ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

VLADIMIR ARNOLD

Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits

Annales de l'institut Fourier, tome 16, nº 1 (1966), p. 319-361

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_1_319_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
16, 1 (1966), 319-361.

SUR LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES GROUPES DE LIE DE DIMENSION INFINIE ET SES APPLICATIONS A L'HYDRODYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS (1)

par V. ARNOLD

En l'année 1765, L. Euler [8] a publié les équations des mouvements d'un corps rigide, qui portent son nom. Il ne semble pas inutile de marquer le 200e anniversaire des équations d'Euler par un exposé moderne de la question.

Les mouvements eulériens du corps rigide sont les géodésiques sur le groupe des rotations de l'espace euclidien à trois dimensions, muni d'une métrique invariante à gauche. La théorie d'Euler, essentiellement, n'utilise que cette circonstance; donc les équations d'Euler sont encore valables pour un groupe arbitraire. Pour les autres groupes on obtient les « équations d'Euler » du mouvement d'un corps rigide dans l'espace à n dimensions, les équations de l'hydrodynamique des fluides parfaits, etc.

Le théorème d'Euler sur la stabilité des rotations autour du plus grand et du plus petit axes de l'ellipsoïde d'inertie a également des analogies dans le cas d'un groupe arbitraire. Dans le cas de l'hydrodynamique cette analogie est une extension du théorème de Rayleigh sur la stabilité des écoulements sans point d'inflexion du profil des vitesses (voir § 10).

Comme autre application de la théorie d'Euler, on démontre au § 8, la formule explicite de la courbure riemanienne d'un groupe, muni d'une métrique invariante à gauche. Au § 11, cette formule est utilisée pour l'étude de la courbure du groupe des difféomorphismes, dont les géodésiques sont les écoulements des fluides parfaits.

Dans ce qui suit, j'ai tâché, conformément à l'appel de N. Bourbaki [6], de substituer toujours les calculs aveugles aux idées lucides d'Euler.

(1) La plupart des résultats ont été annoncés dans [1], [2], [3], [4].

TABLE DES MATIERES

1. Notations modernes 320
2. Notations classiques 322
3. Les théorèmes d'Euler 323
4. Démonstration du premier théorème d'Euler 325
5. Démonstration du second théorème d'Euler 327
6. Les mouvements stationnaires 328
7. Stabilité des mouvements stationnaires 332
8. La courbure riemannienne des groupes de Lie 335
9. Cas d'un groupe de difféomorphismes 340
10. Applications à l'hydrodynamique 344
11. La courbure riemannienne du groupe des difféomorphismes .. 352

1. Notations modernes.

Soient G un groupe de Lie, $\mathfrak{U}$ son algèbre de Lie. Une courbe $g(t)$ est une application $g : \mathbf{R} \to \mathrm{G}$. Le vecteur vitesse $\dot{g} = dg/dt$ appartient à l'espace tangent à G au point g; nous noterons cet espace tangent TG_g. Evidement, $\mathrm{TG}_e = \mathfrak{U}$.

Soit $g \in \mathrm{G}$. Les translations à gauche et à droite L_g et R_g sont des applications du groupe G dans G, définies par

$$\mathrm{L}_g\, h = gh, \quad \mathrm{R}_g\, h = hg, \quad (h \in \mathrm{G}). \tag{1}$$

Les applications induites des espaces tangents seront notées

$$\tilde{\mathrm{L}}_g : \mathrm{TG}_h \to \mathrm{TG}_{gh}, \qquad \tilde{\mathrm{R}}_g : \mathrm{TG}_h \to \mathrm{TG}_{hg}. \tag{2}$$

On notera $\mathrm{A}d_g$ l'application de l'algèbre $\mathfrak{U}$ dans elle-même

$$\mathrm{A}d_g\, \xi = \tilde{\mathrm{R}}_{g^{-1}}\, \tilde{\mathrm{L}}_g\, \xi, \qquad (\xi \in \mathfrak{U}). \tag{3}$$

On notera exp. : $\mathfrak{U} \to \mathrm{G}$ l'application naturelle de l'algèbre dans le groupe;

$$\exp(ft) = g(t), \qquad (t \in \mathbf{R},\ f \in \mathfrak{U},\ g \in \mathrm{G}) \tag{4}$$

est un groupe à un paramètre à vecteur vitesse $dg/dt\,|_{t=0} = f$. On notera pour $\xi \in \mathfrak{U}$, $\eta \in \mathfrak{U}$

$$[\xi, \eta] \in \mathfrak{U}$$

l'opération de commutation d'algèbre, qui est bilinéaire et définie par

$$\exp [\xi, \eta] = \exp \xi \exp \eta \exp (-\xi) \exp (-\eta) + O(\xi^2) + O(\eta^2).$$

Il résulte de la définition du commutateur et de (3) :

$$\mathrm{A}d_{\exp (ft)}\, \xi = \xi + t\,[f, \xi] + O(t^2), \qquad (t \to 0). \tag{5}$$

Le commutateur est anti-symétrique et vérifie l'identité de Jacobi :

$$[\xi + t\eta, \zeta] = [\xi, \zeta] + t\,[\eta, \zeta], \qquad [\xi, \eta] = -[\eta, \xi]; \quad (\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{U}),$$

$$[[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = 0 \tag{6}$$

L'opérateur $\mathrm{A}d_g$ est un automorphisme d'algèbre; pour g variable, les opérateurs $\mathrm{A}d_g$ forment une antireprésentation du groupe :

$$\mathrm{A}d_g\, [\xi, \eta] = [\mathrm{A}d_g\, \xi, \mathrm{A}d_g\, \eta]; \qquad \mathrm{A}d_{gh} = \mathrm{A}d_h\, \mathrm{A}d_g. \tag{7}$$

Le dual de l'espace tangent TG_g sera appelé espace cotangent et noté $\mathrm{T^*G}_g$. Un élément $\xi \in \mathrm{T^*G}_g$ est une forme linéaire sur TG_g; sa valeur sur $\eta \in \mathrm{TG}_g$ sera notée

$$(\xi, \eta) \in \mathbf{R}, \qquad \xi \in \mathrm{T^*G}_g, \qquad \eta \in \mathrm{TG}_g.$$

Les opérateurs conjugués à $\tilde{\mathrm{L}}_g$, $\tilde{\mathrm{R}}_g$ seront notés

$$\tilde{\mathrm{L}}^*_g : \mathrm{T^*G}_{gh} \to \mathrm{T^*G}_h, \qquad \tilde{\mathrm{R}}^*_g : \mathrm{T^*G}_{hg} \to \mathrm{T^*G}_h.$$

Ces opérateurs sont définis par

$$(\tilde{\mathrm{L}}^*_g\, \xi, \eta) = (\xi, \tilde{\mathrm{L}}_g\, \eta), \qquad (\tilde{\mathrm{R}}^*_g\, \xi, \eta) = (\xi, \tilde{\mathrm{R}}_g\, \eta).$$

Enfin l'opérateur $\mathrm{A}d^*_g : \mathfrak{U}^* \to \mathfrak{U}^*$ est défini par

$$(\mathrm{A}d^*_g\, \xi, \eta) = (\xi, \mathrm{A}d_g\, \eta). \tag{8}$$

Soit $\mathcal{L} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^*$ un opérateur symétrique :

$$(\mathcal{L}\xi, \eta) = (\mathcal{L}\eta, \xi). \qquad \xi, \eta \in \mathfrak{U}.$$

Définissons l'opérateur symétrique $\mathcal{L}_g : \mathrm{TG}_g \to \mathrm{T^*G}_g$ par la translation à gauche :

$$\mathcal{L}_g\, \xi = \tilde{\mathrm{L}}^*_{g^{-1}}\, \mathcal{L}\, \tilde{\mathrm{L}}_{g^{-1}}\, \xi.$$

L'opérateur $\mathcal{L}$ sera supposé défini positif, c'est-à-dire que le produit scalaire de $\xi, \eta \in \mathrm{TG}_g$

$$\langle \xi, \eta \rangle_g = (\mathcal{L}_g \xi, \eta) = (\mathcal{L}_g \eta, \xi) = \langle \eta, \xi \rangle_g \tag{9}$$

est une forme définie positive. Le produit $\langle\ ,\ \rangle_g$ définit sur G une métrique riemannienne, invariante à gauche.

Le produit $\langle\ ,\ \rangle_e$ dans l'algèbre sera noté $\langle\ ,\ \rangle$. Introduisons l'opération $\mathrm{B} : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ définie par

$$\boxed{\langle [a, b], c \rangle = \langle \mathrm{B}(c, a), b \rangle \text{ pour tout } b \in \mathfrak{U}.} \tag{10}$$

Evidemment, $\mathrm{B}(c, a)$ dépend de c et a bilinéairement et pour c fixé, $\langle \mathrm{B}(c, a), b \rangle$ est antisymétrique en a et b :

$$\langle \mathrm{B}(c, a), b \rangle + \langle \mathrm{B}(c, b), a \rangle = 0 \tag{11}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{U} \arrow[rrr, "\mathrm{Ad}_g"] \arrow[ddd, "\mathcal{L}"'] & & & \mathfrak{U} \\
& & \mathrm{TG}_g \arrow[ul, "\tilde{\mathrm{L}}_{g^{-1}}"] \arrow[ur, "\tilde{\mathrm{R}}_{g^{-1}}"'] \arrow[d, "\mathcal{L}_g"] & \\
& & \mathrm{T}^*\mathrm{G}_g \arrow[dl, "\tilde{\mathrm{L}}^*_g"'] \arrow[dr, "\tilde{\mathrm{R}}^*_g"] & \\
\mathfrak{U}^* & & & \mathfrak{U}^* \arrow[lll, "\mathrm{Ad}^*_g"']
\end{tikzcd}$$

Diagramme D.

2. Notations classiques.

En mécanique du corps rigide, les objets définis ci-dessus portent les noms suivants :

$\mathrm{G} = \mathrm{SO}(3)$	l'espace des configurations;
g	configuration du corps rigide;

$g(t)$	mouvement du corps rigide;
$\dot{g}$	vitesse de rotation;
$\mathfrak{U} = \mathbf{R}^3$	l'espace des vecteurs-rotation;
$[\xi, \eta]$	le produit vectoriel dans $\mathbf{R}^3$;
$\omega_c = \tilde{L}_{g^{-1}}\, \dot{g} \in \mathfrak{U}$	vecteur-rotation par rapport au corps;
$\omega_s = \tilde{R}_{g^{-1}}\, \dot{g} = \mathrm{A}d_g\, \omega_c$	vecteur-rotation par rapport à l'espace;
$\mathfrak{L}_g$	l'opérateur d'inertie;
$\mathrm{M} = \mathfrak{L}_g\, \dot{g}$	le moment cinétique;
$\mathfrak{U}^*$	l'espace des moments cinétiques;
$\mathrm{M}_c = \tilde{L}^*_g\, \mathrm{M} = \mathfrak{L}\, \omega_c$	le moment cinétique par rapport au corps
$\mathrm{M}_s = \tilde{R}^*_g\, \mathrm{M} = \mathrm{A}d^*_{g^{-1}}\, \mathrm{M}_c$	le moment cinétique par rapport à l'espace;

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\langle \dot{g}, \dot{g}\rangle_g = \frac{1}{2}\langle \omega_c, \omega_c\rangle = \frac{1}{2}(\mathrm{M}_c, \omega_c) = \frac{1}{2}(\mathrm{M}, \dot{g})$$ l'énergie cinétique.

Le principe de la moindre action affirme que les mouvements d'un corps rigide, fixé en un point, sont (en l'absence des forces extérieures) les géodésiques (2) du groupe G, muni d'une métrique invariante à gauche (9). A chaque géodésique $g(t)$ correspondent 4 courbes

$$\omega_c(t) \in \mathfrak{U}, \qquad \omega_s(t) \in \mathfrak{U}. \qquad \mathrm{M}_c(t) \in \mathfrak{U}^*, \qquad \mathrm{M}_s(t) \in \mathfrak{U}^*. \tag{12}$$

3. Les Théorèmes d'Euler.

Euler a démontré pour les courbes (12) et $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(3)$, les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. — *Les courbes* (12) *vérifient l'équation d'Euler*

$$\boxed{\frac{d\mathrm{M}_c}{dt} = [\mathrm{M}_c, \omega_c]} \tag{13}$$

THÉORÈME 2. — *Le moment par rapport à l'espace est invariant :*

$$\boxed{\frac{d\mathrm{M}_s}{dt} = 0.} \tag{14}$$

(2) Une courbe $g(t)$ dans l'espace riemannien est une géodésique, si elle est une extrémale de l'intégrale $\frac{1}{2}\int \langle \dot{g}, \dot{g}\rangle\, dt$ (« action »).

Avec les notations du § 1, on peut écrire la formule (13) sous la forme

$$\boxed{\frac{d\omega_c}{dt} = \mathrm{B}(\omega_c, \omega_c)} \qquad \omega_c = \tilde{\mathrm{L}}_{g^{-1}}\,\dot{g}. \tag{15}$$

Nous démontrerons les formules (14) et (15) pour le cas général d'un groupe de Lie arbitraire G.

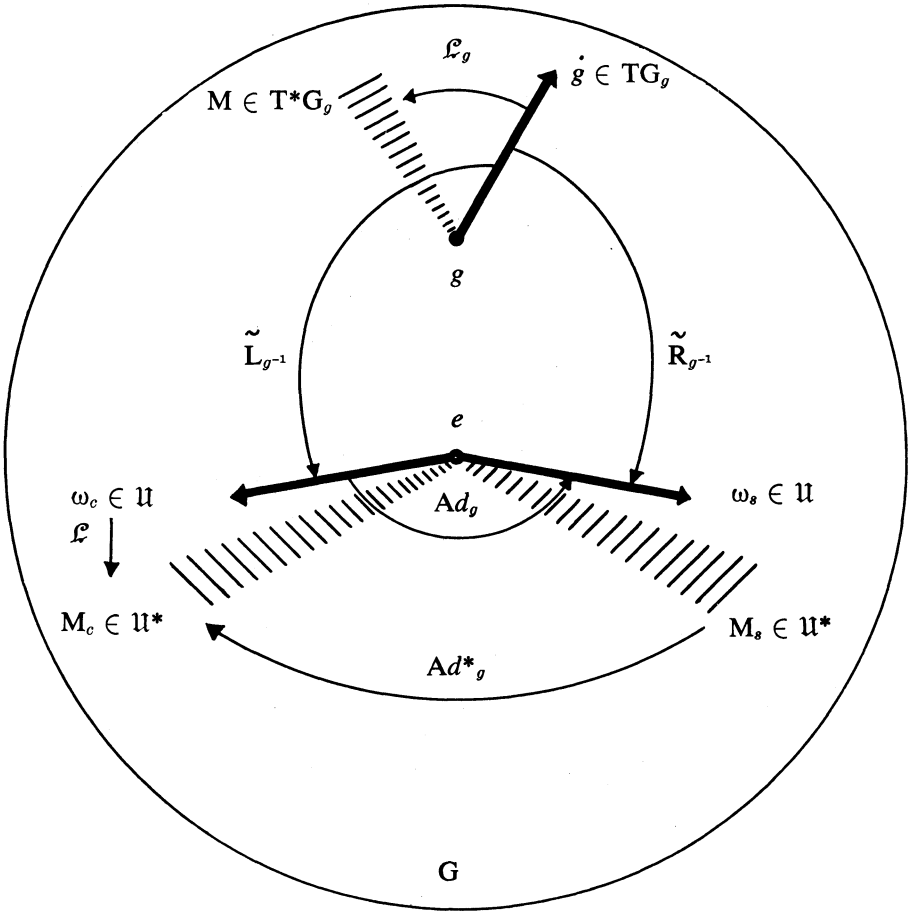

FIGURE 1.

Les vecteurs tangents à G sont représentés par des flèches droites; les vecteurs cotangents, par des séries de hachures parallèles, représentant les plans de niveau d'une 1-forme correspondante sur l'espace tangent.

4. Démonstration du premier théorème d'Euler.

La translatée à gauche d'une géodésique d'une métrique invariante à gauche est encore une géodésique. Donc, la dérivée $d\omega_c/dt$ dépend seulement de ω_c et pas de g :

$$\frac{d\omega_c}{dt} = \mathrm{F}(\omega_c).$$

Pour trouver la forme de cette fonction universelle $\mathrm{F}(\omega_c)$, il suffit de considérer la géodésique $g(t)$ avec $g(0) = e$, $\dot{g}(0) = \omega_c$.

Pour étudier cette géodésique, écrivons l'équation d'Euler-Lagrange dans un système de coordonnées particulier au voisinage du point $e \in \mathrm{G}$. Notamment, l'application exp : $\mathfrak{U} \to \mathrm{G}$ nous permet de considérer le voisinage de 0 dans $\mathfrak{U}$ comme une carte du voisinage de e dans G. L'espace tangent à $\mathfrak{U}$ en a, $\mathrm{T}\mathfrak{U}_a$, s'identifie naturellement avec $\mathfrak{U}$.

LEMME 1. — *Considérons l'opérateur* $\tilde{\mathrm{L}}_a$, *induit par la translation à gauche* $\mathrm{L}_{\exp a}$:

$$\tilde{\mathrm{L}}_a : \mathfrak{U} = \mathrm{T}\,\mathfrak{U}_0 \to \mathrm{T}\,\mathfrak{U}_a = \mathfrak{U}. \tag{16}$$

Pour cet opérateur

$$\boxed{\tilde{\mathrm{L}}_a\,\xi = \xi + \frac{1}{2}[a, \xi] + O(a^2)} \qquad |a| \to 0. \tag{17}$$

Démonstration du lemme 1. — On sait que tous les calculs sur les groupes et algèbres de Lie peuvent être effectués comme sur un groupe de matrices. Par exemple, pour tout $a, b \in \mathfrak{U}$

$$(\exp a)(\exp b) = \exp\left(a + b + \frac{1}{2}[a, b] + O(a^2) + O(b^2)\right) \tag{18}$$
$$(a, b \to 0).$$

En posant dans (18) $b = \xi t$, $t \to 0$, $|a| \to 0$, on trouve

$$(\exp a)(\exp \xi t) = \exp\left[a + \left(\xi + \frac{1}{2}[a, \xi] + O(a^2)\right)t + O(t^2)\right]$$
$$(t \to 0)$$

ce qui équivaut à (17). Le lemme 1 est démontré.

Démonstration de la formule (15). — Soient maintenant q les coordonnées cartésiennes dans l'algèbre $\mathfrak{U}$, munie d'une métrique $\langle\, , \rangle$. Au voisinage de $e \in G$, on peut utiliser q comme coordonnées locales. Soit $g(t)$ une courbe dans G. Conformément au lemme 1, les coordonnées $\dot{q} \in \mathfrak{U}$ du vecteur vitesse $\dot{g}$ sont liées au vecteur [3] $\omega = \tilde{L}_{g^{-1}}\dot{g}$ par la formule

$$\omega = \dot{q} - \frac{1}{2}[q, \dot{q}] + O(q^2) \qquad |q| \to 0. \tag{19}$$

Par conséquent, la fonction de Lagrange $L(q, \dot{q})$ est donnée par la formule

$$2L = \langle \omega, \omega \rangle = \langle \dot{q}, \dot{q} \rangle - \langle \dot{q}, [\dot{q}, \dot{q}] \rangle + O(q^2), \qquad (|q| \to 0) \tag{20}$$

En utilisant (10), (19) pour calculer les dérivées partielles de L, on trouve les impulsions $p = \partial L / \partial \dot{q}$:

$$\begin{aligned} p &= \dot{q} - \frac{1}{2}[q, \dot{q}] - \frac{1}{2}B(\dot{q}, q) + O(q^2) \\ &= \omega - \frac{1}{2}B(\omega, q) + O(q^2). \end{aligned} \tag{21}$$

Conformément à (19), (20), (21), l'équation d'Euler-Lagrange

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q},$$

c'est-à-dire

$$\dot{p} = \frac{1}{2}B(\dot{q}, \dot{q}) + O(q) = \frac{1}{2}B(\omega, \omega) + O(q) \tag{22}$$

devient

$$\dot{\omega} - \frac{1}{2}B(\omega, \omega) = \frac{1}{2}B(\omega, \omega) + O(q). \tag{23}$$

Quand $q = 0$, (23) devient (15). Le théorème 1 est démontré.

Remarque. — Il résulte aussi de (21), (22) que pour une géodésique $q(t)$ avec $q(0) = 0$, on a

$$\ddot{q}(0) = B(\dot{q}(0), \dot{q}(0)) = B(\omega, \omega). \tag{24}$$

[3] Ici et dans le calcul qui suit, l'indice c est omis pour simplifier les formules.

5. Démonstration du second théorème d'Euler.

Le second théorème d'Euler est un cas particulier du « théorème de Noether ». Mais pour la suite, il est utile de calculer indépendamment dM_s/dt. Ici, le vecteur $M_s \in \mathfrak{U}^*$, conformément au § 2, est

$$M_s(t) = Ad_{g^{-1}(t)}^{*} \mathcal{L}\, \omega_c(t).$$

LEMME 2. — *Soient $g(t)$ une courbe dans le groupe* G, ζ *un élément de l'algèbre* $\mathfrak{U}$. *Considérons dans l'algèbre la courbe définie par*

$$A(t) = Ad_{g^{-1}(t)}\, \zeta \tag{25}$$

Alors

$$\frac{d}{dt} A(t) = [A(t), \xi(t)] \tag{26}$$

où

$$\xi(t) = \tilde{L}_{g^{-1}} \frac{dg}{dt}. \tag{27}$$

Démonstration du lemme 2. — Conformément à (27) on a

$$g(t + dt) = g(t) \exp(\xi(t)\, dt + O(dt)^2).$$

Donc, en substituant (25) dans (3) et en négligeant $O(dt)^2$, on trouve

$$A(t + dt) = Ad_{g^{-1}(t+dt)}\, \zeta = \tilde{R}_{\exp(\xi dt)}\, \tilde{L}_{\exp(-\xi dt)}\, \tilde{R}_g\, \tilde{L}_{g^{-1}}\, \zeta =$$
$$= \tilde{R}_{\exp(\xi dt)}\, \tilde{L}_{\exp(-\xi dt)}\, A(t) = Ad_{\exp(-\xi dt)}\, A(t).$$

Conformément à (5), cette dernière expression est

$$Ad_{\exp(-\xi dt)}\, A(t) = A(t) + [A, \xi]\, dt + O(dt)^2$$

ce qui démontre le lemme 2.

LEMME 3. — *Si dans le lemme* 2, $g(t) = e^{ft}$, *alors*

$$A(t) = \zeta + t\,[\zeta, f] + \frac{t^2}{2}\,[[\zeta, f], f] + \ldots \tag{28}$$

Démonstration du lemme 3. — Le vecteur (27), $\xi(t) = f$ ne dépend pas de t pour $g(t) = e^{ft}$. Donc (26) donne

$$\frac{dA}{dt} = [A, f], \frac{d^2 A}{dt^2} = [[A, f], f], \ldots$$

Mais comme $A(O) = \zeta$, (28) est démontré.

Remarque. — Si $A(t) = Ad_{g(t)}\, \zeta$, alors

$$\frac{d}{dt} A(t) = [A(t), \eta(t)], \tag{29}$$

où

$$\eta(t) = -\tilde{R}_{g^{-1}} \frac{dg}{dt}. \tag{30}$$

Car, conformément au lemme 2 (29) est valable avec

$$\eta(t) = \tilde{L}_g \frac{d}{dt} g^{-1}(t), \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} g^{-1}(t) = -\tilde{R}_{g^{-1}} \tilde{L}_{g^{-1}} \frac{dg}{dt}.$$

Démonstration de la formule (14). — Par définition,

$$M_s(t) = Ad^*_{g^{-1}(t)}\, \mathcal{L}\, \omega_c(t) \in \mathfrak{U}^*. \tag{31}$$

Considérons $\zeta \in \mathfrak{U}$. Conformément à (8), (31), (9),

$$(M_s, \zeta) = (\mathcal{L}\, \omega_c, Ad_{g^{-1}}\, \zeta) = \langle \omega_c, Ad_{g^{-1}}\, \zeta \rangle.$$

Maintenant le théorème 1 et le lemme 2 donnent

$$\frac{d(M_s, \zeta)}{dt} = \langle B(\omega_c, \omega_c), A \rangle + \langle \omega_c, [A, \omega_c] \rangle$$

avec $A = Ad_{g^{-1}}\, \zeta$. Donc, par définition de l'opération B (10),

$$d\,(M_s, \zeta)/dt = 0$$

pour tout ζ, ce qui démontre le second théorème d'Euler.

6. Les mouvements stationnaires.

Considérons maintenant plus attentivement le système des équations d'Euler

$$\boxed{\frac{d\omega}{dt} = B(\omega, \omega)} \tag{32}$$

qui déterminent l'évolution du vecteur ω dans l'algèbre $\mathfrak{U}$. Soit v un point stationnaire du système (32) :

$$\boxed{B(v, v) = 0.} \tag{33}$$

Alors, *la géodésique $g(t)$, issue du point e ayant comme vitesse initiale $g(0) = v$, est un sous-groupe : $g(t) = \exp vt$.* Car d'après (15), (33), pour tout t :

$$\tilde{L}_{g^{-1}} \frac{dg}{dt} = v = \tilde{L}_{\exp(-vt)} \frac{d \exp(vt)}{dt}.$$

DÉFINITION. — *La géodésique $g(t)$ s'appelle « mouvement stationnaire », si elle est un sous-groupe à un paramètre.*

Nous venons de démontrer, que *les mouvements stationnaires sont les seuls mouvements, pour lequels le « vecteur-rotation par rapport au corps » $\omega = \tilde{L}_{g^{-1}} \dot{g}$ est constant* : $\dot{\omega} = 0$.

Pour le corps rigide habituel ($G = SO(3)$), les mouvements stationnaires sont les rotations autour du grand, du moyen et du petit axe de « l'ellipsoïde d'inertie ». Dans le cas général, les mouvements stationnaires jouissent d'une propriété extrémale intéressante. Pour décrire cette propriété, nous commencerons par quelques remarques.

LEMME 4. — *Le système* (32) *admet l'intégrale première d'énergie*

$$E = \frac{1}{2} \langle \omega, \omega \rangle. \tag{34}$$

Démonstration. — Conformément à (32), (10)

$$\dot{E} = \langle \omega, \dot{\omega} \rangle = \langle \omega, B(\omega, \omega) \rangle = \langle [\omega, \omega], \omega \rangle = 0, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

DÉFINITION. — *Sous le nom de « feuilletage », je vais comprendre chaque décomposition en classes d'équivalence d'une relation d'équivalence quelconque. Je vais dire qu'un feuilletage d'algèbre $\mathfrak{U}$ est invariant, si avec un point $\omega(0)$, toute la trajectoire $\omega(t)$ du système* (32) *appartient à une même feuille.*

Exemple. — Conformément au lemme 4, la décomposition de $\mathfrak{U}$ en surfaces de niveau de E est un feuilletage invariant. Les feuilles sont les sphères $\langle \omega, \omega \rangle = 2E > 0$ et le point $\omega = 0$.

Le second théorème d'Euler fournit un autre exemple de feuilletage invariant.

DÉFINITION. — *Les vecteurs* $\omega \in \mathfrak{U}$ *et* $\omega' \in \mathfrak{U}$ *sont « isotournants »,*

$$\omega \sim \omega'$$

s'il existe un $g \in G$ *tel que*

$$\mathrm{A}d^*_g \, \mathcal{L} \, \omega = \mathcal{L} \, \omega'. \text{ (4)} \tag{35}$$

LEMME 5. — *La relation* $\sim$ *définit un feuilletage invariant dans* $\mathfrak{U}$.

Démonstration. — Evidemment, $\omega \sim \omega$. L'équation (7) entraîne les relations $(\omega \sim \omega') \Longrightarrow (\omega' \sim \omega)$ et $(\omega \sim \omega' \sim \omega'') \Longrightarrow (\omega \sim \omega'')$. Donc $\sim$ est une relation d'équivalence. L'invariance des feuilles résulte de (14), (31), (35). Le lemme 5 est démontré.

Dans ce qui suit, les mots feuille, feuilletage, désignent le feuilletage de l'algèbre $\mathfrak{U}$ en feuilles de ω isotournants. Evidemment, ces feuilles sont les images linéaires d'orbites d'action adjointe $\mathrm{A}d_g \, \omega$ du groupe dans l'algèbre.

Exemples. — Pour $G = SO(3)$ (corps rigide) les feuilles sont des ellipsoïdes concentriques et le point

$$\ll M_s(\omega), M_s(\omega) \gg = C$$

où $\ll , \gg$ est le produit bi-invariant dans $\mathfrak{U}^*$. Pour $G = SO(n)$, les feuilles sont les « variétés de drapeaux ». Pour le groupe des homothéties et translations d'une droite, les feuilles sont deux demi-plans et tous les points de la droite qui les sépare.

THÉORÈME 3. — *Les points stationnaires* v *du système* (32) *sont les points d'extremum conditionnel d'énergie* E *sur les feuilles d'*ω *isotournants avec* v.

Pour la démonstration du théorème 3, on utilisera quelques calculs.

(4) En dynamique des corps rigides, les ω isotournants correspondent au même moment cinétique. En hydrodynamique, ce sont les champs de vitesses « isorotationnelles » (voir [1]).

LEMME 6. — *Soient* $\omega \in \mathfrak{U}$, $f \in \mathfrak{U}$, *et*

$$\omega(t) = \mathfrak{L}^{-1} \operatorname{Ad}^*_{e^{ft}} \mathfrak{L}\, \omega. \tag{36}$$

Alors :

$$\frac{d\omega}{dt} = \mathrm{B}(\omega, f), \tag{37}$$

$$\omega(t) = \omega + t\,\mathrm{B}(\omega, f) + \frac{t^2}{2}\mathrm{B}\,(\mathrm{B}(\omega, f), f) + \ldots \tag{38}$$

Démonstration. — Pour tout $\zeta \in \mathfrak{U}$, en utilisant (36), (9), (8), (9), on trouve :

$$\begin{aligned}\langle\, \omega\,(t), \zeta\,\rangle &= \langle \mathfrak{L}^{-1} \operatorname{Ad}^*_{e^{ft}} \mathfrak{L}\omega, \zeta\,\rangle = (\operatorname{Ad}^*_{e^{ft}} \mathfrak{L}\omega, \zeta) = \\ &= (\mathfrak{L}\omega, \operatorname{Ad}_{e^{ft}} \zeta) = \langle\, \omega, \operatorname{Ad}_{e^{ft}} \zeta\,\rangle.\end{aligned} \tag{39}$$

Pour chaque $\zeta \in \mathfrak{U}$, conformément à (39), (29) et (10), on a pour $t = 0$

$$\langle \frac{d\omega}{dt}, \zeta\,\rangle = \langle\, \omega, \frac{d\mathrm{A}}{dt}\,\rangle = \langle\, \omega, [f, \mathrm{A}]\,\rangle = \langle\, \mathrm{B}\,(\omega, f), \zeta\,\rangle, \tag{40}$$

où $\mathrm{A}\,(t) = \operatorname{Ad}_{e^{ft}} \zeta$. Comme ζ est arbitraire, la formule (40) démontre (37) pour $t = 0$. La formule 36 entraîne l'identité

$$\omega\,(t_1 + t_2,\ \omega\,(0)) = \omega\,(t_1, \omega\,(t_2, \omega\,(0))).$$

Par conséquent, la formule (37) est démontrée pour tout t. D'où les dérivées

$$\frac{d^2\,\omega}{dt^2} = \mathrm{B}\,(\mathrm{B}\,(\omega, f), f); \ldots ; \frac{d^n\,\omega}{dt^n} = \mathrm{B}\,(\ldots\,(\mathrm{B}\,(\omega, f), \ldots, f); \ldots$$

ce qui est équivalent à (38). Le lemme 6 est démontré.

Démonstration du théorème 3. — Soit ξ un vecteur tangent à une feuille au point v. Les feuilles étant orbites d'une action différentiable du groupe G (voir (35)), il existe $f\,(\xi) \in \mathfrak{U}$ tel que

$$v + \xi t = \omega\,(t) + O\,(t^2) \qquad t \to 0$$

où la fonction $\omega\,(t)$ est définie par (36) avec $\omega\,(0) = v$.

D'après (37), on a

$$\xi = \mathrm{B}\,(v, f). \tag{41}$$

Conformément à (34), (41), (11), la différentielle totale de l'énergie sur la feuille est

$$dE = \langle v, \xi \rangle = \langle v, B(v, f) \rangle = -\langle B(v, v), f \rangle. \tag{42}$$

La formule (42) montre que $dE = 0$ pour tout ξ si et seulement si $B(v, v) = 0$. C.q.f.d., conformément à (33).

7. Stabilité des mouvements stationnaires.

Considérons un système d'équations différentielles ordinaires

$$\dot{x} = f(x). \qquad x \in \mathbf{R}^n. \tag{43}$$

DÉFINITION. — *Un point* x_0 $(f(x_0) = 0)$ *est stable si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (|x(0) - x_0| < \delta) \Rightarrow (|x(t) - x_0| < \varepsilon \ \forall t > 0).$$

Supposons maintenant que dans l'espace $\mathbf{R}^n$, est défini un feuilletage invariant par rapport au système (43). Le point x_0 est *un point régulier*, s'il existe au voisinage de x_0 un système des coordonnées locales différentiables y $(y(x_0) = 0)$ tel que les composantes connexes des intersections des feuilles avec le voisinage soient des plans parallèles de dimension fixe k pour les coordonnées y.

Soit E une intégrale première du système (43). Supposons que

1) x_0 est un point d'extremum conditionnel de E sur la feuille;
2) x_0 est un point régulier et que
3) la différentielle seconde de E sur la feuille en x_0 est une forme quadratique non dégénérée.

On démontre sans peine un lemme bien connu depuis Lagrange :

LEMME 7. — *Un point* x_0 *vérifiant les conditions* 1), 2), 3) *est un point stationnaire du système* (43). *Si, en plus, la différentielle seconde de E sur la feuille est une forme quadratique définie-positive ou définie-négative, alors le point stationnaire* x_0 *est stable.*

En effet, en coordonnées y

$$E(y) = \frac{1}{2}(E_2 y, y) + O(y^3) \quad \text{où} \quad (E_2 y, z) = (y, E_2 z),$$

$$\dot{E} = (E_2 y, \dot{y}) + O(y^2)\,\dot{y}. \qquad (y \to 0).$$

Si $\dot{y} \neq 0$ pour $y = 0$, alors pour y assez petit $(E_2 y, y) \neq 0$ et E ne sera pas une intégrale première. Donc, $\dot{y} = 0$ et x_0 est point stationnaire. L'affirmation de stabilité est évidente (Lagrange, Dirichlet, etc.).

Appliquons le lemme 7 au système (32).

Soit v un point stationnaire du système d'Euler (32). Supposons que le point v est régulier, c'est-à-dire que v appartient à une feuille de dimension maximale. Considérons la forme quadratique

$$\boxed{2\,d^2 E = \langle B(v, f), B(v, f) \rangle + \langle [f, v], B(v, f) \rangle.} \qquad (44)$$

THÉORÈME 4. — *Si la forme quadratique* (44) *est définie-positive ou définie-négative, alors le point stationnaire v est stable.*

Ici la forme d^2E est considérée comme forme quadratique sur l'espace vectoriel tangent à la feuille

$$\xi = B(v, f), \qquad f \in \mathfrak{U}.$$

Démonstration du théorème 4. — Conformément au lemme 7, il suffit de démontrer que la seconde différentielle de l'énergie sur la feuille a la forme (44). La formule (38) définit une application d'algèbre sur la feuille, qui transforme

$$f \to \omega = v + \xi_1 + \xi_2 + O(f^3),$$
$$\xi_1 = B(v, f), \qquad 2\,\xi_2 = B(B(v, f), f).$$

En substituant ω en (34) et compte tenu de (42), (33), on trouve

$$2\,d^2 E = \langle \xi_1, \xi_1 \rangle + 2 \langle v, \xi_2 \rangle$$

ce qui est équivalent à (44).

Il résulte de la définition de $d^2 E$ que la forme (44) dépend essentiellement non pas de f, mais seulement de $\xi_1 = B(v, f)$. On peut, d'ailleurs, le vérifier par un petit calcul :

LEMME 8. — *La forme bilinéaire* $C(x, y) = \langle [x, v], B(v, y) \rangle$ *est symétrique :*

$$C(x, y) = C(y, x). \qquad (45)$$

Démonstration. — Conformément à (11), (10), (6), (10), (33)

$$\begin{aligned}\langle [x, v], \mathrm{B}(v, y) \rangle &= \langle \mathrm{B}(v, [v, x]), y \rangle = \langle [[v, x], y], v \rangle \\ &= \langle [v, [x, y]], v \rangle + \langle [x, [y, v]], v \rangle = \\ &= \langle \mathrm{B}(v, v), [x, y] \rangle + \langle \mathrm{B}(v, x), [y, v] \rangle = \\ &= \langle [y, v], \mathrm{B}(v, x) \rangle. \qquad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Soit maintenant $\mathrm{B}(v, f_1) = \mathrm{B}(v, f_2)$. Montrons que les valeurs correspondantes de $d^2\,\mathrm{E}$ coïncident. Posons $x = f_1 - f_2$, $y = f_1$, Alors $\mathrm{B}(v, x) = 0$. D'après (44), (45)

$$\begin{aligned}2\,(d^2\,\mathrm{E}(f_1) - d^2\,\mathrm{E}(f_2)) &= \langle [x, v], \mathrm{B}(v, y) \rangle = \\ &= \langle [y, v], \mathrm{B}(v, x) \rangle = 0.\end{aligned}$$

Donc, la forme quadratique (44) ne dépend que de $\xi = \mathrm{B}(v, f)$. Maintenant le théorème 4 est une conséquence immédiate du lemme 7.

Remarque. — Considérons les « équations aux variations » des équations d'Euler (32) au voisinage de v :

$$\dot{\xi} = \mathrm{B}(v, \xi) + \mathrm{B}(\xi, v). \tag{46}$$

Les feuilles et l'énergie étant invariantes, la forme (44) doit être une intégrale première du système (46). D'ailleurs, on peut vérifier la conservation du $d^2\,\mathrm{E}$ par un calcul direct.

En effet, d'après (44), (45), (41)

$$\frac{d}{dt}\, d^2\,\mathrm{E} = \langle \xi, \dot{\xi} \rangle + \langle [f, v], \dot{\xi} \rangle.$$

En substituant ξ de (46), on obtient, en utilisant successivement (11), (45), (41), (10), (45), (11) :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\, d^2\,\mathrm{E} = \\ &= \langle \xi, \mathrm{B}(v, \xi) \rangle + \langle \xi, \mathrm{B}(\xi, v) \rangle + \langle [f, v], \mathrm{B}(v, \xi) \rangle + \langle [f, v], \mathrm{B}(\xi, v) \rangle = \\ &= \langle \xi, \mathrm{B}(\xi, v) \rangle + \langle [\xi, v], \xi \rangle + \langle [v, [f, v]], \xi \rangle = \\ &= \langle [v, [f, v]], \mathrm{B}(v, f) \rangle = -\langle [f, v], \mathrm{B}(v, [f, v]) \rangle = 0,\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

8. La courbure riemannienne des groupes de Lie.

Comme exemple d'application des théorèmes d'Euler, je vais calculer la connexion (55) et la courbure riemannienne (53) d'un groupe de Lie, muni d'une métrique invariante à gauche (comparer à [3]).

Soit M une variété riemannienne, $x \in M$ et $\xi \in TM_x$ un vecteur tangent à M en x. On notera

$$\gamma(x, \xi, t) = \gamma(\xi, t) = \gamma(t) = \gamma$$

la géodésique (5) sur M, issue de $x = \gamma(0)$ ayant la vitesse initiale $\xi = \dot{\gamma}(0)$.

On détermine le *transport parallèle le long de* γ

$$\pi_{\gamma(t)} : TM_{\gamma(0)} \to TM_{\gamma(t)}$$

à l'aide de la construction suivante.

Soit

$$P_{\gamma(\xi, t)}\, \eta = \frac{1}{t} \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \gamma(x, \xi + \eta\tau, t) \in TM_{\gamma(t)}\,. \tag{47}$$

Alors

$$\pi_{\gamma(t)}\, \eta = P_{\gamma(t)}\, \eta + O(t) \qquad (t \to 0).$$

La dérivée covariante $\nabla_\xi \eta$ d'un champ de vecteurs tangents η selon la direction du vecteur $\xi \in TM_x$ est, par définition, le champ de vecteurs

$$\nabla_\xi \eta = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P^{-1}_{\gamma(t)}\, \eta(\gamma(\xi, t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \pi^{-1}_{\gamma(t)}\, \eta(\gamma(\xi, t)) \in TM_x\,. \tag{48}$$

Soient ξ, η deux vecteurs unitaires orthogonaux de TM_x. On appelle (6) *courbure sectionnelle riemannienne* de M selon ξ, η le nombre réel

$$C_{\xi\eta} = \langle -\nabla_\xi \nabla_\eta \xi, \eta \rangle + \langle \nabla_\eta \nabla_\xi \xi, \eta \rangle - \langle \nabla_{\{\xi, \eta\}} \xi, \eta \rangle, \tag{49}$$

où $\langle\, , \rangle$ est le produit scalaire qui détermine la métrique et où ξ, η déno-

(5) C'est-à-dire l'extrémale du « principe de moindre action » $\delta \int \dot{\gamma}^2\, dt = 0$.

(6) Voir par exemple [13].

tent deux champs de vecteurs. Enfin, le champ des vecteurs $\{ \xi, \eta \}$ dénote *le crochet de Poisson* des champs de vecteurs ξ, η.

En ce qui concerne le crochet de Poisson, on utilisera les connaissances suivantes. A chaque champ de vecteurs ζ sur M, correspond un groupe à un paramètre de difféomorphismes de M

$$\exp \zeta t : x \to z(x, t) \in \mathrm{M} ; \quad z(x, 0) = x, \frac{dz}{dt} = \zeta.$$

Le crochet de Poisson des champs de vecteurs ξ, η *tangents à* M *est défini comme le commutateur dans l'algèbre de Lie* (7) : le champ $\{ \xi, \eta \}$ dépend bilinéairement de ξ, η et vérifie l'équation :

$$\exp \xi t \exp \eta s \exp (-\xi t) \exp (-\eta s) = \exp \{ \xi, \eta \} \, st + O(s^2) + O(t^2). \tag{50}$$

Dans un système de coordonnées locales x *sur* M *le crochet de Poisson est donné par la formule :*

$$\{ \xi, \eta \} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \eta - \frac{\partial \eta}{\partial x} \xi. \tag{51}$$

En effet, en calculant la partie gauche de (50), on trouve

$$\exp \xi t : x \to x + \xi t + O(t^2),$$

$$\exp \xi t \exp \eta s : x \to x + \xi t + \eta s + \frac{\partial \xi}{\partial x} \eta \, st + O(s^2) + O(t^2),$$

$$\exp \xi t \exp \eta s \exp (-\xi t) \exp (-\eta s) :$$
$$x \to x + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \eta - \frac{\partial \eta}{\partial x} \xi \right) st + O(s^2) + O(t^2),$$

ce qui démontre la formule (51).

Soient maintenant M un groupe de Lie G, $\mathfrak{U}$ son algèbre de Lie, ξ et η deux champs de vecteurs invariants à *droite*. Alors le champ $\{ \xi, \eta \}$ est aussi invariant à droite. Un champ de vecteurs invariant à droite est défini par sa valeur en l'élément neutre, $\xi_e \in \mathfrak{U}$. *Le crochet de Poisson des champs de vecteurs invariants à droite coïncide au point e avec le commutateur de l'algèbre de Lie :*

$$\{ \xi, \eta \}_e = [\xi_e, \eta_e].$$

(7) Et diffère par le signe de [13].

En effet, soit $\exp(\xi t)$ un groupe à un paramètre de difféomorphismes du groupe G, correspondant au champ de vecteurs invariant à droite ξ. Alors pour $x \in G$

$$\exp(\xi t) : x \to (\exp \xi_e t)\, x$$

où $\exp \xi_e t$ est le sous-groupe à un paramètre du groupe G. Donc

$$\exp(\xi t) \exp(\eta s) \exp(-\xi t) \exp(-\eta s) : x \to \exp(\xi_e t) \exp(\eta_e s) \exp(-\xi_e t) \exp(-\eta_e s)\, x.$$

C.Q.F.D.

Soient enfin, ξ et η deux champs de vecteurs invariants *à gauche. Le crochet de Poisson des champs invariants à gauche en e diffère en signe du commutateur de l'algèbre de Lie :*

$$\{\xi, \eta\}_e = -[\xi_e, \eta_e]. \tag{52}$$

En effet, un champ de vecteurs invariant à gauche sur G est un champ de vecteurs invariant à droite sur le groupe G′ avec l'opération $g_1 * g_2 = g_2\, g_1$. Or le commutateur de l'algèbre de Lie $\mathfrak{U}$ du groupe G′ diffère en signe du commutateur de l'algèbre $\mathfrak{U}$.

Soient maintenant, comme ci-dessus, G un groupe de Lie, muni d'une métrique, invariante à gauche, $\mathfrak{U}$ son algèbre de Lie, $\langle\, ,\, \rangle$ le produit scalaire dans l'algèbre, qui détermine la métrique, $[\, ,\,]$ le crochet de Lie dans l'algèbre, et B l'opération définie au § 1.

THÉORÈME 5. — *La courbure sectionnelle du groupe* G *au point e pour le plan défini par les deux vecteurs orthogonaux et unitaires* ξ, $\eta \in \mathfrak{U}$, *est donnée par la formule*

$$\boxed{C_{\xi\eta} = \langle \delta, \delta \rangle + 2\langle \alpha, \beta \rangle - 3\langle \alpha, \alpha \rangle - 4\langle B_\xi, B_\eta \rangle} \tag{53}$$

où

$$\left.\begin{array}{lll} 2\delta = B(\xi, \eta) + B(\eta, \xi), & 2\beta = B(\xi, \eta) - B(\eta, \xi), & \\ 2\alpha = [\xi, \eta], & 2B_\xi = B(\xi, \xi), & 2B_\eta = B(\eta, \eta). \end{array}\right\} \tag{54}$$

Remarque. — Pour une métrique bi-invariante, on a $B(\xi, \eta) = [\xi, \eta]$, donc $B_\xi = B_\eta = \delta = 0$, $\beta = 2\alpha$. Ainsi, (53) devient la formule connue

$$C_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\langle [\xi, \eta], \quad [\xi, \eta] \rangle.$$

Pour démontrer le théorème 5, on exprimera d'abord en termes d'opérations B la dérivée covariante.

LEMME 9. — *Soient ξ, η deux champs de vecteurs invariants à gauche sur le groupe G. Alors au point e le champ de vecteurs invariant à gauche $\nabla_\xi \eta$ est donné par la formule*

$$\boxed{\nabla_\xi \eta = \frac{1}{2}([\xi, \eta] - \mathrm{B}(\xi, \eta) - \mathrm{B}(\eta, \xi)).} \tag{55}$$

Démonstration du lemme 9. — On calculera d'abord le transport parallèle (47) en coordonnées d'algèbre (§ 4). D'après (24), les géodésiques du groupe ont dans l'algèbre, l'expression

$$\gamma(0, \xi, t) = t\xi + \frac{t^2}{2}\mathrm{B}(\xi, \xi) + O(t^3) \qquad t \to 0. \tag{56}$$

Il résulte de (56) que le vecteur

$$\mathrm{P}_{\gamma(\xi, t)}\, \eta = \frac{1}{t}\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \gamma(0, \xi + \eta\tau, t) \in \mathrm{T}\,\mathfrak{U}_\gamma = \mathfrak{U}$$

a comme coordonnées

$$\mathrm{P}_{\gamma(\xi, t)}\, \eta = \eta + \frac{t}{2}(\mathrm{B}(\xi, \eta) + \mathrm{B}(\eta, \xi)) + O(t^2). \tag{57}$$

Par définition (48), pour un champ de vecteurs invariant à gauche η

$$\nabla_\xi \eta = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{P}_{\gamma^{-1}(\xi, t)}\, \tilde{\mathrm{L}}_{\gamma(\xi, t)}\, \eta. \tag{58}$$

En substituant en (58) les expressions (17) pour $\tilde{\mathrm{L}}_\gamma\, \eta$ et (57) pour P_γ, on trouve successivement

$$\nabla_\xi \eta = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{P}_{\gamma^{-1}(\xi, t)}\left(\eta + \frac{t}{2}[\xi, \eta] + O(t^2)\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta + \frac{t}{2}([\xi, \eta] - \mathrm{B}(\xi, \eta) - \mathrm{B}(\eta, \xi)) + O(t^2)$$

C.Q.F.D.

Remarque. — Le transport parallèle π_γ sur une variété riemannienne conserve le produit scalaire $\langle a, b\rangle$. Or le produit invariant à gauche de

champs invariants à gauche $\langle a, b \rangle$ est constant. Donc ∇_c est un opérateur antisymétrique :

$$\langle \nabla_c a, b \rangle + \langle \nabla_c b, a \rangle = 0. \tag{59}$$

On vérifie facilement que l'expression (55) vérifie la relation d'antisymétrie (59).

Démonstration du théorème 5. — Soient ξ, η deux champs de vecteurs invariants à gauche. Alors les champs $[\xi, \eta]$, $\nabla_\xi \eta$ et $\nabla_\eta \xi$ sont aussi invariants à gauche. Conformément à (54) et (55), leurs valeurs au point e sont

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \eta &= \alpha - \delta, \quad \nabla_\eta \xi = -(\alpha + \delta), \\ \nabla_\xi \xi &= -2\mathrm{B}_\xi, \quad \nabla_\eta \eta = -2\mathrm{B}_\eta \end{aligned} \tag{60}$$

En substituant (60) dans (49) et en utilisant (59), on trouve

$$\langle -\nabla_\xi \nabla_\eta \xi, \eta \rangle = \langle \nabla_\xi \eta, \nabla_\eta \xi \rangle = -\langle \alpha - \delta, \alpha + \delta \rangle, \tag{61}$$

$$\langle \nabla_\eta \nabla_\xi \xi, \eta \rangle = \langle -\nabla_\xi \xi, \nabla_\eta \eta \rangle = -4 \langle \mathrm{B}_\xi, \mathrm{B}_\eta \rangle. \tag{62}$$

Il résulte de (55) que

$$\begin{aligned} -\langle \nabla_{\{\xi, \eta\}} \xi, \eta \rangle = \langle \nabla_{[\xi, \eta]} \xi, \eta \rangle &= \\ = \frac{1}{2} \langle [[\xi, \eta], \xi], \eta \rangle &- \frac{1}{2} \langle \mathrm{B}([\xi, \eta], \xi), \eta \rangle \\ &- \frac{1}{2} \langle \mathrm{B}(\xi, [\xi, \eta]), \eta \rangle. \end{aligned} \tag{63}$$

Compte tenu de (10), (11), (54), on trouve

$$\left.\begin{aligned} \langle [[\xi, \eta], \xi], \eta \rangle &= \langle -\mathrm{B}(\eta, \xi), [\xi, \eta] \rangle, \\ \langle \mathrm{B}([\xi, \eta], \xi), \eta \rangle &= \langle [\xi, \eta], [\xi, \eta] \rangle, \\ \langle \mathrm{B}(\xi, [\xi, \eta]), \eta \rangle &= \langle -\mathrm{B}(\xi, \eta) [\xi, \eta] \rangle. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

En substituant (64) dans (63), on trouve conformément à (54)

$$-\langle \nabla_{\{\xi, \eta\}} \xi, \eta \rangle = -2 \langle \alpha, \alpha \rangle + 2 \langle \alpha, \beta \rangle. \tag{65}$$

En substituant (61), (62), (65) dans (49), on trouve enfin

$$\mathrm{C}_{\xi, \eta} = -\langle \alpha - \delta, \alpha + \delta \rangle - 4 \langle \mathrm{B}_\xi, \mathrm{B}_\eta \rangle - 2 \langle \alpha, \alpha \rangle + 2 \langle \alpha, \beta \rangle,$$

ce qui est équivalent à (53). Le théorème 5 est donc démontré.

9. Cas d'un groupe de difféomorphismes.

Soit D un domaine borné d'un espace de Riemann. On notera S Diff D *le groupe des difféomorphismes du domaine D conservant l'élément de volume*. Bien que S Diff D ne soit pas un groupe de Lie, il est intéressant de voir, en quelles affirmations se transforment les formules des paragraphes précédents dans ce cas. Une telle étude « euristique » amène aux propositions qu'on peut vérifier ensuite rigoureusement (voir [2]). Conformément au caractère euristique du présent paragraphe et des suivants, on laisse de côté les problèmes de différentiabilité et les autres détails similaires.

L'algèbre $\mathfrak{U}$ *qui correspond au groupe* S Diff D *est constituée par les champs de vecteurs v tangents à D tels que*

$$\operatorname{div} v = 0, \qquad et \qquad (v, n) = 0 \qquad sur \qquad \partial D. \tag{66}$$

On définit le produit scalaire dans l'algèbre $\mathfrak{U}$ par la formule

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_D (v_1 \cdot v_2)\, dx, \tag{67}$$

où (.) est le produit scalaire qui détermine la métrique de D, et dx est l'élément de volume riemannien sur D.

Afin d'écrire les formules des paragraphes précédents pour le groupe S Diff D, on utilisera quelques notions d'analyse vectorielle. D'après (50), le commutateur de Lie $[v_1, v_2]$ de deux champs de vecteurs coïncide avec leur crochet de Poisson $\{ v_1, v_2 \}$.

Soit ω^k une forme différentielle de degré k sur D, ξ^k un k-vecteur $\xi^k = \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_k$. La valeur de la forme ω^k sur le polyvecteur ξ^k sera notée ω^k / ξ^k. L'opération de convolution

$$i(\xi^k) : \omega^l \to \omega^{l-k}$$

est définie par la formule

$$i(\xi^k)\, \omega^l \,|\, \eta^{l-k} = \omega^l \,|\, \xi^k \wedge \eta^{l-k} \tag{68}$$

pour tout $(l - k)$-vecteur η^{l-k}.

La structure riemannienne fait correspondre à chaque vecteur tangent c une 1-forme ω_c^1, à savoir

$$\omega_c^1 \mid \xi = i(\xi)\, \omega_c^1 = (c, \xi) \tag{69}$$

pour tout vecteur tangent ξ.

THÉORÈME 6. — *Soient a et c des champs de vecteurs de* $\mathfrak{U}$. *Alors le champ de vecteur* $\mathrm{B}(c, a) \in \mathfrak{U}$ *est donné par la formule* (cf. (10)) :

$$\boxed{\omega_{\mathrm{B}}^1 = i(a)\, d\omega_c^1 + d\alpha} \tag{70}$$

où α *est la fonction univalente sur* D, *définie par* (70) *et* $B \in \mathfrak{U}$ (voir (66)).

Démonstration du théorème 6. — D'après le théorème de décomposition orthogonale de H. Weyl, chaque champ de vecteur ξ sur D admet une décomposition unique en une somme de deux champs de vecteurs orthogonaux

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \quad \text{où} \quad \xi_1 \in \mathfrak{U}, \quad \xi_2 = \operatorname{grad} \alpha,$$

α étant une fonction univalente sur M. En appliquant le théorème de décomposition au champ de vecteurs qui correspond à la forme $i(a)\, d\omega_c^1$, on trouve une décomposition unique en ω_{B}^1 et $-d\alpha$. Ainsi, la formule (70) détermine un champ unique $\mathrm{B} \in \mathfrak{U}$.

La formule (10) définit les produits scalaires $\langle \mathrm{B}, b \rangle$ pour tout $b \in \mathfrak{U}$:

$$\langle \mathrm{B}(c, a), b \rangle = \langle [a, b], c \rangle \tag{10}$$

Donc, il ne peut pas exister plus qu'un seul vecteur $\mathrm{B}\,(c, a) \in \mathfrak{U}$, vérifiant (10). Par conséquent, il reste pour démontrer le théorème 6 à prouver que la fonction B, déterminée par (70), vérifie l'identité (10) pour tout $b \in \mathfrak{U}$.

On utilisera les formules connues (71), (76) d'analyse vectorielle

$$d(\omega^k \wedge \omega^l) = d\omega^k \wedge \omega^l + (-1)^k\, \omega^k \wedge d\omega^l \tag{71}$$

$$\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl}\, \omega^l \wedge \omega^k, \tag{72}$$

$$i(a)\, (\omega^k \wedge \omega^l) = (i(a)\, \omega^k) \wedge \omega^l + (-1)^k\, \omega^k \wedge (i(a)\, \omega^l), \tag{73}$$

$$i(a \wedge b)\, \omega = i(b)\, i(a)\, \omega \quad \text{pour tous vecteurs } a,\ b \tag{74}$$

Soit τ l'élément de volume riemannien sur D (une n-forme, $n =$ dim D).

Alors pour tous champs de vecteurs tangents a, b, on a

$$(a, b)\,\tau = \omega_a^1 \wedge (i(b)\,\tau), \tag{75}$$

$$\boxed{d\,(i(a \wedge b)\,\tau) = i(\{a, b\})\,\tau + i(a)\,d\,i(b)\,\tau - i(b)\,d\,i(a)\,\tau.} \tag{76}$$

Il résulte de (67), (50) et (75) que pour tous champs de vecteurs a, b, c

$$\langle [a, b], c\rangle = \int_D (\{a, b\}, c)\,\tau = \int_D \omega_c^1 \wedge i(\{a, b\})\,\tau. \tag{77}$$

Pour deux champs a, $b \in \mathfrak{U}$, on trouve d'après (66)

$$d\,i(a)\,\tau = \tau \operatorname{div} a = 0, \qquad d\,i(b)\,\tau = \tau \operatorname{div} b = 0. \tag{78}$$

Conformément à (78), il résulte de (76) pour $a, b \in \mathfrak{U}$,

$$d\,i(a \wedge b)\,\tau = i\,(\{a, b\})\,\tau. \tag{79}$$

Il résulte de (79), (71) et de la formule de Stokes que

$$\int_D \omega_c^1 \wedge i\,(\{a, b\})\,\tau = \int_D d\omega_c^1 \wedge i\,(a \wedge b)\,\tau - \int_{\partial D} \omega_c^1 \wedge i(a \wedge b)\,\tau. \tag{80}$$

D'après (66), pour les champs a, $b \in \mathfrak{U}$, l'intégrale le long de ∂D est égale à 0. En effet, soit $\xi^{n-1} = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{n-1}$ un polyvecteur tangent à ∂D. D'après (68)

$$\omega_c^1 \wedge i(a \wedge b)\,\tau\,|\,\xi = \sum_i \pm\,(\omega_c^1\,|\,\xi_i)\,(\tau\,|\,a \wedge b \wedge \xi_i')$$

où

$$\xi_i' = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{i-1} \wedge \xi_{i+1} \wedge \dots \wedge \xi_n.$$

Mais $\tau\,|\,a \wedge b \wedge \xi_i' = 0$, parce que le n-vecteur $a \wedge b \wedge \xi_i'$ est tangent à une variété ∂D de dimension $n - 1$. Donc, pour a, $b \in \mathfrak{U}$

$$\int_{\partial D} \omega_c^1 \wedge i\,(a \wedge b)\,\tau = 0. \tag{81}$$

Il résulte de (72), (74), que

$$d\omega_c^1 \wedge i\,(a \wedge b)\,\tau = (i\,(a \wedge b)\,\tau) \wedge d\omega_c^1 = (i\,(b)\,i\,(a)\,\tau) \wedge d\omega_c^1\,. \tag{82}$$

Remarquons que la forme $(i\,(a)\,\tau) \wedge d\omega_c^1$ est égale à 0 parce qu'elle est de degré $n + 1$. Donc il résulte de (73) que

$$(i\,(b)\,i\,(a)\,\tau) \wedge d\omega_c^1 = (-1)^n\,(i\,(a)\,\tau) \wedge (i\,(b)\,d\omega_c^1). \tag{83}$$

La forme $\tau \wedge i(b)\, d\omega_c^1$ est aussi de degré $n+1$ donc nulle. Par conséquent (73) donne

$$(i(a)\,\tau) \wedge (i(b)\, d\omega_c^1) = (-1)^{n+1} (\tau \wedge i(a)\, i(b)\, d\omega_c^1) = \\ = (-1)^n (i(b)\, i(a)\, d\omega_c^1)\, \tau. \tag{84}$$

En comparant les formules (77), (80), (81), (82), (83), (84), on trouve

$$\langle [a, b], c \rangle = \int_D (i(b)\, i(a)\, d\omega_c^1)\, \tau. \tag{85}$$

Il résulte de (70) et (69), que

$$i(b)\, i(a)\, d\omega_c^1 = i(b)\, (\omega_B^1 - d\alpha) = (b, \mathrm{B} - \operatorname{grad} \alpha). \tag{86}$$

D'après le théorème de décomposition orthogonale, le champ $b \in \mathfrak{U}$ est orthogonal à grad α. Donc il résulte de (85) et (86) :

$$\langle [a, b], c \rangle = \int_D (b, \mathrm{B} - \operatorname{grad} \alpha)\, \tau = \langle B(c, a), b \rangle$$

C.Q.F.D.

Le cas tri-dimensionnel. — Si $n = 3$, la formule (70) s'écrit sous la forme

$$\boxed{\mathrm{B}(c, a) = \operatorname{rot} c \wedge a + \operatorname{grad} \alpha} \tag{87}$$

où $\wedge$ est le produit vectoriel, associé à la métrique [8] de D. La démonstration de la formule (87) est immédiate.

Le cas bi-dimensionnel. — Soit D une variété riemannienne de dimension 2, éventuellement à bord ∂D. Les champs de vecteurs $v \in \mathfrak{U}$ admettent les *fonctions de courant* ψ. En effet, soit $v \in \mathfrak{U}$, I l'opérateur de rotation d'un angle droit « à droite ». Alors pour chaque contour homologue à 0, $\gamma = \partial\sigma$,

$$0 = \iint_\sigma \operatorname{div} v\, dx = \oint_{\partial\sigma} v\, dn = \oint_{\partial\sigma} \mathrm{I}v\, dx$$

donc la 1-forme $(\mathrm{I}v)\, dx$ est fermée.

Ainsi

$$\boxed{v = \mathrm{I} \operatorname{grad} \psi = \operatorname{rot} \psi} \tag{88}$$

[8] Un changement d'orientation sur D change les signes de rot et de $\wedge$ en même temps.

où ψ est « *la fonction de courant* », éventuellement multivalente. Il résulte de (71), que *la fonction de courant* $\psi_{\{v_1, v_2\}}$ *du commutateur* $\{ v_1, v_2 \}$ *de deux champs* $v_1, v_2 \in \mathfrak{U}$ *est le jacobien des fonctions de courant de ces champs :*

$$\psi_{\{v_1, v_2\}} = \mathrm{J}\,(\psi_{v_1}, \psi_{v_2}) = v_1 \wedge v_2. \tag{89}$$

Le théorème 6 devient l'affirmation suivante : *Soient* ψ_c, ψ_a *les fonctions de courant des champs* c, $a \in \mathfrak{U}$. *Alors le champ de vecteurs* $\mathrm{B}\,(c, a)$ *est donné par la formule*

$$\boxed{\mathrm{B} = -\,\Delta\,\psi_c \operatorname{grad} \psi_a + \operatorname{grad} \alpha,} \tag{90}$$

où $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot}$.

On déduit la formule (90) de (87). Or $c = \operatorname{rot} \psi_c$, $a = \operatorname{rot} \psi_a$, $\operatorname{rot} c \wedge a = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi_c \cdot \operatorname{grad} \psi_a$. Dans le cas particulier de l'espace euclidien x, y les formules (88), (89), (90) deviennent

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_{\{v_1, v_2\}} = \frac{\partial \psi_{v_1}}{\partial x}\frac{\partial \psi_{v_2}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{v_1}}{\partial y}\frac{\partial \psi_{v_2}}{\partial x},$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{91}$$

10. Applications à l'hydrodynamique.

Soit comme au § 9, S Diff D le groupe des difféomorphismes d'un domaine riemannien borné D, conservant l'élément de volume.

Il résulte des principes de la mécanique que *les géodésiques de la métrique invariante à droite correspondant à* (67) *sont les écoulements du fluide parfait dans* D.

En effet, considérons un fluide parfait (incompressible, non visqueux, homogène), remplissant le domaine D. La transformation

$$g\,(t) : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$$

déplaçant chaque particule du fluide de sa position au moment 0 à sa position au moment t conserve l'élément de volume. Donc, $g(t) \in$ S Diff D. La courbe $g\,(t)$, conformément au principe de moindre action, est une

géodésique du groupe S Diff D, car elle extrémise l'intégrale $\int T\,dt$, où T est l'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}\int_D v^2\,dx$$

où v est le champ des vecteurs vitesse ([9]). Or

$$g(t + dt) = (\exp(v\,dt))\,g(t).$$

Donc le champ des vecteurs vitesse est la translation à droite du vecteur $\dot{g}$ dans l'algèbre $\mathfrak{U}$:

$$v = \tilde{R}_{g^{-1}}\,\dot{g}.$$

Donc, $g(t)$ est la géodésique d'une métrique invariante à droite, correspondant à la forme (67).

Les formules des paragraphes précédents correspondent aux métriques, invariantes à gauche. Pour obtenir les formules analogues dans le cas invariant à droite, il suffit, d'après (52), de changer les signes devant tous les commutateurs et opérations B; ce qui ne change pas les formes quadratiques (44), (45), (53).

Conformément à (32) et (52), le champ des vecteurs vitesse du fluide parfait vérifie l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -B(v, v). \tag{92}$$

En comparant à (87), on trouve *l'équation du mouvement « dans la forme de Bernoulli »* pour le fluide parfait dans un domaine riemannien à 1 dimension D :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \wedge \operatorname{rot} v + \operatorname{grad} \alpha,\ \operatorname{div} v = 0,\ (v, n) = 0 \text{ sur } \partial D. \tag{93}$$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, (93) et (76) impliquent

$$v \wedge \operatorname{rot} v = -\operatorname{grad} \alpha, \qquad \{v, \operatorname{rot} v\} = 0. \tag{94}$$

Ainsi, le *champ des vitesses d'écoulement stationnaire commute avec son rotationnel.* On en déduit immédiatement une classification topologique des écoulements stationnaires analytiques des fluides parfaits dans les domaines tri-dimensionnels [4].

([9]) Du point de vue du mathématicien, on peut considérer ce principe comme définition des fluides parfaits. Voir [14], [11].

Notamment, le domaine D se trouve divisé par un sous-espace analytique en un nombre fini de « cellules » ouvertes, fibrées en tores ou en cylindres engendrés par des lignes de courant ([10]). Les lignes de courant sont fermées sur les cylindres, fermées ou denses sur les tores (fig. 2, 3).

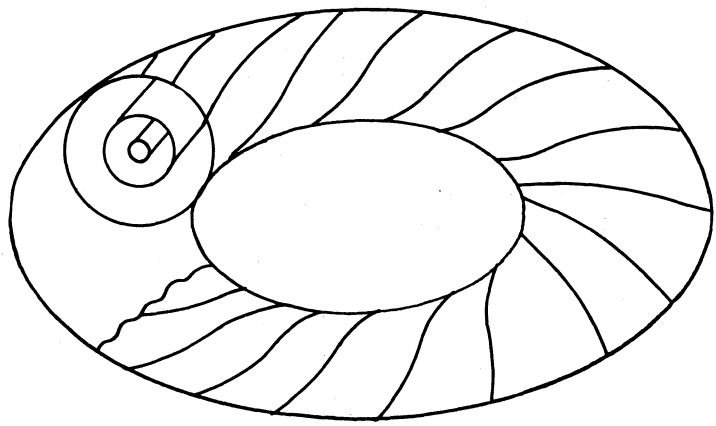

FIG. 2.

Plus précisément, le théorème suivant a lieu

THÉORÈME 7 (voir [4]). — *Supposons que*

1) *Le domaine tri-dimensionnel* D *est connexe et compact.*
2) *Le champ de vecteurs-vitesse d'écoulement stationnaire* v, *le domaine* D *et le bord* ∂D *sont analytiques réels.*
3) *Les vecteurs-vitesse et le vecteur rotationnel ne sont pas partout collinéaires :*

$$v \wedge \operatorname{rot} v \not\equiv 0.$$

Alors presque toutes les lignes de courant sont fermées ou bien partout denses sur des tores analytiques plongés dans D : *toutes les autres trajectoires forment un vrai sous-ensemble analytique compact dans* D.

Remarque. — La condition d'analycité n'est probablement pas très importante. La condition de non collinéarité est probablement importante.

([10]) Les trajectoires de champ de vecteur vitesse v.

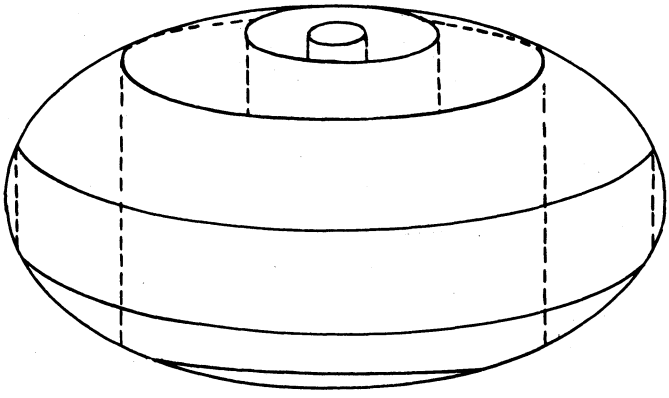

FIG. 3.

Car les écoulements avec rot $v = \lambda\, v$ (11) admettent, probablement, des lignes de courant avec une topologie aussi compliquée que celle des orbites en mécanique céleste (voir [5], fig. 6). De même, les lignes de courant des écoulements stationnaires des fluides visqueux peuvent avoir une topologie compliquée.

Démonstration du théorème 7. — D'après (94), les lignes de courant, comme les lignes de rotationnel sont orthogonales à grad α. Donc, elles apaprtiennent aux surfaces de niveau, $\alpha = \text{const}$. Etudions la topologie de ces surfaces.

On appellera une valeur α_0, valeur critique, s'il existe un point x dans D, où grad $\alpha(x) = 0$ et $\alpha(x) = \alpha_0$, ou s'il existe un point x dans ∂D, où grad $\alpha(x)$ est orthogonal à ∂D et $\alpha(x) = \alpha_0$. Il résulte de l'analycité de α et ∂D qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs critiques. La fonction α n'étant pas constante (non collinéarité), les points x dont $\alpha(x)$ est critique, forment un nombre fini de surfaces et courbes analytiques dans D.

Ces surfaces divisent D $\cup\, \partial$D en « cellules », dans chacune desquelles grad $\alpha \neq 0$ et grad α n'est pas orthogonal à ∂D. On montrera que dans chaque cellule, les lignes de courant sont fermées ou partout denses sur des tores.

Considérons une composante connexe C d'une surface de niveau

(11) Exemple :
$D = T^3$, $v_x = A \sin z + C \cos y$, $v_y = B \sin x + C \cos z$, $v_z = C \sin y + B \cos x$.

non-critique $\alpha(x) = \alpha_1$, la valeur α_1 étant non-critique. Cette composante C, ou bien

1) n'a pas d'intersection avec ∂D, alors C est une surface analytique fermée dans D, ou bien
2) a une intersection avec ∂D, $C \cap \partial D = \partial C$ formée d'un nombre fini de courbes analytiques fermées (l'intersection est transversale, parce que grad α n'est pas orthogonal à ∂D).

Si C est une surface sans bord, le groupe $\mathbf{R}^2$ agit sur C globalement et sans point fixe. En effet, soient $(s, t) \in \mathbf{R}^2$, $x \in C$. Considérons la solution $y(x_0 ; s, t ; \tau)$ du système

$$\frac{dy}{d\tau} = s\,r + t\,v, \quad y(x_0 ; s, t ; 0) = x_0, \quad (r = \operatorname{rot} v).$$

Les champs r et v commutant (94), l'application

$$x : C \times \mathbf{R}^2 \to C$$

donnée par $x(x_0 ; s, t) = y(x_0 ; s, t ; 1)$, définit l'action de $\mathbf{R}^2$ sur C.

Or α_1 est non-critique, donc $v \wedge r \neq 0$ partout sur C, par conséquent $\mathbf{R}^2$ agit sans point fixe. Donc C est un tore, et la ligne de courant $x(x_0 ; 0, t)$ est une orbite d'un sous-groupe à un paramètre; ce qui démontre le théorème 7 au cas où $\partial C = 0$.

Soit maintenant $\partial C \neq 0$. Alors ∂C est formé par un nombre fini de lignes de courant fermées sur ∂D. Soit $x(x_0, 0, \tau)$ une des composantes de ∂C :

$$x(x_0 ; 0, \tau + T) = x(x_0 ; 0, \tau) \text{ pour tout } \tau.$$

Conformément à la non-collinéarité et connexité de C, chaque point de C peut s'écrire sous la forme

$$x_1 = x(x_0 ; s, t).$$

La commutativité de $\mathbf{R}^2$ implique donc

$$x(x_1 ; 0, T) = x_1$$

c'est-à-dire la ligne de courant, issue du point x_1, est fermée. On voit aussi que C a la topologie du cylindre $S^1 \times I^1$. Le théorème 7 est démontré.

L'équation aux variations (46) au voisinage de l'écoulement stationnaire (94) correspond en hydrodynamique à l'équation de Rayleigh (équation pour fluide non visqueux de Orr-Sommerfeld). La forme quadratique

(44) est une intégrale première de cette équation linéaire. Conformément au théorème 4, il suffit pour la stabilité de l'écoulement stationnaire que la forme quadratique (44) soit définie (positive ou négative).

Il semble que, pour les écoulements à trois dimensions, la forme (44) ne soit jamais définie. Seul, pour les écoulements à deux dimensions, le théorème 4 implique des critères effectifs de stabilité.

Soit, par exemple, D un anneau plan (fig. 4).

L'écoulement stationnaire dans l'anneau D est stable, si sa fonction de courant vérifie la condition de concavité de profil de vitesse.

$$\frac{\nabla \psi}{\nabla \Delta \psi} > 0. \tag{95}$$

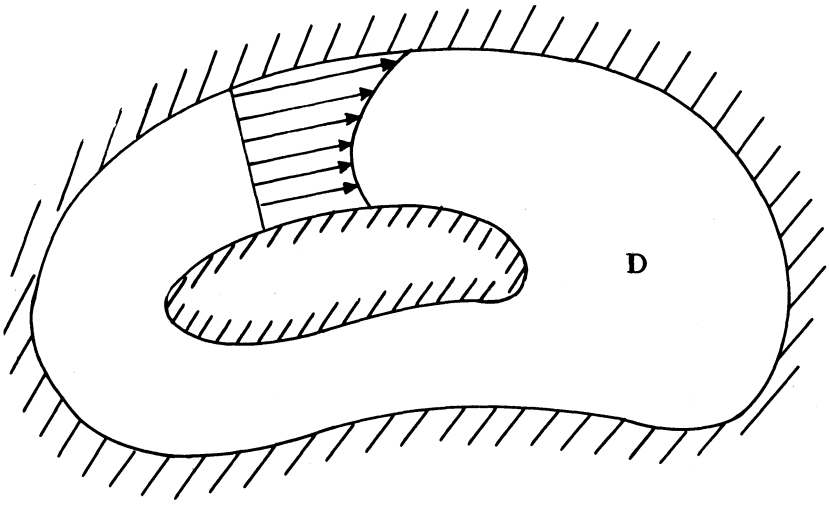

FIG. 4.

En effet

THÉORÈME 8. — *La forme quadratique* (44) *est*

$$\boxed{2\,\delta^2 \mathrm{E} = \iint_{\mathrm{D}} (\delta v)^2 + \frac{\nabla \psi}{\nabla \Delta \psi} (\delta r)^2 \, dx\, dy} \tag{96}$$

où $\delta r = \mathrm{rot}\, \delta v$.

Remarque. — Le rapport des vecteurs $\nabla\psi$ et $\nabla\Delta\psi$ dans (95) et (96) est un scalaire, parce que ces vecteurs sont collinéaires pour l'écoulement stationnaire (voir (94) et (91)).

La condition (95) implique : la forme (96) est définie positive. Donc, conformément au théorème 4, l'écoulement stationnaire (95) est stable. On trouvera une démonstration rigoureuse de stabilité dans [2].

Démonstration du théorème 8. — D'après les formules (41), (44), (67), la forme quadratique (44) est

$$2\,\delta^2\,\mathrm{E} = \iint_{\mathrm{D}} \delta v^2 + \delta v\,\{f, v\}\,dx\,dy, \text{ où } \delta v = \mathrm{B}(v, f) = r \wedge f + \operatorname{grad}\alpha,$$
$$r = -\Delta\psi. \tag{97}$$

En intégrant par partie, on trouve d'après (76) et (71)

$$\begin{aligned}\iint_{\mathrm{D}} \delta_v\,\{f, v\}\,dx\,dy &= \iint_{\mathrm{D}} \delta v \operatorname{rot}(f \wedge v)\,dx\,dy = \\ &= \iint_{\mathrm{D}} (\delta r)\,(f \wedge v)\,dx\,dy,\end{aligned} \tag{98}$$

avec des notations évidentes.

La formule (88) implique

$$f \wedge v = f \wedge \mathrm{I}\nabla\psi = -(f, \nabla\psi). \tag{99}$$

D'autre part, il résulte de (97), (51) et (91), que

$$\begin{aligned}\delta r = \{r, f\} &= -\Delta\psi_x f_1 - \Delta\psi f_{1_x} - \Delta\psi_y f_2 - \Delta\psi f_{2_y} = \\ &= -\Delta\psi\,(f_{1_x} + f_{2_y}) - \Delta\psi_x f_1 - \Delta\psi_y f_2 = -(f, \nabla\Delta\psi).\end{aligned} \tag{100}$$

En comparant les formules (99) et (100), on trouve

$$f \wedge v = \frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi}\,\delta r \tag{101}$$

La formule (96) résulte directement de (97), (98) et (101). Le théorème 8 est donc démontré.

Remarque. — L'écoulement stationnaire peut être stable même si la forme (96) n'est ni définie-positive, ni définie-négative.

En effet, l'écoulement circulaire dans un anneau circulaire

$$(\psi = \psi\,(x^2 + y^2))$$

est stable, si $\dfrac{\nabla \psi}{\nabla \Delta \psi}$ ne change pas de signe. Pour la démonstration, voir [1]; on utilise le théorème 4 et l'intégrale première du moment cinétique.

De même, l'écoulement plan-parallèle

$$\vec{v} = v\,(y), 0\ ;\ Y_1 \leqslant y \leqslant Y_2\ ;\ x \bmod X$$

est stable, si $v_{yy} \neq 0$, c'est-à-dire si le profil de vitesse n'a pas de points d'inflexion (analogie non linéaire du théorème de Rayleigh, voir [12], [9]). En plus, l'écoulement ayant un seul point d'inflexion est stable dans le cas de la figure 5 ($v/v_{yy} > 0$), tandis que dans le cas de la figure 6 ($v/v_{yy} < 0$), il est stable dans une bande assez étroite. Par exemple, si

$$v\,(y) = \sin y,\ Y_1 + Y_2 = 0,\ X = 2\,\pi,$$

alors l'écoulement est stable pour $|\,Y_2 - Y_1\,| < \pi$ et instable pour $|\,Y_2 - Y_1\,| > \pi$. Pour les démonstrations, voir [1] et [2] ; on utilise le théorème 4 et l'intégrale première des quantités de mouvement.

Les méthodes de [1], [2] s'appliquent aussi aux autres mouvements à deux dimensions. Par exemple, L. A. Dikii dans [7] a étudié les écoulements sphériques.

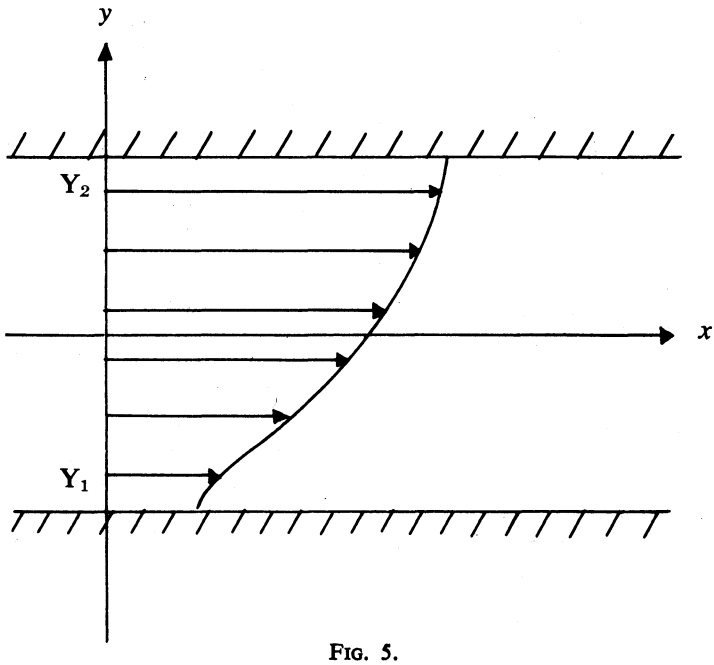

FIG. 5.

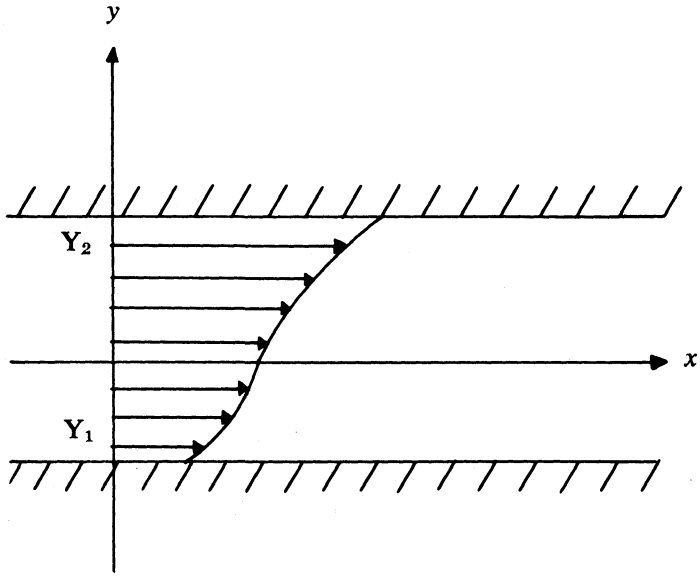

FIG. 6.

Le problème : *existe-t-il un écoulement stable parmi les écoulements stationnaires des fluides parfaits à trois dimensions ?* reste ouvert.

11. La courbure riemannienne du groupe des difféomorphismes.

L'expression (53) pour la courbure du groupe de Lie, muni d'une métrique invariante à gauche ([12]), garde un sens pour le cas du groupe de dimension infinie S Diff D, groupe des difféomorphismes d'un domaine riemannien D. J'appelle cette même expression « courbure riemannienne » du groupe S Diff D.

A titre d'exemple, on calculera dans ce paragraphe, la courbure du groupe S Diff T^2 des difféomorphismes d'un tore T^2, muni d'une métrique localement euclidienne. Les calculs montrent que la courbure dans les

([12]) Evidemment, au cas d'une métrique invariante à droite, la courbure dans une section correspondante est la même.

« assez bonnes » sections est *finie*. On trouve beaucoup de sections, dans lesquelles la courbure est *négative* (théorème 9). Mais on sait depuis Hadamard [10], que la courbure négative provoque l'instabilité des géodésiques. Les géodésiques du groupe S Diff D étant des écoulements de fluides parfaits, on démontre ainsi l'instabilité ([13]) de certains écoulements.

On trouve d'autre part des sections dans lesquelles la courbure est *positive*. Je ne sais pas s'il existe des points conjugués sur le groupe S Diff T^2.

Démontrons d'abord quelques formules auxiliaires. Comme on a vu au § 9, l'algèbre $\mathfrak{U}$ du groupe S Diff T^2 peut être considérée comme l'algèbre des fonctions de courant $\psi(x, y)$. Nous nous bornerons maintenant à la sous-algèbre $\mathfrak{U}_0$ formée par les fonctions de courant *univalentes* ([14]).

Soit $\mathbf{C}\,\mathfrak{U}_0$ l'*extension complexe* de l'algèbre $\mathfrak{U}_0$. L'extension des opérations $[\ ,\ ]$, $\langle\ ,\ \rangle$, $\mathrm{B}(\ ,\ )$, ∇, R, définies dans les paragraphes précédents, est immédiate; on a

$$[\lambda z, \lambda' z'] = \lambda\lambda' [z, z'] \; ; \; \langle \lambda z, \lambda' z' \rangle = \lambda\lambda' \langle z, z' \rangle, \tag{102}$$

$$\mathrm{B}(\lambda z, \lambda' z') = \lambda\lambda' \mathrm{B}(z, z'),$$

$$\nabla_{\lambda z} \lambda' z' = \lambda\lambda' \nabla_z z' \; ;$$

$$\langle \mathrm{R}(\lambda z, \lambda' z') \lambda'' z'', \lambda''' z''' \rangle = \lambda\lambda'\lambda''\lambda''' \langle \mathrm{R}(z, z') z'', z''' \rangle, \tag{103}$$

pour tout $z \in \mathbf{C}\,\mathfrak{U}_0$ et tout $\lambda \in \mathbf{C}$.

Evidemment, les opérations ainsi prolongées vérifient les identités algébriques (6), (10), (11), (45), (53), (59). Le tenseur de Riemann, qui apparaît dans (103) est défini pour le cas réel par

$$\mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\,\mathrm{Z} = -\nabla_x \nabla_y \mathrm{Z} + \nabla_y \nabla_x \mathrm{Z} + \nabla_{[x, y]} \mathrm{Z}. \tag{104}$$

Il est lié à la courbure (49) dans la section définie par deux vecteurs orthonormaux ξ, η, par la formule

$$\mathrm{C}_{\xi\eta} = \langle \mathrm{R}(\xi, \eta)\, \xi, \eta \rangle, \tag{105}$$

([13]) Le mot instabilité, ici, a une autre signification qu'au § 10 : il s'agit de la proximité des courbes $g(t)$ dans le groupe et pas de celle de leurs images $v(t)$ dans l'algèbre.

([14]) Cette sous-algèbre est un idéal. Le sous-groupe invariant correspondant (groupe des mouvements conservant le « centre de gravité ») est une sous-variété complètement géodésique de S Diff T^2, ce qui résulte de la loi de conservation de la quantité de mouvement. Donc, les courbures des sections correspondantes dans le groupe S Diff T^2 et dans le sous-groupe sont les mêmes.

et il vérifie les identités de symétrie et de Bianchi :

$$\langle R(X, Y) Z, W \rangle = -\langle R(X, Y) W, Z \rangle = \langle R(Z, W) X, Y \rangle \quad (106)$$

$$\langle R(X, Y) Z, W \rangle + \langle R(X, Z) W, Y \rangle + \langle R(X, W) Y, Z \rangle = 0. \quad (107)$$

Les relations (106) et (107) restent valables dans $\mathbf{C}\,\mathfrak{U}_0$.

Soit maintenant

$$e_k = e^{i(k, x)}$$

une fonction univalente sur le tore $T^2 = \mathbf{R}^2/\Gamma$, $\mathbf{R}^2 = \{x\}$, k un vecteur du plan euclidien $\mathbf{R}^2$. Evidemment, les vecteurs admissibles k forment un réseau et les fonction e_k, $k \neq 0$, forment une base dans l'espace $\mathbf{C}\,\mathfrak{U}_0$. On calculera les opérations (102), (103) sur les vecteurs de base.

Soient S l'aire du tore T^2, et $R_{k,l,m,n} = \langle R(e_k, e_l)\, e_m, e_n \rangle$.

LEMME 10. — *Les formules suivantes ont lieu :*

$$\langle e_k, e_l \rangle = 0 \quad \textit{pour} \quad k + l \neq 0; \quad \langle e_k, e_{-k} \rangle = k^2 S; \quad (108)$$

$$[e_k, e_l] = (k \wedge l)\, e_{k+l}; \quad (109)$$

$$B(e_k, e_l) = b_{k,l}\, e_{k+l}, \quad b_{k,l} = (k \wedge l) \frac{k^2}{(k + l)^2}; \quad (110)$$

$$\nabla_{e_k} e_l = d_{l,k+l}\, e_{k+l}, \quad d_{u,v} = \frac{(v \wedge u)(u \cdot v)}{v^2}, \quad (111)$$

$$\boxed{R_{k,l,m,n} = (a_{l,n}\, a_{k,m} - a_{l,m}\, a_{k,n})\, S,} \quad (112)$$

pour $k + l + m + n = 0$ on a

$$\boxed{a_{u,v} = \frac{(u \wedge v)^2}{|u + v|}}\ ; \quad (113)$$

si $k + l + m + n \neq 0$, *alors* $R_{k,l,m,n} = 0$.

Démonstration du lemme 10. — La formule (108) est une conséquence immédiate de la définition (67), et la formule (109) est une conséquence des formules (51) et (52).

Ensuite, il résulte des formules (10) et (109) que

$$\langle B(e_k, e_l), e_m \rangle = (l \wedge m) \langle e_{l+m}, e_k \rangle. \quad (114)$$

D'après (108), la formule (114) montre que $B(e_k, e_l)$ est orthogonal à e_m pour $k + l + m \neq 0$. Donc, $B(e_k, e_l) = b_{k,l}\, e_{k+l}$. On trouve l'expression (110) pour $b_{k,l}$ en utilisant (114) et (108) avec $m = -k - l$.

Il résulte de (55), d'après (109), (110), que

$$\nabla_{e_k} e_l = \frac{1}{2}(k \wedge l)\left(1 - \frac{k^2 - l^2}{(k+l)^2}\right) e_{k+l}. \tag{115}$$

Mais évidemment

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{k^2 - l^2}{(k+l)^2}\right) = \frac{(l, k+l)}{(k+l)^2}. \tag{116}$$

Les formules (115) et (116) entraînent (111).

Ensuite, en substituant (111) dans (104), on trouve d'après (103)

$$\nabla_{e_k} \nabla_{e_l} e_m = d_{l+m,k+l+m}\, d_{m,l+m}\, e_{k+l+m}, \tag{117}$$

$$\nabla_{e_l} \nabla_{e_k} e_m = d_{k+m,k+l+m}\, d_{m,k+m}\, e_{k+l+m}, \tag{118}$$

$$\nabla_{[e_k e_l]} e_m = (k \wedge l)\, d_{m,k+l+m}\, e_{k+l+m}. \tag{119}$$

En comparant les formules (104), (117), (118), (119) et (108), on trouve $R_{k,l,m,n} = 0$ pour $k + l + m + n \neq 0$, et pour $k + l + m + n = 0$, on trouve

$$R_{k,l,m,n} = (d_{k+m,n}\, d_{m,k+m} - d_{l+m,n}\, d_{m,l+m} + (k \wedge l)\, d_{m,n})\, n^2\, S, \tag{120}$$

(on a utilisé le fait que $d_{u,v}$ est symétrique en u et en v, conformément à (111).

Soit maintenant $k + l + m + n = 0$. D'après (111), on a

$$\left.\begin{aligned}
-\ d_{k+m,n} &= \frac{l \wedge (k+m)}{n^2}(k+m, n);\\
-\ d_{m,l+m} &= \frac{m \wedge l}{(l+m)^2}(l+m, m);\\
-\ d_{m,k+m} &= \frac{m \wedge k}{(k+m)^2}(k+m, m);\\
-\ d_{m,n} &= \frac{(l+k) \wedge m}{n^2}(m, n).\\
-\ d_{l+m,n} &= \frac{k \wedge (l+m)}{n^2}(l+m, n);
\end{aligned}\right\} \tag{121}$$

Il résulte de (121) et (120) :

$$S^{-1} R_{k,l,m,n} = A(l \wedge k)(m \wedge k) + (A - B)(l \wedge m)(m \wedge k) + B(k \wedge l)(l \wedge m), \tag{122}$$

où

$$A = \frac{(k + m, m)(k + m, n)}{(k + m)^2} - (m, n); \tag{123}$$

$$B = \frac{(l + m, m)(l + m, n)}{(l + m)^2} - (m, n).$$

On utilisera maintenant l'identité

$$\frac{(a, b)(a, c)}{a^2} + \frac{(a \wedge b)(a \wedge c)}{a^2} = (b, c) \tag{124}$$

où a, b, c sont trois vecteurs arbitraires du plan euclidien.

(La formule (124) est mieux connue sous la forme

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta)).$$

Il résulte de (123), (124) et de $k + l + m + n = 0$, que

$$A = \frac{(k \wedge m)(l \wedge n)}{(k + m)^2}, \qquad B = \frac{(l \wedge m)(k \wedge n)}{(l + m)^2}. \tag{125}$$

La formule (122) équivaut à

$$S^{-1} R_{k,l,m,n} = A(m \wedge k)(l \wedge (k + m)) + B(l \wedge m)(k \wedge (l + m)) \tag{126}$$

Compte tenu de $k + l + m + n = 0$, (126) se réduit à

$$S^{-1} R_{k,l,m,n} = A(m \wedge k)(n \wedge l) + B(l \wedge m)(n \wedge k). \tag{127}$$

En comparant (127) et (125), on trouve

$$S^{-1} R_{k,l,m,n} = \frac{(k \wedge m)^2 (l \wedge n)^2}{(k + m)^2} - \frac{(l \wedge m)^2 (k \wedge n)^2}{(l + m)^2} \tag{128}$$

La formule (128) est équivalente à (112), (113), car $k + m = -(l + n)$ et $l + m = -(k + n)$. Le lemme 10 est donc démontré.

THÉORÈME 9. — *La courbure du groupe* S Diff T^2 *dans chaque section, qui contient le vecteur* $\xi \in \mathfrak{U}$, *correspondant à la fonction de courant* $\cos kx$, *est non-négative.*

Le théorème 9 est une conséquence immédiate de la formule (129) ci-dessous.

LEMME 11. — *Soient*

$$2\xi = e_k + e_{-k}, \qquad \eta = \Sigma\, x_l\, e_l$$

deux vecteurs réels dans $\mathfrak{U}$, *c'est-à-dire* $x_{-l} = \bar{x}_l$. *Alors, avec les notations de* (113),

$$\boxed{\langle R(\xi, \eta)\, \xi, \eta\rangle = -\frac{S}{4} \sum_l a_{k,l}^2 \left| x_l + x_{l+2k} \right|^2} \tag{129}$$

Notons un corollaire de la formule (129) :

COROLLAIRE. — *La courbure du groupe* S Diff T^2 *dans la section, définie par les fonctions de courant* $\xi = \cos kx$, $\eta = \cos lx$, *est*

$$\boxed{C_{\xi,\eta} = -\frac{k^2 + l^2}{4S} \sin^2 \alpha \, \sin^2 \beta} \tag{130}$$

où S *est l'aire du tore,* α *l'angle entre* k *et* l, β *l'angle entre* $k + l$ *et* $k - l$.

Par exemple, pour $T^2 = \{ x, y \bmod 2\pi \}$ *la courbure dans la section déterminée par les champs de vecteurs* $(\sin y, 0)$ et $(0, \sin x)$ *est*

$$\boxed{C_{\xi\eta} = -\frac{1}{8\pi^2}.} \tag{131}$$

La formule (130) entraîne (131), ici $k^2 = l^2 = 1$, $S = 4\pi^2$ $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration de la formule (130). — Les vecteurs ξ, η étant orthogonaux dans $\mathfrak{U}$

$$C_{\xi\eta} = \frac{\langle R(\xi, \eta)\, \xi, \eta\rangle}{\langle \xi, \xi\rangle \langle \eta, \eta\rangle}. \tag{132}$$

D'après (108),

$$\langle \xi, \xi\rangle = \frac{1}{2} k^2 S, \qquad \langle \eta, \eta\rangle = \frac{1}{2} l^2 S. \tag{133}$$

En posant dans (129), $x_l = x_{-l} = \frac{1}{2}$, on trouve

$$\langle R(\xi, \eta)\, \xi, \eta \rangle = -\frac{S}{16} (a^2_{k,l} + a^2_{k,l-2k} + a^2_{k,-l} + a^2_{k,-l-2k}). \quad (134)$$

Conformément à la formule (113), $a^2_{k,l-2k} = a^2_{k,-l}$ et $a^2_{k,-l-2k} = a^2_{k,l}$

Donc (134) devient

$$\langle R(\xi, \eta)\, \xi, \eta \rangle = -\frac{S}{8} (a^2_{k,l} + a^2_{k,-l}). \quad (135)$$

Il résulte de (113) que

$$a^2_{k,l} + a^2_{k,-l} = (k \wedge l)^4 \left(\frac{1}{h_+^2} + \frac{1}{h_-^2} \right), h_+ = k + l, h_- = k - l.$$

On utilisera les identités évidentes

$$h_+^2 + h_-^2 = 2(k^2 + l^2), \qquad h_+ \wedge h_- = -2(k \wedge l). \quad (137)$$

Il résulte de (136) et (137) que

$$a^2_{k,l} + a^2_{k,-l} = \frac{(k \wedge l)^2 (h_+ \wedge h_-)^2}{2 h_+^2 h_-^2} (k^2 + l^2). \quad (138)$$

En comparant les formules (138), (135), (133), (132) et compte tenu de

$$(k \wedge l)^2 = k^2 l^2 \sin^2 \alpha, \qquad (h_+ \wedge h_-)^2 = h_+^2 h_-^2 \sin^2 \beta,$$

on obtient (130). Le corollaire est donc démontré.

Démonstration du lemme 11. — Conformément à (103),

$$\langle R(\xi, \eta)\, \xi, \eta \rangle = \frac{1}{4} \sum_l (R_{k,l,k,-2k-l}\, x_l\, x_{-2k-l} + R_{-k,l,-k,2k-l}\, x_l\, x_{2k-l}$$
$$+ R_{k,l,-k,-l}\, x_l\, x_{-l} + R_{-k,l,k,-l}\, x_l\, x_{-l}). \quad (139)$$

En utilisant (112), on trouve pour les coefficients de la forme quadratique (139) les valeurs

$$R_{k,l,k,-2k-l} = R_{-k,l,k,-l} = -a^2_{k,l} S,$$
$$R_{k,l,-k,-l} = R_{-k,l,-k,2k-l} = -a^2_{k,-l} S.$$

Donc, la forme (139) devient

$$\langle R(\xi, \eta)\, \xi, \eta \rangle = -\frac{S}{4} \sum_l [a^2_{k,l} (x_l\, x_{-2k-l} + x_l\, x_{-l}) +$$
$$+ a^2_{k,-l} (x_l\, x_{2k-l} + x_l\, x_{-l})]. \quad (140)$$

Mais il résulte de la formule (113) que

$$a^2_{k,-l} = a^2_{k,l-2k}. \tag{141}$$

En utilisant (141), on démontre facilement que

$$\sum_l a^2_{k,-l}(x_l x_{2k-l} + x_l x_{-l}) = \sum_l a^2_{k,l}(x_{l+2k} x_{-l} + x_{l+2k} x_{-l-2k}). \tag{142}$$

Il résulte de (140), (142) et de la relation de réalité $x_{-j} = \overline{x_j}$, que

$$\langle R(\xi, \eta)\, \xi, \eta\rangle = -\frac{S}{4} \sum_l a^2_{kl}(x_l \overline{x}_{l+2k} + x_l \overline{x}_l + x_{l+2k} \overline{x}_l + x_{l+2k} \overline{x}_{l+2k}),$$

ce qui équivaut à (129). Le lemme 11 est démontré.

Remarque. — Il existe aussi des sections dans lesquelles la courbure du groupe S Diff T^2 *est positive.* En effet, considérons une section, définie par les deux fonctions de courant

$$\begin{aligned} \xi &= \cos(3px - y) + \cos(3px + 2y), \\ \eta &= \cos(px + y) + \cos(px - 2y), \end{aligned} \tag{143}$$

sur le tore $T^2 = \{ x, y \bmod 2\pi \}$. Alors la courbure sectionnelle est

$$C_{\xi,\eta} = \frac{\langle R(\xi, \eta)\, \xi, \eta\rangle}{\langle \xi, \xi\rangle \langle \eta, \eta\rangle} \to \frac{9}{8\pi^2} > 0 \quad \text{pour} \quad p \to \infty. \tag{144}$$

Démonstration de la formule (144). — Soient k, l, m, n des vecteurs plans entiers, $k + m = l + n$, et

$$\begin{aligned} \xi &= x_k \cos kx + x_m \cos mx, \\ \eta &= y_l \cos lx + y_n \cos nx. \end{aligned} \tag{145}$$

Alors, d'après (103), (106), (107), on trouve

$$\begin{aligned} \langle R(\xi, \eta)\, \xi, \eta\rangle = \frac{S}{16} (&\alpha_{k,l} x_k^2\, x_l^2 + \alpha_{k,n} x_k^2\, y_n^2 + \alpha_{m,l} x_m^2\, y_l^2 + \\ &+ \alpha_{m,n} x_m^2\, y_n^2 + \alpha\, x_k x_m y_l y_n), \end{aligned}$$

où, conformément à la formule (112),

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{k,l} = -2(a^2_{k,l} + a^2_{k,-l}); \qquad \alpha_{k,n} = -2(a^2_{k,n} + a^2_{k,-n}); \\ &\alpha_{m,l} = -2(a^2_{m,l} + a^2_{m,-l}); \qquad \alpha_{m,n} = -2(a^2_{m,n} + a^2_{m,-n}); \\ &\alpha = 4(2a_{k,m}\, a_{l,n} - a_{k,-n}\, a_{l,-m} - a_{k,-l}\, a_{m,-n}). \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

Les vecteurs (143) ont la forme (145) avec $x_k = x_m = y_l = y_n = 1$, et

$$\left.\begin{array}{ll} k = -3p, 1; & m = 3p, 2; \\ l = p, 1; & n = -p, 2. \end{array}\right\} \tag{148}$$

Il résulte des expressions (148) que pour $p \to \infty$, tous les produits $k \wedge l \ldots$ sont d'ordre p, avec les sommes et différences $|k \pm l| \ldots$, sauf

$$|k + m| = |l + n| = 3.$$

Donc, d'après (113), tous les $a_{k,l} \ldots$ dans (147) sont d'ordre p, sauf

$$a_{k,m} = 27\, p^2, \qquad a_{l,n} = 3\, p^2.$$

Ainsi, on obtient l'expression asymptotique pour (146) :

$$\langle R(\xi, \eta), \xi, \eta \rangle \sim \frac{S\alpha}{16} \sim \frac{S \cdot 81\, p^4}{2}, \qquad (p \to \infty). \tag{149}$$

D'après (108), $\langle \xi, \xi \rangle = \frac{1}{2}(k^2 + m^2)\, S$; $\langle \eta, \eta \rangle = \frac{1}{2}(l^2 + n^2)\, S$. Il résulte donc de (148) que

$$\langle \xi, \xi \rangle \sim 9p^2\, S, \qquad \langle \eta, \eta \rangle \sim p^2\, S \qquad (p \to \infty). \tag{150}$$

Les formules (149) et (150) donnent (144), compte tenu de l'aire du tore : $S = 4\pi^2$. Ce qu'il fallait démontrer.

Un calcul plus précis montre que $C_{\xi\eta} > 0$ déjà pour $p = 2$, c'est-à-dire dans la section

$$\xi = \cos(6x - y) + \cos(6x + 2y),$$
$$\eta = \cos(2x + y) + \cos(2x - 2y).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Arnold, Journal de Mécanique (sous presse).
[2] V. Arnold, Doklady, 163 n° 2 (1965).
[3] V. Arnold, C.R.A.S., 260 (1965), p. 5668.
[4] V. Arnold, C.R.A.S., 261 (1965), p. 17.
[5] V. Arnold, Russian mathematical surveys, 18 n° 6 (1963), 91-192.

[6] N. Bourbaki, l'Architecture de la Mathématique, dans Н. Бчрбаки, История Математики, Москва, Физматгиз, (1963).

[7] L. A. Dikii, Sur la théorie non-linéaire de stabilité hydrodynamique, Prikladnaia Mathematiqua i Mecaniqua, 29 n° 5 (1965), 852-855.

[8] L. Euler, Theoria motus corporum solidorum sei rigidorum (1765).

[9] R. Fjørtioft, Geofysiske Publikasjoner, Oslo, 17 n° 6 (1950).

[10] J. Hadamard, *J. Math. Pures et Appl,*. 5° série, 4 (1898), 27-73.

[11] V. Judovic, Doklady, 1366 (1961), p. 564.

[12] C. C. Lin, The theory of hydrodynamical stability, Oxford (1953).

[13] J. Milnor, Morse Theory, *Ann. Math. Studies,* 51 (1963).

[14] J. J. Moreau, C.R.A.S., 249 (1959), p. 2156.

Manuscrit reçu le 13 octobre 1965

V. Arnold,
Faculté de Mécanique
et de Mathématiques,
Université de Moscou,
Moscou V-234 (U.R.S.S.).