ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Marcel BERGER

Yves et Arthur : quelques souvenirs

Tome 57, nº 7 (2007), p. 2083-2089.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_7_2083_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
57, 7 (2007) 2083-2089

YVES ET ARTHUR : QUELQUES SOUVENIRS

par Marcel BERGER

Le présent texte se veut sans prétention, tant scientifique qu'historique ; il survole, et de façon certainement partiale, la partie de la carrière d'Yves Colin de Verdière à laquelle j'ai été mêlé. C'est pour moi un bien agréable clin d'oeil vers notre passé. Je me suis permis d'y glisser çà et là quelques pensées personnelles, dont il est inutile de dire qu'elles n'engagent que moi.

Pour ne pas abuser du suspense j'informe de suite le lecteur non affranchi que le Arthur dont il est question est le premier prénom d'Arthur Lancelot Besse, "auteur" de plusieurs ouvrages collectifs, dont les deux principaux sont "Manifolds all of whose Geodesics are Closed" (Springer 1978) et "Einstein Manifolds" (Springer 1987).

Yves arrive à l'Université Paris VII comme assistant puis comme maître assistant de 1968 à 1974. Sa formation consiste alors en un DEA d'Analyse obtenu avec Schwartz et Choquet. Il poursuit son désir de recherche mathématique, mais alors encore dans une direction imprécise, en lisant plusieurs textes de probabilités, entre autres des articles de Varadhan, et du côté géométrique des textes de Smale sur les systèmes dynamiques. Il est orphelin de bureau au début, car en effet tous les bureaux de mathématique en ces débuts de cette université étaient à l'Institut Henri Poincaré, et donc, vu leur nombre epsilonesque, uniquement pour les professeurs. Mais lorsque les mathématiques descendent de la colline au campus de Jussieu, il partage alors un bureau avec Jacques Lafontaine. Sa motivation pour venir en 1971 au séminaire de géométrie riemannienne de l'Université Paris VII est au moins double : il est à la recherche d'un sujet de thèse d'État, et il s'occupe en 1971 des TD de mon cours de géométrie différentielle.

En février 1972 Bérard Bergery raconte à Bourbaki le résultat de de Heinz Huber (un résultat de 1959) : pour une surface compacte à courbure constante négative (de telles surfaces ne sont autres que les formes hyperboliques compactes) le spectre du laplacien détermine (et réciproquement) le “spectre des longueurs”, c'est-à-dire l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques. Ceci grâce à l'intermédiaire de Chern qui m'avait signalé en 1969, ce résultat que j'ignorais complètement (mea culpa). En outre Léon Green m'avait posé dans une lettre la question de l'isospectralité pour les variétés riemanniennes compactes dès 1962. Étendre le résultat de Huber en dimensions plus grandes, puis aux variétés riemanniennes générales, était donc un challenge évident, mais il fallait vraiment faire du nouveau. En effet d'une part, même dans le cas de la courbure constante, la formule de Selberg nécessitait de connaître, outre les longueurs, l'holonomie le long de ces géodésiques périodiques, holonomie qui est automatiquement nulle en dimension deux. Enfin, dans la démonstration de Huber, la courbure constante permettait d'avoir une formule explicite pour le noyau de l'équation de la chaleur (rappelons que les géodésiques sont les bicaractéristiques de l'équation de la chaleur).

Yves comme moi étions donc intéressés pas le sujet, il y avait pas mal de choses dans l'air : le célèbre article de 1966 “Can you hear the shape of a drum” de Kac, puis le contre-exemple de Milnor de 1964 à l'isospectralité, c'est à dire sa découverte de deux tores riemanniens isospectraux mais qui ne sont pas isométriques.

Intermezzo. En outre j'ai toujours été intéressé par les “questions naturelles”, mais voici l'occasion ici au Gromovolâtre que je suis, puisqu'il est question de “questions naturelles”, de renvoyer à ce que Gromov dit de telles questions dans “Spaces and Questions”, GAFA 2000, Visions in Mathematics, Birkhäuser.

Toujours est-il que, je ne sais plus qui me l'avait signalé, mais en tout cas je me retrouve possesseur d'un tiré à part d'un article de 1971 de Balian et Bloch qui racontent des choses “analogues” à celles de Huber, mais pour des domaines convexes à bord du plan et avec le style inimitable, tant pour les définitions que pour les résultats, d'un grand nombre de physiciens théoriciens. Je pose ce tiré à part sur la table à l'entrée du séminaire, et Yves s'en empare de suite.

La suite est fulgurante. En moins de deux ans il casse la question, d'où un doctorat d'État, et la publication dans Compositio Mathematica d'une solution quasi-parfaite au problème, c'est à dire qu'il faut montrer que le spectre du laplacien détermine le spectre des longueurs (i.e. l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques) sur toute variété riemannienne compacte (de dimension quelconque). Ceci nécessite une hypothèse de généricité, pour que déjà même la notion de spectre des longueurs ait un sens (penser par exemple que certaines des géodésiques périodiques peuvent arriver en famille continue) . La notion de généricité pour les variétés riemanniennes est notion difficile, qui n'a été bien éclaircie que progressivement.

Voici maintenant brièvement ce qu'Yves démontre dans les deux articles qui composent sa thèse d'État. Dans le premier il étudie le cas des surfaces à courbure négative (à cela près quelconque, i.e. pas nécessairement constante). Ici la courbure négative entraîne que les longueurs des géodésiques périodiques forment un ensemble discret. Donc la distribution de Poisson qui leur est associée est raisonnable, et Yves la traite par son innovation de base, utiliser les résultats dits de “la phase stationnaire” pour étudier le noyau de l'équation de la chaleur, mais complexifié. C'est typiquement ici que la lecture de Varadhan a inspiré Yves.

Pour être honnête je dois dire que je n'étais vraiment pas analyste, par exemple c'était la première fois que j'entendais parler de cette “phase stationnaire”. La lecture de la thèse d'Yves m'a été très pénible, très difficile, et je n'ai pas dominé complètement sa démonstration, contrairement à ma morale qui était que pour le premier article d'un élève de thèse il faut absolument vérifier complètement son travail, car les thèses fausses, ou même seulement incomplètes, engendrent des drames dont peu se remettent, leur nom gardant de façon quasi-indélébile ce stigma. Pour plus de détails sur les démonstrations d'Yves, et les concepts d'analyse qui y entrent, je vous renvoie au texte de Malgrange de ce fascicule.

Ce qui se passa à la suite de sa thèse ne fut pas sans quelques nuages, et dans une comparaison avec la houle, Yves n'eut pas du tout le mal de mer qui pouvait guetter dans ce genre de situations un tout jeune chercheur : je m'explique. D'abord Yves raconte son résultat à Nice devant Chazarain, qui lui simplifie les choses avec le langage des distributions, où les choses deviennent une “formule de Poisson” pour les variétés riemanniennes. Un peu plus grave est que, lors du symposium d'été d'un mois sur la géométrie différentielle de l'AMS à Stanford en 1973, et alors que je raconte le contenu de sa thèse lors d'un cycle de trois conférences sur le spectre, Duistermaat et Guillemin annoncent dans un exposé qui a lieu à la suite des trois miens, des résultats nettement plus forts que ceux d'Yves. En fait les choses sont assez imbriquées, disons en bref d'abord que Duistermaat et Guillemin travaillaient indépendamment sur le sujet, et que c'est à la suite de mes exposés sur les résultats d'Yves qu'ils ont découvert qu'ils travaillaient chacun de leur côté sur un même sujet. Ces travaux, jusqu'alors indépendants, avaient été pour chacun d'entre eux motivés par l'article d'Hörmander sur la fonction spectrale. Mais il leur faudra deux bonnes années, soit en 1975, avant qu'ils ne publient leurs recherches.

Mais comme vous le verrez amplement tout au long de cette semaine Yves sut très vite élargir, considérablement élargir, son domaine de recherches, de façon très arborescente comme le montre la liste de ses publications. Cependant je me risque à quelques mots brefs sur cet élargissement progressif dans le domaine qu'est la "spectrologie" des variétés riemanniennes.

Une première question naturelle (sic) : peut-on préciser un aller et retour global entre le spectre du laplacien et celui des longueurs, par exemple associer une ou des valeurs du spectre du laplacien à telle ou telle géodésique périodique ? C'est ce que faisait en 1973 Lazutkin pour les billards convexes, il lançait la notion de "quasi-mode". Précisément il montrait que l'on pouvait à partir de certaines géodésiques périodiques trouver des approximations des valeurs propres, mais pas de toutes. En 1977, Yves démontre un résultat analogue pour les variétés riemanniennes.

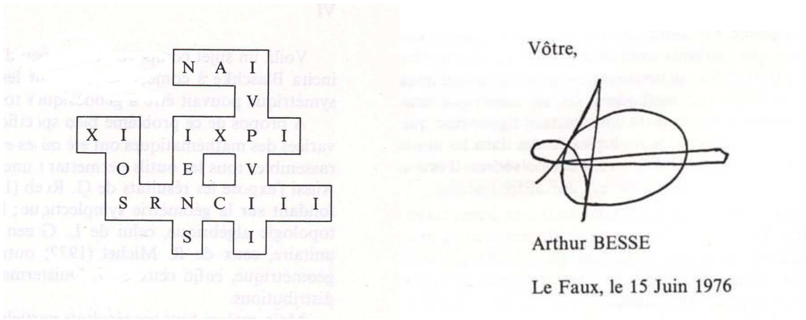
Puis il s'attaque ensuite au problème, naturel toujours lui aussi, et encore béant aujourd'hui, des conditions nécessaires pour pouvoir construire une variété riemannienne dont le spectre serait un sous-ensemble des réels donné a priori, c'est à dire une suite de réels croissants (assortis éventuellement de multiplicités). Yves montre que l'on peut le faire avec un ensemble fini seulement (mais aussi grand que l'on veut et avec des multiplicités quelconques). Sauf pour les surfaces, car la méthode consiste à mettre des résonateurs et ensuite les relier par des câbles, mais qui ne doivent pas se rencontrer. D'où un problème concernant les graphes des surfaces. Ici pour ce faire, Yves introduit un nouvel invariant, qu'il appelle "nombre chromatique", et ce sera pour lui un départ pour de travaux sur les réseaux électriques. Toujours pour le spectre proprement dit, Yves fait faire un progrès à la question (toujours ouverte si l'on veut une réponse complète) de savoir si l'ergodicité du flot géodésique entraîne une bonne distribution des fonctions propres du laplacien.

Cependant il manque dans cette liste un résultat, et non publié comme on le verra de suite. Je m'explique, c'est ici que je justifie mon titre, car il s'agit des relations d'Yves avec Arthur. Signalons cependant qu'Yves quitta Paris très vite, puisque ce fut dès 1977 date à laquelle quand il fut nommé professeur à Grenoble.

Cependant il collabora, avant de partir, à l'ouvrage d'Arthur Besse, consacré aux “Variétés à géodésiques toutes périodiques” (Manifolds all of whose Geodesics are Closed). Que le lecteur ne s'inquiète pas, la littérature mélange sans complexe pour les géodésiques les vocables “fermée” et “périodique”. Quelques mots d'abord sur Arthur : l'étude de telles variétés à géodésiques toutes périodiques, condition apparemment extrêmement forte, mais qui reste fondamentalement ouverte, avait mobilisé pas mal de séances du séminaire, car il y avait eu des progrès récents à propos de la question : “les seules variétés ayant cette propriété, ultra forte, sont les espaces symétriques compacts de rang un” (c'est Élie Cartan qui avait découvert dès 1928 cette jolie propriété des espaces symétriques compacts de rang un). Comme ces résultats utilisaient pas mal de techniques venant d'horizons variés, l'idée vint à Jean-Pierre Bourguignon de suggérer aux assistants du séminaire de rédiger un ouvrage collectif sur ce thème. Pour le préparer les participants du séminaire organisèrent en 1975 une table ronde sur le sujet à Besse-en-Chandesse, mais ajoutèrent un deuxième sujet (de géométrie algébrique) pour obtenir plus facilement la subvention demandée au CNRS . “Table ronde” était alors le nom pour les petits congrès subventionnés par le CNRS). Les éditions Springer acceptèrent de publier (en 1978) cet ouvrage collectif, mais nous eûmes du mal à obtenir que les noms explicites des auteurs ne figurassent pas sur la page de garde.

Dans ce premier ouvrage d'Arthur on trouve en haut à droite de la première page de la préface un grimoire qui permet de connaître les institutions académiques dont étaient membres les auteurs. Depuis la sortie de ce livre j'ai toujours été surpris qu'aucun collègue ne m'ait jamais demandé, ni ce que signifiait ce grimoire, ni l'analyse des sigles qui y sont cachés. Ni non plus de décrypter l'introduction, signée collectivement mais en fait due à Jean-Pierre. La signature elle aussi est cryptée. En échange les prénoms Arthur et Lancelot proviennent évidemment des écrits sur les "Chevaliers de la Table Ronde”. Je révèle aussi ici que, pour la préface de “Einstein Manifolds” d'Arthur, personne de Besse ne réussit à concocter une préface satisfaisante et contenant des allusions cryptées.

Mais les auteurs des contributions originales, toujours un peu soixante-huitards, ne les publièrent pas séparément sous leur nom, malgré ma mise en garde, et ce qui était au contraire la règle à Bourbaki. Ce n'était pas trop grave pour leur carrière, car la France d'alors n'était pas encore soumise à la “rat race”.



Pour ce qui est de Bourbaki, ce n'est que plus tard que l'on appris que le premier congrès de Bourbaki avait eu lieu effectivement à Besse-en Chandesse (et dans le même hôtel). Ce n'est que encore bien plus tard que Reinhold Remmert nous signala l'existence d'un mathématicien suisse appelé Jean Besse (voir son article dans Comm. Math. Helvetici, "Sur le domaine d'existence d'une fonction analytique", volume 10 (1937-38)). D'autre part, contrairement à ce que pas mal de géomètres différentiels croient, Arthur n'a jamais voulu jouer le rôle d'un Bourbaki de la géométrie différentielle, mais au contraire publier des ouvrages rassemblant des structures mathématiques très variées, avec un but final commun.

Voici pour terminer quelques précisions sur contributions originales, et non publiées ailleurs, par Yves à ce volume d'Arthur. Étant donné que les symétriques compacts de rang un (siglés CROSSes chez Arthur) jouent un rôle fondamental dans le sujet, c'était l'occasion de réécrire pas mal de choses à leur sujet. Yves se chargea d'abord du calcul "exact" de leur spectre, quelque chose de facile en théorie, mais en pratique les valeurs explicites de la littérature étaient fausses. Ensuite les CROSSes sont des variétés riemanniennes dites "harmoniques", c'est à dire que leur mesure (canonique) est isotrope. Ce qui est équivalent à la condition classique sur la valeur moyenne des fonctions sur les sphères métriques. La conjecture de Lichnerowicz était que les seules variétés harmoniques compactes sont les CROSSes. La contribution originale d'Yves fut celle-ci : la condition d'harmonicité, qui est infinitésimale, entraîne celle globale qui dit que le noyau complet de l'équation de la chaleur est lui aussi isotrope (on parle d'espace fortement harmonique). Ce résultat joua un rôle clef dans la démonstration de Szabo en 1990 de la conjecture de Lichnerowicz.

Je signale enfin, pour terminer et comme une introduction aux textes de Guillemin et de Duistermaat, que ces deux auteurs avaient démontré dans leur papier cité plus haut de 1975, un résultat sur le spectre des variétés dont toutes les géodésiques sont fermées. Yves, dans l'esprit posthume d'une collaboration au livre d'Arthur, raffine considérablement leur résultat, dans un papier de 1979. En voir les détails dans le texte de Victor dans ce même fascicule.

Marcel BERGER
35 route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette (France)
mberger@ihes.fr