer le

THÉORÈME III.1. — *Considérons la* G_J*-structure définie sur une variété* V *par la* 1*-forme* 0*-déformable* J; *pour qu'elle soit intégrable, il faut et il suffit que son tenseur de structure soit nul.*

D'après le corollaire I,2, ce théorème équivaut au

THÉORÈME III.1'. — *Pour que la* G_J*-structure soit intégrable, il faut et il suffit qu'il existe localement une* G_J*-connexion à torsion nulle.*

D'après le théorème I.3, on sait déjà que la condition est nécessaire.

Supposons désormais que le tenseur de structure est nul.

A

Pour tout x de V, il existe un voisinage U de x et une G_J-connexion D sur U, à torsion nulle :

$$D_X JY = JD_X Y, \tag{8}$$

$$[X, Y] = D_X Y - D_Y X, \tag{9}$$

pour tous les champs de vecteurs X et Y sur U.

On en déduit :

$$\begin{aligned}[J^s X, J^t Y] &= J^t D_{J^s X} Y - J^s D_{J^t Y} X \\ &= J^t(D_Y J^s X + [J^s X, Y]) - J^s(D_X J^t Y - [X, J^t Y]) \\ &= J^t[J^s X, Y] + J^s[X, J^t Y] - J^{s+t}(D_X Y - D_Y X),\end{aligned}$$

soit, pour tous les champs de vecteurs X et Y de V :

$$(10)\quad [J^sX, J^tY] = J^s[X, J^tY] + J^t[J^sX, Y] - J^{s+t}[X, Y].$$

En particulier, le tenseur T de Nijenhuis, défini par

$$T(X, Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] + J^2[X, Y]$$

et qui est une 2-forme sur V, à valeurs dans T(V), est nul [5].

De (10), on déduit, pour tous les polynômes P et Q en J à coefficients réels (donc constants sur V) :

$$(11)\quad \begin{aligned}&[P(X), Q(Y)]\\ &\quad = P([X, Q(Y)]) + Q([P(X), Y]) - P(Q([X, Y])).\end{aligned}$$

Revenons à la décomposition en somme directe de T(V), étudiée au chapitre II :

$$\begin{aligned} T(V) &= \theta_1 \oplus \theta_2 \oplus \cdots \oplus \theta_g,\\ \theta_j &= e_j(J)\, T(V),\\ n_j &= \dim \theta_j,\\ s_j &= n_1 + n_2 + \cdots + n_j. \end{aligned}$$

PROPOSITION III.1. — *Pour tout x de* V, *il existe un voisinage* U *de x, muni d'un système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$ tel que, pour toute valeur de la constante c_i*

$$(1 \leqslant i \leqslant s_{j-1} \qquad \text{et} \qquad s_j + 1 \leqslant i \leqslant n)$$

dans un certain intervalle de R,

$$u_1 = c_1, \ldots, u_{s_{j-1}} = c_{s_{j-1}}, \qquad u_{s_j+1} = c_{s_j+1}, \ldots, u_n = c_n,$$

est une variété intégrale V_j *de* θ_j. *Pour tout autre système de coordonnées $u'_1, \ldots, u'_n$ au voisinage de x, traduisant également la structure locale de produit, $u'_{s_{j-1}+k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n_j)$ est fonction des seules coordonnées $u_{s_{j-1}+1}, \ldots, u_{s_j}$.*

[5] En fait, on peut déduire la relation (10) de la nullité de T : on montre d'abord, par récurrence, que pour tout t :

$$[JX, J^{t+1}Y] = J[X, J^{t+1}Y] + J^{t+1}[JX, Y] - J^{t+2}[X, Y].$$

Ensuite, on suppose que la relation (10) est vraie pour s' avec $1 \leqslant s' \leqslant s - 1$ et pour tout t, pour s et t' quand $1 \leqslant t' \leqslant t - 1$; on en déduit :

$$[J^sX, J^tY] = J^s[X, J^tY] + J^t[J^sX, Y] - J^{s+t}[X, Y]$$

et finalement (10) est vraie pour tout s et pour tout t.

Localement une section du sous-fibré vectoriel θ_i (resp. θ_j) peut s'écrire :

$$X = e_i(J).X_1, \quad (\text{resp. } Y = e_j(J).Y_1).$$

De (11), on déduit que :

$$[X, Y] = e_i(J).[X_1, Y] + e_j(J).[X, Y_1] - e_i(J).e_j(J).[X_1, Y_1],$$

donc θ_i et $\theta_i \oplus \theta_j$, $(1 \leqslant i, j \leqslant g)$, sont complètement intégrables. Par suite, les fibrés vectoriels $\sum_{j=1}^{g-1} \theta_j$ et θ_g sont stables pour le crochet des champs de vecteurs, donc complètement intégrables et déterminent une structure presque produit intégrable :

pour tout x de V, il existe un voisinage U_1 de x dans V, muni d'un système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$ tel que, pour toute valeur de la constante c_i, $1 \leqslant i \leqslant s_{g-1}$ (resp. $s_{g-1} + 1 \leqslant i \leqslant n$), dans un certain intervalle de R,

$$u_1 = c_1, \ldots, u_{s_{g-1}} = c_{s_{g-1}}, (\text{resp. } u_{s_{g-1}+1} = c_{s_{g-1}+1}, \ldots, u_n = c_n),$$

est une variété intégrale V_g (resp. W_{g-1}), de θ_g, $\left(\text{resp. } \sum_{j=1}^{g-1} \theta_j\right)$.

Pour tout autre système de coordonnées $u'_1, \ldots, u'_n$ dans un voisinage de x, qui traduit la structure locale de produit, on a :

$$\begin{aligned} u'_i &= H_i(u_1, \ldots, u_{s_{g-1}}), & 1 \leqslant i \leqslant s_{g-1}, \\ u'_j &= H_j(u_{s_{g-1}+1}, \ldots, u_n), & s_{g-1} + 1 \leqslant j \leqslant n. \end{aligned}$$

De même, les fibrés $\sum_{j=1}^{g-2} \theta_j$ et θ_{g-1}, restreints à W_{g-1}, sont stables pour le crochet des champs de vecteurs, donc complètement intégrables et déterminent une structure presque produit intégrable sur W_{g-1} : on peut donc considérer que les coordonnées $u_1, \ldots, u_{s_{g-1}}$, au voisinage de x dans W_{g-1}, traduisent la structure locale de produit de W_{g-1}.

Finalement, de proche en proche, on obtient la proposition.

Considérons le système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$ de la proposition III.1 ; les champs de vecteurs

$$\frac{\partial}{\partial u_{s_{j-1}+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_{s_j}}$$

déterminent un champ de repères de θ_j/U.

Posons :

$$J\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{k=s_{j-1}+1}^{s_j} a_i^k \frac{\partial}{\partial u_k}, \quad (s_{j-1}+1 \leqslant i, k \leqslant s_j).$$

PROPOSITION III.2. — *Les fonctions a_i^k sur* U *sont indépendantes des u_p, pour $1 \leqslant p \leqslant s_{j-1}$ et $s_j + 1 \leqslant p \leqslant n$.*

En effet, soit J′ la 1-forme sur V à valeurs dans T(V), définie par le polynôme en J, à coefficients constants sur V :

$$J' = (J - \lambda I\, d_{T(V)}).e_j(J),$$

où λ est un réel quelconque qui n'est pas valeur propre de J.

D'après la définition des polynômes $e_j(J)$, (cf. chapitre II) :

$$\begin{aligned} J'/\theta_j &= (J - \lambda I\, d_{T(V)})/\theta_j, \\ J'/\theta_i &= 0, \qquad \text{pour} \qquad i \neq j. \end{aligned}$$

D'après (11), le tenseur de Nijenhuis $T_{J'}$, associé à J′, est nul. En particulier :

$$T_{J'}\left(\frac{\partial}{\partial u_p}, \frac{\partial}{\partial u_{s_{j-1}+q}}\right) = 0,$$

pour

$$1 \leqslant p \leqslant s_{j-1} \qquad \text{et} \qquad s_j + 1 \leqslant p \leqslant n, \qquad 1 \leqslant q \leqslant n_j.$$

Alors $\dfrac{\partial}{\partial u_p}$ est une section d'un θ_i/U avec $i \neq j$, $\dfrac{\partial}{\partial u_{s_{j-1}+q}}$ est une section de θ_j/U.

On a :

$$\begin{aligned} T_{J'}\left(\frac{\partial}{\partial u_p}, \frac{\partial}{\partial u_{s_{j-1}+q}}\right) &= \left[J'\frac{\partial}{\partial u_p}, J'\frac{\partial}{\partial u_{s_{j-1}+q}}\right] - J'\left[J'\frac{\partial}{\partial u_p}, \frac{\partial}{\partial u_{s_{j-1}+q}}\right] \\ &\quad - J'\left[\frac{\partial}{\partial u_p}, J'\frac{\partial}{\partial u_{s_{j-1}+q}}\right] + J'^2\left[\frac{\partial}{\partial u_p}, \frac{\partial}{\partial u_{s_{j-1}+q}}\right], \end{aligned}$$

et finalement :

$$-J'\left[\frac{\partial}{\partial u_p}, J'\frac{\partial}{\partial u_{s_{j-1}+q}}\right] = 0;$$

ce qui équivaut à :

$$J'\left[\frac{\partial}{\partial u_p}, J\frac{\partial}{\partial u_{s_{j-1}+q}}\right] = 0,$$

soit à :

$$\sum_{k=1}^{n_j} \frac{\partial a_{s_{j-1}+q}^{s_{j-1}+k}}{\partial u_p} J' \frac{\partial}{\partial u_{s_{j-1}+k}} = 0.$$

Comme λ n'est pas valeur propre de J, J'/θ_j est régulier en tous les points de V; les n_j champs de vecteurs de θ_j/U, $J' \dfrac{\partial}{\partial u_{s_{j-1}+k}}$ sont donc linéairement indépendants, et :

$$\frac{\partial a_{s_{j-1}+q}^{s_{j-1}+k}}{\partial u_p} = 0.$$

Remarque. — Pour tous les polynômes P en J à coefficients constants sur V, on déduit de (8) :

$$D_X P(Y) = P(D_X Y).$$

En particulier :

$$D_X(e_j(J)Y) = e_j(J) . D_X Y;$$

donc θ_j est stable par l'opérateur D_X, pour tout champ de vecteurs X de V.

Supposons maintenant qu'on sait démontrer que, lorsque J a une seule valeur propre réelle, ou bien un seul couple de valeurs propres imaginaires conjuguées, la G_J-structure est intégrable, dès que le tenseur de structure est nul. Alors, pour tout j, $(1 \leqslant j \leqslant g)$, si V_j est une variété intégrale de θ_j passant par x, la G_{J_j}-structure, définie sur V_j par la restriction J_j de J à V_j, admet, d'après la remarque précédente, une G_{J_j}-connexion à torsion nulle au voisinage de tout point de V_j, donc à un tenseur de structure nul, donc est intégrable, et il existe un voisinage U'_j de x dans V_j, muni d'un système de coordonnées $u'_{s_{j-1}+1}, \ldots, u'_{s_j}$ tel que les champs de vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial u'_{s_{j-1}+1}}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial u'_{s_j}}$ déterminent sur U'_j un champ de repères adaptés à la G_{J_j}-structure. D'après les propositions III.1 et III.2, $u'_1, \ldots, u'_n$ déterminent un système de coordonnées dans un voisinage de x dans V, tel que les champs de vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial u'_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial u'_n}$ déterminent un champ de repères adaptés à la G_J-structure dans ce voisinage.

Pour démontrer le théorème III,1, on est donc ramené au cas où le polynôme minimal de J est :

$$p(\lambda)^{r_1+1},$$

$p(\lambda)$, irréductible sur les réels.

B

degré de $p(\lambda) = 1$.

Alors :

$$J = \lambda_1 I\, d_{T(V)} + N,$$

λ_1 seule valeur propre de J,
N 1-forme 0-déformable et nilpotente.

N et J définissent la même G-structure; il suffit donc de démontrer que la G_N-structure définie par N est intégrable.

La G_J-connexion D à torsion nulle, déjà considérée, au voisinage de tout point x de V, est une G_N-connexion à torsion nulle; on a ainsi :

$$D_X NY = ND_X Y, \tag{12}$$

$$[N^s X, N^t Y] - N^s[X, N^t Y] - N^t[N^s X, Y] + N^{s+t}[X, Y] = 0. \tag{13}$$

En particulier, le tenseur T_N de Nijenhuis associé à N :

$$T_N(X, Y) = [NX, NY] - N[X, NY] - N[NX, Y] + N^2[X, Y],$$

est nul.

On a défini, au chapitre II, les nombres $r_1, \ldots, r_l, p_1, \ldots, p_l$, avec :

$$r_1 > r_2 > \cdots > r_{l-1} > r_l \geqslant 0, \qquad p_i > 0,$$

$$n = \sum_{i=1}^{l} (r_i + 1)p_i.$$

Pour des raisons de commodité, on suppose maintenant :

$$\begin{array}{lll} p_i > 0 & \text{pour} & 1 \leqslant i \leqslant l-2, \\ r_l = 0 & \text{avec} & p_l \geqslant 0, \\ r_{l-1} = 1 & \text{avec} & p_{l-1} \geqslant 0, \end{array}$$

ce qui ne modifie en rien la généralité.

On a vu qu'on avait les inclusions suivantes de sous-fibrés vectoriels de T(V) :

$$
\begin{aligned}
(14)\quad & \operatorname{Ker} N^{r_1+1} = \operatorname{Im} N^0 \supset \operatorname{Ker} N^{r_2+1} + \operatorname{Im} N \supset \cdots \\
& \supset \operatorname{Ker} N^{r_i+1} + \operatorname{Im} N \supset \cdots \supset \operatorname{Ker} N^2 + \operatorname{Im} N \supset \operatorname{Ker} N + \operatorname{Im} N \\
& \supset \operatorname{Im} N \supset \cdots \supset \operatorname{Im} N^{r'} \supset (\operatorname{Ker} N^{r_2-r'+1} \cap \operatorname{Im} N^{r'}) + \operatorname{Im} N^{r'+1} \\
& \supset \cdots \supset (\operatorname{Ker} N^{r_k-r'+1} \cap \operatorname{Im} N^{r'}) + \operatorname{Im} N^{r'+1} \\
& \supset \cdots \supset (\operatorname{Ker} N^{r_j-r'+1} \cap \operatorname{Im} N^{r'}) + \operatorname{Im} N^{r'+1} \\
& \supset \operatorname{Im} N^{r'+1} \supset \cdots \supset \operatorname{Im} N^{r_2+1} \supset \cdots \supset \operatorname{Im} N^{r_2+r''} \supset \cdots \supset \operatorname{Im} N^{r_1}
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{gathered}
2 \leqslant i \leqslant l - 1 \text{ (6)}, \\
r_{j+1} + 1 \leqslant r' \leqslant r_j, \qquad 2 \leqslant k \leqslant j \leqslant l - 1, \\
1 \leqslant r'' \leqslant r_1 - r_2.
\end{gathered}
$$

De (13), on déduit, pour $t = s$, que les sous-fibrés $\operatorname{Im} N^s$ sont stables pour le crochet des champs de vecteurs, donc complètement intégrables. On a la même propriété pour les sous-fibrés $\operatorname{Ker} N^s$; en effet, de (12) et de la nullité de la torsion de D, on déduit, pour tous les champs de vecteurs X et Y, au voisinage de tout point x de V :

$$N^s([X, Y]) = N^s(D_X Y - D_Y X) = D_X N^s Y - D_Y N^s X,$$

donc, si $N^s X = 0$, (resp. $N^s Y = 0$),

$$N^s([X, Y]) = 0.$$

Pour tous les champs de vecteurs X et Y, sections du sous-fibré

$$(\operatorname{Ker} N^{r_k-r'+1} \cap \operatorname{Im} N^{r'}) + \operatorname{Im} N^{r'+1}, \quad (0 \leqslant r' \leqslant r_j,\ 2 \leqslant k \leqslant l),$$

on a, au moins localement :

$$X = X_1 + X_2, \qquad Y = Y_1 + Y_2,$$

avec X_1 et Y_1, sections de $\operatorname{Ker} N^{r_k-r'+1} \cap \operatorname{Im} N^{r'}$,
X_2 et Y_2, sections de $\operatorname{Im} N^{r'+1}$.

$$[X, Y] = [X_1, Y_1] + [X_2, Y_1] + [X_1, Y_2] + [X_2, Y_2];$$

(6) Une relation, telle que $2 \leqslant i \leqslant l - 1$, ne suppose pas que $l - 1 \geqslant 2$; simplement si $l - 1 < 2$, l'ensemble des indices i tels que $2 \leqslant i \leqslant l - 1$ est vide. Cette remarque est valable pour toute la suite.

d'après ce qui précède :

$$[X_1, Y_1] \text{ est une section de } \operatorname{Ker} N^{r_k - r' + 1} \cap \operatorname{Im} N^{r'},$$
$$[X_2, Y_2] \text{ est une section de } \operatorname{Im} N^{r'+1}.$$

Montrons que $[X_1, Y_2]$ est une section de

$$(\operatorname{Ker} N^{r_k - r' + 1} \cap \operatorname{Im} N^{r'}) + \operatorname{Im} N^{r'+1}.$$

On a :

$$N^{r_k - r' + 1} X_1 = 0.$$

Localement, il existe des champs de vecteurs X_1' et Y_2' tels que :

$$N^{r'} X_1' = X_1 \quad (\text{donc } N^{r_k + 1} X_1' = 0),$$
$$N^{r'+1} Y_2' = Y_2.$$

D'après (13) :

$$[X_1, Y_2] = [N^{r'} X_1', N^{r'+1} Y_2'] = N^{r'}[X_1', N^{r'+1} Y_2'] - N^{2r'+1}[X_1', Y_2'] + N^{r'+1}[N^{r'} X_1', Y_2'],$$

et

$$N^{r_k - r' + 1}(N^{r'}[X_1', N^{r'+1} Y_2'] - N^{2r'+1}[X_1', Y_2']) = [N^{r_k+1} X_1', N^{r'+1} Y_2'] - N^{r'+1}[N^{r_k+1} X_1', Y_2'] = 0;$$

d'où :

Proposition III.3. — *La nullité du tenseur de structure entraîne que tous les sous-fibrés de* (14), *ainsi que les sous-fibrés* $\operatorname{Ker} N^s$, $(1 \leqslant s \leqslant r_1)$, *sont stables pour le crochet des champs de vecteurs, donc complètement intégrables et que le tenseur* T_N *de Nijenhuis est nul, soit :*

$$(15) \quad T_N(X, Y) = [NX, NY] - N[NX, Y] - N[X, NY] + N^2[X, Y] = 0.$$

On va montrer que ces conditions entraînent l'intégrabilité de la G_N-structure.

1. *Existence d'un certain type de coordonnées.*

Le théorème de Frobénius paramétré donne le

Lemme. — *Supposons donnés une variété* V *de dimension* $n = p_0 + p_1 + p_2$, 2 *sous-fibrés vectoriels de* $T(V)$, T_1 *et* T_2

tels que :

$$T(V) \supset T_1 \supset T_2, \qquad \dim T_2 = p_2, \qquad \dim T_1 = p_1 + p_2,$$

T_1 (*resp.* T_2) *est stable pour le crochet des champs de vecteurs.*

Alors, pour tout x de V, *il existe un voisinage* U *de x, muni d'un système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$ tel que, pour tout champ de vecteurs* X (*resp.* Y) *de* T_1/U, (*resp.* T_2/U), $u_1, \ldots, u_{p_0}$, (*resp.* $u_1, \ldots, u_{p_0}, u_{p_0+1}, \ldots, u_{p_0+p_1}$) *sont solutions de* $Xu = 0$, (*resp.* $Yu = 0$), *et toute solution de* $Xu = 0$ (*resp.* $Yu = 0$), *s'écrit* $H(u_1, \ldots, u_{p_0})$, (*resp.* $H(u_1, \ldots, u_{p_0}, u_{p_0+1}, \ldots, u_{p_0+p_1})$).

Ce lemme se généralise immédiatement à un nombre quelconque de sous-fibrés vectoriels. On l'applique aux sous-fibrés de (14). Donc, pour tout x de V, il existe un voisinage U de x, muni d'un système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$ tel que :

pour tout champ de vecteurs X de $(\operatorname{Ker} N^{r_i+1} + \operatorname{Im} N)/U$, $(2 \leqslant i \leqslant l)$,

$$\begin{gathered}(\text{resp. } Y \text{ de } \operatorname{Im} N^{r'}/U \ (r_{j+1} + 1 \leqslant r' \leqslant r_j, 1 \leqslant j \leqslant l - 1);\\ Z \text{ de } (\operatorname{Ker} N^{r_k - r' + 1} \cap \operatorname{Im} N^{r'}) + \operatorname{Im} N^{r'+1}/U\\ (r_{j+1} + 1 \leqslant r' \leqslant r_j, 2 \leqslant k \leqslant j \leqslant l - 1))\\ u_1, \ldots, u_{a(i-1)}, \ (\text{resp. } u_1, \ldots, u_{r'a(j)+b(j)};\\ u_1, \ldots, u_{r'a(j)+b(j)+a(k-1)}),\end{gathered}$$

sont solutions de $Xu = 0$, (resp. $Yu = 0$; $Zu = 0$), et toute solution de $Xu = 0$, (resp. $Yu = 0$; $Zu = 0$), s'écrit

$$\begin{gathered}H(u_1, \ldots, u_{a(i-1)}), \ (\text{resp. } H(u_1, \ldots, u_{r'a(j)+b(j)});\\ H(u_1, \ldots, u_{r'a(j)+b(j)+a(k-1)}).\end{gathered}$$

Posons

$$D(j) = \frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Les champs de vecteurs $D(a(i-1) + t)$, $D(r'a(j) + b(j) + t)$, $D(r'a(j) + b(j) + a(k-1) + t)$, $(t \geqslant 1)$, forment une base de, respectivement,

$$\begin{gathered}(\operatorname{Ker} N^{r_i+1} + \operatorname{Im} N)/U, \ \operatorname{Im} N^{r'}/U,\\ (\operatorname{Ker} N^{r_k - r' + 1} \cap \operatorname{Im} N^{r'}) + \operatorname{Im} N^{r'+1}/U.\end{gathered}$$

Désormais, tous les systèmes de coordonnées considérés seront de ce type.

On va démontrer l'intégrabilité par récurrence sur r_1.

On suppose que le système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$ satisfait à :

$$(16)\quad \begin{cases} \mathrm{ND}(r_i a(i) + b(i) + a(i-1) + k) = 0, \\ \qquad\qquad (1 \leqslant i \leqslant l-1,\ 1 \leqslant k \leqslant p_i), \\ \mathrm{ND}(ra(i) + b(i) + a(j-1) + k) \\ \qquad\qquad = \mathrm{D}((r+1)a(i) + b(i) + a(j-1) + k), \\ \qquad (1 \leqslant i \leqslant l-1,\quad 1 \leqslant k \leqslant p_j,\quad r_{i+1} < r \leqslant r_i \\ \text{si} \qquad 1 \leqslant j < i;\quad r_{i+1} < r < r_i \quad \text{si} \quad j = i). \end{cases}$$

L'hypothèse de récurrence équivaut à l'intégrabilité pour N restreint à une valeur intégrale de Im N; elle est trivialement vérifiée pour $r_1 = 1$ (alors $l = 2$, $p_1 = p_{l-1} > 0$, $p_l \geqslant 0$).

2. *A tout système de coordonnées satisfaisant* (16), *on associe un certain champ de repères adaptés.*

Parmi les champs de vecteurs de base, il y aura les

$$\mathrm{D}(a(l) + t), \quad t \geqslant 1,$$

sections de Im N/U. D'autre part, puisque

$$\mathrm{D}(a(i-1) + j), \quad 1 \leqslant j \leqslant p_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant l,$$

est un champ de vecteurs de $(\mathrm{Ker}\, \mathrm{N}^{r_i+1} + \mathrm{Im}\, \mathrm{N})/\mathrm{U}$,

$$\mathrm{ND}(a(i-1) + j)$$

est un champ de vecteurs de $(\mathrm{Ker}\, \mathrm{N}^{r_i} \cap \mathrm{Im}\, \mathrm{N}) + \mathrm{Im}\, \mathrm{N}^2/\mathrm{U}$, et on peut poser :

$$\mathrm{ND}(a(l-1) + j) = -\sum_{s \geqslant 1} \alpha^{a(l)+s}_{a(l-1)+j}\, \mathrm{ND}(a(l) + s), \ (1 \leqslant j \leqslant p_l),$$

pour $s \geqslant 1$ tel que $\mathrm{ND}(a(l) + s) \neq 0$.

$$\mathrm{ND}(a(i-1) + j) = \sum_{s \geqslant 1} \beta^{a(l)+a(i-1)+s}_{a(i-1)+j}\, \mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + s),$$
$$(1 \leqslant j \leqslant p_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant l-1).$$

Les p_l champs de vecteurs définis par :

$$\mathrm{X}_{a(l-1)+j} = \mathrm{D}(a(l-1) + j) + \sum_{s \geqslant 1} \alpha^{a(l)+s}_{a(l-1)+j}\, \mathrm{D}(a(l) + s),$$
$$(1 \leqslant j \leqslant p_l),$$

satisfont à $NX_{a(l-1)+j} = 0$. Avec les

$$D(r_i a(i) + b(i) + a(i-1) + k),$$
$$1 \leqslant i \leqslant l-1, \quad 1 \leqslant k \leqslant p_i,$$

ils déterminent un champ de repères de Ker N/U.

Il existe p_i champs de vecteurs $X_{a(i-1)}$,

$$(1 \leqslant i \leqslant l-1, \quad 1 \leqslant j \leqslant p_i),$$

tels que :

$$NX_{a(i-1)+j} = D(a(l) + a(i-1) + j).$$

On peut supposer que, dans le champ de repères de T(V)/U, $D(k)$, $(1 \leqslant k \leqslant a(l-1))$, $X_{a(l-1)+j}$, $(1 \leqslant j \leqslant p_l)$, $D(a(l)+s)$, $(s \geqslant 1)$, les composantes de $X_{a(i-1)+j}$ sur Ker N/U sont nulles et poser :

$$X_{a(i-1)+j} = \sum_{k=1}^{p_i+\cdots+p_{l-1}} \alpha_{a(i-1)+j}^{a(i-1)+k} D(a(i-1)+k) + \sum_{s \geqslant 1} \alpha_{a(i-1)+j}^{a(l)+s} D(a(l)+s).$$

Les α et β sont liés par un certain nombre de relations :

$$(17) \quad \sum_{k=1}^{p_i} \alpha_{a(i-1)+j}^{a(i-1)+k} \beta_{a(i-1)+k}^{a(l)+a(i-1)+s} = \delta_j^s,$$
$$(1 \leqslant j, \quad s \leqslant p_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant l-1).$$

$$(18) \quad \sum_{h=i}^{t} \left(\sum_{k=1}^{p_h} \alpha_{a(i-1)+j}^{a(h-1)+k} \beta_{a(h-1)+k}^{a(l)+a(t-1)+s} \right) = 0$$
$$(1 \leqslant s \leqslant p_t, \ 1 \leqslant i < t \leqslant l-1),$$

$$(19) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=i}^{l-1} \left(\sum_{k=1}^{p_h} \alpha_{a(i-1)+j}^{a(h-1)+k} \beta_{a(h-1)+k}^{(r+1)a(q)+b(q)+a(t-1)+s} \right) + \alpha_{a(i-1)+j}^{ra(q)+b(q)+a(t-1)+s} = 0, \\ \qquad (1 \leqslant i \leqslant l-1), \ 1 \leqslant s \leqslant p_t, \quad r_{q+1} < r \leqslant r_q \\ \text{si} \quad 1 \leqslant t < q; \\ \qquad\qquad r_{q+1} < r < r_q \quad \text{si} \quad t = q). \end{cases}$$

Les champs de vecteurs X_t, $(1 \leqslant t \leqslant a(l))$, $D(a(l)+s)$, $(s \geqslant 1)$, déterminent sur U un champ de repères adaptés.

Remarques.

(i) $\alpha_t^{r_i a(i)+b(i)+a(i-1)+k} = 0,$
$$(1 \leqslant k \leqslant p_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant l-1, \quad 1 \leqslant t \leqslant a(l)),$$

et on peut considérer qu'on a défini :

$$\alpha_t^{a(l-1)+k} = 0, \quad (1 \leqslant t \leqslant a(l-1), \quad 1 \leqslant k \leqslant p_l).$$

$$\text{(ii)} \quad \mathrm{N}^{r_i+1} \mathrm{X}_{a(i-1)+j} = 0, \quad (1 \leqslant j \leqslant p_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant l).$$

3. *On montre qu'on peut faire une hypothèse supplémentaire sur le système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$ du paragraphe I.*

On a, pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant l-1$, $1 \leqslant k \leqslant p_i$, $1 \leqslant h \leqslant p_j$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}_{\mathrm{N}}(\mathrm{X}_{a(i-1)+k}, \mathrm{X}_{a(j-1)+h}) \\
&= -\mathrm{N}[\mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k), \mathrm{X}_{a(j-1)+h}] \\
&- \mathrm{N}[\mathrm{X}_{a(i-1)+k}, \mathrm{D}(a(l)+a(j-1)+h)] + \mathrm{N}^2[\mathrm{X}_{a(i-1)+k}, \mathrm{X}_{a(j-1)+h}] \\
&= \sum_{s=1}^{p_i+\cdots+p_{j-1}} \mathrm{D}(a(l)+a(j-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(i-1)+s} \mathrm{ND}(a(i-1)+s) \\
&+ \sum_{s\geqslant 1} (\mathrm{D}(a(l)+a(j-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(j-1)+s} \\
&\qquad - \mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k).\alpha_{a(j-1)+h}^{a(j-1)+s}) \ \mathrm{ND}(a(j-1)+s) \\
&- \sum_{\substack{t=1\\ s\geqslant 1}}^{p_i+\cdots+p_{j-1}} \alpha_{a(j-1)+h}^{a(j-1)+s} \mathrm{D}(a(j-1)+s).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(i-1)+t} \mathrm{N}^2\mathrm{D}(a(i-1)+t) \\
&+ \sum_{t\geqslant 1} \Big(\sum_{s\geqslant 1} \alpha_{a(i-1)+k}^{a(i-1)+s} \mathrm{D}(a(i-1)+s).\alpha_{a(j-1)+h}^{a(j-1)+t} \\
&- \sum_{s\geqslant 1} \alpha_{a(j-1)+h}^{a(j-1)+s} \mathrm{D}(a(j-1)+s).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(j-1)+t}\Big) \mathrm{N}^2\mathrm{D}(a(j-1)+t) = 0.
\end{aligned}$$

On a, pour

$$\begin{gathered}
1 \leqslant i \leqslant l, \quad 1 \leqslant k \leqslant p_i, \quad 1 \leqslant h \leqslant p_t, \\
r_{j+1} < r \leqslant r_j \quad \text{si} \quad 1 \leqslant t < j, \\
r_{j+1} < r < r_j \quad \text{si } t = j :
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}_{\mathrm{N}}(\mathrm{X}_{a(i-1)+k}, \mathrm{D}(ra(j)+b(j)+a(t-1)+h)) \\
&= -\mathrm{N}[\mathrm{X}_{a(i-1)+k}, \mathrm{D}((r+1)a(j)+b(j)+a(t-1)+h)] \\
&+ \mathrm{N}^2[\mathrm{X}_{a(i-1)+k}, \mathrm{D}(ra(j)+b(j)+a(t-1)+h)] \\
&= \sum_{s\geqslant 1} \mathrm{D}((r+1)a(j)+b(j)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(i-1)+s} \\
&\qquad\qquad \mathrm{ND}(a(i-1)+s) \\
&- \sum_{s\geqslant 1} \mathrm{D}(ra(j)+b(j)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+h}^{a(i-1)+s} \\
&\qquad\qquad \mathrm{N}^2\mathrm{D}(a(i-1)+s) = 0.
\end{aligned}$$

De ces égalités, on déduit, en particulier, d'après (17),

pour $1 \leqslant t \leqslant p_{l-1}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant l-1$,

$$1 \leqslant k \leqslant p_i, \quad 1 \leqslant h \leqslant p_j, \quad s \geqslant 1:$$

$$\mathrm{D}(a(l) + a(j-1) + h) . \alpha^{a(l-2)+t}_{a(i-1)+k} = \mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k) . \alpha^{a(l-2)+t}_{a(j-1)+h},$$

$$\mathrm{D}(a(l) + a(l-1) + s) . \alpha^{a(l-2)+t}_{a(i-1)+k} = 0.$$

Il existe donc des fonctions $\mathrm{G}_{a(l)+a(l-2)+t}(u_1, \ldots, u_{a(l)+a(l-1)})$ définies dans un voisinage de x, telles que :

$$(20) \quad \mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k) . \mathrm{G}_{a(l)+a(l-2)+t} = \alpha^{a(l-2)+t}_{a(i-1)+k},$$
$$(1 \leqslant t \leqslant p_{l-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant p_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant l-1).$$

Considérons le changement de coordonnées :

$$u'_{a(l)+a(l-2)+t} = \mathrm{G}_{a(l)+a(l-2)+t}(u_1, \ldots, u_{a(l)+a(l-1)}), \quad (1 \leqslant t \leqslant p_{l-1}).$$

$u'_i = u_i$ pour tous les autres indices.

Posons $\mathrm{D}'(q) = \dfrac{\partial}{\partial u'_q}$. On a :

$$\mathrm{D}(q) = \mathrm{D}'(q) + \sum_{t=1}^{p_{l-1}} \mathrm{D}(q) . \mathrm{G}_{a(l)+a(l-2)+t} \; \mathrm{D}'(a(l) + a(l-2) + t)$$

pour

$$1 \leqslant q \leqslant a(l) + a(l-2),$$

$$\mathrm{D}(a(l) + a(l-2) + s) = \sum_{t=1}^{p_{l-1}} \mathrm{D}(a(l) + a(l-2) + s) . \mathrm{G}_{a(l)+a(l-2)+t}$$
$$\mathrm{D}'(a(l) + a(l-2) + t), \quad (1 \leqslant s \leqslant p_{l-1}),$$
$$\mathrm{D}(a(l) + a(l-1) + s) = \mathrm{D}'(a(l) + a(l-1) + s), \quad (s \geqslant 1).$$

De (17) et (20) pour $i = l-1$, on déduit :

$$\mathrm{ND}'(a(l) + a(l-2) + t) = 0, \quad (1 \leqslant t \leqslant p_{l-1}).$$

Les coordonnées ont donc les mêmes propriétés, (cf. (16)), que les coordonnées u_i.

De (17) et (20), pour $i = l-1$, on déduit encore, pour $1 \leqslant j \leqslant p_{l-1}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{ND}(a(l-2) + j) &= \mathrm{ND}'(a(l-2) + j) \\ &= \sum_{t,s=1}^{p_{l-1}} \beta^{a(l)+a(l-2)+s}_{a(l-2)+j} \; \alpha^{a(l-2)+t}_{a(l-2)+s} \; \mathrm{D}'(a(l) + a(l-2) + t) \\ &\quad + \sum_{s \geqslant 1} \beta^{a(l)+a(l-1)+s}_{a(l-2)+j} \; \mathrm{D}'(a(l) + a(l-1) + s),\end{aligned}$$

soit :

$$\mathrm{ND}'(a(l-2)+j) = \mathrm{D}'(a(l)+a(l-2)+j) + \sum_{s\geqslant 1} \beta^{a(l)+a(l-1)+s}_{a(l-2)+j}\, \mathrm{D}'(a(l)+a(l-1)+s).$$

D'autre part, pour $1 \leqslant i \leqslant l-2$, $1 \leqslant j \leqslant p_i$, on a, d'après (20) :

$$\begin{aligned}\mathrm{NX}_{a(i-1)+j} &= \sum_{k=1}^{p_i+\cdots+p_{l-2}} \alpha^{a(i-1)+k}_{a(i-1)+j}\, \mathrm{ND}'(a(i-1)+k)\\ &+ \sum_{s=1}^{p_{l-1}} \alpha^{a(l-2)+s}_{a(i-1)+j}\, (\mathrm{D}'(a(l)+a(l-2)+s)\\ &\qquad + \sum_{t\geqslant 1} \beta^{a(l)+a(l-1)+t}_{a(l-2)+s}\, \mathrm{D}'(a(l)+a(l-1)+t))\\ &+ \sum_{s\geqslant 1} \alpha^{a(l)+s}_{a(i-1)+j}\, \mathrm{ND}'(a(l)+s)\\ &= \mathrm{D}'(a(l)+a(i-1)+j) + \sum_{t=1}^{p_{l-1}} \alpha^{a(l-2)+t}_{a(i-1)+j}\, \mathrm{D}'(a(l)+a(l-2)+t).\end{aligned}$$

(17) implique que la matrice

$$(\alpha^{a(i-1)+k}_{a(i-1)+j}),\ (1 \leqslant i \leqslant l-1,\ 1 \leqslant j, k \leqslant p_i)$$

est régulière; des égalités précédentes, on déduit donc, tout d'abord pour $i = l-2$, puis successivement par récurrence, pour $i = l-3, \ldots, 1$:

$$\beta'^{a(l)+a(l-2)+t}_{a(i-1)+k} = 0, \quad (1 \leqslant k \leqslant p_i,\ 1 \leqslant t \leqslant p_{l-1}),$$

où :

$$\mathrm{ND}'(a(i-1)+k) = \sum_{s\geqslant 1} \beta'^{a(l)+a(i-1)+s}_{a(i-1)+k}\, \mathrm{D}'(a(l)+a(i-1)+s),$$
$$(1 \leqslant i \leqslant l-2, \quad 1 \leqslant k \leqslant p_i).$$

De (17) et (18), on déduit que, pour le champ de repères adaptés associé aux coordonnées u'_i (coefficients α'), on a :

$$\begin{aligned}\alpha'^{a(l-2)+t}_{a(l-2)+i} &= \delta^t_i, \quad (1 \leqslant i, t \leqslant p_{l-1}),\\ \alpha'^{a(l-2)+t}_{j} &= 0, \quad (1 \leqslant j \leqslant a(l-2),\ 1 \leqslant t \leqslant p_{l-1}).\end{aligned}$$

Remarque. — Si $r_1 = 1$, ($l = 2$, $p_l \geqslant 0$, $p_1 = p_{l-1} \geqslant 0$), le théorème est démontré.

4. Supposons maintenant qu'on a montré l'existence, au voisinage de x, d'un système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$

vérifiant (16) et tel que, de plus :

$$
(21)\quad \begin{cases}
\left.\begin{array}{l}\beta^{a(l)+a(h)+k}_{a(h)+j} = \delta^k_j \\ \beta^{a(l)+a(h+1)+t}_{a(h)+j} = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\delta^k_j \text{ symbole de Kronecker,} \\ 1 \leqslant j,\ k \leqslant p_{h+1},\quad q \leqslant h \leqslant l-2, \\ \qquad 1 \leqslant t \leqslant p_{h+2} + \cdots + p_{l-2},\end{array} \\
\beta^{a(l)+a(q)+t}_i = 0, \\
\qquad (1 \leqslant i \leqslant a(q),\quad 1 \leqslant t \leqslant p_{q+1} + \cdots + p_{l-1}), \\
\beta^{(r+1)a(k)+b(k)+a(q)+t}_i = 0, \\
\qquad (1 \leqslant i \leqslant a(l-1),\ 1 \leqslant t \leqslant p_{q+1} + \cdots + p_k \\
\text{si } 0 \leqslant r_{k+1} < r < r_k \leqslant r_{q+1}, \\
\qquad\qquad 1 \leqslant t \leqslant p_{q+1} + \cdots + p_{k-1} \quad \text{si} \\
\qquad\qquad\qquad 0 \leqslant r_{k+1} < r = r_k \leqslant r_{q+1}).
\end{cases}
$$

$$
(22)\quad \begin{cases}
\alpha^{a(h)+k}_{a(h)+j} = \delta^k_j, \qquad 1 \leqslant j, k \leqslant p_{h+1},\ q \leqslant h \leqslant l-2, \\
\alpha^{a(h+1)+t}_{a(h)+j} = 0, \quad 1 \leqslant t \leqslant p_{h+2} + \cdots + p_l. \\
\alpha^{a(q)+t}_i = 0, \qquad (1 \leqslant i \leqslant a(q),\ 1 \leqslant t \leqslant p_{q+1} + \cdots + p_l), \\
\alpha^{ra(k)+b(k)+a(q)+t}_i = 0, \\
\qquad\qquad (1 \leqslant t \leqslant p_{q+1} + \cdots + p_k, 1 \leqslant i \leqslant a(l), \\
\qquad\qquad\qquad 0 \leqslant r_{k+1} < r \leqslant r_k \leqslant r_{q+1}).
\end{cases}
$$

On va montrer l'existence, au voisinage de x, d'un système de coordonnées $u'_1, \ldots, u'_n$ vérifiant (16) et tel que les β' et α' correspondants vérifient les ensembles de relations (21) et (22) où q est remplacé par $q - 1$. Alors, puisqu'on a vu que l'hypothèse de récurrence était vérifiée pour $q = l - 2$, on sera assuré de l'existence, au voisinage de x, d'un système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$ vérifiant (16), et (21) et (22) pour $q = 0$, et dans ce système de coordonnées, N s'écrira sous sa forme canonique (5); d'où le théorème.

5. Sous les hypothèses du paragraphe précédent (4), on va déduire de la nullité du tenseur de Nijenhuis T_N, en particulier pour les champs de vecteurs de base du champ de repères adaptés précédemment défini, des relations ne faisant intervenir que les coefficients α (et aucun coefficient β), ce qui sera possible parce que $q \leqslant l - 2$.

$$
\begin{aligned}
&T_N(X_j, D(r_i a(i) + b(i) + a(i-1) + k) \\
&\qquad = N^2[X_j, D(r_i a(i) + b(i) + a(i-1) + k] = 0, \\
&\qquad (1 \leqslant k \leqslant p_i,\quad 1 \leqslant i \leqslant l-1,\quad 1 \leqslant j \leqslant a(l)).
\end{aligned}
$$

Donc :

$$(23)\quad \begin{aligned} &\sum_{t\geqslant 1} \mathrm{D}(r_i a(i) + b(i) + a(i-1) + k).\alpha_j^{a(l)+t}\mathrm{N}^2\mathrm{D}(a(l)+t) \\ &+ \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si} \quad a(q)+1 \leqslant j \leqslant a(l), \\ \sum\limits_{h=1}^{a(q)} \mathrm{D}(r_i a(i) + b(i) + a(i-1) + k).\alpha_j^h \mathrm{N}^2\mathrm{D}(h) \\ \qquad\qquad \text{si} \quad 1 \leqslant j \leqslant a(q), \end{array} \right\} = 0. \end{aligned}$$

De $\mathrm{T}_{\mathrm{N}}(\mathrm{X}_{a(h)+j},\ \mathrm{D}(ra(i) + b(i) + a(t-1) + k)) = 0,$

$(q \leqslant h \leqslant l-1,\quad 1 \leqslant j \leqslant p_{h+1},\quad 1 \leqslant k \leqslant p_t,\quad 1 \leqslant t \leqslant i \leqslant l-1$ pour $r_{i+1} < r < r_i$, $1 \leqslant t < i \leqslant l-1$ pour $r = r_i$), (cf. p. 361), on déduit, compte tenu de (22) :

$$(24)\quad \mathrm{D}((r+1)a(i) + b(i) + a(t-1) + k).\alpha_{a(h)+j}^{a(l)+s} = 0, \quad (1 \leqslant s \leqslant a(q)).$$

$$(25)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{D}((r+1)a(i) + b(i) + a(t-1) + k).\alpha_{a(h)+j}^{(r'+1)a(n)+b(n)+s} \\ \qquad = \mathrm{D}(ra(i) + b(i) + a(t-1) + k).\alpha_{a(h)+j}^{r'a(n)+b(n)+s}, \\ (1 \leqslant s \leqslant a(q),\quad 1 \leqslant r' \leqslant r_q - 2,\quad q \leqslant n \leqslant l-1). \end{array} \right.$$

De $\mathrm{T}_{\mathrm{N}}(\mathrm{X}_{a(i-1)+k},\ \mathrm{X}_{a(j-1)+h}) = 0,$

$(q+1 \leqslant i \leqslant j \leqslant l-1,\quad 1 \leqslant k \leqslant p_i,\quad 1 \leqslant h \leqslant p_j),$

(cf. p. 361), on déduit :

$$(26)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{D}(a(l) + a(j-1) + h).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+s} \\ \qquad = \mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k).\alpha_{a(j-1)+h}^{a(l)+s}, \\ \qquad (1 \leqslant s \leqslant a(q)). \end{array} \right.$$

D'après (25) et (23), on a, pour $1 \leqslant s \leqslant a(q)$, et

$$r' + r_j + 1 \leqslant r_q,\quad 1 \leqslant r' :$$

$$(27)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{D}(a(l) + a(j-1) + h).\alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(n)+b(n)+s} \\ \qquad = \mathrm{D}(r_j a(j) + b(j) + a(j-1) + h) \\ \qquad\qquad .\alpha_{a(i-1)+k}^{(r'+r_j-1)a(m)+b(m)+s} = 0. \end{array} \right.$$

$$(28)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{D}(a(l) + a(j-1) + h).\alpha_{a(i-1)+k}^{(r'+1)a(n)+b(n)+s} - \\ \mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k).\alpha_{a(j-1)+h}^{(r'+1)a(n)+b(n)+s} \\ \qquad + \mathrm{D}(a(i-1) + k).\alpha_{a(j-1)+h}^{r'a(n)+b(n)+s} \\ \qquad + \sum\limits_{w\geqslant 1}{}_{a(i-1)+k}^{a(l)+w} \mathrm{D}(a(l) + w).\alpha_{a(j-1)+h}^{r'a(n)+b(n)+s} \\ \qquad - \mathrm{D}(a(j-1) + h).\alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(n)+b(n)+s} \\ \qquad - \sum\limits_{w\geqslant 1}{}_{a(j-1)+h}^{a(l)+w} \mathrm{D}(a(l) + w).\alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(n)+b(n)+s} = 0, \\ (1 \leqslant s \leqslant a(q),\quad q \leqslant n \leqslant l-1,\quad 1 \leqslant r' \leqslant r_q - 2). \end{array} \right.$$

On a, pour $1 \leqslant i \leqslant l-1$, $1 \leqslant k \leqslant p_i$, $1 \leqslant h \leqslant p_l$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T_N}(\mathrm{X}_{a(i-1)+k}, \mathrm{X}_{a(l-1)+h}) \\
&\quad = -\,\mathrm{N}[\mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k), \mathrm{X}_{a(l-1)+h}] \\
&\quad + \mathrm{N}^2[\mathrm{X}_{a(i-1)+k}, \mathrm{X}_{a(l-1)+h}] \\
&\quad = -\sum_{t\geqslant 1} \mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k).\alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+t}\mathrm{ND}(a(l)+t) \\
&\quad - \sum_{t=1}^{p_i+\cdots+p_{l-1}} (\mathrm{D}(a(l-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(i-1)+t} \\
&\quad + \sum_{w\geqslant 1} \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+w}\ \mathrm{D}(a(l)+w).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(i-1)+t}\Big)\,\mathrm{N}^2\mathrm{D}(a(i-1)+t) \\
&\quad + \sum_{t\geqslant 1}\Big(\sum_{w\geqslant 1} \alpha_{a(i-1)+k}^{a(i-1)+w}\mathrm{D}(a(i-1)+w).\alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+t} \\
&\quad - \mathrm{D}(a(l-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+t} \\
&\quad - \sum_{w\geqslant 1} \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+w}\ \mathrm{D}(a(l)+w).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+t}\Big)\,\mathrm{N}^2\mathrm{D}(a(l)+t) = 0.
\end{aligned}$$

Donc, pour $\boxed{q+1 \leqslant i \leqslant l-1}$, d'après (22), on a :

$$(29)\qquad \mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k).\alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+s} = 0, \quad (1 \leqslant s \leqslant a(q));$$

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k).\alpha_{a(l-1)+h}^{(r'+1)a(m)+b(m)+s} \\
&\qquad + \mathrm{D}(a(i-1)+k).\alpha_{a(l-1)+h}^{r'a(m)+b(m)+s} \\
&\qquad + \sum_{w\geqslant 1} \alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+w}\ \mathrm{D}(a(l)+w).\alpha_{a(l-1)+h}^{r'a(m+b(m)+s} \\
&\qquad - \mathrm{D}(a(l-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(m)+b(m)+s} \\
&\qquad - \sum_{w\geqslant 1} \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+w}\ \mathrm{D}(a(l)+w).\alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(m)+b(m)+s} = 0, \\
&\text{avec} \\
&\qquad 1 \leqslant s \leqslant a(q) \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant r' \leqslant r_q - 2.
\end{aligned}\right.$$

Si $\boxed{1 \leqslant i \leqslant q}$:

$$(31)\qquad \mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k).\alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+t} = 0, \quad (1 \leqslant t \leqslant a(i-1)),$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k).\alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+a(j-1)+w} \\
&\qquad + \sum_{t=i}^{j}\sum_{u=1}^{p_t} (\mathrm{D}(a(l-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(t-1)+u} \\
&\qquad + \sum_{v\geqslant 1} \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+v}\ \mathrm{D}(a(l)+v).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(t-1)+u}\Big)\beta_{a(t-1)+u}^{a(l)+a(j-1)+w} = 0, \\
&\qquad (1 \leqslant w \leqslant p_j, \quad i \leqslant j \leqslant q \leqslant l-2).
\end{aligned}$$

On utilise ici le fait que

$$\mathrm{ND}(a(l) + a(j-1) + w) = \mathrm{D}(2a(l-1) + a(l) + w),$$

donc le fait que

$$\underline{j \leqslant q \leqslant l - 2.}$$

De (17), on déduit, pour $i = j$:

$$(32)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{p_i+\cdots+p_j} \mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k) \,.\, \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+a(i-1)+s}\, \alpha_{a(i-1)+s}^{a(j-1)+w} \\ + \mathrm{D}(a(l-1) + h) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{a(j-1)+w} \\ + \displaystyle\sum_{v \geqslant 1} \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+v}\, \mathrm{D}(a(l) + v) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{a(j-1)+w} = 0, \quad (1 \leqslant w \leqslant p_j). \end{cases}$$

Supposons maintenant que (32) est vrai pour

$$j = i + 1,\ i + 2,\ \ldots,\ j - 1.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k) \,.\, \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+a(j-1)+w} \\ &- \sum_{t=i}^{j-1} \sum_{\substack{s=1,\\ 1 \leqslant u \leqslant p_t}}^{p_i+\cdots+p_t} \mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k) \,.\, \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+a(i-1)+s} \\ &\qquad\qquad \alpha_{a(i-1)+s}^{a(t-1)+u}\, \beta_{a(t-1)+u}^{a(l)+a(j-1)+w} \\ &+ \sum_{u=1}^{p_j} (\mathrm{D}(a(l-1) + h) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{a(j-1)+u} \\ &\qquad + \sum_{v \geqslant 1} \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+v}\, \mathrm{D}(a(l) + v) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{a(j-1)+u})\, \beta_{a(j-1)+u}^{a(l)+a(j-1)+w} = 0, \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k) \,.\, \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+a(j-1)+w} \\ &\qquad - \sum_{t=i}^{j-1} \sum_{u=1}^{p_t} \mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k) \,.\, \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+a(t-1)+u} \\ &\qquad\qquad \sum_{s=1}^{p_t+\cdots+p_{j-1}} \alpha_{a(t-1)+u}^{a(t-1)+s}\, \beta_{a(t-1)+s}^{a(l)+a(j-1)+w} \\ &\qquad + \sum_{u=1}^{p_j} (\mathrm{D}(a(l-1) + h) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{a(j-1)+u} \\ &\qquad + \sum_{v \geqslant 1} \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+v}\, \mathrm{D}(a(l) + v) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{a(j-1)+u})\, \beta_{a(j-1)+u}^{a(l)+a(j-1)+w} = 0, \end{aligned}$$

et, d'après (18) :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k) \,.\, \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+a(j-1)+w} \\
&\quad + \sum_{s=1}^{p_j} \Bigg(\sum_{t=i}^{j-1} \sum_{u=1}^{p_t} \mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k) \,.\, \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+a(t-1)+u} \, \alpha_{a(t-1)+u}^{a(j-1)+s} \\
&\quad + \mathrm{D}(a(l-1) + h) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{a(j-1)+s} \\
&\qquad + \sum_{v \geqslant 1} \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+v} \, \mathrm{D}(a(l) + v) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{a(j-1)+s} \Bigg) \, \beta_{a(j-1)+s}^{a(l)+a(j-1)+w} = 0.
\end{aligned}$$

Finalement, d'après (17), (32) est vrai pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant q$. De (32) et (19), on déduit ensuite :

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned}
&- \mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k) \,.\, \alpha_{a(l-1)+h}^{(r'+1)a(m)+b(m)+s} \\
&- \sum_{w=1}^{p_i+\cdots+p_q} \mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k) \,.\, \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+a(i-1)+w} \\
&\qquad \alpha_{a(i-1)+w}^{r'a(m)+b(m)+s} \\
&\qquad + \sum_{w \geqslant 1} \alpha_{a(i-1)+k}^{a(i-1)+w} \, \mathrm{D}(i-1) + w) \,.\, \alpha_{a(l-1)+h}^{r'a(m)+b(m)+s} \\
&\qquad - \mathrm{D}(a(l-1) + h) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(m)+b(m)+s} \\
&\qquad - \sum_{w \geqslant 1} \alpha_{a(l-1)+h}^{a(l)+w} \, \mathrm{D}(a(l) + w) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(m)+b(m)+s} = 0, \\
&\qquad (1 \leqslant s \leqslant a(q) \quad \text{et} \quad 1 \leqslant r' \leqslant r_q - 2).
\end{aligned} \right.$$

De $\mathrm{T}_{\mathrm{N}}(\mathrm{X}_{a(i-1)+k}, \mathrm{X}_{a(j-1)+h}) = 0$,

$$(1 \leqslant i \leqslant q < j \leqslant l-1, \qquad 1 \leqslant k \leqslant p_i, \qquad 1 \leqslant h \leqslant p_j),$$

on déduit, (cf. p. 361), d'après (17) :

$$(34) \quad \mathrm{D}(a(l) + a(j-1) + h) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{a(i-1)+s} = 0, \qquad (1 \leqslant s \leqslant p_i + \cdots + p_q),$$

$$(35) \quad \mathrm{D}(a(l) + a(j-1) + h) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+s} = \mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k) \,.\, \alpha_{a(j-1)+h}^{a(l)+s}, \qquad (1 \leqslant s \leqslant a(i-1)).$$

Ensuite, comme précédemment, on déduit de (17) et (18) par récurrence, tout d'abord pour $t = i$, puis successivement pour $t = i+1, \ldots, q$:

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\sum_{u=1}^{p_i+\cdots+p_t} (\mathrm{D}a(l) + a(j-1) + h) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+a(i-1)+u} \\
&\quad - \mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k) \,.\, \alpha_{a(j-1)+h}^{a(l)+a(i-1)+u}) \, \alpha_{a(i-1)+u}^{a(t-1)+w} \\
&\quad = \mathrm{D}(a(j-1) + h) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{a(t-1)+w} \\
&\quad + \sum_{v \geqslant 1} \alpha_{a(j-1)+h}^{a(l)+v} \, \mathrm{D}(a(l) + v) \,.\, \alpha_{a(i-1)+k}^{a(t-1)+w}, \\
&\qquad (1 \leqslant w \leqslant p_t, \; i \leqslant t \leqslant q).
\end{aligned} \right.$$

De (36) et (19), on déduit ensuite :

$$
(37)\cdot\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{D}(a(l)+a(j-1)+h)\,.\,\alpha^{(r'+1)a(m)+b(m)+s}_{a(i-1)+k}\\
&\quad-\mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k)\,.\,\alpha^{(r'+1)a(m)+b(m)+s}_{a(j-1)+h}\\
&\quad+\sum_{w=1}^{p_i+\cdots+p_q}(\mathrm{D}(a(l)+a(j-1)+h)\,.\,\alpha^{a(l)+a(i-1)+w}_{a(i-1)+k}\\
&\quad-\mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k)\,.\,\alpha^{a(l)+a(i-1)+w}_{a(j-1)+h})\alpha^{r'a(m)+b(m)+s}_{a(i-1)+w}\\
&\quad+\sum_{w\geqslant 1}\alpha^{a(i-1)+w}_{a(i-1)+k}\,\mathrm{D}(a(i-1)+w)\,.\,\alpha^{r'a(m)+b(m)+s}_{a(j-1)+h}\\
&\quad-\mathrm{D}(a(j-1)+h)\,.\,\alpha^{r'a(m)+b(m)+s}_{a(i-1)+k}\\
&\quad-\sum_{w\geqslant 1}\alpha^{a(l)+w}_{a(j-1)+h}\,\mathrm{D}(a(l)+w)\,.\,\alpha^{r'a(m)+b(m)+s}_{a(i-1)+k}=0,\\
&\qquad(1\leqslant s\leqslant a(q)\qquad\text{et}\qquad 1\leqslant r'\leqslant r_q-2).
\end{aligned}
\right.
$$

De $\mathrm{T}_{\mathrm{N}}(\mathrm{X}_{a(i-1)+k},\mathrm{X}_{a(j-1)+h})=0$, $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant q,\ 1\leqslant k\leqslant p_i,$ $1\leqslant h\leqslant p_j)$, on déduit, (cf. p. 361), d'après (17) :

$$
(38)\quad \mathrm{D}(a(l)+a(j-1)+h)\,.\,\alpha^{a(i-1)+s}_{a(i-1)+k}=0,\qquad (1\leqslant s\leqslant p_i+\ldots+p_{j-1}),
$$

$$
(39)\quad \mathrm{D}(a(l)+a(j-1)+h)\,.\,\alpha^{a(j-1)+s}_{a(i-1)+k}=\mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k)\,.\,\alpha^{a(j-1)+s}_{a(j-1)+h},\qquad (1\leqslant s\leqslant p_j+\cdots+p_l+a(i-1)).
$$

Ensuite, comme précédemment, de (17) et (18), on déduit, par récurrence, tout d'abord pour $t=i$, puis successivement pour $t=i+1,\ldots,j-1$:

$$
(40)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{u=1}^{p_i+\cdots+p_t}(\mathrm{D}(a(l)+a(j-1)+h)\,.\,\alpha^{a(l)+a(i-1)+u}_{a(i-1)+k}\\
&\qquad-\mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k)\,.\,\alpha^{a(l)+a(i-1)+u}_{a(j-1)+h})\\
&\alpha^{a(t-1)+w}_{a(i-1)+u}=\sum_{v\geqslant 1}\alpha^{a(j-1)+v}_{a(j-1)+h}\,\mathrm{D}(a(j-1)+v)\,.\,\alpha^{a(t-1)+w}_{a(i-1)+k},\\
&\qquad(1\leqslant w\leqslant p_t,\quad i\leqslant t\leqslant j-1).
\end{aligned}
\right.
$$

Ensuite, de (40), (17) et (18), on déduit par récurrence, tout d'abord pour $t=j$, puis pour $t=j+1,\ldots,q$:

$$
(41)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{u=1}^{p_i+\cdots+p_t}(\mathrm{D}(a(l)+a(j-1)+h)\,.\,\alpha^{a(l)+a(i-1)+u}_{a(i-1)+k}\\
&\quad-\mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k)\,.\,\alpha^{a(l)+a(i-1)+u}_{a(j-1)+h})\,\alpha^{a(t-1)+w}_{a(i-1)+u}\\
&\quad+\sum_{v\geqslant 1}\alpha^{a(i-1)+v}_{a(i-1)+k}\,\mathrm{D}(a(i-1)+v)\,.\,\alpha^{a(t-1)+w}_{a(j-1)+h}\\
&\quad-\sum_{v\geqslant 1}\alpha^{a(j-1)+v}_{a(j-1)+h}\,\mathrm{D}(a(j-1)+v)\,.\,\alpha^{a(t-1)+w}_{a(i-1)+k}=0,\\
&\qquad(1\leqslant w\leqslant p_t,\quad j\leqslant t\leqslant q).
\end{aligned}
\right.
$$

Ensuite, de (40), (41) et (19), on déduit :

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}(a(l)+a(j-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{(r'+1)a(m)+b(m)+s} \\ -\mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k).\alpha_{a(j-1)+h}^{(r'+1)a(m)+b(m)+s} \\ +\sum\limits_{w=1}^{p_i+\cdots+p_q}(\mathrm{D}(a(l)+a(j-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+a(i-1)+w} \\ -\mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k).\alpha_{a(j-1)+h}^{a(l)+a(i-1)+w})\ \alpha_{a(i-1)+w}^{r'a(m)+b(m)+s} \\ \qquad +\sum\limits_{v\geqslant 1}\alpha_{a(i-1)+k}^{a(i-1)+v}\,\mathrm{D}(a(i-1)+v).\alpha_{a(j-1)+h}^{r'a(m)+b(m)+s} \\ -\sum\limits_{v\geqslant 1}\alpha_{a(j-1)+h}^{a(j-1)+v}\,\mathrm{D}(a(j-1)+v).\alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(m)+b(m)+s}=0. \\ \qquad (1\leqslant s\leqslant a(q)\quad\text{et}\quad 1\leqslant r'\leqslant r_q-2). \end{array}\right.$$

De $\mathrm{T}_{\mathrm{N}}(\mathrm{X}_{a(i-1)+k}, \mathrm{D}(ra(j)+b(j)+a(t-1)+h))=0$,

$(1\leqslant i\leqslant q,\quad 1\leqslant k\leqslant p_i,\quad 1\leqslant h\leqslant p_i,\quad 0\leqslant r_{j+1}<r\leqslant r_j$ si $1\leqslant t<j\leqslant l-1,\quad 0\leqslant r_{j+1}<r<r_j$ si $t=j)$,

on déduit, (cf. p. 361), d'après (17) :

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}((r+1)a(j)+b(j)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(i-1)+s}=0, \\ \qquad (1\leqslant s\leqslant p_i+\cdots+p_l+a(i-1)). \end{array}\right.$$

Si $t>q$, on déduit, de (43) si $r\geqslant 2$, de (34) si $r=1$:

$$(44)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}((r+1)a(j)+b(j)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+a(i-1)+s}=0, \\ \qquad (1\leqslant s\leqslant p_i+\cdots+p_q), \end{array}\right.$$

puis :

$$(45)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}((r+1)a(j)+b(j)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{(r'+1)a(m)+b(m)+s} \\ \qquad =\mathrm{D}(ra(j)+b(j)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(m)+b(m)+s}, \\ \qquad (1\leqslant s\leqslant a(q)\quad\text{et}\quad 1\leqslant r'\leqslant r_q-2). \end{array}\right.$$

De (45), (43) et (44), on déduit, si $1\leqslant r'<r$:

$$(46)\quad \mathrm{D}(ra(j)+b(j)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(m)+b(m)+s}$$
$$=\mathrm{D}((r-r'+1)a(n)+b(n)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+s}=0.$$

De (45), on déduit, pour $r\leqslant r'<r_q$, $0\leqslant r_{j+1}<r\leqslant r_j$ si $q<t<j\leqslant l-1$, $0\leqslant r_{j+1}<r<r_j$ si $q<t=j$:

$$(47)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}(ra(j)+b(j)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(m)+b(m)+s} \\ =\mathrm{D}(r_ta(t)+b(t)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{(r'-r+r_t)a(n)+b(n)+s}=0, \end{array}\right.$$

d'après (23), si $r'-r+r_t+2\leqslant r_q$ et $1\leqslant s\leqslant a(q)$.

Si $1 \leqslant t \leqslant q$, pour $r \geqslant 2$, on déduit de (43) :

$$(48)\quad \begin{cases} \mathrm{D}((r+1)a(j)+b(j)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+a(i-1)+s} \\ \qquad\qquad = 0, \quad (1 \leqslant s \leqslant p_i + \cdots + p_q). \end{cases}$$

$$(49)\quad \begin{cases} \mathrm{D}((r+1)a(j)+b(j)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{(r'+1)a(m)+b(m)+s} \\ \qquad = \mathrm{D}(ra(j)+b(j)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(m)+b(m)+s}, \\ \qquad (1 \leqslant s \leqslant a(q), \quad 1 \leqslant r' \leqslant r_q - 2). \end{cases}$$

Pour $r = 1$, de (17) et (18), on déduit par récurrence, tout d'abord pour $j = i$, puis successivement pour $j = i+1, \ldots, q$:

$$(50)\quad \begin{cases} \sum\limits_{u=1}^{p_i+\cdots+p_j} \mathrm{D}(2a(l-1)+p_l+a(t-1)+h) \\ \qquad\qquad .\alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+a(i-1)+u}\ \alpha_{a(i-1)+u}^{a(j-1)+w} \\ \qquad = \mathrm{D}(a(l)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{a(j-1)+w}, \\ \qquad (1 \leqslant w \leqslant p_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant q). \end{cases}$$

De (50) et (19), on déduit ensuite :

$$(51)\quad \begin{cases} \mathrm{D}(2a(l-1)+p_l+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+k}^{(r'+1)a(m)+b(m)+s} \\ \qquad + \sum\limits_{u=1}^{p_i+\cdots+p_q} \mathrm{D}(2a(l-1)+p_l+a(t-1)+h) \\ \qquad\qquad .\alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+a(i-1)+u}\ \alpha_{a(i-1)+u}^{r'a(m)+b(m)+s} \\ \qquad = \mathrm{D}(a(l)+a(t-1)+h).\alpha_{a(i-1)+u}^{r'a(m)+b(m)+s}, \\ \qquad (1 \leqslant s \leqslant a(q) \quad \text{et} \quad 1 \leqslant r' \leqslant r_q - 2). \end{cases}$$

6. Toujours sous les hypothèses du paragraphe 4, considérons le changement de coordonnées, (cf. paragraphe I) :

$$u'_{ra(t)+b(t)+a(q-1)+j} = \mathrm{H}_{ra(t)+b(t)+a(q-1)+j}(u_1, \ldots, u_{ra(t)+b(t)+a(q)}),$$
$$(1 \leqslant j \leqslant p_q,\ 0 \leqslant r_{t+1} < r \leqslant r_t,\ q \leqslant t \leqslant l-1),$$

$u'_i = u_i$, pour tous les autres indices.

Posons $\mathrm{D}'(i) = \dfrac{\partial}{\partial u'_i}$ On a :

$$(52)\quad \begin{cases} \mathrm{D}(i) = \mathrm{D}'(i) + \sum\limits_{r=1}^{r_q} \sum\limits_{j=1}^{p_q} \mathrm{D}(i).\mathrm{H}_{ra(t)+b(t)+a(q-1)+j} \\ \qquad\qquad \mathrm{D}'(ra(t)+b(t)+a(q-1)+j), \\ \qquad (1 \leqslant i \leqslant a(l)). \end{cases}$$

$$(53)\quad \begin{cases} \mathrm{D}(r'a(h)+b(h)+i) = \mathrm{D}'(r'a(h)+b(h)+i) \\ + \sum\limits_{r=r'}^{r_q} \sum\limits_{j=i}^{p_q} \mathrm{D}(r'a(h)+b(h)+i).\mathrm{H}_{ra(t)+b(t)+a(q-1)+j} \\ \qquad\qquad \mathrm{D}'(ra(t)+b(t)+a(q-1)+j), \\ \qquad (1 \leqslant i \leqslant a(q-1)), \end{cases}$$

$$(54)\quad \begin{cases} \mathrm{D}(r'a(h) + b(h) + a(q-1) + i) \\ = \sum\limits_{r=r'}^{r_q} \sum\limits_{j=1}^{p_q} \mathrm{D}(r'a(h) + b(h) + a(q-1) + i) \,.\, \mathrm{H}_{ra(t)+\cdots+j} \\ \qquad \mathrm{D}'(ra(t) + b(t) + a(q-1) + j), \quad (1 \leqslant i \leqslant p_q); \end{cases}$$

pour ces deux dernières égalités, on a :

$$0 \leqslant r_{t+1} < r \leqslant r_t \leqslant r_q, \qquad q \leqslant t \leqslant h \leqslant l-1,$$
$$0 \leqslant r_{h+1} < r' \leqslant r_h \leqslant r_q, \qquad q \leqslant h \leqslant l-1, \quad r' \leqslant r.$$

$$(55)\quad \begin{cases} \mathrm{D}(r'a(h) + b(h) + a(q) + i) = \mathrm{D}'(r'a(h) + b(h) + a(q) + i) \\ + \sum\limits_{r=r'+1}^{r_q} \sum\limits_{j=1}^{p_q} \mathrm{D}(r'a(h) + b(h) + a(q) + i) \,.\, \mathrm{H}_{ra(t)+\cdots+j} \\ \qquad \mathrm{D}'(ra(t) + b(t) + a(q-1) + j), \\ (1 \leqslant i \leqslant p_{q+1} + \cdots + p_h, \ 0 \leqslant r_{t+1} < r \leqslant r_t \leqslant r_q, \\ \quad 0 \leqslant r_{h+1} < r' \leqslant r_h \leqslant r_q, \quad q \leqslant t \leqslant h \leqslant l-1, \\ \qquad r' < r). \end{cases}$$

$$(56)\quad \mathrm{D}((r_q+1)a(q) + b(q) + i) = \mathrm{D}'(r_q+1)a(q) + b(q) + i), \quad (i \geqslant 1).$$

On impose aux fonctions H d'être solutions des équations :

$$(57)\quad \begin{cases} \mathrm{D}(ra(t) + b(t) + i) \,.\, \mathrm{H}_{ra(t)+b(t)+a(q-1)+j} = \alpha_i^{a(q-1)+j}, \\ (1 \leqslant j \leqslant p_q, \quad 1 \leqslant i \leqslant a(q), \quad 0 \leqslant r_{t+1} < r \leqslant r_t \leqslant r_q, \\ \qquad q \leqslant t \leqslant l-1), \end{cases}$$

$$(58)\quad \begin{cases} \mathrm{D}((r'+1)a(h) + b(h) + i) \,.\, \mathrm{H}_{(r+1)a(t)+b(t)+a(q-1)+j} \\ \qquad = \mathrm{D}(r'a(h) + \cdots + i) \,.\, \mathrm{H}_{ra(t)+\cdots+j} \\ (1 \leqslant j \leqslant p_q, \quad 1 \leqslant i \leqslant a(q), \quad 1 \leqslant r_{t+1} \leqslant r < r_t \leqslant r_q, \\ q \leqslant t \leqslant h \leqslant l-2, \quad 1 \leqslant r_{h+1} \leqslant r' < r_h \leqslant r_q, \ r' \leqslant r), \end{cases}$$

$$(59)\quad \begin{cases} \mathrm{D}((r'+1)a(h) + b(h) + a(q) + i) \,.\, \mathrm{H}_{(r+1)a(t)+b(t)+a(q-1)+j} \\ \qquad = \mathrm{D}(r'a(h) + b(h) + a(q) + i) \,.\, \mathrm{H}_{ra(t)+b(t)+a(q-1)+j}, \\ (1 \leqslant j \leqslant p_q, \quad 1 \leqslant i \leqslant p_{q+1} + \cdots + p_h, \\ \quad 1 \leqslant r_{t+1} \leqslant r < r_t \leqslant r_q, \quad 1 \leqslant r_{h+1} \leqslant r' < r_h \leqslant r_q, \\ \qquad q \leqslant t \leqslant h \leqslant l-2, \quad r' < r). \end{cases}$$

$$(60)\quad \begin{cases} \mathrm{D}(r_h a(h) + b(h) + a(h-1) + i) \,.\, \mathrm{H}_{ra(t)+b(t)+a(q-1)+j} = 0, \\ (1 \leqslant j \leqslant p_q, \quad 1 \leqslant i \leqslant p_h, \quad q \leqslant t < h \leqslant l-1, \\ \qquad 1 \leqslant r_h \leqslant r_{t+1} < r \leqslant \inf.\,(r_t, r_q - 1)). \end{cases}$$

On va montrer que, si les fonctions H sont solutions de (57, 58, 59, 60), au voisinage de x, le système de coordonnées $u'_1, \ldots, u'_n$ satisfait à (16).

De (56) et (16), on déduit que les

$$D'((r_q + 1)a(q) + b(q) + i), \quad (i \geqslant 1),$$

déterminent, dans un voisinage de x, un champ de repères adaptés pour $N/\mathrm{Im}N^{r_q+1}$. (17) entraîne que

$$(\alpha^{a(q-1)+j}_{a(q-1)+i}), \quad (1 \leqslant i, j \leqslant p_q),$$

est une matrice régulière dans un voisinage de x; de (57) et (54), pour $r' = r = r_q$, et de (16), on déduit alors :

$$ND'(r_q a(q) + b(q) + a(q-1) + j) = 0, \quad (1 \leqslant j \leqslant p_q).$$

Ensuite, on en déduit, compte-tenu de (55), (16) et (60) :

$$ND'(r_h a(h) + b(h) + a(h-1) + i) = 0,$$
$$(1 \leqslant i \leqslant p_h, \ q < h \leqslant l-1),$$

et compte-tenu de (53) pour $r' = r = r_q$, (16) et (56) avec $1 \leqslant i \leqslant a(q-1)$:

$$ND'(r_q a(q) + b(q) + i) = D'((r_q + 1)a(q) + b(q) + i).$$

Supposons ensuite qu'on a montré que les

$$D'((r' + 1)a(h) + b(h) + i), \quad (i \geqslant 1),$$

déterminent, dans un voisinage de x, un champ de repères adaptés pour $N/\mathrm{Im}N^{r'+1}$, $(r' \leqslant r_q - 1, 0 \leqslant r_{h+1} < r' \leqslant r_h \leqslant r_q)$. Alors, de (16), (55) et (59), on déduit

$$ND'(r'a(h) + b(h) + a(q) + i) = D'((r' + 1)a(h) + b(h) + a(q) + i),$$
$$(1 \leqslant i \leqslant p_{q+1} + \cdots + p_h \quad \text{si} \quad r_{h+1} < r' < r_h,$$
$$1 \leqslant i \leqslant p_{q+1} + \cdots + p_{h-1} \quad \text{si} \quad r' = r_h).$$

De (16), (54), (57), (17) et (58), on déduit :

$$ND'(r'a(h) + b(h) + a(q-1) + i)$$
$$= D'((r' + 1)a(h) + b(h) + a(q-1) + i), \quad (1 \leqslant i \leqslant p_q).$$

On en déduit, compte-tenu de (16), (53) et (58) :

$$ND'(r'a(h) + b(h) + i) = D'((r' + 1)a(h) + b(h) + i),$$
$$(1 \leqslant i \leqslant a(q-1)).$$

Ainsi par récurrence sur r', $(r' = r_q - 1, \ r_q - 2, \ldots, 1)$, on montre que le système de coordonnées $u'_1, \ldots, u'_n$ satisfait lui aussi à (16).

Considérons le champ de repères adaptés, associé au système

de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$. $\mathrm{NX}_{a(l-1)+k} = 0$, $(1 \leqslant k \leqslant p_l)$, s'écrit dans le nouveau système de coordonnées $u'_1, \ldots, u'_n$, d'après (52), (53), (54), (55) et (56) :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{N}\Big(\mathrm{D}'(a(l-1)+k) \\
&\qquad + \sum_{\substack{s=1\\1\leqslant r\leqslant r_q}}^{a(q-1)} \alpha_{a(l-1)+k}^{ra(m)+b(m)+s}\, \mathrm{D}'(ra(m)+b(m)+s)\Big) \\
&\qquad + \sum_{s\geqslant 1} \alpha_{a(l-1)+k}^{(r_q+1)a(q)+b(q)+s}\, \mathrm{ND}'((r_q+1)a(q)+b(q)+s) \\
&\qquad + \sum_{\substack{j=1,\\1\leqslant r\leqslant r_q}}^{p_q} (\mathrm{D}(a(l-1)+k).\mathrm{H}_{ra(m)+b(m)+a(q-1)+j} \\
&\qquad + \sum_{\substack{s=1\\1\leqslant r'\leqslant r}}^{a(q)} \alpha_{a(l-1)+k}^{r'a(n)+b(n)+s} \\
&\qquad\qquad \mathrm{D}(r'a(n)+b(n)+s).\mathrm{H}_{ra(m)+b(m)+a(q-1)+j}) \\
&\qquad \mathrm{ND}'(ra(m)+b(m)+a(q-1)+j) = 0,
\end{aligned}$$

et $\mathrm{NX}_{a(i-1)+k} = \mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k)$, pour

$$q < i \leqslant l-1,\ 1 \leqslant k \leqslant p_i :$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{N}\Big(\mathrm{D}'(a(i-1)+k) + \sum_{\substack{s=1\\1\leqslant r'\leqslant r_q}}^{a(q-1)} \alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(m)+b(m)+s}\, \mathrm{D}'(r'a(m)+b(m)+s)\Big) \\
&+ \sum_{s\geqslant 1} \alpha_{a(i-1)+k}^{(r_q+1)a(q)+b(q)+s}\, \mathrm{ND}'((r_q+1)a(q)+b(q)+s) \\
&+ \sum_{\substack{j=1\\1\leqslant r\leqslant r_q}}^{p_q} (\mathrm{D}(a(i-1)+k).\mathrm{H}_{ra(m)+b(m)+a(q-1)+j} \\
&+ \sum_{\substack{s=1\\1\leqslant r'\leqslant r}}^{a(q)} \alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(n)+b(n)+s}\, \mathrm{D}(r'a(n)+b(n)+s).\mathrm{H}_{ra(m)+\cdots+j}\Big) \\
&\mathrm{ND}'(ra(m)+b(m)+a(q-1)+j) = \mathrm{D}'(a(l)+a(i-1)+k) \\
&+ \sum_{\substack{2\leqslant r''\leqslant r_q\\1\leqslant j\leqslant p_q}} \mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k).\mathrm{H}_{r''a(t)+b(t)+a(q-1)+j} \\
&\qquad\qquad \mathrm{D}'(r''a(t)+b(t)+a(q-1)+j).
\end{aligned}$$

Si on impose aux fonctions H d'être aussi solutions des équations :

$$(61)\quad \begin{cases} \mathrm{D}(a(i-1)+k).\mathrm{H}_{ra(m)+b(m)+a(q-1)+j} \\ \qquad + \sum_{v\geqslant 1} \alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+v}\, \mathrm{D}(a(l)+v).\mathrm{H}_{ra(m)+\cdots+j} = 0, \\ \text{pour} \\ \qquad 1 \leqslant r \leqslant r_q - r_i - 1, \qquad q+1 \leqslant i \leqslant l, \\ \qquad\qquad 1 \leqslant j \leqslant p_q; \end{cases}$$

(Pour $q+1 \leqslant i \leqslant l-1$, ces équations sont imposées par (60) et (59)).

$$(62)\quad \begin{cases} \mathrm{D}(a(i-1)+k).\mathrm{H}_{ra(m)+b(m)+a(q-1)+j} \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{v\geqslant 1} \alpha^{a(l)+v}_{a(i-1)+k}\, \mathrm{D}(a(l)+v).\mathrm{H}_{ra(m)+\cdots+j} \\ \qquad = \mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k).\mathrm{H}_{(r+1)a(m)+b(m)+a(q-1)+j}, \\ \text{pour} \\ \qquad 1 \leqslant j \leqslant p_q, \qquad q+1 \leqslant i \leqslant l-1, \\ \qquad\qquad r_q - r_i \leqslant r \leqslant r_q - 1, \end{cases}$$

les coefficients α' et β' associés aux coordonnées $u'_1, \ldots, u'_n$ vérifient :

$$\left.\begin{array}{l} \beta'^{a(l)+a(i-1)+j}_{a(i-1)+k} = \alpha'^{a(i-1)+j}_{a(i-1)+k} = \delta^j_k, \\ \beta'^{a(l)+a(i)+t}_{a(i-1)+k} = \alpha'^{a(i)+t}_{a(i-1)+k} = 0, \end{array}\right\} \begin{array}{l} q < i \leqslant l-1,\ 1 \leqslant j,\ k \leqslant p_i, \\ 1 \leqslant t \leqslant p_{i+1} + \cdots + p_{l-1}, \end{array}$$

$$\beta'^{(r+1)a(h)+b(h)+a(q-1)+t}_{a(i-1)+k} = -\alpha'^{ra(h)+b(h)+a(q-1)+t}_{a(i-1)+k} = 0,$$

$(q+1 \leqslant i \leqslant l,\ 1 \leqslant k \leqslant p_i,\quad 0 \leqslant r_{h+1} < r < r_h \leqslant r_q,$ pour $1 \leqslant t \leqslant p_q + \cdots + p_h$,
$0 \leqslant r_{h+1} < r = r_h, \leqslant r_q,$ pour $1 \leqslant t \leqslant p_q + \cdots + p_{h-1}$).

$$\mathrm{NX}_{a(i-1)+k} = \mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k), \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant q,\ 1 \leqslant k \leqslant p_i,$$

s'écrit :

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}\Bigg(\sum_{s=1}^{p_i+\cdots+p_q} \alpha^{a(i-1)+s}_{a(i-1)+k}\, \mathrm{D}'(a(i-1)+s) \\ &+ \sum_{\substack{s=1\\ 1\leqslant r\leqslant r_q}}^{a(q-1)} \alpha^{ra(m)+b(m)+s}_{a(i-1)+k}\, \mathrm{D}'(ra(m)+b(m)+s) \\ &+ \sum_{s\geqslant 1} \alpha^{(r_q+1)a(q)+b(q)+s}_{a(i-1)+k}\, \mathrm{D}'((r_q+1)a(q)+b(q)+s)\Bigg) \\ &+ \sum_{\substack{j=1\\ 1\leqslant r\leqslant r_q}}^{p_q} \Bigg(\sum_{s=1}^{p_i+\cdots+p_q} \alpha^{a(i-1)+s}_{a(i-1)+k}\, \mathrm{D}(a(i-1)+s).\mathrm{H}_{ra(m)+b(m)+a(q-1)+j} \\ &+ \sum_{\substack{s=1\\ 1\leqslant r'\leqslant r}}^{a(q)} \alpha^{r'a(n)+b(n)+s}_{a(i-1)+k}\, \mathrm{D}(r'a(n)+b(n)+s).\mathrm{H}_{ra(m)+b(m)+a(q-1)+j}\Bigg) \\ &\mathrm{ND}'(ra(m)+b(m)+a(q-1)+j) \\ &\qquad = (1-\delta^q_i)\mathrm{D}'(a(l)+a(i-1)+k) \\ &+ \sum_{j=1}^{p_q} \mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k).\mathrm{H}_{a(l)+a(q-1)+j}\mathrm{D}'(a(l)+a(q-1)+j) \\ &+ \sum_{\substack{j=1\\ 2\leqslant r''\leqslant r_q}}^{p_q} \mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k).\mathrm{H}_{r''a(t)+b(t)+a(q-1)+j} \\ &\qquad\qquad \mathrm{D}'(r''a(t)+b(t)+a(q-1)+j). \end{aligned}$$

Si on impose, de plus, aux fonctions H d'être solutions des équations :

$$(63)\quad \begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{a(q)} \alpha_{a(i-1)+k}^{a(i-1)+s} \mathrm{D}(a(i-1)+s) . \mathrm{H}_{ra(m)+b(m)+a(q-1)+j} \\ + \sum\limits_{\substack{s=1\\ 1\leqslant r'\leqslant r}}^{a(q)} \alpha_{a(i-1)+k}^{r'a(n)+b(n)+s} \\ \qquad \mathrm{D}(r'a(n)+b(n)+s) . \mathrm{H}_{ra(m)+b(m)+a(q-1)+j} \\ = \mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k) . \mathrm{H}_{(r+1)a(m)+b(m)+a(q-1)+j}, \\ (1 \leqslant i \leqslant q,\ 1 \leqslant k \leqslant p_i,\ 1 \leqslant j \leqslant p_q,\ 1 \leqslant r \leqslant r_q - 1), \end{cases}$$

alors, pour $i = q$, on déduit de ce qui précède, et de (17) et (57) :

$$\begin{aligned} &\alpha'^{a(q-1)+j}_{a(q-1)+k} = \beta'^{a(l)+a(q-1)+j}_{a(q-1)+k} = \delta^k_j \Big\} \quad 1 \leqslant j,\quad k \leqslant p_q, \\ &\alpha'^{a(q)+t}_{a(q-1)+k} = \beta'^{a(l)+a(q)+t}_{a(q-1)+k} = 0 \Big\} 1 \leqslant t \leqslant p_{q+1} + \cdots + p_{l-1}, \\ &\alpha'^{ra(h)+b(h)+a(q-1)+t}_{a(q-1)+k} = -\beta'^{(r+1)a(h)+b(h)+a(q-1)+t}_{a(q-1)+k} = 0, \\ &\qquad (1 \leqslant k \leqslant p_q, \\ &1 \leqslant t \leqslant p_q + \cdots + p_h \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant r_{h+1} < r < r_h \leqslant r_q, \\ &1 \leqslant t \leqslant p_q + \cdots + p_{h-1} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant r_{h+1} < r = r_h \leqslant r_q). \end{aligned}$$

On en déduit, pour $1 \leqslant i \leqslant q-1$, $1 \leqslant k \leqslant p_i$:

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{p_i+\cdots+p_{q-1}} \alpha_{a(i-1)+k}^{a(i-1)+s} \mathrm{ND}'(a(i-1)+s) \\ &+ \sum_{\substack{s=1\\ 1\leqslant r\leqslant r_q}}^{a(q-1)} \alpha_{a(i-1)+k}^{ra(m)+b(m)+s} \mathrm{D}'((r+1)a(m)+b(m)+s) \\ &+ \sum_{s\geqslant 1} \alpha_{a(i-1)+k}^{(r_q+1)a(q)+b(q)+s} \mathrm{ND}'((r_q+1)a(q)+b(q)+s) \\ &+ \sum_{j=1}^{p_q} \alpha_{a(i-1)+k}^{a(q-1)+j} (\mathrm{D}'(a(l)+a(q-1)+j) \\ &+ \sum_{\substack{s=1\\ 1\leqslant r\leqslant r_q}}^{a(q-1)} \beta'^{(r+1)a(m)+b(m)+s}_{a(q-1)+j} \mathrm{D}'((r+1)a(m)+b(m)+s) \\ &+ \sum_{s\geqslant 1} \beta'^{(r_q+2)a(q-1)+b(q-1)+s}_{a(q-1)+j} \mathrm{D}'((r_q+2)a(q-1)+b(q-1)+s)) \\ &= \mathrm{D}'(a(l-1)+a(i-1)+k) + \sum_{j=1}^{p_q} \mathrm{D}(a(l)+a(i-1)+k) \\ &\qquad . \mathrm{H}_{a(l)+a(q-1)+j} \mathrm{D}'(a(l)+a(q-1)+j). \end{aligned}$$

D'après (57), (17), (18) et (19), on en déduit, par récurrence,

tout d'abord, pour $i = q - 1$, puis successivement pour $i = q - 2, \ldots, 1$:

$$\beta'^{a(l)+a(q-1)+s}_{a(i-1)+k} = \beta'^{(r+1)a(h)+b(h)+a(q-1)+t}_{a(i-1)+k} = 0,$$
$$(1 \leqslant k \leqslant p_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant q - 1,$$
$$1 \leqslant s \leqslant p_q + \cdots + p_{l-1},$$
$$1 \leqslant t \leqslant p_q + \cdots + p_h \quad \text{si} \quad 0 \leqslant r_{h+1} < r < r_h \leqslant r_q,$$
$$1 \leqslant t \leqslant p_q + \cdots + p_{h-1} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant r_{h+1} < r = r_h \leqslant r_q);$$

donc :

$$\alpha'^{a(q-1)+s}_{a(i-1)+k} = \alpha'^{ra(h)+b(h)+a(q-1)+t}_{a(i-1)+k} = 0,$$
$$(1 \leqslant k \leqslant p_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant q - 1,$$
$$1 \leqslant s \leqslant p_q + \cdots + p_{l-1}, \quad 1 \leqslant t \leqslant p_q + \cdots + p_h$$
pour $$0 \leqslant r_{h+1} < r \leqslant r_h \leqslant r_q).$$

Ainsi, pour prouver l'existence, au voisinage de x, d'un système de coordonnées $u'_1, \ldots, u'_n$ vérifiant (16) et tel que les β' et α' correspondants vérifient les ensembles de relations (21) et (22) où q est remplacé par $q - 1$ (cf. paragraphe 4, p. 364), il suffit de montrer l'existence, au voisinage de x, de solutions $H_{ra(t)+b(t)+a(q-1)+j}$, $(1 \leqslant r \leqslant r_q)$, des équations (57, 58, 59, 60, 61, 62, 63) et :

$$(64) \quad \begin{cases} D(ra(t) + b(t) + a(q) + s) . H_{ra(t)+b(t)+a(q-1)+j} = 0, \\ (1 \leqslant j \leqslant p_q, 0 \leqslant r_{t+1} < r \leqslant r_t, q \leqslant t \leqslant l - 1, s \geqslant 1). \end{cases}$$

On va montrer maintenant que ce dernier problème a une solution, grâce aux relations établies au paragraphe 5 et au fait que les sous-fibrés $\mathrm{Ker}N^r$, $(1 \leqslant r \leqslant r_1)$, sont stables pour le crochet des champs de vecteurs.

7. On montre tout d'abord l'existence des fonctions

$$H_{a(l)+a(q-1)+j}, \quad (1 \leqslant j \leqslant p_q),$$

solutions au voisinage de x, des ensembles d'équations (57), (61) et (64) pour $r = 1$, ou, ce qui est équivalent, des ensembles d'équations (57), (64), et :

$$(65) \quad D(a(i-1) + k) . H_{a(l)+a(q-1)+j} = - \sum_{v=1}^{a(q)} \alpha^{a(l)+v}_{a(i-1)+k} \alpha^{a(q-1)+j}_{v},$$

où i est tel que $q + 1 \leqslant i \leqslant l$, $1 \leqslant r_q - r_i - 1$ et $1 \leqslant k \leqslant p_i$.

D'après (39), les équations (57), pour $r = 1$, sont compatibles entre elles. D'après (34) et (43), les ensembles d'équations (57) et (64), pour $r = 1$, sont compatibles.

Pour i tel que $q + 1 \leqslant i \leqslant l$, $1 \leqslant r_q - r_i - 1$, pour $1 \leqslant k \leqslant p_i$, et $1 \leqslant j \leqslant p_q$, on a, d'après (24) et (43) :

$$\mathrm{D}(2a(l-1) + p_l + s)\cdot\left(\sum_{v=1}^{a(q)} \alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+v}\, \alpha_v^{a(q-1)+j}\right) = 0, \ (s \geqslant 1),$$

et, d'après (34) pour $q + 1 \leqslant h \leqslant l - 1$, $1 \leqslant t \leqslant p_h$:

$$\mathrm{D}(a(l) + a(h-1) + t)\cdot\left(\sum_{v=1}^{a(q)} \alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+v}\, \alpha_v^{a(q-1)+j}\right)$$
$$= \sum_{v=1}^{a(q)} \mathrm{D}(a(l) + a(h-1) + t)\,.\,\alpha_{a(i-1+k}^{a(l)+v}\, \alpha_v^{a(q-1)+j}$$
$$= \begin{cases} 0, \text{ d'après (29), si } i = l, \\ \sum_{v=1}^{a(q)} \mathrm{D}(a(l) + a(i-1) + k)\,.\,\alpha_{a(h-1)+t}^{a(l)+v}\, \alpha_v^{a(q-1)+j} = 0, \text{ d'après} \\ \text{(26) et (27) si } q < i < l. \end{cases}$$

Avec un abus de notations, on écrira donc :

$$\mathrm{D}(a(i-1) + k)\,.\,(\mathrm{D}(a(l) + a(q) + s)\,.\,\mathrm{H}_{a(l)+a(q-1)+j})$$
$$= \mathrm{D}(a(l) + a(q) + s.)(\mathrm{D}(i-1) + k.)\mathrm{H}_{a(l)+a(q-1)+j}) = 0,$$
$$(s \geqslant 1).$$

On a, pour $1 \leqslant t \leqslant a\,(q)$, d'après (31) et (32) si $i = l$, d'après (39), (35), (36) et (47), si $q < i < l$:

$$\mathrm{D}(a(l) + t)\cdot\left(\sum_{v=1}^{a(q)} \alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+v}\, \alpha_v^{a(q-1)+j}\right)$$
$$= \sum_{v=1}^{a(q)} \mathrm{D}(a(l) + t)\,.\,\alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+v}\, \alpha_v^{a(q-1)+j}$$
$$+ \sum_{v=1}^{a(q)} \alpha_{a(i-1)+k}^{a(l)+v}\, \mathrm{D}(a(l) + v)\,.\,\alpha_t^{a(q-1)+j}$$
$$= -\,\mathrm{D}(a(i-1) + k)\,.\,\alpha_t^{a(q-1)+j},$$

soit :

$$\mathrm{D}(a(l) + t)\,.\,(\mathrm{D}(a(i-1) + k)\,.\,\mathrm{H}_{a(l)+a(q-1)+j})$$
$$= \mathrm{D}(a(i-1) + k)\,.\,(\mathrm{D}(a(l) + t)\,.\,\mathrm{H}_{a(l)+a(q-1)+j}).$$

Pour h tel que $q+1 \leqslant i \leqslant h \leqslant l$, $1 \leqslant r_q - r_h - 1$ et $1 \leqslant u \leqslant p_h$, le même calcul montre que :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}(a(h-1)+u).(\mathrm{D}(a(i-1)+k).\mathrm{H}_{a(l)+a(q-1)+j}) \\
&\qquad = -\sum_{v=1}^{a(q)} \mathrm{D}(a(h-1)+u).\alpha^{a(l)+v}_{a(i-1)+k}\,\alpha^{a(q-1)+j}_{v} \\
&\qquad + \sum_{w,v=1}^{a(q)} \alpha^{a(l)+w}_{a(i-1)+k}\,\mathrm{D}(a(l)+w).\alpha^{a(l)+v}_{a(h-1)+u}\,\alpha^{a(q-1)+j}_{v} \\
&\qquad + \sum_{w,v=1}^{a(q)} \alpha^{a(l)+w}_{a(i-1)+k}\,\alpha^{a(l)+v}_{a(h-1)+u}\,\mathrm{D}(a(l)+v).\alpha^{a(q-1)+j}_{w}.
\end{aligned}$$

Puisque $i \leqslant h$, on a : $r_h \leqslant r_i \leqslant r_q - 2$, donc :

$$\mathrm{N}^{r_i+1}\,\mathrm{X}_{a(i-1)+k} = \mathrm{N}^{r_i+1}\,\mathrm{X}_{a(h-1)+u} = 0.$$

Le sous-fibré vectoriel $\mathrm{Ker}\mathrm{N}^{r_i+1}$ est, par hypothèse, stable pour le crochet des champs de vecteurs, donc :

$$\mathrm{N}^{r_i+1}([\mathrm{X}_{a(i-1)+k}, \mathrm{X}_{a(h-1)+u}]) = 0.$$

On en déduit, compte tenu de (39) :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}(a(h-1)+u).(\mathrm{D}(a(i-1)+k).\mathrm{H}_{a(l)+a(q-1)+j}) \\
&\qquad = \mathrm{D}(a(i-1)+k).(\mathrm{D}(a(h-1)+u).\mathrm{H}_{a(l)+a(q-1)+j}).
\end{aligned}$$

Donc les ensembles d'équations (57), (64) et (65) sont compatibles et on obtient les fonctions $\mathrm{H}_{a(l)+a(q-1)+j}$ par quadratures.

Supposons maintenant qu'on a montré l'existence des fonctions $\mathrm{H}_{r'a(m)+b(m)+a(q-1)+j}$, pour

$$r' = 1,2, \ldots, r, \ (1 \leqslant j \leqslant p_q,\ 1 \leqslant r \leqslant r_q - 1),$$

solutions, au voisinage de x, des ensembles d'équations (57), (58), (59), (60), (61), (62), (63) et (64). On en déduit, par des calculs du même type que les précédents, l'existence des fonctions $\mathrm{H}_{(r+1)a(n)+b(n)+a(q-1)+j}$: les équations (57), ... (64) sont compatibles et on obtient les fonctions $\mathrm{H}_{(r+1)a(n)+b(n)+a(q-1)+j}$ par des quadratures. Ainsi, par récurrence, on obtient toutes les fonctions $\mathrm{H}_{ra(n)+b(n)+a(q-1)+j}$, $(1 \leqslant r \leqslant r_q)$.

C

Degré de $p(\lambda) = 2$.

Alors : dimension de $V = n = 2n'$.

Soient $\sigma \pm i\tau$ $(\tau \neq 0)$ les racines de $p(\lambda) = 0$. (On pose $\rho = \sigma + i\tau$).

La partie complètement réductible S de J est un polynôme en J à coefficients constants (réels) sur V (cf. chapitre II, p. 343); il en est donc de même pour la 1-forme 0-déformable $J_s = \frac{1}{\tau}(S - \sigma Id_{T(V)})$, et par suite, le tenseur de Nijenhuis, associé à J_s, est nul, d'après (11).

D'autre part, on a $p(S) = 0$; on en déduit :

$$J_s^2 = - Id_{T(V)}.$$

Ainsi, J_s détermine sur V une structure presque complexe qui est intégrable d'après le théorème de Newlander et Nirenberg [17], et on peut introduire, au voisinage de tout point x de V, un système de coordonnées $u_1, \ldots, u_n$, réelles, tel que les fonctions : $z_j = u_j + iu_{n'+j}$, $(1 \leqslant j \leqslant n')$, déterminent un système de coordonnées locales complexes : V est donc la variété réelle sous-jacente d'une variété complexe $\tilde{V}$.

On a, pour $1 \leqslant j \leqslant n'$:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u_j} - i\frac{\partial}{\partial u_{n'+j}}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u_j} + i\frac{\partial}{\partial u_{n'+j}}\right).$$

Les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n}$, sont des sections, au voisinage de x, du fibré tangent $T(\tilde{V})$ de $\tilde{V}$.

Soit $T^c(V)$, (resp. $T^c(V)^*$), le complexifié de $T(V)$, (resp. $T(V)^*$).

Toute section H de $T(V) \otimes T(V)^*$ s'étend canoniquement en une section H^c de $T^c \otimes T^c(V)^*$.

Les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z_j}$, $\left(\text{resp. } \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)$, $(1 \leqslant j \leqslant n')$, sont des sections locales de $\varepsilon^1(J^c).T^c(V)$, (resp. $\varepsilon^2(J^c).T^c(V)$), (cf. chapitre II, p. 341), c'est-à-dire qu'ils engendrent, au voisi-

nage de x, l'espace propre de S^c, correspondant à la valeur propre ρ, (resp. $\bar{\rho}$).

Les polynômes P en J, à coefficients constants sur V, induisent des sections de $T^c(V) \otimes T^c(V)^*$ qui sont des endomorphismes de $\varepsilon^1(J^c).T^c(V)$ et $\varepsilon^2(J^c).T^c(V)$, donc, de manière naturelle, des 1-formes $\tilde{P}$ sur $\tilde{V}$ à valeurs dans $T(\tilde{V})$. Nous allons montrer que ces formes $\tilde{P}$ sont holomorphes.

On vérifie facilement que la formule (11) est encore valable si P et Q sont des polynômes en J^c à coefficients constants sur V, X et Y des sections de $T^c(V)$. On en déduit, pour

$$P = S^c, \quad X = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial z_j} \quad (1 \leqslant i,\ j \leqslant n'):$$

$$\bar{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}, Q\frac{\partial}{\partial z_j}\right] = S^c\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}, Q\frac{\partial}{\partial z_j}\right] + \bar{\rho}Q\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right] - S^c.Q\left(\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right]\right),$$

soit :

$$\bar{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}, Q\frac{\partial}{\partial z_j}\right] = S^c\left(\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}, Q\frac{\partial}{\partial z_j}\right]\right).$$

Posons : $Q\dfrac{\partial}{\partial z_j} = \sum\limits_{k=1}^{n'} \alpha_j^k \dfrac{\partial}{\partial z_k}$. On a, alors :

$$\sum_{k=1}^{n'} \frac{\partial \alpha_j^k}{\partial \bar{z}_i}\left(\bar{\rho}\frac{\partial}{\partial z_k} - S^c\frac{\partial}{\partial z_k}\right) = 0,$$

soit :

$$\sum_{k=1}^{n'} \frac{\partial \alpha_j^k}{\partial \bar{z}_i}(\bar{\rho} - \rho)\frac{\partial}{\partial z_k} = 0,$$

donc :

$$\frac{\partial \alpha_j^k}{\partial \bar{z}_i} = 0.$$

Ainsi, en particulier, $\tilde{S}$ et $\tilde{N}$, induites sur $\tilde{V}$, respectivement par S et la partie nilpotente N de J sont holomorphes.

On a :

$$\tilde{S} = \rho\,\widetilde{Id},$$
$$\tilde{J} = \rho\,\widetilde{Id} + \tilde{N},$$

où $\widetilde{Id}$ est la 1-forme identité sur $\tilde{V}$.

Pour résoudre le problème de l'intégrabilité de la G_J-structure déterminée par J sur V, il suffit donc maintenant de

déterminer un nouveau système de coordonnées z'_j sur $\tilde{V}$, au voisinage de x, (z'_j fonctions holomorphes de $z_1, \ldots, z_{n'}$), tel que les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z'_j}$ déterminent un champ local de repères dans lequel $\tilde{N}$ s'écrie sous la forme (5).

De (11) étendu au complexe, on déduit tout d'abord que le sous-fibré vectoriel $\varepsilon^1(J^c).T^c(V)$ est stable pour le crochet des champs de vecteurs, et ensuite que :

$$(66) \quad [\tilde{N}^s X, \tilde{N}^t Y] = \tilde{N}^s[X, \tilde{N}^t Y] + \tilde{N}^t[\tilde{N}^s X, Y] - \tilde{N}^{s+t}[X, Y],$$

pour toutes les sections X et Y de $T(\tilde{V})$.

D'après la remarque page 354, puisque N est un polynôme en J à coefficients réels, dans une G_J-connexion quelconque, on a, pour toutes les sections X et Y de T(V) :

$$D_X N Y = N D_X Y,$$

donc, dans une G_J-connexion à torsion nulle, si la section X, (resp. Y) de T(V) satisfait à $N^s X = 0$ (resp. $N^s Y = 0$), on a, au voisinage de tout point x de V :

$$N^s[X, Y] = N^s(D_X Y - D_Y X) = D_X N^s Y - D_Y N^s X = 0;$$

Ker N^s est donc stable pour le crochet des champs de vecteurs; on en déduit la même propriété pour $\mathrm{Ker}(N^c)^s$, puis pour Ker $\tilde{N}^s$, puisque :

$$\mathrm{Ker}\, \tilde{N}^s = \mathrm{Ker}(N^c)^s \cap \varepsilon^1(J^c).T^c(V).$$

Comme dans le cas d'une valeur propre réelle (cf. B), on en déduit, en tenant compte de (66), la stabilité pour le crochet des champs de vecteurs des sous-fibrés vectoriels de $T(\tilde{V})$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ker}\ \tilde{N}^{r_1+1} = \mathrm{Im}\ \tilde{N}^0 \supset \mathrm{Ker}\ \tilde{N}^{r_2+1} + \mathrm{Im}\ \tilde{N} \supset \cdots \supset \mathrm{Ker}\ \tilde{N}^{r_i+1} \\
&\quad + \mathrm{Im}\ \tilde{N} \supset \cdots \supset \mathrm{Ker}\ \tilde{N}^2 + \mathrm{Im}\ \tilde{N} \supset \mathrm{Ker}\ \tilde{N} + \mathrm{Im}\ \tilde{N} \supset \mathrm{Im}\ \tilde{N} \\
&\quad \supset \cdots \supset \mathrm{Im}\ \tilde{N}^{r'} \supset (\mathrm{Ker}\ \tilde{N}^{r_2-r'+1} \cap \mathrm{Im}\ \tilde{N}^{r'}) + \mathrm{Im}\ \tilde{N}^{r'+1} \\
&(67) \\
&\quad \supset \cdots \supset \mathrm{Ker}\ (\tilde{N}^{r_k-r'+1} \cap \mathrm{Im}\ \tilde{N}^{r'}) + \mathrm{Im}\ \tilde{N}^{r'+1} \\
&\quad \supset \cdots \supset (\mathrm{Ker}\ \tilde{N}^{r_j-r'+1} \cap \mathrm{Im}\ \tilde{N}^{r'}) + \mathrm{Im}\ \tilde{N}^{r'+1} \\
&\quad \supset \mathrm{Im}\ \tilde{N}^{r'+1} \supset \cdots \supset \mathrm{Im}\ \tilde{N}^{r_2+1} \supset \cdots \supset \mathrm{Im}\ \tilde{N}^{r_2+r''} \supset \cdots \supset \mathrm{Im}\ \tilde{N}^{r_1}
\end{aligned}$$

où

$$2 \leqslant i \leqslant l-1, \quad r_{j+1}+1 \leqslant r' \leqslant r_j, \quad 2 \leqslant k \leqslant j \leqslant l-1,$$
$$1 \leqslant r'' \leqslant r_1 - r_2, \quad r_1 > r_2 > \ldots > r_{l-1} > r_l = 0,$$
$$p_i > 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant l-2, \quad r_{l-1} = 1 \quad \text{avec} \quad p_{l-1} \geqslant 0,$$
$$r_l = 0 \quad \text{avec} \quad p_l \geqslant 0,$$

(pour la définition des r_i et des p_i, voir chapitre II).

On a donc, pour $\tilde{V}$, l'analogue de la proposition III,3 :

Proposition III, 3′. — *La nullité du tenseur de structure de la* G_J*-structure entraîne que les sous-fibrés de* (67), *ainsi que les sous-fibrés* Ker $\tilde{N}^s$, $(1 \leqslant s \leqslant r_1)$, *sont stables pour le crochet des champs de vecteurs et que le tenseur* $T_{\tilde{N}}$ *de Nijenhuis est nul, soit :*

$$T_{\tilde{N}}(X, Y) = [\tilde{N}X, \tilde{N}Y) - \tilde{N}[X, \tilde{N}Y] - \tilde{N}[\tilde{N}X, Y] + \tilde{N}^2[X, Y] = 0.$$

Comme $\tilde{N}$ est holomorphe, les mêmes calculs que dans le cas réel, avec des fibrés vectoriels, champs de vecteurs et fonctions holomorphes, montrent que ces conditions sont suffisantes pour qu'il existe, au voisinage de tout point x de $\tilde{V}$, un système de coordonnées $z'_1, \ldots, z'_{n'}$, tel que, par rapport au champ local de repères déterminé par les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z'_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant n')$, $\tilde{N}$ s'écrive sous la forme (5); les coordonnées réelles correspondantes, au voisinage de x dans V, détermineront un champ local de repères adaptés pour J.

Ceci achève la démonstration des théorèmes III, 1 et III, 1′.

D

Remarques.

On ne suppose plus le tenseur de structure nul. On suppose simplement la nullité du tenseur de Nijenhuis :

$$T(X, Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] + J^2[X, Y].$$

De la note page 351, on déduit qu'on a aussi (10) et (11), ce qui entraîne encore les propositions III, 1 et III, 2; on peut

donc encore se ramener au cas où J a une seule valeur propre réelle, ou un seul couple de valeurs propres imaginaires conjuguées. Dans ce dernier cas, la partie complètement réductible S de J permet encore de munir V d'une structure presque complexe intégrable et S induit, sur $\tilde{V}$, la 1-forme

$$\tilde{S} = \rho\, \widetilde{\mathrm{Id}}.$$

On a ainsi :

THÉORÈME III, 2. — *Considérons la* G_J*-structure définie sur une variété* V *par une* 1*-forme* 0*-déformable* J *quelconque. Si le tenseur de Nijenhuis :*

$$T(X, Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] + J^2[X, Y],$$

est nul, la partie complètement réductible S *de* J *définit une* G_S*-structure intégrable. La nullité du tenseur de structure de cette* G_S*-structure équivaut à la nullité du tenseur de Nijenhuis,* T_S, *associé à* S :

$$T_S(X, Y) = [SX, SY] - S[X, SY] - S[SX, Y] + S^2[X, Y].$$

Dans le cas où J a une seule valeur propre réelle λ_1, on a, (cf. B) $J = \lambda_1 \mathrm{Id}_{T(V)} + N$. On déduit de (11) :

$$(68) \quad [N^sX, N^tY] - N^s[X, N^tY] - N^t[N^sX, Y] + N^{s+t}[X, Y] = 0.$$

Dans le cas particulier où $l = 1$, $p_1 > 0$, (alors $n = (r_1 + 1)p_1$), la suite de fibrés (14) se réduit à :

$$\mathrm{Ker}\, N^{r_1+1} = \mathrm{Im}\, N^0 \supset \mathrm{Im}\, N \supset \cdots \supset \mathrm{Im}\, N^r \supset \cdots \supset \mathrm{Im}\, N^{r_1}, \quad (1 \leqslant r \leqslant r_1)$$

et on a :

$$\mathrm{Ker}\, N^r = \mathrm{Im}\, N^{r_1-r+1}.$$

(68) suffit donc pour prouver la stabilité, pour le crochet des champs de vecteurs, de ces fibrés vectoriels.

Dans le cas où J a un seul couple de valeurs propres imaginaires conjuguées, on a sur $\tilde{V}$, (cf. C) :

$$\tilde{J} = \rho\, \widetilde{\mathrm{Id}} + \tilde{N}.$$

Dans C, on n'a utilisé que (11) pour montrer que $\tilde{N}$ était holomorphe, et que :

$$[\tilde{N}^s X, \tilde{N}^t Y] = \tilde{N}^s[X, \tilde{N}^t Y] + \tilde{N}^t[\tilde{N}^s X, Y] - \tilde{N}^{s+t}[X, Y].$$

Comme dans le cas réel, si $l = 1$, cela suffit pour montrer que les fibrés de (67) et Ker N^s sont stables pour le crochet des champs de vecteurs.

On a donc le :

THÉORÈME III, 3. — *Considérons la* G_J*-structure définie sur une variété* V *par une* 1*-forme* 0*-déformable* J *quelconque. Si les ensembles d'entiers* $(r_1, \ldots, r_l)$, $(p_1, \ldots, p_l)$ *associés à chaque valeur propre réelle et chaque couple de valeurs propres imaginaires conjuguées sont tels que* $l = 1$, *alors les* 3 *propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le tenseur de Nijenhuis,*

$$T(X, Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] + J^2[X, Y],$$

est nul.

2. J *définit une* G_J*-structure intégrable.*

3. *Le tenseur de structure de cette* G_J*-structure est nul.*

Ce théorème s'applique en particulier aux structures presque tangentes, (cf. H. A. Eliopoulos [6]) :

une seule valeur propre : 0,
$r_1 = 1$.

On ne peut pas espérer, dans le cas général, déduire de la nullité du tenseur de Nijenhuis la stabilité pour le crochet des champs de vecteurs des fibrés vectoriels de (14) ou de (67) et des fibrés Ker N^s ou Ker $\tilde{N}^s$. Considérons en effet, l'exemple cité par Kobayashi [12], p. 976 :
x, y, z, t, sont les coordonnées ;

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad X_4 = \frac{\partial}{\partial t} + (1 + z)\frac{\partial}{\partial x}.$$

On définit J par :

$$JX_1 = X_2,$$
$$JX_i = 0, \quad i = 2,3,4.$$

On vérifie facilement que :

$$J^2 = 0,$$
$$[JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] + J^2[X, Y] = 0,$$
$$[X_3, X_4] = X_1.$$

Ainsi Ker J n'est pas stable pour le crochet des champs de vecteurs et la G_J-structure n'est pas intégrable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Bernard, Sur la géométrie différentielle des G-structures, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 10, (1960), 151-270.

[2] N. Bourbaki, Algèbre, chap. vii (*act. sc. ind. Hermann, Paris*).

[3] C. Chevalley, Theory of Lie groups, I, *Princeton University Press* (1946).

[4] J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, *Academic Press* (1960).

[5] C. Ehresmann, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré principal, *Colloque de topologie, Bruxelles* (1950), 29-55.

[6] H. A. Eliopoulos, *C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris*, 255 (1962), 1563.

[7] V. W. Guillemin, The geometry of G-structures of finite type, *thesis, Harvard Univ., Cambridge* Mass. (1962).

[8] P. R. Halmos, Finite dimensional vector spaces, *Princeton University Press* (1948).

[9] T. Hangan, *C. R. de l'Acad. des Sciences de Paris*, 255 (1962), 452-453.

[10] S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces, *Academic Press* (1962).

[11] N. Jacobson, Lectures in Abstract Algebra, vol. II, *Van Nostrand New York* (1953), 130-132.

[12] E. T. Kobayashi, A remark on the Nijenhuis tensor, *Pacific Journal of Math.* 12 (1962), 963 et 1467.

[13] J. L. Koszul, Lectures of fibre bundles and differential geometry, Tata Institute of fundamental research, Bombay (1960).

[14] S. Lang, Introduction to differentiable manifolds, Interscience Publishers (1962).

[15] J. Lehmann-Lejeune, *C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris*, 259 (1964), p. 4216 et 260 (1965), p. 772.

[16] A. Lichnerowicz, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Rome (1955).

[17] A. Newlander and L. Nirenberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, *Annals of Math.* 65 (1957), 391.

[18] K. Nomizu, Lie groups and differential geometry, *Publications de la Math. Soc. of Japan* (1956).

[19] I. M. SINGER and S. STERNBERG. On the infinite groups of Lie and Cartan, I (to appear).

[20] A. G. WALKER, Almost-product structures, Proceedings of Symposia in pure mathematics, vol. III, differential geometry, *Amer. Math. Soc.*, (1961), p. 94.

(*Thèse, Fac. Sciences*, Paris, 1966).

Madame J. Lehmann.
Faculté des Sciences, Département de Mathématiques
351, Cours de la Libération - Talence-Bordeaux.