

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PAUL-ANDRÉ MEYER

Caractérisation des noyaux potentiels des semi-groupes discrets

Annales de l'institut Fourier, tome 16, n° 2 (1966), p. 225-240

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_2_225_0

© Annales de l'institut Fourier, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CARACTÉRISATION DES NOYAUX POTENTIELS DES SEMI-GROUPES DISCRETS

par Paul-André MEYER

Soit E un espace localement compact, et soit G un noyau sur E , qui applique l'espace \mathcal{K} des fonctions continues à support compact dans l'espace \mathcal{C}_0 des fonctions continues nulles à l'infini, et dont l'image $G(\mathcal{K})$ est dense dans \mathcal{C}_0 . Un théorème célèbre de Hunt [2] affirme alors que G satisfait au principe complet du maximum si et seulement si G est le noyau potentiel $\int_0^\infty P_t dt$ d'un semi-groupe sous-markovien (P_t) . Il est naturel de chercher à caractériser de manière analogue les noyaux potentiels de semi-groupes discrets — c'est-à-dire les noyaux de la forme $I + N + N^2 + \dots$, où N est un noyau sous-markovien sur E . Si l'on ne considère que des noyaux G qui satisfont aux hypothèses soulignées ci-dessus, la réponse est facile : G est potentiel d'un semi-groupe discret si et seulement si G satisfait à un principe analogue au principe complet du maximum, mais un peu plus fort ⁽¹⁾. Malheureusement, les hypothèses en italiques ne sont pas naturelles dans l'étude des semi-groupes discrets. Nous essayons ci-dessous de parvenir à une caractérisation des potentiels de semi-groupes discrets sans aucune condition de continuité, sur un espace mesurable quelconque : nous aboutissons ainsi à une condition nécessaire et suffisante horrible.

1. Rappels sur les semi-groupes discrets.

Dans toute la suite, (E, \mathcal{E}) désigne un espace mesurable; le mot « fonction » signifie « fonction mesurable à valeurs réelles ».

⁽¹⁾ Voir [3].

définie dans E »; de même le mot « ensemble » (lorsqu'il désigne une partie de E) signifie toujours « ensemble mesurable ». Nous dirons qu'un noyau G sur E est *propre* s'il existe une suite croissante (A_n) de sous-ensembles de E , telle que $\bigcup_n A_n = E$, et que $G(I_{A_n})$ soit borné pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit N un noyau sous-markovien sur E ; si le noyau

$$G = I + N + N^2 \dots$$

est propre, nous dirons que G est le noyau potentiel associé à N .

Une fonction positive f est dite *excessive* (par rapport à N) si on a $Nf \leq f$, *invariante* si on a $Nf = f$, et si f est finie. Le potentiel Gh d'une fonction $h \geq 0$ est une fonction excessive; si Gh est fini, la seule fonction invariante majorée par Gh est la fonction zéro. Toute fonction excessive finie f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction invariante (égale à $\lim_{n \rightarrow \infty} N^n f$) et d'un potentiel (celui de $f - Nf$).

Soit A un ensemble: on désigne par A' le complémentaire de A , par J_A (resp. $J_{A'}$) le noyau de multiplication par la fonction indicatrice I_A (resp. $I_{A'}$), par N_A (resp. $N_{A'}$) le noyau NJ_A (resp. $NJ_{A'}$), par $G_{A'}$ (resp. G_A) le noyau potentiel associé à N_A (resp. $N_{A'}$). On pose enfin

$$H_A = J_A + J_{A'} G_{A'} N_A \quad (\text{noyau de « réduction » sur } A).$$

On établit les faits suivants (voir Deny [1]):

— H_A est un noyau sous-markovien; les mesures $\varepsilon_x H_A$ sont portées par A ; on a $\varepsilon_x H_A = \varepsilon_x$ pour $x \in A$; on a $\varepsilon_x N H_A = \varepsilon_x H_A$ pour $x \notin A$.

— Pour toute fonction excessive f , $H_A f$ est la plus petite fonction excessive qui majore f sur A ; en particulier, $H_A f \leq f$.

— Si h est une fonction positive nulle hors de A , on a $H_A G h = G h$.

On en déduit le résultat suivant, fondamental pour la suite:

THÉORÈME 1. — Soit h une fonction excessive; la relation

$$(1) \quad h(x) \geq Gg(x) \quad \text{pour tout } x \in \{g < 0\},$$

où g désigne une fonction positive, entraîne la relation $h \geq Gg$.

Appliquons en effet aux deux membres de (1) le noyau H_A , en posant $A = \{g > 0\}$; les mesures $\epsilon_x H_A$ étant portées par A , on a $H_A h \geq H_A Gg$. Mais on a $h \geq H_A h$, $H_A Gg = g$.

COROLLAIRE 1. — *Soit h une fonction excessive; la relation*

$$h(x) \geq Gg(x) \quad \text{pour tout } x \in \{g > 0\}$$

où g désigne une fonction (non nécessairement positive) telle que $G|g|$ soit fini, entraîne la relation $h \geq Gg$.

En effet, la fonction excessive $h + G(g^-)$ majore $G(g^+)$ sur $\{g^+ > 0\}$, donc partout.

COROLLAIRE 2 (principe complet du maximum). — *La relation*

$$a + Gf(x) \geq Gg(x) \quad \text{pour tout } x \in \{g > 0\},$$

où a désigne une constante > 0 , et où f et g sont des fonctions positives, entraîne la relation $a + Gf \geq Gg$.

En effet, $a + Gf$ est excessive.

COROLLAIRE 3. — *La relation*

$$a + Gf(x) - f(x) \geq Gg(x) \quad \text{pour tout } x \in \{g > 0\},$$

où a, f, g désignent respectivement une constante > 0 , une fonction positive finie, une fonction positive, entraîne la relation $a + Gf - f \geq Gg$.

En effet, $a + Gf - f = a + GNf$ est excessive.

Nous aurons besoin dans la suite de savoir caractériser les potentiels au moyen des opérateurs H_A .

THÉORÈME 2. — *Soit f une fonction excessive finie; pour que f soit un potentiel, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite:*

pour toute suite décroissante (A_n) d'ensembles, telles que

$$\bigcap_n A_n = \emptyset, \text{ on a } \lim_{n \rightarrow \infty} H_{A_n} f = 0.$$

En effet, supposons que g soit un potentiel fini, et soit $g_n = H_{A_n} g$; les g_n décroissent vers une fonction $g' \leq g$, et sont majorés par g . Comme $Ng \leq g$ est finie, on peut appliquer

le théorème de Lebesgue et il vient

$$Ng' = \lim_{n \rightarrow \infty} Ng_n = \lim_{n \rightarrow \infty} NH_{A_n}g.$$

Mais $NH_{A_n}g = H_{A_n}g$ sur $E - A_n$, donc (comme $\bigcap_n A_n = \emptyset$) on a $Ng' = g'$; g' est une fonction invariante majorée par un potentiel, et cela entraîne que $g' = 0$.

Inversement, supposons que g ne soit pas un potentiel: il existe alors une fonction invariante $h \neq 0$ majorée par g , et il nous suffit de construire une suite croissante (B_n) d'ensembles, telle qu'on ait $E = \bigcup_n B_n$, et $H_{A_n}h = h$, où A_n désigne $E - B_n$.

Soit B un ensemble tel que $G_B h$ soit fini, et soit $A = E - B$. On a $N_B h + N_A h = Nh = h$, donc

$$H_A h = J_A h + J_B G_B N_A h = J_A h + J_B G_B (h - N_B h)$$

mais $G_B (h - N_B h) = h$, donc $H_A h = J_A h + J_B h = h$.

Soit alors (C_n) une suite croissante d'ensembles, dont la réunion est E , telle que $G(I_{C_n})$ soit borné pour tout n ; soit $B_n = C_n \cap \{h \leq n\}$. On a $G_{B_n} h \leq G(h I_{B_n}) \leq n G(I_{C_n})$; $G_{B_n} h$ est donc fini, et le théorème est établi.

2. Rappels sur les résolvantes sous-markoviennes⁽²⁾.

On appelle *résolvante sous-markovienne* sur (E, \mathcal{E}) une famille $(V_p)_{p>0}$ de noyaux sur E , possédant les propriétés suivantes:

- 1) pV_p est sous-markovien pour tout $p > 0$;
- 2) $V_p V_q = V_q V_p$ pour tout couple (p, q) de nombres > 0 ;
- 3) si $p < q$, on a $V_p = V_q + (q - p)V_q V_p$.

Les noyaux V_p croissent lorsque p décroît: nous pouvons donc considérer le noyau:

$$V_0 = \sup_p V_p = \lim_{p \rightarrow 0} V_p;$$

Si V_0 est *propre*, nous dirons que V_0 est le *noyau potentiel*

⁽²⁾ Les « rappels » ci-dessous font double emploi avec le chapitre IX d'un livre à paraître. A défaut de pouvoir y référer, j'ai donné les démonstrations des résultats les moins classiques.

associé à la résolvante (V_p) , et nous le désignerons par V . Les fonctions de la forme Vf , où f est positive, seront appelées *potentiels*. On a évidemment $VV_p = V_p V$, $V = V_p + pVV_p$ pour tout $p > 0$.

On dit qu'une fonction $f \geq 0$ est *surmédiane* (par rapport à la résolvante (V_p)) si l'on a $pV_p f \leq f$ pour tout $p > 0$; si on a de plus $f = \lim_{p \rightarrow \infty} pV_p f$, on dit que f est *excessive*. On peut montrer que si f est surmédiane, $pV_p f$ tend en croissant, lorsque $p \rightarrow \infty$, vers une fonction excessive $\hat{f} \leq f$, et que l'ensemble $A = \{f > \hat{f}\}$ est un *ensemble de potentiel nul* ($V(I_A) = 0$).

Tout potentiel Vf ($f \geq 0$) est une fonction excessive. Inversement, toute fonction excessive est enveloppe supérieure d'une suite croissante de potentiels. En particulier, si f est une fonction excessive telle que Vf soit finie, on a

$$pV_p f = pV(f - pV_p f),$$

et f est la limite de la suite croissante des potentiels $pV_p f$ ($p \in \mathbb{N}$).

On établit la formule $I + pV = \sum_{n=0}^{\infty} (pV_p)^n$, et on en déduit le théorème suivant (voir Deny [1]).

THÉORÈME 3. — Soit h une fonction surmédiane pour la résolvante (V_p) . La relation suivante, où g désigne une fonction positive :

$$h(x) \geq Vg(x) \quad \text{pour tout } x \in \{g > 0\},$$

entraîne la relation $h \geq Vg$.

COROLLAIRE 1. — Le noyau V satisfait au principe complet du maximum (voir le corol. 2 du th. 1).

COROLLAIRE 2. — Soit h une fonction surmédiane; la relation

$$(2) \quad h(x) \geq Vg(x) \quad \text{pour tout } x \in \{g > 0\},$$

où g désigne une fonction (non nécessairement positive) telle que $V(|g|)$ soit fini, entraîne la relation $h \geq Vg$.

La démonstration est la même que celle du corollaire 1 du théorème 1. On notera qu'il n'y a pas ici de résultat analogue au corollaire 3 du théorème 1.

Nous aurons besoin dans la suite de la réciproque suivante du corollaire 2 :

THÉORÈME 4. — *Soit h une fonction positive, telle que la relation*

$$h(x) \geq Vg(x) \quad \text{pour tout } x \in \{g > 0\},$$

où g désigne une fonction (non nécessairement positive) telle que $V(|g|)$ soit borné, entraîne la relation $h \geq Vg$. La fonction h est alors surmédiane par rapport à la résolvante (V_p) .

Tout revient à montrer qu'on a $h \geq pV_p h$; il suffit pour cela de prouver qu'on a $h \geq pV_p f$ pour toute fonction positive $f \leq h$, dont le potentiel Vf est borné. Posons $g = p(f - pV_p f)$; comme f et $pV_p f$ ont un potentiel borné, car

$$V(pV_p f) = V_p(pVf) \leq pVf,$$

il en est de même de $|g|$. On a $Vg = pV_p f$; mais on a

$$h \geq pV_p f = Vg \quad \text{sur l'ensemble } \{h > pV_p f\}$$

et à plus forte raison sur l'ensemble $\{f > pV_p f\} = \{g > 0\}$. On a donc partout $h \geq pV_p f$, et le théorème est établi.

Nous aurons besoin aussi du résultat suivant, qui exprime qu'il existe des « pseudo-réduites » pour toutes les résolvantes sous-markoviennes (on prendra soin de ne pas confondre ces « pseudo-réduites » H_A avec les véritables réduites, qui s'obtiennent en remplaçant les fonctions surmédianes par les fonctions excessives : la véritable réduite d'une fonction excessive sur un ensemble A ne coïncide pas forcément avec cette fonction sur A).

THÉORÈME 5. — *Soit A un sous-ensemble de E . On peut associer à toute fonction surmédiane f une fonction surmédiane $H_A f$, de telle sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :*

1) $H_A f$ est la plus petite fonction surmédiane qui majore f sur A ; on a $H_A f \leq f$, $H_A f(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. La relation $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in A$ entraîne $H_A f \leq H_A g$.

2) Si (f_n) est une suite croissante de fonctions surmédianes, et si $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, on a $H_A f = \lim_{n \rightarrow \infty} H_A f_n$.

3) Si h est une fonction positive nulle hors de A , on a

$$H_A Vh = Vh.$$

4) Si f et g sont des fonctions surmédianes, on a

$$H_A(f + g) = H_A f + H_A g.$$

Désignons par N_p le noyau sous-markovien pV_p , par G_p le noyau potentiel associé à N_p (qui est le noyau propre $I + pV$), par H_A^p l'opérateur de « réduction » sur A associé à ce noyau. Soit v une fonction excessive pour N_p ; nous allons montrer que v est excessive pour N_q , quel que soit $q < p$. Comme G_p est propre, il suffit de montrer ceci lorsque v est un G_p -potentiel borné $v = G_p h = (I + pV)h$ ($h \geq 0$); on a alors

$$\begin{aligned} qV_q v &= qV_q (I + pV)h = qV_q h + p(Vh - V_q h) \\ &= (q - p)V_q h + pVh \leq pVh \leq v. \end{aligned}$$

Considérons maintenant une fonction f , surmédiane par rapport à la résolvante (V_p) ; f est alors N_p -excessive pour tout $p > 0$. Si l'on a $q < p$, il y a plus de fonctions N_q -excessives que de fonctions N_p -excessives, d'après ce qui précède: la réduite $H_A^q f$ est donc plus petite que $H_A^p f$. Lorsque $p \rightarrow +\infty$, $H_A^p f$ tend donc en croissant vers une limite, que nous noterons $H_A f$. On a évidemment $H_A f \leq f$, $H_A f = f$ sur A ; $H_A^p f$ étant N_q -excessive pour tout $p > q$, $H_A f$ est N_q -excessive; q étant arbitraire, cela signifie que $H_A f$ est surmédiane par rapport à la résolvante (V_p) . Si f et g sont deux fonctions surmédianes, la relation $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in A$ entraîne $H_A^p f \leq H_A^p g$, donc $H_A f \leq H_A g$; elle entraîne donc que $H_A f \leq g$, ce qui prouve que $H_A f$ est la plus petite fonction surmédiane qui majore f sur A . Si (f_n) est une suite croissante de fonctions surmédianes, et si $f = \sup_n f_n$, on a $H_A^p f = \sup_n H_A^p f_n$ pour tout p , donc

$$H_A f = \sup_n H_A f_n.$$

Soit h une fonction nulle hors de A ; supposons d'abord que h soit finie. Nous avons $H_A^p G_p h = h$, ou :

$$H_A^p (I + pV)h = (I + pV)h$$

divisons par p , faisons tendre p vers $+\infty$, il vient $H_A Vh = Vh$.

Le cas où h peut prendre la valeur $+\infty$ se traite au moyen d'un passage à la limite monotone [le lecteur remarquera que nous venons de démontrer le théorème 3!]. Enfin, si f et g sont deux fonctions surmédianes, on a

$$H_A^p(f + g) = H_A^p f + H_A^p g$$

pour tout p , donc $H_A(f + g) = H_A f + H_A g$.

On ignore si H_A peut se prolonger à l'ensemble de toutes les fonctions positives, comme un noyau sous-markovien. Mais il est clair, d'après les propriétés 2) et 4), que l'application $H_A V$ qui associe à toute fonction $f \geq 0$ la fonction $H_A V f$ est un noyau propre sur E .

Nous aurons enfin besoin du théorème suivant, dû à Hunt (voir [2], p. 352); nous n'en rappellerons pas la démonstration.

THÉORÈME 6. — *Soit V un noyau sur E , tel que $V1$ soit une fonction bornée, qui satisfait au principe complet du maximum pour les fonctions bornées; il existe alors une résolvante sous-markovienne (V_p) telle que $V_0 = V$.*

On montre que cette résolvante est unique.

3. Caractérisation des potentiels discrets.

Dans toute la suite, nous désignerons par G un noyau propre sur E , par \mathcal{G} l'espace de toutes les fonctions (\mathcal{E} -mesurables) bornées sur E , par \mathcal{B} le sous-espace de \mathcal{G} constitué par les $h \in \mathcal{G}$ telles que $G|h|$ soit borné. Les fonctions de la forme Gh ($h \geq 0$) seront appelées *potentiels*, sans que cela préjuge de l'existence d'un noyau N tel que

$$G = I + N + N^2 + \dots$$

Nous supposerons aussi, dans toute la suite, que G satisfait à la condition suivante « principe du maximum renforcé ».

(MR) Si a, f, g , désignent respectivement une constante positive, et deux éléments de \mathcal{B}_+ , la relation

$$a + Gf(x) - f(x) \geq Gg(x) \quad \text{pour tout } x \in \{g > 0\}$$

entraîne la relation $a + Gf - f \geq Gg$.

Lorsque E est un espace localement compact, et lorsque G transforme les fonctions continues à support compact en fonctions *continues*, il suffit de vérifier que la propriété (MR) a lieu pour des fonctions f et g , positives, continues à support compact : on montre en effet que G transforme alors les fonctions continues à support compact en fonctions continues bornées, et que (MR) est vraie lorsque f et g sont des fonctions universellement mesurables finies quelconques. Nous ne donnerons pas ici la démonstration (qui repose sur le lemme de Dini).

Si G est de la forme $I + N + N^2 \dots$, où N est sous-markovien, nous avons vu que G satisfait à (MR) (corol. 3 du th. 1). Nous allons étudier maintenant la réciproque. Nous établirons pour cela toute une série de lemmes.

LEMME 1. — *La restriction de G à \mathcal{B} est injective.*

Soit h un élément de \mathcal{B} tel que $Gh = 0$; alors $Gh^+ = Gh^-$. On a donc $Gh^+ - h^+ \geq Gh^-$ sur l'ensemble $\{h^- > 0\}$ (car $h^+ = 0$ sur cet ensemble), donc partout. Cela entraîne que $h^+ = 0$, et de même $h^- = 0$.

LEMME 2. — *G satisfait au principe complet du maximum pour les éléments de \mathcal{B}^+ .*

Soient a une constante positive, f et g deux éléments de \mathcal{B}_+ tels qu'on ait $a + Gf(x) \geq Gg(x)$ pour tout $x \in \{g > 0\}$; posons $f \wedge g = c$, $f - c = f'$, $g - c = g'$. En retranchant Gc aux deux membres de cette relation, on obtient :

$$a + Gf'(x) \geq Gg'(x) \quad \text{pour tout } x \in \{g > 0\},$$

et à plus forte raison pour tout $x \in \{g' > 0\}$. Mais sur $\{g' > 0\}$ on a $f'(x) = 0$, et par conséquent $a + Gf'(x) - f'(x) \geq Gg'(x)$. Cette inégalité a donc lieu partout; à plus forte raison on en déduit $a + Gf' \geq Gg'$, puis $a + Gf \geq Gg$ en ajoutant Gc aux deux membres.

Nous dirons qu'une fonction $h \geq 0$ est *quasi-excessive* si la relation

$$h(x) \geq Gg(x) \quad \text{pour tout } x \in \{g > 0\}$$

où g désigne un élément de \mathcal{B} (non nécessairement positif), entraîne la relation $h \geq Gg$. Le lemme 2 exprime que toute fonction $a + Gf$ ($a \geq 0$, $f \in \mathcal{B}_+$) est quasi-excessive.

LEMME 3. — Soient f un élément de \mathfrak{B}_+ , a une constante ≥ 0 ; la fonction $a + Gf - f$ est quasi-excessive.

Supposons en effet que g soit un élément de \mathfrak{B} , et qu'on ait $a + Gf(x) - f(x) \geq Gg(x)$ pour tout $x \in \{g > 0\}$; cette relation s'écrit $a + Gf(x) - f(x) + Gg^-(x) \geq Gg^+(x)$ pour tout $x \in \{g^+ > 0\}$; mais g^- est nulle sur cet ensemble, de sorte que $a + G(f + g^-) - (f + g^-)$ majore Gg^+ sur $\{g^+ > 0\}$, donc partout. Cela entraîne immédiatement que $a + Gf$ majore Gg partout. On vérifie que $a + Gf - f$ est ≥ 0 en prenant $g = 0$.

LEMME 4. — Il existe une résolvante sous-markovienne (V_p) sur E , dont l'opérateur potentiel V est tel que $V1$ soit borné, et qui possède les propriétés suivantes :

1) L'ensemble des fonctions Gh (où h parcourt l'ensemble \mathfrak{H} des fonctions ≥ 0) coïncide avec l'ensemble des fonctions

$$Vh \ (h \in \mathfrak{H}).$$

2) Pour qu'une fonction h soit quasi-excessive, il faut et il suffit que h possède l'une des propriétés équivalentes :

a) h est surmédiane pour la résolvante (V_p)

b) h est excessive pour la résolvante (V_p) .

Le noyau G étant propre, il existe une fonction u , strictement positive en tout point de E , telle que Gu soit borné. Nous poserons pour toute fonction $f \geq 0$

$$Vf = G(uf).$$

Il est clair que V est un noyau, que $V1$ est borné, que l'ensemble des G -potentiels de fonctions positives coïncide avec l'ensemble des V -potentiels de fonctions positives. D'autre part, si f est une fonction bornée, uf appartient à \mathfrak{B} . Il résulte aussitôt du lemme 2 que V satisfait au principe complet du maximum pour les fonctions positives bornées, et donc (th. 6) qu'il existe une résolvante sous-markovienne (V_p) dont le noyau potentiel V_0 est égal à V .

Il n'existe pas d'ensemble non vide, de potentiel nul pour V : en effet, la relation $V(I_A) = 0$ entraîne $G(uI_A) = 0$, donc $uI_A \leq G(uI_A) = 0$ d'après le lemme 3, et finalement (comme

u n'est jamais nulle) $A = \emptyset$. Il n'y a donc pas lieu de distinguer les fonctions surmédianes et excessives par rapport à la résolvante (V_p) .

Soit h une fonction quasi-excessive; h est alors surmédiane pour la résolvante (V_p) d'après le théorème 4. Inversement, si h est surmédiane pour (V_p) , h est quasi-excessive d'après le corollaire 2 du théorème 3.

LEMME 5. — Soit A un sous-ensemble de E . On peut associer à toute fonction quasi-excessive f une fonction quasi-excessive $H_A f$, de telle sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

1) $H_A f$ est la plus petite fonction quasi-excessive qui majore f sur A ; on a $H_A f \leq f$, $H_A f(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. Si f et g sont deux fonctions quasi-excessives telles que $f \leq g$ sur A , on a $H_A f \leq H_A g$.

2) Si (f_n) est une suite croissante de fonctions quasi-excessives, et si $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, on a $H_A f = \lim_n H_A f_n$ (f est évidemment quasi-excessive d'après le lemme 4).

3) Si h est une fonction positive nulle hors de A , on a $H_A Gh = Gh$.

4) Si f et g sont deux fonctions quasi-excessives, on a

$$H_A(f + g) = H_A f + H_A g$$

($f + g$ est quasi-excessive d'après le lemme 4).

Ce lemme ne fait que recopier le théorème 5.

LEMME 6. — Soit h une fonction quasi-excessive bornée; posons

$$D_n h = n(h - nV_n h) \quad (n \in \mathbf{N});$$

$G(D_n h)$ tend alors en croissant vers h lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On a en effet $G(D_n h) = V(D_n h/u) = V(n(h - nV_n h)) = nV_n h$.

LEMME 7. — Soit h un élément de \mathcal{B} tel que $Gh \geq 0$; on a alors $Gh \geq h$.

On a en effet $Gh^+ \geq Gh^-$, donc $Gh^+ - h^+ \geq Gh^-$ sur $\{h^- > 0\}$, donc $Gh \geq h^+ \geq h$.

LEMME 8. — Soit h une fonction quasi-excessive bornée, et soit (u_n) une suite de fonctions positives telle que Gu_n tende en

croissant vers h . Les fonctions u_n convergent alors (en restant bornées) vers une fonction u , et on a $Gu \leq h$. Si h est un potentiel Gg ($g \geq 0$), on a $u = g$, $Gu = h$.

On a $h \geq Gu_n \geq u_n$; les u_n sont donc uniformément bornés. Soient m et n deux entiers tels que $m < n$; la relation $Gu_m \leq Gu_n$ entraîne $Gu_m - u_m \leq Gu_n - u_n$ (lemme 7), ou encore :

$$u_n \leq u_m + (Gu_n - Gu_m).$$

Considérons un point $x \in E$, et choisissons deux suites m_k, n_k d'entiers, telles qu'on ait $m_k \leq n_k$, $\lim_k u_{m_k}(x) = \limsup_n u_n(x)$, $\lim_k u_{n_k}(x) = \liminf_n u_n(x)$; la relation ci-dessus nous donne alors $\limsup_n u_n(x) \leq \liminf_n u_n(x)$, ce qui établit l'existence de u . L'inégalité $Gu \leq h$ résulte du lemme de Fatou. Enfin, supposons que $h = Gg$; l'inégalité $Gu_n \leq Gg$ nous donne $Gu_n - u_n \leq Gg - g$, donc $g \leq u_n + (Gg - Gu_n)$, et finalement $g \leq u$, d'où $Gg \leq Gu$. Finalement on parvient à l'égalité $Gg = Gu$, qui entraîne $g = u$ (lemme 1).

Remarque. — On peut montrer que $h - Gu$ est quasi-excessive.

Nous pouvons maintenant aborder la construction du noyau N tel que $G = I + N + N^2 \dots$. Si ce noyau existe, et si f est un élément de \mathcal{B}_+ , $Gf - f$ est le potentiel de la fonction Nf ; donc (en vertu des lemmes 6 et 8) $D_n(Gf - f)$ converge vers Nf . Il est donc naturel de définir ici N comme la limite de $D_n(Gf - f)$, et il nous restera à prouver que N est un noyau sous-markovien, et qu'on a $G = I + N + N^2 \dots$.

Malheureusement, cette vérification exige une hypothèse supplémentaire. Voici un exemple de noyau qui satisfait au « principe du maximum renforcé », et qui n'est pas de la forme $I + N + \dots$. Soit E' un espace discret dénombrable, sur lequel est donné un noyau markovien N' , dont le noyau potentiel G' est propre. Soit E l'espace discret obtenu en adjoignant à E' un point ω . Si f est une fonction définie sur E , notons f' sa restriction à E' . Si g est une fonction définie sur E' , notons g^0 son prolongement par 0 à E . Posons, pour toute fonction positive f sur E :

$$Gf = f(\omega) + (G'f')^0.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que G satisfait au principe (MR); d'autre part, si $f = I_{\{\omega\}}$, $Gf - f$ est bornée, vaut 1 sur E' et 0 en ω . S'il existait un noyau N tel que

$$G = I + N + N^2 + \dots$$

on aurait $Gf - f = Gg$, avec $g = N(I_{\{\omega\}})$, donc :

$$(1)^0 = Gg = (G'g')^0 + g(\omega),$$

d'où $g(\omega) = 0$, $G'g' = 1$. Mais ceci est impossible, car la fonction 1 (sur E') est invariante pour N' .

Soit (B_n) une suite croissante d'ensembles, telle que $G(I_{B_n})$ soit borné par une constante λ_n , et que la réunion de B_n soit égale à E . Nous poserons $A_n = E - B_n$. Soit (a_n) une suite de nombres strictement positifs telle qu'on ait $\sum_n a_n \lambda_n < +\infty$; nous désignerons par ω la fonction $\sum_n a_n I_{B_n}$: ω appartient à \mathcal{B}^+ , et ω est bornée inférieurement sur chacun des B_n . Nous poserons la définition suivante :

Nous dirons qu'une fonction quasi-excessive h est nulle au bord si l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_{A_n} h = 0.$$

Nous désignerons par \mathcal{B}^0 le sous-espace vectoriel de \mathcal{B} constitué par les fonctions $f \in \mathcal{B}$ telles que $G|f|$ soit nulle au bord.

D'après le théorème 2, s'il existe un noyau N tel que

$$G = I + N + N^2 + \dots,$$

on a nécessairement $\mathcal{B} = \mathcal{B}^0$. Inversement, nous allons montrer que l'on peut construire un tel noyau si \mathcal{B}^0 est suffisamment riche.

Il est clair que toute fonction f , telle que $|f|$ soit majorée par un élément de \mathcal{B}_+^0 , ou seulement telle que $G|f|$ soit majoré par un potentiel Gk ($k \in \mathcal{B}_+^0$), appartient à \mathcal{B}^0 . En particulier, l'espace \mathcal{B}^0 est stable pour les opérations latticielles.

Passons à la définition de N : pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_+^0$, nous poserons $Nf = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n(Gf - f)$ — cette limite existe d'après le lemme 8. Nous prolongerons N à \mathcal{B}^0 par linéarité.

LEMME 9. — *Soit (u_p) une suite de fonctions positives qui converge vers une fonction u , telle que les potentiels $G u_p$ soient*

majorés par une fonction quasi-excessive h nulle au bord. On a alors $Gu = \lim_{p \rightarrow \infty} Gu_p$.

Étant donné que la fonction ϖ construite plus haut a un potentiel fini, il nous suffit de montrer qu'on a la propriété d'« intégrabilité uniforme » suivante :

pour tout $x \in E$, $\int_{\{u_p > n\varpi\}} G(x, dy) u_p(y)$ tend vers 0 uniformément en p lorsque $n \rightarrow \infty$.

Majorons cette intégrale par $\int_{C_n} G(x, dy) u_p(y)$, où

$$C_n = \{h > n\varpi\}$$

contient l'ensemble $\{Gu_p > n\varpi\}$, et donc aussi $\{u_p > n\varpi\}$. Remarquons ensuite que $G(u_p, I_{C_n})$ est majoré par $H_{C_n} Gu_p$ (car $G(u_p, I_{C_n})$ est majoré par $H_{C_n} Gu_p$ sur C_n , donc partout), donc par $H_{C_n} h$. Nous sommes donc ramenés à prouver que $H_{C_n} h$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Comme h est nulle au bord, il suffit d'établir que C_n finit par être contenu dans tout A_m pour n assez grand, ou encore que $C_n \cap B_m = \emptyset$ pour n assez grand, mais cela est clair, car $C_n = \{h > n\varpi\}$, h est bornée, et ϖ est bornée inférieurement sur B_m .

LEMME 10. — 1) Toute fonction quasi-excessive h , bornée et nulle au bord, est un potentiel.

2) Soit f un élément de \mathcal{B}_+^0 ; on a $Gf - f = GNf$, Nf appartient à \mathcal{B}_+^0 (de sorte que toutes les puissances $N^a f$ sont définies) et on a :

$$Gf = f + Nf + N^2 f + \dots$$

3) La relation $f \in \mathcal{B}_+^0$, $f \leq 1$ entraîne $Nf \leq 1$.

4) Soit (f_n) une suite décroissante d'éléments de \mathcal{B}_+^0 , dont la limite est nulle. On a alors $\lim_{n \rightarrow \infty} Nf_n = 0$.

Nous savons que h est l'enveloppe supérieure des potentiels Gu_n , où $u_n = D_n h$ (lemme 6), que les u_n convergent vers une fonction u (lemme 8) : il résulte alors du lemme 9 que h est égale à Gu . En particulier, si $f \in \mathcal{B}_+^0$, appliquons ce résultat à $h = Gf - f$: nous voyons que $Gf - f = GNf$. La fonction Nf est positive, majorée par $GNf \leq Gf$; Gf étant bornée, nulle au bord, Nf est bornée et GNf est nulle au bord, autrement dit, on a $Nf \in \mathcal{B}_+^0$. Écrivons les relations $GNf = Gf - f$,

$GN^2f = GNf - Nf \dots$; il vient aussitôt que

$$Gf = f + Nf + \dots + N^kf + GN^{k+1}f.$$

Cela entraîne que $N^kf \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$; d'autre part, les potentiels GN^kf sont majorés par Gf , qui est nul au bord. Le lemme 9 entraîne donc que $GN^kf \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Autrement dit, on a $Gf = f + Nf + \dots$

Soit (f_n) une suite décroissante d'éléments de \mathcal{B}_+^0 , qui converge vers 0; Gf_n converge alors vers 0 d'après le théorème de Lebesgue; il en va donc de même pour $Gf_n - f_n = GNf_n \geq Nf_n$. Cela établit l'assertion 4.

Supposons enfin qu'on ait $f \in \mathcal{B}_+^0$, $f \leq 1$. Nous avons

$$f = G(f - Nf),$$

et donc $1 \geq G(f - Nf)$; compte tenu du lemme ci-dessous, cela nous donne $1 \geq G(f - Nf) - (f - Nf) = Nf$.

LEMME 11. — Soient a une constante ≥ 0 , g un élément de \mathcal{B} tel que $Gg \leq a$; on a alors $Gg - g \leq Gg + g^- \leq a$.

On a en effet $a + Gg^- \geq Gg^+$, donc $a + Gg^- - g^- \geq Gg^+$ sur $\{g^+ > 0\}$, et cela entraîne le même résultat partout.

Nous arrivons enfin à notre principal résultat. On remarquera qu'il est peu satisfaisant: il est difficile de reconnaître si un potentiel est nul au bord, car cela exige la connaissance des « réduites » H_A .

THÉORÈME 7. — Supposons que G soit un noyau propre qui satisfait à la condition (MR). Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- 1) Tout potentiel borné est nul au bord.
- 2) Il existe une suite croissante (f_n) de fonctions positives, dont les potentiels sont bornés et nuls au bord, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = +\infty$.

3) Il existe un noyau sous-markovien N tel que G soit le noyau potentiel associé à N .

Nous avons vu que $3) \Rightarrow 1)$ dans la première partie (th. 2). Le noyau G étant propre, il est clair que $1) \Rightarrow 2)$, et il reste à montrer que $2) \Rightarrow 3)$. Reprenons les notations du lemme 10.

L'espace \mathcal{B}^0 est stable pour l'application $h \rightarrow |h|$; la propriété 2, et les assertions 3) et 4) du lemme 10 entraînent que N se prolonge en un noyau sous-markovien (encore noté N) sur la tribu engendrée par \mathcal{B}^0 ; cela résulte aisément du théorème de prolongement de Daniell. Mais si g est une fonction mesurable positive quelconque, $g_n = f_n \wedge g$ appartient à \mathcal{B}^0 : cette tribu est donc égale à \mathcal{E} . Enfin, la relation (lemme 10, 2)

$$Gg_n = g_n + Ng_n + N^2g_n + \dots$$

passé à la limite, et montre que le noyau potentiel associé à N est G .

Exemple. — Supposons que E soit un espace localement compact dénombrable à l'infini, et que le potentiel de tout compact soit une *fonction bornée, qui tend vers 0 à l'infini*: on vérifie aussitôt que ce potentiel est alors nul au bord, et que la propriété 2) est satisfaite. Il existe donc un noyau N tel que $G = I + N + N^2 \dots$; on retrouve le résultat de [3], sans supposer que G est continu, ni que l'image de G possède une propriété de densité.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. DENY, Les noyaux élémentaires. *Séminaire de théorie du potentiel*, 4^e année, (1959). (Institut Henri-Poincaré, Paris).
- [2] G. A. HUNT, Markoff processes and potentials II. *Ill. J. of Math.*, t. 1, (1957), 316-369.
- [3] P. A. MEYER, Caractérisation des noyaux potentiels des semi-groupes discrets. *C.R. Acad. Sci.*, t. 262 (1966), série A, 121-122.

Manuscrit reçu le 13 janvier 1966.

P. A. MEYER,
Institut de Mathématiques,
(Laboratoire associé au CNRS)
Faculté des Sciences,
67, Strasbourg.