ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCEL BRELOT

Remarques sur la variation des fonctions sousharmoniques et les masses associées. Application

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 101-112
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__101_0>

REMARQUES SUR LA VARIATION DES FONCTIONS SOUSHARMONIQUES ET LES MASSES ASSOCIÉES. APPLICATION

par Marcel **BRELOT** (Grenoble).

---

1. La rapidité de variation d'une fonction d'une variable est liée élémentairement à l'allure des dérivées première et seconde. Pour les fonctions convexes on a même la proposition facile suivante : si une famille de fonctions convexes dans $]a, b[$ est bornée supérieurement en un point et bornée inférieurement au voisinage de a et b, pour qu'il y ait une borne supérieure commune finie sur chaque intervalle fermé contenu, il faut et suffit que sur chacun de ces intervalles $[\alpha, \beta]$, la variation de f'^{+} soit bornée uniformément par rapport aux fonctions de la famille. Cette variation est d'ailleurs la masse portée par $]\alpha, \beta]$ dans la représentation intégrale locale $f(x) = \int |x - t| \, d\mu_t + fct\ lin.$

On pourrait approfondir les deux parties du théorème. Nous allons plutôt examiner et détailler son extension aux fonctions sousharmoniques dans un domaine, moins immédiate et utile à expliciter, encore facile lorsqu'on dispose de la théorie moderne du potentiel (on s'appuiera sur [2]). On complètera ainsi l'étude souvent cotoyée de la relation entre la variation d'une fonction sousharmonique et la distribution de masses associée. Nous donnerons plus de détails que dans une Note [7] annonçant les résultats, en nous plaçant toujours, pour le domaine fondamental pourvu d'une fonction de Green, dans l'espace compact $\overline{R}^\tau$ déduit de l'espace euclidien R^τ (à $\tau \geqslant 2$ dim.) par adjonction du point $\mathcal{R}_\tau$ à l'infini, ce qui, grâce à une étude systématique [1], ne présente pas de différence avec le cas d'un domaine borné ; cela s'appliquerait d'ailleurs à des domaines pourvus de fonction de Green dans des espaces plus généraux comme les espaces localement euclidiens, ce dont nous nous occuperons ailleurs. Puis, comme application, on abordera, en développant et complétant [7], l'étude d'une « *action à distance* » déjà mise en évidence [3] dans le problème de Dirichlet et liée à l'allure comparée à la frontière de la mesure harmonique et de la fonction de Green.

Dans $\overline{R}^{\tau}$, on notera $\overset{*}{E}$ et $\overline{E}$ la frontière et l'adhérence de l'ensemble E et on écrira de la même façon un point et l'ensemble qu'il forme.

2. Théorème 1. — *Considérons les fonctions u sousharmoniques* $\leqslant 0$ *dans un domaine* Ω ($C\Omega$ *non polaire* [1]) *et satisfaisant à la condition :*

en un point O, $u(O) \geqslant K$ *fini donné, ou bien seulement l'extrémale* [2] *de u relativement à un voisinage* ω *de* O ($\overline{\omega} \subset \Omega$) *est* $\geqslant K$ *en* O.

Alors sur tout compact de Ω, *la masse totale associée à u dans la représentation potentielle est bornée uniformément par rapport aux u.*

Soit en effet A un compact contenant ω et contenu dans Ω. Si μ est la distribution de masses associées à u

$$u(M) \leqslant v(M) = \int G(M, P)\,d\mu_P \qquad \text{(G fonction de Green de } \Omega).$$

L'extrémale de v relative à A majore celle de u, donc aussi celle de u relative à ω et cette extrémisation de v conserve la masse totale portée par A. Passons ensuite à l'extrémale w de v relativement à $\Omega - A$, ce qui laisse $w = v$ sur l'intérieur de A. Sur les masses

(1) Un ensemble polaire est par définition tel qu'il existe, localement, une fonction sousharmonique valant $-\infty$ sur lui. Une condition nécessaire et suffisante est qu'il soit effilé en tout point ou seulement en tout point de l'ensemble. Rappelons que « quasi-partout » signifie « sauf sur un ensemble polaire ».

Dans l'énoncé du texte, si $C\Omega$ était polaire, u serait constante [1].

La condition « $C\Omega$ non polaire » équivaut à l'existence d'une fonction de Green pour Ω.

(2) L'extrémale $\hat{u}$ de u sousharmonique $\leqslant 0$ relativement à $E \subset \Omega$ est par définition la plus grande fonction sousharmonique $\leqslant 0$ dans Ω, quasi-partout égale à u hors E [2]. Lorsque E est ouvert, $\hat{u}$ vaut dans E la fonction de Wiener H_{φ}^{E}, où φ sur la frontière de E vaut u dans Ω et 0 ailleurs. Lorsque E est compact, on étend la définition sans limitation de u. Lorsque u est un potentiel de Green $\int G(M, P)\,d\mu_P (\mu \leqslant 0)$, cette opération, dite « extrémisation », fournit un autre potentiel de Green de masses $\hat{\mu}$; $\hat{\mu}$ ne charge pas l'intérieur « fin » de E, c'est-à-dire l'intérieur dans la topologie fine (topologie la moins fine rendant continues les fonctions sousharmoniques). On emploie aussi le terme de « balayage », (voir l'exposé de H. Cartan [8]).

associées, cette opération conserve les masses portées par A et supprime les autres en en distribuant une partie sur A.

Si ν est la distribution finale : $|\nu(A)| \geqslant |\mu(A)|$

et
$$w(M) = \int G(M, P) d\nu_P.$$

Si $\beta = \text{borne inf}_{P \in A} G(O, P)$, on conclut

$$w(O) \leqslant \beta\nu(A) \qquad \text{d'où} \qquad |K| \geqslant \beta|\mu(A)|,$$

ce qui donne pour $|\mu(A)|$ la majoration cherchée.

THÉORÈME 2. — *Considérons une famille de fonctions sousharmoniques u dans un domaine* Ω ($\complement\Omega$ *non polaire*) *telles que*

1° $u \leqslant K_1$ (*constante finie*) *sur un ensemble* E *non polaire contenu dans* Ω (c'est-à-dire que E est non effilé en un point $O \in \Omega$).

2° *La masse totale associée à chaque u est en module* $\leqslant K_2$ (fixé fini) ce qui entraîne l'existence de majorantes harmoniques.

3° *Les plus petites majorantes harmoniques des u admettent une enveloppe inférieure localement bornée* (*donc continue* (³) *surharmonique*) ce qui a lieu en particulier si les u majorent sur $\Omega - A$ (compact $A \subset \Omega$) une fonction sousharmonique u_0 fixe donnée sur cet ouvert (⁴).

Alors les plus petites majorantes harmoniques $\overset{*}{u}$ *des u ont une enveloppe supérieure* S *localement bornée* (*donc continue sousharmonique*) ; *donc elles sont, et de même les u, bornées supérieurement sur tout compact de* Ω, *uniformément par rapport aux u.*

Il suffit de voir que S est finie en un point : car les $\overset{*}{u}$ étant bornées inférieurement uniformément sur tout domaine ω contenant ce point ($\overline{\omega} \subset \Omega$) on en déduira une borne supérieure commune sur chaque compact de ω.

Introduisons un voisinage fermé γ de O ($\gamma \subset \Omega$) et réduisons E à sa portion dans γ. Montrons qu'en M_0 hors γ, S est finie. Sinon en

(³) Rappelons que la continuité vient de l'égale continuité de la famille des majorantes lorsqu'on prend sur l'espace des valeurs des fonctions la structure uniforme de la droite numérique achevée.

(⁴) Car si M_0 est un point de Ω et ω un ouvert tel que $A \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$ ($M_0 \in \omega$) les majorantes harmoniques des u majorent la plus petite majorante harmonique de u_0 dans $\Omega - A$, donc ont une borne inférieure finie commune sur la frontière de ω et par suite dans ω et au voisinage de M_0.

considérant un ω contenant M_0 et γ on trouverait un $\overset{*}{u}$, soit $\overset{*}{U}$ majorant sur E une constante finie L arbitrairement choisie.

Si $V(M) = \int G(M, P)\, d\mu_P$ potentiel des masses μ associées à U, $U = V + \overset{*}{U}$. Extrémisons V et μ relativement à $\Omega - E$, ce qui donne $\overset{\circ}{V}$ et $\overset{\circ}{\mu}$ avec

$$\overset{\circ}{V}(M) = \int G(M, P) d\overset{\circ}{\mu}_P.$$

Mais $\overset{\circ}{\mu}$ ne charge pas $\Omega - \gamma$ et $|\mu_0(\gamma)| \leqslant |\mu(\Omega)| \leqslant K_2$. Donc si $\lambda = \operatorname*{Sup}_{P\in\gamma} G(M, P)$ il vient :

$$\overset{\circ}{V}(M_0) \geqslant -\lambda K_2. \tag{1}$$

D'autre part si $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^M$ désigne l'extrémisée relative à $\Omega - E$ de la masse unité ε^M en M, on sait que $\overset{\circ}{V}(M_0) = \int V d\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{M_0}$. Or $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{M_0}$ ne charge que l'adhérence fine de E (et même d'ailleurs la frontière fine) et, puisque E n'est pas polaire, la charge totale K_{M_0} est $\neq 0$. Comme $V \leqslant K_1 - L$ sur E, donc sur son adhérence fine,

$$\overset{\circ}{V}(M_0) \leqslant (K_1 - L) K_{M_0}$$

ce qui, pour L assez grand, est contradictoire avec (1).

Corollaire. — *Considérons dans un domaine Ω une famille de fonctions sousharmoniques u telles que*

1° $u \leqslant K_1$ (*constante finie*) *sur un ensemble* E *non polaire.*

2° *sur* $\Omega - A$ (*compact* $A \subset \Omega$) *les u majorent une fonction sousharmonique fixe.*

Alors pour que sur chaque compact B *de* Ω *les u* (*ou encore leurs extrémales relatives à* B) *soient bornées supérieurement dans leur ensemble, il faut et suffit que, sur chaque compact de Ω les masses totales associées soient en module bornées dans leur ensemble.*

3. **Application.** — Nous allons appliquer le résultat précédent à l'étude d'une notion nouvelle qui paraît utile en particulier pour le problème de Dirichlet.

Définition 1. — Étant donné le domaine Ω ($C\Omega$ non polaire) on dira qu'un point Q de la frontière $\overset{*}{\Omega}$ est *actif* sur un point-frontière Q', si, dans l'intersection de Ω et de tout voisinage ouvert de

Q, il existe une distribution μ de masses $\geqslant 0$ (mesure de Radon) admettant un potentiel de Green $\int G(M, P)d\mu_P$ non borné au voisinage de Q′ (c'est-à-dire non borné dans tout voisinage de Q′, ce qui signifie que la lim. sup en Q′ est $+\infty$).

D'après cela, dire que Q est *inactif* sur Q′ signifie qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de Q tel que, pour toute distribution de masse > 0 sur $\mathcal{V}$ et admettant un potentiel de Green, ce potentiel est borné au voisinage de Q′ (c.-à-d. de lim. sup finie en Q′).

On donnera des définitions analogues pour un *compact* $e \subset \overset{*}{\Omega}$ *actif* sur un *compact* $e' \subset \overset{*}{\Omega}$ (5). Il est immédiat qu'il y a activité si e et e' se coupent.

Théorème 3. — *Pour que e soit inactif sur e′ il faut et suffit que* $K(M, P) = \dfrac{G(M, P)}{G(M, P_0)}$ (P_0 *fixé dans* Ω) *reste borné pour* M *et* P *de* Ω *variant respectivement dans deux voisinages* $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ *convenablement choisis de e et e′.*

La condition est suffisante puisque pour toute charge $\mu > 0$ de $\mathcal{V}$ le potentiel de Green est majoré dans $\mathcal{V}'$ par

$$K \int G(M, P)d\mu_M \, (K = C^{te}).$$

Réciproquement si la condition n'était pas satisfaite, imaginons deux suites décroissantes $\mathcal{V}_n$ et $\mathcal{V}'_n$ de voisinages de e et e' tendant vers e et e'. On trouvera $M_n \in \mathcal{V}_n$ et $P_n \in \mathcal{V}'_n$ tels que $K(M_n, P_n > n^3$.

La masse ponctuelle $\dfrac{1}{n^2 G(M_n, P_0)}$ placée en M_n aura en P_0 un potentiel de Green égal à $\dfrac{1}{n^2}$ et en P_n un potentiel $> n$. La réunion de ces masses, puis toute portion d'un voisinage de e ont un potentiel de Green non borné au voisinage de e'.

Corollaire. — *Pour que e soit actif sur e′, il faut et suffit qu'un point de e soit actif sur un point de e′.*

(5) On peut considérer aussi d'autres topologies que celle de $\overline{R}^\tau$; par exemple, sur Ω, la structure uniforme ramifiée [4] ou celle de R. S. Martin ([9] et [6]) fournissent par complétion de nouvelles frontières de Ω sur lesquelles on introduira, avec les topologies correspondantes, des définitions analogues à celles du texte pour lesquelles s'étendront aussitôt le théorème qui suit et son corollaire.

La condition est évidemment suffisante. Réciproquement si tout point de e est inactif sur tout point de e', on voit par recouvrement de e' que tout point de e est inactif sur e' puis par recouvrement de e, que e est inactif sur e'.

THÉORÈME 4. — *Pour que e ne rencontrant pas e′ soit inactif sur e′ il faut et suffit que la frontière de e′ dans le sous-espace* $\overset{*}{\Omega}$ *soit vide ou que e soit inactif sur cette frontière.*

Car si e est inactif sur cette frontière α non vide, $K(M, P)$ est borné quand M est dans un voisinage $\mathcal{V}$ de e (pris tel que $\overline{\mathcal{V}} \cap e'$ soit vide) et P dans un voisinage de α. Or on peut former ω ouvert contenant e', ne rencontrant pas $\mathcal{V}$, enfin tel que la frontière de $\omega \cap \Omega$ soit la réunion de e', d'un compact dans Ω et, si α n'est pas vide, d'un ensemble dans α. On en déduit que $K(M, P)$ est borné quand M est dans un voisinage convenable de e et P dans ω ; on peut voir en effet que, pour M hors $\overline{\omega}$ et P_0 cette fonction de P, harmonique dans $\omega \cap \Omega$, est majorée par sa borne supérieure sur $\overset{*}{\omega} \cap \Omega$, qu'on saura majorer indépendamment de M variant dans un voisinage convenable de e.

COROLLAIRE. — *Deux points-frontière appartenant à deux composantes connexes différentes de* $\overset{*}{\Omega}$ *sont inactifs l'un sur l'autre.*

Car sur $\overset{*}{\Omega}$ (compact), une composante connexe est l'intersection des ensembles sans frontière (c'est-à-dire à la fois ouverts et fermés) qui la contiennent et on peut donc trouver un tel ensemble ne contenant pas un point donné en dehors de la composante considérée.

THÉORÈME 5. — *Si* Q *hors* e' *est actif sur un point* Q' *de* e', *la frontière* e'' *de* e' *dans le sous-espace* $\overset{*}{\Omega}$ *est non vide et active sur* Q'.

Prenons le cas non trivial de Q' intérieur à e' sur $\overset{*}{\Omega}$ et formons un ouvert ω dans $\overline{R}^{\tau}$ tel que les intersections avec $\overset{*}{\Omega}$ de ω et $\overset{*}{\omega}$ soient respectivement l'intérieur et une partie de la frontière de e' sur le sous-espace $\overset{*}{\Omega}$. Prenons dans $\Omega \cap C\omega$, sur un voisinage de Q, des masses $\mu \geqslant 0$ dont le potentiel de Green est non borné au voisinage de Q'. Extrémisons-les relativement à $\Omega \cap C\omega$. On obtient ainsi une distribution de masses $\mathring{\mu} \geqslant 0$ sur $\overset{*}{\omega} \cap \Omega$, avec le même potentiel sur $\omega \cap \Omega$. La portion de $\mathring{\mu}$ d'un voisinage arbitrairement petit de e'' admet un potentiel de Green non borné au voisinage de Q' ; car le reste des masses étant sur un compact de Ω est de potentiel borné au voisinage de Q'.

Exemples : 1° Voyons comment une *certaine régularité* locale de la frontière au voisinage de Q entraîne que tout autre point-frontière soit inactif sur Q.

Appelons « ordinaire » un point-frontière satisfaisant à la propriété locale qu'il existe un voisinage arbitrairement petit ouvert ω de Ω tel que :

α) $\omega \cap \Omega$ est formé d'un nombre fini de domaines δ_i,

β) Toute fonction harmonique $u > 0$ dans chaque δ_i, bornée au voisinage de tout point de $\overset{*}{\delta}_i \cap \overset{*}{\Omega}$ et s'y annulant s'il est régulier pour δ_i, est dans un voisinage $\mathcal{V}$ de Q majorée par $Ku(M_i)$ où $\mathcal{V}$, la constante K et le point $M_i \in \delta_i$ sont indépendants de u.

On obtient une définition équivalente en remplaçant dans (β) les u par les fonctions $H_{\varphi}^{\delta_i}$ où chaque φ est résolutive, $\geqslant 0$, bornée, nulle sur $\overset{*}{\delta}_i \cap \overset{*}{\Omega}$.

Alors si Q est ordinaire, il est aisé de voir que tout autre point-frontière est inactif sur Q. Voyons donc comment une certaine régularité de la frontière au voisinage de Q entraîne que Q est ordinaire. Remplaçons dans la définition du point ordinaire, (β) par l'hypothèse (Q étant à distance finie) qu'il existe pour chaque δ_i un domaine σ circulaire (sphérique) contenu dans ω, contenant Q et tel que $\delta_i \cap \sigma$ ait son inverse par rapport au cercle σ (sphère) contenu dans δ_i. Alors, par un raisonnement déjà donné dans ([5], p. 217)([6]) on verra que cet ensemble de conditions entraîne bien que Q soit ordinaire. Comme *cas particulier,* toutes les conditions sont bien satisfaites si la frontière $\overset{*}{\Omega}$ au voisinage de Q est une courbe (dans R^2) ou surface (R^τ, $\tau \geqslant 3$) à courbures continues > 0.

2° Si l'un des compacts disjoints e, e' admet sur le sous-espace $\overset{*}{\Omega}$ un voisinage polaire, chacun d'eux est inactif sur l'autre et on ne change pas la relation d'activité entre deux points lorsqu'on agrandit Ω d'un ensemble polaire.

Cela résulte des propriétés du prolongement harmonique au voisinage d'un ensemble-frontière polaire.

On parlera plus loin d'exemples de points actifs.

([6]) Dans le lemme 4 ([5], p. 217) résolvant ce point, il faut sous-entendre que $u > 0$ et que $\bar{\sigma}$ rencontre $\overset{*}{\omega}$ seulement en des points de α.

4. Transformons par le corollaire du théorème 2 le critère qu'exprime le théorème 3. Rappelons (voir [5]) que la mesure harmonique d'un ensemble $\mathcal{E}$ borélien de $\overset{*}{\Omega}$ relativement à un point $M \in \Omega$ est la charge portée par e dans la représentation potentielle locale de la fonction de P, sousharmonique hors M, égale à G(M, P) partout définie (fonction de Green « prolongée » égale à cette fonction de Green de pôle M classiquement connue pour $P \in \Omega$, prolongée par o sauf sur l'ensemble polaire des points-frontières irréguliers de Ω où on la prend égale à la lim. sup. de la fonction considérée sur Ω).

Considérons un voisinage ouvert connexe $\mathcal{V}$ d'un point-frontière Q' et la famille de fonctions de $P \in \mathcal{V}$: $\dfrac{1}{G(M, P_0)} \cdot G(M, P)$ dépendant du paramètre $M \in \Omega$ variant au voisinage du compact e (hors $\mathcal{V}$). Alors, que la frontière (ou ce qui est équivalent, $C\Omega$) soit ou non polaire au voisinage de Q', on voit dans les deux cas que, pour que e soit inactif sur Q' (hors e), il faut et suffit que la mesure harmonique d'un voisinage de e sur Ω soit, dans un voisinage de e sur Ω, majorée par $KG(M, P_0)$ ($K = C^{te}$).

De là, par recouvrement, on passe au théorème général :

Théorème 6. — *Pour que le compact $e \subset \overset{*}{\Omega}$ soit inactif sur le compact $e' \subset \overset{*}{\Omega}$ ne le rencontrant pas, il faut et suffit que la mesure harmonique d'un voisinage de e' sur $\overset{*}{\Omega}$ soit dans un voisinage de e et sur Ω majorée par* $KG(M, P_0)$ ($K = C^{te}$).

On a déjà donné des exemples où la mesure harmonique ne possède pas cette propriété, c'est-à-dire des exemples de points actifs (voir [3]).

5. Examinons l'intérêt de la définition 1 pour le problème de Dirichlet. On pourra s'appuyer sur le lemme suivant, de forme plus générale qu'il ne serait nécessaire :

Lemme. — *Considérons dans le domaine Ω ($C\Omega$ non polaire) un ensemble quelconque E et sur $\overset{*}{\Omega}$ une fonction $f \leqslant 0$ résolutive (pour le problème de Dirichlet, voir [1]) nulle sur l'ensemble*

$$F = \overset{*}{\Omega} \cap \overline{(\overset{*}{\Omega} - E)}.$$

Alors l'extrémale $\mathring{u}$ de $u = H_f^{\Omega}$ relativement à E est un potentiel de

Green de masses $\leqslant 0$ *dans* Ω (c'est-à-dire une fonction sousharmonique dont la plus petite majorante harmonique est nulle).

Traitons d'abord le cas de E ouvert. Alors $\mathring{u}$ vaut dans E la solution H_φ^E, où φ sur $\overset{*}{E}$ vaut u dans Ω et o ailleurs. Sur $\Omega - E$, $\mathring{u}$ vaut u sauf peut être sur l'ensemble polaire des points d'effilement de $\Omega - E$; en chacun de ces points il vaut la lim. sup de u prise sur E.

On formera aisément sur $\overset{*}{\Omega}$, f_n décroissante tendant vers f et pour chaque n, $\leqslant 0$, nulle sur un voisinage de F, bornée et résolutive. Si φ_n sur $\overset{*}{E}$ vaut $H_{f_n}^\Omega$ dans Ω et o ailleurs, $H_{\varphi_n}^E$ s'annule aux points réguliers de $\overset{*}{\Omega}$ situés sur $\overset{*}{E}$ (puisque ce sont des points-frontière réguliers pour E). Donc la fonction Φ_n dans Ω égale à $H_{f_n}^\Omega$ hors E et à $H_{\varphi_n}^E$ dans E s'annule aux points-frontière réguliers de Ω. Il en est de même de l'extrémale $\mathring{u}_n$ de $u_n = H_{f_n}^\Omega$ relative à E puisque $\mathring{u}_n \geqslant \Phi_n$. Donc $\mathring{u}_n$ bornée sousharmonique a une plus petite majorante harmonique bornée $\leqslant 0$, s'annulant aux points-frontière réguliers et par suite nulle. Ainsi $\mathring{u}_n$ est de la forme $-\int G(M, P)d\mu_n$ où μ_n est une mesure de Radon $\geqslant 0$ dans Ω.

Or d'une part $\mathring{u}_n$ tend en décroissant vers $\mathring{u}$ comme u_n vers u. D'autre part on voit aussitôt en considérant $f_{n+1} - f_n$ que sur tout borélien la charge de μ_n est croissante ($\mathring{u}_{n+1} - \mathring{u}_n$ étant sousharmonique) ; et grâce au théorème 1 on voit que la charge de μ_n sur tout compact de Ω reste bornée (puisque $\mathring{u}_n$ majore $\mathring{u}$). Donc si μ est la limite de μ_n au sens fort de la convergence de la mesure de tout borélien situé sur un compact de Ω, $\int G d\mu_n \to \int G d\mu$ d'où $\mathring{u} = -\int G d\mu$.

Passons au cas de E quelconque. Quand on remplace E par son intérieur ω, on n'altère pas l'ensemble F. De sorte que l'extrémale relative à ω a une plus petite majorante harmonique nulle. De même pour l'extrémale relative à E puisqu'elle majore la précédente.

THÉORÈME 7. — *Supposons que pour le domaine* Ω ($C\Omega$ *non polaire*) *le compact* e *de* $\overset{*}{\Omega}$ *soit inactif sur un compact* e' *de* $\overset{*}{\Omega}$. *Alors il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* e *tel que pour toute fonction* f *résolutive sur* $\overset{*}{\Omega}$, *bornée hors* $\mathcal{V}$, H_f^Ω *est bornée au voisinage de* e'.

Par hypothèse il existe un voisinage ouvert δ de e, dont on peut supposer que l'adhérence ne rencontre pas e' et tel que, pour toute distribution de masses dans $\delta \cap \Omega$ admettant un potentiel de Green, celui-ci est borné au voisinage de e'. Toute fonction f résolutive bornée hors δ est la somme d'une fonction f_1 résolutive nulle hors δ et d'une fonction f_2 résolutive bornée. Pour voir que H_f est bornée au voisinage de e', il suffira de montrer qu'il en est ainsi de H_{f_1}. On se ramène au cas de $f_1 \leqslant 0$; alors l'extrémale de H_{f_1} relative à $\delta \cap \Omega$ est d'après le lemme bornée au voisinage de e', donc aussi H_{f_1} qui lui est égale au voisinage de e'.

On a donné dans [3] des contre-exemples qui sont donc des exemples de points actifs.

Remarque. — La propriété énoncée dans le théorème précédent comme conséquence de l'hypothèse *équivaut* à ce que la mesure harmonique $m_M(\alpha)$ de tout ensemble α variant dans un voisinage convenable de e sur $\overset{*}{\Omega}$ soit majorée par $K \cdot m_{M_0}(\alpha)$ lorsque M varie dans un voisinage convenable de e', la constante K et le point M_0 de Ω étant fixes.

Extension. — En utilisant la théorie de Martin [9] complétée dans [6], on peut établir immédiatement un théorème plus fort que le théorème (7) et l'entraînant aussitôt :

THÉORÈME 8. — *Reprenons pour le domaine Ω ($\complement\Omega$ non polaire), e inactif sur e'. Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de e ($\overline{\mathcal{V}}$ ne coupant pas e') tel que toute fonction harmonique $u < 0$ dans Ω égale à son extrémale relative à $\Omega \cap \complement\mathcal{V}$ soit bornée au voisinage de e'.*

En effet la représentation canonique de Martin donne

$$u(P) = -\int K(M, P)\, d\mu_M$$

où μ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur l'ensemble des points minimaux de la frontière Φ de Martin et où $K(M, P)$ définie pour $M \in \Phi$, $P \in \Omega$ est la limite de la fonction $K(M_n, P) = \dfrac{G(M_n, P)}{G(M_n, P_0)}$ lorsque $M_n \in \Omega$ tend, au sens de la topologie $\mathcal{T}$ de Martin vers le point $M \in \Phi$.

Soient $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ deux voisinages fermés de e, $\mathcal{V}'$ un voisinage de M′ tels que $\mathcal{V}_1$ soit contenu dans l'intérieur de $\mathcal{V}_2$ et que $K(M, P)$ soit borné par une certaine constante λ pour $M \in \Omega \cap \mathcal{V}_2$ et $P \in \Omega \cap \mathcal{V}'$. On sait ([6], p. 120, théorème 3) que si u coïncide avec son extrémale relative à $\Omega_1 = \Omega \cap \complement\mathcal{V}_1$, la mesure canonique μ ne charge pas le plus grand ouvert selon $\mathcal{T}$ dans $\Omega \cup \Phi$, dont l'intersection avec Ω soit Ω_1 ; c'est-à-dire qu'elle ne peut charger que l'ensemble $\mathcal{E}$ des points de Φ qui sont limites au sens de $\mathcal{T}$ de points de $\mathcal{V}_1 \cap \Omega$ [7]. Or les points de $\overline{R}^\tau$ associés à ceux de $\mathcal{E}$ forment $\mathcal{V}_1 \cap \overset{*}{\Omega}$. Donc les K(M, P) pour $M \in \mathcal{E}$ seront majorés par λ pour $P \in \Omega \cap \mathcal{V}'$. D'où le résultat annoncé en prenant $\mathcal{V}_1$ pour le $\mathcal{V}$ du texte.

6. Sans approfondir ici davantage, terminons par *quelques remarques sur le cas où chaque point-frontière est inactif sur tout autre,* ce qui a lieu en particulier si chacun est ordinaire. Alors tout potentiel de Green est borné au voisinage d'un point-frontière Q s'il n'y a pas de masses dans un voisinage de Q ; toute fonction H_f^Ω est bornée au voisinage de Q, si f est bornée dans un voisinage de Q ; et de plus, si ω est l'intersection de Ω et d'un voisinage ouvert assez petit de Q, ces deux fonctions (potentiel et H_f) valent dans ω des fonctions du type H_φ^ω où φ est bornée (d'ailleurs égale sur $\overset{*}{\Omega}$ respectivement à o ou à f).

Remarquons enfin que *la structure uniforme de Martin* (voir [6]) *en général non comparable à celle de $\overline{R}^\tau$ dans Ω, est alors plus fine.* Sinon on trouverait deux suites $M_n \in \Omega$, $M'_n \in \Omega$ convergeant dans $\overline{R}^\tau$ vers deux points-frontière distincts Q, Q′ tandis que K(M_n, P) K(M'_n, P) convergeraient vers une même fonction harmonique u(P) dans Ω. L'hypothèse d'inactivité entraîne que u(P) soit bornée au voisinage de tout point-frontière et s'annule en tout point régulier. Elle serait donc nulle alors que $u(P_0) = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Brelot. Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques. *Annales École N. S.*, t. 61, 1944, 301-332.

[2] M. Brelot. Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités. *J. de Mathématiques*, t. 24, 1945, 1-32.

[3] M. Brelot. Sur la mesure harmonique et le problème de Dirichlet. *Bull. Soc. Math.*, 1945.

[4] M. Brelot. Le problème de Dirichlet ramifié. *Annales Un. Grenoble, Sect. Math. Phys.*, t. 22, 1946, 167-200.

[7] Remarquer que de toute suite $M_n \in \Omega$ convergeant au sens de $\mathcal{T}$ vers $M \in \Phi$, on peut extraire une suite convergeant dans $\overline{R}^\tau$ vers un point de $\overset{*}{\Omega}$ (associé à M).

[5] M. Brelot. Étude générale des fonctions harmoniques et surharmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier. *Annales Un Grenoble, Sect. Math. Phys.*, t. 22, 1946, 205-218.

[6] M Brelot. Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin. *Annales Un. Gr. Sect. Math. Phys.*, t. 23, 1947-1948, 113-138.

[7] M. Brelot. Deux théorèmes généraux sur le potentiel et quelques applications. *C. R. Ac Sc.*, t. 226, 1948, 1499-1500.

[8] H. Cartan. Théorie générale du balayage en potentiel newtonien. *Annales Un. Grenoble (sect. Math. Phys.)*, t. 22, 1946, 221-280.

[9] R. S. Martin. Minimal positive harmonic functions. *Trans. Ann. Math. Soc.* t. 49, 1941, 137-172.

(Parvenu aux Annales en avril 1951)