ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Sorin DUMITRESCU

Homogénéité locale pour les métriques riemanniennes holomorphes en dimension 3

Tome 57, nº 3 (2007), p. 739-773.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_3_739_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
57, 3 (2007) 739-773

HOMOGÉNÉITÉ LOCALE POUR LES MÉTRIQUES RIEMANNIENNES HOLOMORPHES EN DIMENSION 3

par Sorin DUMITRESCU

Résumé. — Une métrique riemannienne holomorphe sur une variété complexe M est une section holomorphe q du fibré $S^2(T^*M)$ des formes quadratiques complexes sur l'espace tangent holomorphe à M telle que, en tout point m de M, la forme quadratique complexe $q(m)$ est non dégénérée (de rang maximal, égal à la dimension complexe de M). Il s'agit de l'analogue, dans le contexte holomorphe, d'une métrique riemannienne (réelle). Contrairement au cas réel, l'existence d'une telle métrique sur une variété complexe compacte n'est nullement assurée et impose des conditions très restrictives à la variété. Dans cet article nous démontrons que sur les variétés complexes compactes connexes de dimension 3 les métriques riemanniennes holomorphes sont nécessairement localement homogènes (i.e. le pseudo-groupe des isométries locales agit transitivement sur la variété). Dans certains cas, ceci nous conduit à des théorèmes de classification. Il convient de situer ce résultat dans le cadre des structures géométriques rigides au sens de Gromov (à l'instar des métriques pseudo-riemanniennes, les métriques riemanniennes holomorphes sont bien des structures rigides). Nos méthodes mélangent à la fois des arguments de géométrie différentielle rigide, des résultats de la théorie des invariants pour les actions algébriques et des techniques qui viennent de la géométrie analytique complexe.

Abstract. — A holomorphic Riemannian metric on a compact complex manifold M is a holomorphic section q of the bundle $S^2(T^*M)$ of complex quadratic forms on the holomorphic tangent bundle on M such that $q(m)$ is non degenerated (of maximal rank) for each point m in M. This is an analogous of a (real) riemannian metric in the setting of the complex geometry. Contrary to the situation in the real framework, few complex compact manifolds admit holomorphic riemannian metrics. In this paper we show that any holomorphic riemannian metric on a compact complex connected threefold is locally homogeneous (i.e. the pseudogroup of local isometries acts transitively on M). In some particular situations, this leads to classification results. Our method is a mixture of analytic geometry, invariant theory for algebraic actions and differential geometry of Gromov's rigid geometric structures.

Mots-clés : variétés complexes, métriques riemanniennes holomorphes, structures rigides, pseudo-groupe d'isométries locales.
Classification math. : 53B21, 53C56, 53A55.

1. Introduction

Dans le contexte de la géométrie complexe (holomorphe), une *métrique riemannienne holomorphe* est l'analogue du concept réel de métrique pseudo-riemannienne. Formellement une métrique riemannienne holomorphe sur une variété complexe M de dimension n est une section holomorphe q du fibré $S^2(T^*M)$ des formes quadratiques complexes sur l'espace tangent holomorphe à M telle que, en tout point m de M, la forme quadratique complexe $q(m)$ est non dégénérée (de rang maximal, égal à la dimension complexe de M).

L'exemple type d'une métrique riemannienne holomorphe est la métrique *plate* $q = dz_1^2+dz_2^2+\ldots+dz_n^2$ sur $\mathbf{C}^n$. À l'instar du cadre pseudo-riemannien (voir, par exemple, [25]), il n'y a pas de difficulté à introduire le tenseur de courbure d'une métrique riemannienne holomorphe comme obstruction infinitésimale (à l'ordre 2) à la platitude de la métrique. Il existe une unique connexion linéaire holomorphe (de Levi-Civita) sur M compatible avec la métrique riemannienne holomorphe et cette connexion permet de définir des courbes géodésiques qui généralisent les droites affines (parcourues à vitesse constante) du cas plat (voir, par exemple, [15] pour une étude des géodésiques holomorphes).

Nous allons nous intéresser dans cet article aux métriques riemanniennes holomorphes sur les variétés complexes *compactes.* L'existence d'une telle métrique sur une variété complexe compacte impose des conditions très restrictives à la variété. Une première obstruction évidente est la première classe de Chern. En effet, dans le langage des G-structures dû à C. Ehresmann (la terminologie étant due à S. Chern) une métrique riemannienne holomorphe est une $O(n,\mathbf{C})$-structure sur le fibré tangent holomorphe à M. Ceci implique l'existence d'un revêtement double non ramifié de M sur lequel le groupe structural du fibré des repères (qui est, en général, un $GL(n,\mathbf{C})$-fibré) se réduit au groupe $SO(n,\mathbf{C})$ qui préserve un volume holomorphe. Le fibré canonique (des formes volumes holomorphes) de ce revêtement double de M est donc trivial, ce qui assure l'annulation de la première classe de Chern de M. On peut aussi remarquer que la présence d'une métrique riemannienne holomorphe fixe un isomorphisme entre le fibré tangent holomorphe TM et son dual T^*M. En particulier, le fibré canonique de M est isomorphe à son dual ce qui implique l'annulation de la première classe de Chern de M.

Un premier exemple de variétés compactes admettant des métriques riemanniennes holomorphes est donné par les tores complexes. Pour s'en assurer il suffit de constater que la métrique plate $q = dz_1^2 + dz_2^2 + \ldots + dz_n^2$

est invariante par translations et descend donc sur tout quotient de $\mathbf{C}^n$ par un réseau de translations.

Pour ce qui est du cadre *kählérien*, un résultat de [14] montre que l'exemple précédent est le seul (à revêtement fini près). Plus précisément, il est démontré dans [14] que parmi les variétés kählériennes compactes, seuls les tores complexes et leurs quotients finis admettent des connexions linéaires holomorphes (et donc des métriques riemanniennes holomorphes). Dans ce cas, les métriques riemanniennes holomorphes sont nécessairement plates et donc, en particulier, *localement homogènes*, autrement dit le pseudo-groupe des biholomorphismes locaux qui préservent la métrique riemannienne holomorphe (isométries locales) agit transitivement sur M.

Un résultat similaire est démontré dans [8] pour les surfaces complexes compactes : seuls les tores complexes et leurs quotients finis admettent des métriques riemanniennnes holomorphes et ces métriques sont nécessairement plates.

Mentionnons également, dans le cadre kählérien, les résultats de symétrie et classification obtenus pour des structures géométriques holomorphes plus générales sur les variétés de Calabi-Yau [9] et sur les variétés projectives unirationnelles [13].

Nous nous intéréssons dans cet article aux variétés complexes compactes non (nécessairement) kählériennes de dimension complexe 3 qui possèdent des métriques riemanniennes holomorphes.

Comme nous allons le voir dans la section 2, dans le cas non Kähler, des exemples de variétés complexes compactes possèdant des métriques riemanniennes holomorphes sont les variétés parallélisables, quotients d'un groupe de Lie complexe par un réseau co-compact. Ces exemples n'ont rien de surprenant car le fibré tangent étant holomorphiquement trivial les métriques riemanniennes holomorphes sur ces variétés sont "constantes" par rapport au repère mobile invariant par translations (qui constitue une trivialisation du fibré tangent).

En dimension 3 des exemples inédits de variétés complexes admettant des métriques riemanniennes holomorphes ont été construits dans [10] par E. Ghys.

Néanmoins dans tous les exemples connus le revêtement universel de la variété est un groupe de Lie complexe et la préimage de la métrique riemannienne holomorphe par le revêtement est invariante par les translations du groupe.

Nous démontrons ici le théorème suivant qui généralise et précise sous une forme optimale un premier résultat que nous avions obtenu dans [8].

THÉORÈME 1.1. — *: Soit M une variété complexe compacte connexe de dimension 3 munie d'une métrique riemannienne holomorphe. Alors toute structure géométrique holomorphe de type affine sur M est nécessairement localement homogène.*

En particulier, la métrique riemannienne holomorphe est localement homogène.

Il convient de situer ce résultat dans le cadre de l'étude des *structures géométriques rigides*, dans le sens de M. Gromov, initié dans [11] (voir également l'exposé de survey [7] et [4]). Sans donner de définition générale, précisons que les métriques riemanniennes holomorphes, ainsi que les métriques pseudo-riemanniennes (dans le contexte réel) sont des exemples type de telles structures géométriques rigides. Une conjecture vague énoncée par M. Gromov affirme que la présence d'un "gros" groupe d'isométries pour une structures géométrique rigide sur une variété compacte doit représenter une situation suffisamment symétrique (rare) pour être classifiable. En principe, il ne devrait y avoir que des exemples *algébriques* (construits à partir de groupes de Lie) et leurs eventuels avatars (déformations etc). Les exemples abondent dans ce sens en géométrie riemannienne ou pseudo-riemannienne réelle (voir par exemple [26], pour une concrétisation de ce phénomène en géométrie lorentzienne de dimension 3). Le théorème 1.1 vient conforter cette conjecture dans le cadre des variétés complexes. Ici le caractère holomorphe remplace l'hypothèse d'existence d'un groupe important d'isométries et suffit pour engendrer des symétries (isométries) locales.

Sans donner pour le moment la définition générale de structure géométrique (pour cela le lecteur devra se rapporter à la section 3), précisons que dans le cas où la variété M munie d'une métrique riemannienne holomorphe possède par ailleurs un (autre) tenseur holomorphe Y (par exemple, un champ de vecteurs) le théorème 1.1 affirme que le pseudo-groupe des isométries locales de la métrique riemannienne holomorphe qui préservent en même temps le tenseur Y agit transitivement sur M. Autrement dit, même la structure géométrique "totale" (la plus riche possible) qui englobe à la fois la métrique riemannienne holomorphe initiale et toute autre structure géométrique holomorphe globale de type affine (voir la section 3 pour la définition) située sur M est localement homogène.

Nos méthodes mélangent à la fois les arguments de géométrie différentielle rigide et des techniques qui viennent de la géométrie analytique complexe. L'homogénéité locale détéctée par le théorème 1.1 conduit dans certains cas à des résultats de classification :

Corollaire 1.2. — *Soit M une variété complexe compacte connexe de dimension* 3 *munie d'une métrique riemannienne holomorphe. Si M possède une structure géométrique holomorphe de type affine et de type général, alors M admet un revêtement fini non ramifié qui est un quotient d'un groupe de Lie complexe connexe et simplement connexe de dimension* 3 *par un réseau co-compact.*

Conjecturalement le résultat du corollaire précédent devrait rester valide en général : le revêtement universel d'une variété complexe compacte (de dimension 3) possèdant une métrique riemannienne holomorphe est un groupe de Lie complexe sur lequel la préimage de la métrique riemannienne holomorphe est invariante par translations. Le théorème principal de cet article ouvre la voie vers ce type de résultats de classification. Il s'agit ensuite de prouver des théorèmes dites *de complétude* et d'arriver à intégrer les isométries locales obtenues par le théorème 1.1 en un groupe d'isométries globales du revêtement universel qui agit transitivement. La question de la complétude est ouverte même dans le cas où la métrique riemannienne holomorphe est supposée plate (de courbure sectionnelle nulle) : dans ce cas il s'agit de prouver que le revêtement universel de M est nécessairement biholomorphe à $\mathbf{C}^3$.

Après cette courte introduction, la composition de cet article est la suivante. La deuxième section présente des constructions de variétés complexes compactes possèdant des métriques riemanniennes holomorphes. Dans la troisième section nous rappelons brièvement les concepts et les théorèmes nécessaires à l'étude des structures géométriques rigides et de leurs isométries locales. La section quatre est consacrée à la démonstration d'une forme faible du théorème principal : on a homogénéité locale sur un ouvert dense (en dehors d'un sous-ensemble analytique compact S inclus dans M, eventuellement vide). Dans la dernière section nous montrons comment on peut étendre cet ouvert dense à M tout entier, ce qui achève la preuve du théorème principal de l'article.

Je remercie chaleureusement Étienne Ghys pour m'avoir introduit au sujet et pour son soutien constant. Je remercie également Ghani Zeghib pour la gentillesse avec laquelle il a toujours repondu à mes questions. Mes collègues Nicolas Bergeron, François Béguin, Charles Frances et Pierre Pansu m'ont souvent écouté parler de ce travail : je les remercie pour leur patience et pour la pertinence de leurs suggestions.

2. Exemples

Les exemples les plus simples de variétés complexes compactes qui admettent des métriques riemanniennes holomorphes sont les variétés dites parallélisables qui s'obtiennent comme quotient d'un groupe de Lie complexe par un réseau co-compact.

Un procédé simple pour construire de telles métriques est le suivant : considérons un groupe de Lie complexe G qui admet un réseau co-compact Γ (exemple : un groupe de Lie complexe semi-simple comme $SL(2, \mathbf{C})$).

Nous identifions son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur G invariants par les translations à droite. Le quotient à droite par l'action de Γ fournit une variété complexe compacte parallélisable $M = G/\Gamma$, dont le fibré tangent est holomorphiquement isomorphe à $M \times \mathcal{G}$. L'ensemble des métriques holomorphes q sur M s'identifie aux formes quadratiques non dégénérées sur $\mathcal{G}$.

Au cas où cette forme quadratique est invariante par la représentation adjointe de G dans son algèbre de Lie (ce qui arrive, par exemple, pour la forme de Killing d'un groupe de Lie semi-simple complexe : la forme de Killing, qui est toujours invariante par la représentation adjointe, est non dégénérée si G est semi-simple) les translations à gauche sont des *isométries globales* pour la métrique sur M.

Dans le cas d'une forme quadratique non dégénérée générique il n'existe pas "autant" d'isométries globales . En revanche, dans une carte locale de M, donnée par une section locale de la projection $G \to G/\Gamma$, les translations à droite définissent des transformations locales qui agissent par isométrie. Les métriques holomorphes ainsi construites sont donc *localement homogènes* (pour tous les couples de points (m, m') dans M, il existe une isométrie locale d'un voisinage ouvert de m dans M sur un voisinage ouvert de m' qui envoit m sur m'). Pour une forme quadratique non dégénérée générique la métrique riemannienne holomorphe obtenue est un exemple de structure géométrique de type général (voir la section suivante pour la définition) pour laquelle le corollaire 1.2 s'applique.

Remarquons aussi que si la métrique riemannienne holomorphe qui correspond à la forme de Killing est de courbure sectionnelle constante, pour les autres exemples la courbure sectionnelle est, en général, non constante. Elle est représentée, en général, par une fonction méromorphe non constante définie sur la 2-grassmannienne des plans non dégénérés (qui constitue un ouvert de la 2-grassmannienne de l'espace tangent holomorphe à M).

Certains quotients par des groupes finis des exemples précédents possèdent également des métriques riemanniennes holomorphes. Pour s'en convaincre sur un exemple très simple, prenons un tore complexe de dimension 2 de la forme $\mathbf{C}^2$ quotienté par un réseau Λ. Le quotient du tore par une transformation d'ordre 2 du type $(z_1, z_2) \to (z_1 + \frac{\lambda}{2}, -z_2)$, où $\lambda \in \Lambda$ est un générateur du réseau, possède la métrique riemannienne holomorphe induite par la métrique plate $dz_1^2 + dz_2^2$, invariante par les translations et la transformation considérée.

En dimension 3, des exemples inédits de métriques riemanniennes holomorphes sur des variétés complexes dont le fibré tangent n'est pas holomorphiquement trivial ont été construits dans [10]. Ces exemples s'obtiennent à partir des espaces homogènes du groupe $SL(2, \mathbf{C})$, par déformation de la structure complexe.

L'idée est de considérer un réseau co-compact Γ de $SL(2, \mathbf{C})$ et de perturber l'action par translations à droite de Γ sur $SL(2, \mathbf{C})$ de manière que le quotient soit toujours une variété. L'auteur prouve qu'il existe des morphismes de groupes $u : \Gamma \to SL(2, \mathbf{C})$ tels que l'action à droite de Γ sur $SL(2, \mathbf{C})$ donnée par :

$$(m, \gamma) \in SL(2, \mathbf{C}) \times \Gamma \to u(\gamma^{-1}) m \gamma \in SL(2, \mathbf{C})$$

est libre et totalement discontinue. Le quotient est une variété complexe compacte $M(u, \Gamma)$ sur laquelle la métrique de Killing de $SL(2, \mathbf{C})$ induit une métrique holomorphe. Il existe des morphismes u pour lesquels les variétés $M(u, \Gamma)$ ne possèdent aucun champ de vecteurs holomorphe non nul. Il est prouvé dans [10] que tout tenseur holomorphe sur une variété de type $M(u, \Gamma)$ se relève en un tenseur holomorphe sur $SL(2, \mathbf{C})$ invariant par l'action à droite de $SL(2, \mathbf{C})$ et par l'action à gauche de $u(\Gamma)$. En particulier, tout tenseur holomorphe (et donc toute métrique riemannienne holomorphe) sur $M(u, \Gamma)$ est localement homogène. Il s'agit d'un cas particulier du théorème 1.1.

3. Structures géométriques rigides

Dans cette section nous rappelons brièvement le concept de structure géométrique (de type fini) introduit pour la première fois par C. Ehresmann pour donner une interprétation géométrique globale aux travaux de E. Cartan. Nous suivrons également la méthode exposée par M.Gromov dans [11] pour comprendre les isométries des structures *rigides*.

Considérons M une variété complexe de dimension n et désignons par $R^r(M)$ le fibré des r-repères de M. Il s'agit d'un fibré principal au-dessus de M de groupe structural $D^r(\mathbf{C}^n)$, le groupe des r-jets en 0 de biholomorphismes locaux de $\mathbf{C}^n$ qui préservent 0. Par exemple, le fibré des 1-repères s'identifie avec l'ensemble des bases de tous les espaces tangents à M et $D^1(\mathbf{C}^n)$ n'est rien d'autre que $GL(n, \mathbf{C})$.

Définition 3.1. — *Une structure géométrique holomorphe de type affine et d'ordre r sur M est une application holomorphe $D^r(\mathbf{C}^n)$-équivariante du fibré $R^r(M)$ dans une variété affine $\mathcal{A}$ munie d'une action algébrique du groupe $D^r(\mathbf{C}^n)$.*

Par un théorème de plongement classique dû à Chevalley, il est toujours possible de considérer que la variété affine $\mathcal{A}$ est plongée de manière équivariante dans un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'une action algébrique de $D^r(\mathbf{C}^n)$. Tout tenseur holomorphe sur M est une structure géométrique holomorphe de type affine d'ordre 1, tandis que les connexions linéaires holomorphes sont des structures de type affine d'ordre 2 : le théorème 1.1 s'applique bien à ces structures géométriques. Un champ de droites holomorphe ou une structure conforme holomorphe sont des structures géométriques holomorphes qui ne sont pas de type affine (mais de type projectif) et le théorème 1.1 ne s'applique pas dans ce cadre. Pour un résultat d'homogénéité locale concernant les structures conformes holomorphes le lecteur pourra se référer à [3].

Le jet d'ordre s d'une structure géométrique φ d'ordre r est une nouvelle structure géométrique d'ordre $s + r$. Si dans une carte locale de la variété φ est déterminée par une application à valeurs dans la variété $\mathcal{A}$, son jet d'ordre s, que nous notons $\varphi^{(s)}$, s'exprime dans la même carte par le s-jet de l'application initiale.

En la présence d'une métrique riemannienne holomorphe il convient de privilégier les systèmes de coordonnées exponentielles et dans ce cas il n'est pas nécessaire de considèrer le fibré des r-repères. Rappelons à cet effet que chaque élément du fibré des 1-repères $R^1(M)$ reprèsentant par définition un 1-jet de carte est réalisé par une unique carte exponentielle pour la métrique riemannienne holomorphe. Autrement dit, chaque élément du fibré $R^1(M)$ fournit une carte (exponentielle) de la variété M et d'autant plus un élément du fibré $R^r(M)$. Grâce à cette section du fibré des 1-repères à valeurs dans le fibré de r-repères, on pourra considérer que toutes les structures géométriques sont définies sur $R^1(M)$.

La présence de la métrique riemannienne holomorphe q nous permet de considérer le fibré des 1-repères q-orthonormés et, quitte à prendre un revêtement double non ramifié de M (ce qui ne change rien à notre problème d'homogénéité locale), de considérer le fibré des 1-repères q-orthonormés directs $R(M)$ qui est un sous-fibré principal de $R^1(M)$ de groupe structural $SO(3,\mathbf{C})$.

Par exemple, on peut voir le s-jet $q^{(s)}$ d'une métrique riemanninne holomorphe q comme étant une application équivariante du $SO(3,\mathbf{C})$-fibré des repères orthonormés directs à valeurs dans l'espace affine J^s constitué par les s-jets en 0 de métriques riemanniennes holomorphes sur $\mathbf{C}^3$ dont le 1-jet est $dz_1^2+dz_2^2+dz_3^2$. L'espace affine J^s est muni de l'action algébrique affine de $SO(3,\mathbf{C})$ obtenue par changement de carte exponentielle. Comme cette action fixe l'élément $dz_1^2+dz_2^2+dz_3^2$ nous pouvons considérer que J^s est un espace vectoriel d'origine $dz_1^2+dz_2^2+dz_3^2$ muni d'une action linéaire et algébrique de $SO(3,\mathbf{C})$.

Une *isométrie locale* d'une structure géométrique φ est un biholomorphisme local entre deux ouverts de M qui préserve φ. L'ensemble Is^{loc} des isométrie locales est un pseudo-groupe pour la composition. Quand le pseudo-groupe des isométries locales agit transitivement sur M, la structure géométrique φ est dite *localement homogène*. Un champ de Killing (local) pour φ est un champ de vecteurs holomorphe (local) sur M dont le flot (local) agit par isométries locales pour φ. Deux points suffisamment proches de M qui sont dans la même orbite de Is^{loc} sont reliés par une isométrie locale proche de l'identité et se trouvent donc dans la même orbite d'un champ de Killing local [4].

Un théorème démontré par I. Singer [20] pour les métriques riemanniennes et généralisé dans [1], [11], [9] pour des structures géométriques plus générales affirme qu'il existe un s suffisament grand tel que q est localement homogène si et seulement si l'image de l'application $q^{(s)}$ est exactement une $SO(3,\mathbf{C})$-orbite de J^s. Plus précisément, il existe un entier positif s (qui ne dépend que de M et de q) tel que deux points m et m' sont reliés par une isométrie locale de q si et seulement si q admet un même s-jet aux points m et m'. De plus (voir, par exemple, la jolie preuve de [7]), *toute application linéaire qui envoie une base orthonormée directe de (T_mM,q_m) sur une base orthonormée directe de $(T_{m'}M,q_{m'})$ pour laquelle le s-jet de q est le même définit en coordonnées exponentielles un germe de biholomorphisme qui envoie m sur m' et qui est une isométrie locale.*

Comme il est montré dans [11] et [7] le phénomène précédent est caractéristique aux structures géométriques que M. Gromov appelle *rigides* et qui sont caractérisées par la propriété que le pseudo-groupe des isométries locales est de dimension finie. Le fait qu'une métrique riemannienne holomorphe soit une structures rigide est essentiellement dû au fait qu'une isométrie locale est complétement déterminée par son jet d'ordre 1 en un point.

Par la suite, quelque soit la structure géométrique (rigide ou non) qui existe sur M (penser à un tenseur), nous allons considérer la structure plus riche φ qui est la juxtaposition de la structure initiale et de la métrique riemannienne holomorphe q. Comme q est rigide, φ sera (d'autant plus) une structure géométrique rigide et on aura encore que *toute application linéaire qui envoie une base orthonormée directe de* (T_mM, q_m) *sur une base orthonormée directe de* $(T_{m'}M, q_{m'})$ *pour laquelle le* s*-jet de* φ *est le même, définit en* q*-coordonnées exponentielles un germe de biholomorphisme qui envoie* m *sur* m' *et qui est une isométrie locale pour* φ. Ce procédé ne prend pas en compte toutes les isométries locales de la structure initiale, mais seulement celles qui préservent en même temps la métrique riemannienne holomorphe q. Notre méthode vise donc à démontrer directement que la structure géométrique plus riche qui englobe à la fois la structure initiale et q est encore localement homogène, ce qui implique en particulier l'homogénéité locale de la structure initiale.

Définition 3.2. — *Une structure géométrique d'ordre* r *et de type affine* φ *sur* M *sera dite de type général s'il existe des entiers* s *arbitrairement grands tels que l'image de l'application* s*-jet de* φ *contiennent au moins une orbite de stabilisateur fini dans* $D^{r+s}(\mathbf{C}^n)$.

Pour une structure rigide ceci veut dire qu'il existe au moins un point $m \in M$ au voisinage duquel il n'existe pas de champ de Killing local s'annulant en m. En effet, la rigidité implique que pour un s suffisamment grand le stabilisateur du s-jet de φ en un point m se prolonge de manière unique en un élément du pseudo-groupe des isométries locales qui fixe m. Un sous-groupe à un paramètre du stabilisateur du s-jet de φ en m fournit donc un sous-groupe à un paramètre d'isométries locales pour φ qui fixent M. Par un théorème classique dû à S. Lie un tel sous-groupe à un paramètre d'isométries n'est rien d'autre que le flot local d'un champ de Killing s'annulant en m.

Finissons cette section par la preuve du fait que le théorème 1.1 implique le corollaire 1.2.

Considérons une variété complexe compacte M de dimension 3 munie d'une métrique riemannienne holomorphe q et d'une structure géométrique de type affine et de type général (cette structure géométrique pourrait très bien être la métrique q elle-même : on a vu de tels exemples de métriques à la section 2). D'après le théorème 1.1 la structure géométrique φ formée par la juxtaposition de q et de la structure géométrique de type affine et de type général est une structure géométrique rigide de type affine et de type général qui est *localement homogène.* Ceci équivaut à : $\forall s \in \mathbf{N}$ l'image de l'application $\varphi^{(s)}$, définie sur le fibré des repères q-orthonormées directes $R(M)$, est constituée d'une unique orbite qui s'identifie au quotient de $SO(3, \mathbf{C})$ par le stabilisateur d'un point. Nous avons expliqué un peu plus haut pourquoi il convient de voir $SO(3, \mathbf{C})$ comme étant plongé canoniquement (par le choix de q) dans $D^{r+s}(\mathbf{C}^3)$. Ceci montre que le stabilisateur du s-jet de φ dans $SO(3, \mathbf{C})$ est encore un sous-groupe fini F. Nous avons donc une application holomorphe $SO(3, \mathbf{C})$ équivariante du fibré $R(M)$ dans le quotient $SO(3, \mathbf{C})/F$. Il est équivalent de dire qu'il existe un revêtement fini non ramifié de M, associé au groupe F, au-dessus duquel le fibré principal $R(M)$ se trivialise. Ce revêtement fini de M possède un fibré tangent holomorphe trivial et d'après le théorème de Wang [24] il s'identifie à un quotient d'un groupe de Lie complexe connexe et simplement connexe de dimension 3 par un réseau co-compact.

4. Homogénéité locale sur un ouvert dense

Soit (M, q) une variété complexe compacte connexe de dimension 3 munie d'une métrique riemannienne holomorphe. Nous démontrons dans cette section la version faible suivante du théorème 1.1 : *toute structure géométrique de type affine ψ sur M est localement homogène sur un ouvert dense (en dehors d'un sous-ensemble analytique compact, eventuellement vide).* Il est donc également vrai que la structure géométrique $\varphi = (\psi, q)$ obtenue par la juxtaposition de ψ et q est localement homogène sur un ouvert dense. En particulier la métrique riemannienne holomorphe q est localement homogène sur un ouvert dense. Ce résultat présente déjà un progrès notable par rapport au théorème obtenu dans [8] où on avait seulement pu démontrer que les orbites du pseudo-groupe des isométries locales forment ou bien un ouvert dense, ou bien sont les fibres d'une fibration sur une courbe de genre $g \geqslant 2$. Le travail fait dans cette section élimine la deuxième alternative en précisant la structure de la fibration π. Remarquons pour finir que dans [8] les résultats sont énoncés seulement pour la métrique riemannienne holomorphe, mais il suffit de remplacer systématiquement dans la preuve le "s-jet de q" avec le "s-jet de la structure géométrique $\phi = (\psi, q)$" pour obtenir les mêmes résultats avec $\phi = (\psi, q)$ à la place de q.

4.1. M est un fibré principal en tores complexes

Nous utilisons ici de manière essentielle le lemme 6.4 que nous avons prouvé dans [8]. Il s'agit d'un lemme qui exploite le manque d'homogénéité locale pour fabriquer certains tenseurs holomorphes :

Lemme 4.1. — *Soit M une variété complexe compacte de dimension 3 munie d'une métrique riemannienne holomorphe q et également d'une structure géométrique holomorphe de type affine ψ (il se peut que $\psi = q$).*

i) *Si la structure géométrique $\varphi = (\psi, q)$, formée par la juxtaposition de ψ et de q, n'est pas localement homogène (en particulier, si q ou ψ ne sont pas localement homogènes) sur M, alors il existe un entier positif n et une section holomorphe non triviale du fibré vectoriel $S^n(T^*M)$ qui s'annule en au moins un point et qui prend ses valeurs dans le cône des puissances n-ièmes.*

ii) *Si la structure géométrique $\varphi = (\psi, q)$ n'est localement homogène sur aucun ouvert dense de M, alors il existe un entier positif n et deux sections holomorphes linéairement indépendantes du fibré $S^n(T^*M)$ qui s'annulent en au moins un point et qui prennent leurs valeurs dans le cône des puissances n-ièmes. Ces sections sont en tout point colinéaires.*

Supposons par l'absurde qu'il existe une structure géométrique holomorphe de type affine ψ sur M telle que $\varphi = (\psi, q)$ n'est localement homogène sur aucun ouvert dense de M. Le point ii) du lemme 4.1 ensemble avec le lemme suivant qui est une conséquence directe d'un théorème de M. Brunella [6] nous montre que M fibre sur une courbe de genre $g \geqslant 2$. Le lemme est le suivant :

Lemme 4.2. — *Soit M une variété complexe compacte de dimension* 3 *avec fibré canonique trivial. Supposons qu'il existe un entier positif n et deux sections holomorphes linéairement indépendantes α_1 et α_2 du fibré $S^n(T^*M)$ qui prennent leurs valeurs dans le cône des puissances n-ièmes et qui sont en tout point colinéaires.*

Il existe alors une fibration holomorphe π de M sur une surface de Riemann C de genre $g \geqslant 2$ et deux sections holomorphes η_1 et η_2 de $(T^*C)^{\otimes n}$ telles que $\alpha_i = \pi^*(\eta_i)$.

Démonstration. — Les arguments de [6], notamment le lemme 1 de la page 4, la proposition 3 de la section 3 et la preuve du cas 1 de la section 4 (page 15) s'appliquent sans aucune modification dès qu'on démontre que les formes α_1 et α_2 sont intégrables. L'intégrabilité a été montré dans la preuve du lemme 6.6 de [8]. □

Dans [8] nous avions montré que les fibres de π sont formées par des points qui sont dans la même orbite du pseudo-groupe des isométries locales de $\varphi = (\psi, q)$. La stratégie à suivre sera maintenant la suivante : nous étudions cette fibration et démontrons que M admet une structure de fibré principal en tores complexes (avec eventuellement des fibres singulières) au-dessus de la courbe C. Finalement un lemme de prolongement de formes différentielles multiples inspiré par [21] permet d'obtenir une contradiction et de conclure que φ doit être localement homogène sur un ouvert dense.

Regardons de plus près la structure de la fibration précédente et démontrons d'abord que les fibres génériques sont des tores complexes. On prouve ensuite que ces tores sont nécessairement isomorphes, ce qui donne :

Proposition 4.3. — *M est un fibré principal, de fibre type un tore complexe de dimension 2, au-dessus d'une surface de Riemann de genre $g \geqslant 2$ (avec eventuellement un nombre fini de fibres singulières).*

Démonstration. — Les fibres de la fibration π sont les feuilles du feuilletage donné par le noyau de la section α_1. On peut décrire la distribution $Ker\alpha_1$ comme étant également l'orthogonal $Y_1^{\perp}$ (au sens de q) de la section Y_1 de $S^n(TM)$ duale à α_1.

Rappelons que la norme de Y_1 (au sens de $q^{\otimes n}$) est une fonction holomorphe et, par conséquent, constante sur la variété compacte M. Cette constante est nécessairement nulle car Y_1 admet au moins un point d'annulation et la section Y_1 est donc en tout point isotrope. La restriction de Y_1 à une fibre régulière de π sur laquelle Y_1 ne s'annule pas (rappelons que Y_1 est projetable sur la base) munit cette fibre d'un champ de vecteurs holomorphe tangent non singulier et q-isotrope. Ces fibres sont donc nécessairement des surfaces minimales : le flot de ce champ de vecteurs non singulier permet de "bouger" toute eventuelle copie de $P^1(\mathbf{C})$ incluse dans la fibre, ce qui implique que l'auto-intersection de $P^1(\mathbf{C})$ ne peut pas être négative.

De manière duale la restriction de α_1 permet de construire le long d'une fibre régulière de la fibration une 1-forme différentielle holomorphe α dont le noyau coïncide avec l'espace tangent à la fibre. Les fibres régulières possèdent une forme volume holomorphe (leur fibré canonique est trivial) : cette forme volume est donnée, par exemple, par la formule $vol_{fibre}(x, y) = \frac{vol(x,y,z)}{\alpha(z)}$, où vol désigne la forme volume de M, x, y des vecteurs tangents à la fibre et z n'importe quel vecteur transverse à la fibration (il est aisé de voir que l'expression du volume de la fibre ne dépend pas du supplémentaire

z choisi). La classification des surfaces complexes (voir, par exemple, [2]) montre que la fibre générique est ou bien un tore complexe ou bien une surface de Kodaira primaire (une fibration non singulière en courbes elliptiques sur une courbe elliptique). Ce dernier cas est éliminé par le théorème 4.1 de [21] (il s'agit d'un cas facile de ce théorème).

La prochaine étape montre que ces tores sont holomorphiquement isomorphes. Soit m un point de la base C qui est une valeure régulière de la fibration π et soit $T_m = \pi^{-1}(m)$ la fibre régulière correspondante. La section isotrope Y_1 permet de construire en restriction au tore complexe T_m un champ de vecteurs constant Y et on peut définir le long de T_m un deuxième champ de vecteurs X avec la propriété que $q(X) = 1$ et $X \in Y^{\perp}$ (on utilise ici que la fibre générique est un tore et donc son fibré tangent est trivial : il suffit donc de prendre un deuxième champ de vecteurs tangent à la fibre et non colinéaire à Y et de le diviser par sa q-norme qui est constante grâce à la compacité de la fibre). Complétons ces deux champs de vecteurs par un troisième champ Z en imposant la condition $q(Z) = 0$, $q(Z, X) = 0$ et $q(Y, Z) = 1$. Cette condition exprime le fait que Z engendre la deuxième droite isotrope du champ de plans non degénérés $X^{\perp}$ et que Z est choisi sur cette droite de manière unique en imposant que la base (X, Y, Z) soit de volume 1. Ces trois champs constituent alors une trivialisation du fibré des repères orthonormés au-dessus de T_m. Ceci implique que le 1-jet de biholomorphisme qui envoie un point $s \in T_m$ en un point $s' \in T_m$ et dont la différentielle envoie $(X(s), Y(s), Z(s))$ sur $(X(s'), Y(s'), Z(s'))$ s'intègre en une isométrie locale (le s-jet de la structure géométrique (q, φ) est le même en les bases $(X(s), Y(s), Z(s))$ et $(X(s'), Y(s'), Z(s'))$ à cause de la compacité de la fibre T_m et du fait que le fibré des repères est trivial au-dessus de T_m). Cette isométrie locale envoie nécessairement le temps t de la géodésique issue du point s dans la direction $Z(s)$ sur le temps t de la géodésique issue du point s' dans la direction $Z(s')$: autrement dit, pour t suffisament proche de 0 l'image du point $exp_s(tZ(s))$ est $exp_{s'}(tZ(s'))$. Le temps t du flot géodésique du champ Z (défini le long de la fibre en m) envoie donc la fibre en m en un ensemble de points reliés par des isométries locales. Cet ensemble est contenu donc dans la même fibre de la fibration π : rappelons que la conclusion du théorème principal de [8] est précisément que les fibres de la fibration π sont les orbites du pseudo-groupe des isométries locales de φ. Le flot géodésique de Z réalise alors un isomorphisme entre la fibre en m et les fibres proches. Les fibres régulières de la fibration π sont donc isomorphes entre elles.

Comme un biholomorphisme proche de l'identité d'un tore complexe est une translation, le flot géodésique du champ transverse Z identifie les fibres voisines de la fibration par un biholomorphisme qui est une translation. Il vient qu'en dehors des fibres singulières la fibration π admet une structure de fibré principal. □

4.2. Prolongement de certaines sections de $K^{\otimes n}$

Nous venons de voir que M admet une structure fibrée principale de fibre un tore complexe T de dimension 2 au-dessus d'une courbe de genre $g \geqslant 2$, avec eventuellement des fibres singulières. Si u, v sont des coordonnées complexes sur la fibre type T de la fibration en question, alors la 2-forme différentielle holomorphe $\theta = du \wedge dv$ est invariante par les translations de la fibre et est donc bien définie sur M en dehors des fibres singulières. Aussi les sections $\omega_1 = \alpha_1 \wedge \theta^{\otimes n}$ et $\omega_2 = \alpha_2 \wedge \theta^{\otimes n}$ de $K^{\otimes n}$, où K est le fibré canonique de M, sont bien définies en dehors des fibres singulières et non identiquement nulles. Nous allons arriver à une contradiction en prolongeant les sections ω_1 et ω_2 à l'aide du lemme suivant du à Ueno [21] :

Lemme 4.4. — *Soit M une variété complexe, S un sous-ensemble analytique compact de M et ω une section holomorphe au-dessus de $M \setminus S$ de $K^{\otimes n}$, où K est le fibré canonique de M. Si $\int_{M \setminus S} |\omega|^{\frac{2}{n}} < \infty$, alors ω est une section méromorphe de $K^{\otimes n}$ admettant un pôle d'ordre au plus $n-1$ en S.*

Dans le lemme précédent $|\omega|^{\frac{2}{n}}$ désigne la $2m$-forme différentielle réelle qui s'exprime localement par $|f(z)|^{\frac{2}{n}}(dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dy_m)$, où $z_k = x_k + iy_k$, m est la dimension complexe de M et $\omega = f(z)(dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_m)^n$ est l'expression locale de ω.

Nous allons donc appliquer le lemme 4.4 à notre situation pour prolonger les sections ω_1 et ω_2 au-dessus des fibres singulières. Les arguments suivants s'inspirent de [21].

Soit $c \in C$ une valeur critique de notre fibration principale, $\pi^{-1}(c)$ la fibre singulière correspondante et t une coordonnée locale sur C au voisinage de c qui s'annule en c. Considérons un disque $D = \{t, |t| < \epsilon\}$ suffisamment petit pour que $\pi^{-1}(0)$ soit l'unique fibre singulière contenue dans $\pi^{-1}(D)$. Rappelons que $\alpha_1 = \pi^*(\eta_1)$, où η_1 est une section holomorphe d'une puissance du fibré canonique de C. Choisissons la coordonnée locale t telle que $\eta_1(t) = t^l(dt)^{\otimes n}$, pour un certain entier positif l (qui vaut 0 dans le cas où

η_1 est non singulière en c). Dans ce cas l'expression locale de ω_1, en restriction à l'ouvert $\pi^{-1}(D \setminus \{0\})$ est $t^l(dt \wedge du \wedge dv)^n$. Pour montrer que ω_1 se prolonge en une section holomorphe sur $\pi^{-1}(D)$, il suffit de prouver que $(dt \wedge du \wedge dv)^n$ se prolonge. Pour cela on applique le lemme 4.4 à la section $\omega = t^{-(n-1)}(dt \wedge du \wedge dv)^n$. Notons d'abord $A = \int_T \theta \wedge \bar{\theta}$, le volume de la fibre régulière et appliquons le théorème de Fubini pour estimer l'intégrale suivante :

$$\int_{\pi^{-1}(D\setminus\{0\})} |\omega|^{\frac{2}{n}} = A \cdot |\int_{D\setminus\{0\}} t^{\frac{-2(n-1)}{n}} dt \wedge \bar{d}t| = 4\pi A \cdot \int_0^\epsilon r^{-(1-\frac{1}{n})} dr < \infty.$$

Le lemme 4.4 s'applique et montre que la section $\omega = t^{-(n-1)}(dt \wedge du \wedge dv)^n$ est méromorphe sur $\pi^{-1}(D)$ et admet un pôle d'ordre au plus $n-1$ sur la fibre singulière. Il s'ensuit donc que la section $(dt \wedge du \wedge dv)^n$ est holomorphe sur $\pi^{-1}(D)$ et que ω_1 se prolonge au-dessus de la fibre singulière $\pi^{-1}(c)$. Le même raisonnement s'applique aussi à ω_2 et montre que ω_1 et ω_2 définissent deux sections holomorphes globales du fibré $K^{\otimes n}$. Comme $\alpha_1 = f \cdot \alpha_2$ pour une certaine fonction méromorphe non constante f, ceci reste vrai pour les sections ω_1 et ω_2. La contradiction vient du fait que le fibré (trivial) $K^{\otimes n}$ ne peut pas admettre deux sections holomorphes globales dont le quotient est une fonction méromorphe non constante sur M.

5. Étendre l'ouvert dense à M

Avec les mêmes notations que dans la section précédente, il s'agit de prouver ici que l'ouvert dense d'homogénéité locale est toujours égal à M tout entier, ce qui finit la preuve du théorème 1.1.

La propriété suivante de prolongement de champs de Killing, découverte pour la première fois par K. Nomizu dans le cadre des métriques riemanniennes analytiques [19] et généralisée dans [1] et [11] pour les structures géométriques rigides analytiques est essentielle pour la suite : chaque point $m \in M$ admet un voisinage ouvert U_m avec la propriété que tout champ de Killing holomorphe, défini sur un ouvert connexe $U \subset U_m$, se prolonge en un champ de Killing sur U_m. Autrement dit, *la fibre du faisceau des germes de champs de Killing d'une structure holomorphe rigide est une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ qui ne dépend pas du point.* Dans notre cas cette algèbre est de dimension complexe au moins 3 car elle est transitive sur $M \setminus S$. Par ailleurs, comme l'action de $\mathcal{G}$ est libre sur le fibré des repères qui est de dimension 6, la dimension de $\mathcal{G}$ est inférieure ou égale à 6. Il reste que la dimension de $\mathcal{G}$ est égale à 3, 4 ou 5 (la dimension 6 correspond au cas de courbure sectionnelle constante).

Supposons par l'absurde qu'il existe sur M une certaine structure géométrique holomorphe ψ qui n'est pas localement homogène partout, mais seulement sur un ouvert dense. Autrement dit, si s est un entier positif suffisamment grand l'image de l'application $\psi^{(s)}$ qui représente le s-jet de ψ (et dont les fibres se projetent sur M en les orbites du pseudo-groupe des isométries locales de ψ) est incluse dans l'adhérence d'une orbite O sous l'action du groupe $SO(3,\mathbf{C})$. Rappelons qu'un résultat classique (voir, par exemple, [12], [18]) affirme que pour les représentations algébriques chaque orbite est ouverte dans son adhérence : *l'image de $\psi^{(s)}$ est donc constituée de l'orbite O à laquelle s'ajoute eventuellement des orbites de dimension strictement inférieure contenues dans l'adhérence de O.*

Désignons par S l'ensemble analytique compact formé par les points de M où le s-jet de ψ appartient à $\bar{O}\setminus O$. Autrement dit, $M\setminus S$ est l'ouvert maximal de M sur lequel le pseudo-groupe des isométries locales de ψ agit transitivement.

La preuve du point i) du lemme 4.1 (voir [8]) construit dans ce cas une section holomorphe non triviale Y d'un fibré vectoriel $S^n(T^*M)$ dont le lieu d'annulation est S et qui prend ses valeurs dans le cône des puissances n-ièmes. Il est utile pour la suite de rappeler que la présence de la métrique riemannienne holomorphe q définit un isomorphisme entre T^*M et TM et cette dualité permet de voir Y aussi comme une section de $S^n(TM)$.

Nous démontrons la proposition suivante qui nous permettra de remplacer pour la suite la structure géométrique (quelconque) ψ, avec la structure géométrique $\varphi=(q,Y)$, formée par la juxtaposition de q et du tenseur Y.

Proposition 5.1. — *L'ouvert $M\setminus S$ est l'ouvert maximal de M sur lequel le pseudo-groupe des isométries locales de la structure géométrique holomorphe $\varphi=(q,Y)$ (formée par la juxtaposition de q et de Y) agit transitivement.*

Démonstration. — Nous savons par la section précédente que la structure géométrique $\varphi=(q,Y)$ est localement homogène sur un ouvert dense de M (car démontré pour toutes les structures géométriques de type affine).

L'ouvert dense sur lequel φ est localement homogène ne peut contenir des points où Y s'annule car dans ce cas Y serait nul sur tout l'ouvert donc partout. Inversement, s'il existe au moins un point dans $M\setminus S$ où le s-jet de φ se trouve dans une orbite qui n'est pas dense dans l'image de $\varphi^{(s)}$, la preuve du lemme 6.4 de [8] construit une section holomorphe non triviale d'un fibré $S^n(T^*M)$ qui s'annule au moins au point considéré. Comme Y

ne s'annule pas en ce point, cette nouvelle section et Y seront linéairement indépendantes et on est dans les hypothèses d'application du lemme 4.2. Le raisonnement de la section 4 s'applique et fournit l'existence d'une fibration de M sur une courbe de genre $g \geqslant 2$ ce qui, comme on l'a vu, conduit à une contradiction. $\square$

Chaque orbite de dimension strictement inférieure à 3 qui se trouve dans l'image du s-jet de φ (par exemple, toute orbite contenue dans $\bar{O}\setminus O$) admet un stabilisateur de dimension supérieure ou égale à 1 dans $SO(3, \mathbf{C})$. Un tel stabilisateur fournit des isométries fixant un point (autrement dit, des champs locaux de Killing pour φ qui s'annulent en au moins un point et qui se linéarisent donc en coordonnées exponentielles). Précisons ceci : si $\varphi^{(s)}$ est l'application "s-jet de φ" définie sur $R(M)$, alors l'image par $\varphi^{(s)}$ de la restriction de $R(M)$ au-dessus de $M \setminus S$ est exactement une orbite O de l'espace affine des s-jets de ϕ, tandis que l'image de la restriction de $R(M)$ à S est formée par des orbites de dimension strictement inférieures contenues dans l'adhérence de O. Si $\varphi^{(s)}$ envoie la fibre de $R(M)$ au-dessus d'un point $u \in S$ sur une orbite de $\bar{O} \setminus O$ qu'on identifie à $SO(3, \mathbf{C})$ quotienté par un stabilisateur B, alors la dimension complexe de B est supérieure ou égale à 1 et pour s suffisamment grand les éléments de B s'intègrent en des isométries locales qui fixent le point u. Tout sous-groupe à un paramètre de B fournit donc un champ de Killing au voisinage de u qui s'annule en u. Un tel champ de Killing est donc linéarisable au voisinage de u (car isométrie de q). Pour la partie linéaire d'un tel champ de Killing on a les deux possibilités suivantes (rappelons au passage que le groupe $SO(3, \mathbf{C})$ est isomorphe à $PSL(2, \mathbf{C})$: pour s'en assurer il suffit de faire agir $PSL(2, \mathbf{C})$ (par changement de variables) sur l'espace vectoriel (de dimension 3) des formes quadratiques à deux variables (de la forme $ax^2 + bxy + cy^2$) en préservant le déterminant) :

(1) la partie linéaire est *semi-simple*, conjuguée dans l'algèbre de Lie de $PSL(2, \mathbf{C})$ à un multiple de l'élément $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) la partie linéaire est *unipotente*, conjuguée dans l'algèbre de Lie de $PSL(2, \mathbf{C})$ à l'élément $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il est équivalent de dire que la partie linéaire d'un champ de Killing est semi-simple ou de préciser que la différentielle du flot du champ de Killing au point fixe stabilise un champ de vecteurs de q-norme égale à 1 dans l'espace tangent (forme quadratique xy dans l'isomorphisme avec $PSL(2, \mathbf{C})$). Aussi, il est équivalent de dire que la partie linéaire d'un champ de Killing est unipotente ou de préciser que la différentielle du flot de champ de Killing au point fixe stabilise un champ de vecteurs q-isotrope dans l'espace tangent (forme quadratique x^2). Dans ces situations on utilise classiquement la terminologie : *isotropie semi-simple* et *isotropie unipotente.*

Le lemme suivant précise le type d'orbites qui peuvent se trouver dans l'image du s-jet de φ et sera très utile pour la suite :

Lemme 5.2. — *L'image de $\varphi^{(s)}$ contient une orbite dense O de dimension* 3*. Les orbites de $\bar{O}\setminus O$ contenues dans l'image de $\varphi^{(s)}$ sont de dimension* 2*.*

Démonstration. — Commençons par rappeler que le seul espace homogène de dimension 1 complexe de $PSL(2,\mathbf{C})$ est la droite projective $P^1(\mathbf{C})$. En effet, le stabilisateur d'un point doit être un sous-groupe de Lie complexe de dimension 2 de $PSL(2,\mathbf{C})$ et il est, par conséquent, conjugué dans $PSL(2,\mathbf{C})$ au sous-groupe formé par les matrices triangulaires supérieures. Comme $P^1(\mathbf{C})$ est un espace compact, ce type d'orbite ne peut pas apparaître dans une représentation de $PSL(2,\mathbf{C})$ sur une variété affine. Dans l'image de $\varphi^{(s)}$ il n'existe donc aucune orbite de dimension 1.

Montrons maintenant qu'il n'existe dans $\varphi^{(s)}$ aucune orbite de dimension 0. Supposons par l'absurde le contraire. Il existe alors un point u dans S où le stabilisateur du s-jet de q est de dimension (maximale) 3. Considérons l'algèbre des germes des champs de Killing $\mathcal{G}$ au voisinage de ce point u. Le groupe d'isotropie en u est de dimension 3 isomorphe donc au groupe linéaire $PSL(2,\mathbf{C})$. Le morphisme d'évaluation en u qui à un champ de Killing associe sa valeur au point u est un morphisme d'espaces vectoriels qui admet un noyau de dimension 3. Comme la dimension de $\mathcal{G}$ est inférieure ou égale à 5, la dimension de l'image de ce morphisme est un sous-espace vectoriel strict de T_uM qui doit être invariant par l'action linéaire du groupe d'isotropie $PSL(2,\mathbf{C})$. Il vient que ce sous-espace vectoriel est nécessairement trivial, ce qui implique que $\mathcal{G}$ est de dimension 3 isomorphe à $PSL(2,\mathbf{C})$. La contradiction vient du fait qu'au voisinage du point fixe u les orbites de l'action linéarisée (en coordonnées exponentielles) de $PSL(2,\mathbf{C})$ sont de dimension au plus 2 (dans le modèle linéaire donné par les formes quadratiques à 2 variables cette action préserve le déterminant). L'action de $\mathcal{G}$ n'est donc pas transitive en dehors de S : absurde.

Il reste que les orbites de $\bar{O}\setminus O$ contenues dans l'image de $\varphi^{(s)}$ sont de dimension 2. Ceci implique que l'orbite dense O est de dimension strictement supérieure : elle est donc de dimension 3. □

La proposition suivante est une conséquence directe du lemme précédent.

Proposition 5.3. — i) *L'algèbre des germes de champs de Killing pour φ est une algèbre de Lie non-unimodulaire de dimension* 3.

ii) *L'ouvert $M\setminus S$ admet une (G,G)-structure, où G est l'unique groupe de Lie connexe et simplement connexe associé à $\mathcal{G}$. En restriction à $M \setminus S$, q provient d'une métrique riemannienne holomorphe sur G invariante par les translations à gauche.*

Démonstration. — Au-dessus de $M\setminus S$ l'image du fibré des repères dans l'espace des s-jets de φ est l'orbite O de dimension complexe 3 qui s'identifie au quotient de $SO(3,\mathbf{C})$ par un sous-groupe fini. On bénéficie donc (eventuellement sur un revêtement fini non ramifié) d'une trivialisation du fibré des repères et, de plus, un biholomorphisme local qui relie deux points de $M\setminus S$ est une isométrie locale si et seulement si son action préserve cette trivialisation .

L'action de $\mathcal{G}$ est donc libre et transitive sur $M \setminus S$ (isotropie triviale), ce qui implique que $\mathcal{G}$ est de dimension complexe 3. Avec le langage des $(G,X)-$ structures, nous sommes en présence d'une (G,G)-structure sur l'ouvert invariant $M\setminus S$, où G est l'unique groupe de Lie complexe connexe simplement connexe de dimension 3 associé à l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Sur l'ouvert $M\setminus S$, la métrique riemannienne holomorphe q provient d'une métrique riemannienne holomorphe sur G invariante par les translations à gauche. On a vu dans la section 2 qu'une telle métrique se construit en choisissant une forme quadratique non dégénérée sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et en la transportant par les translations à gauche. Comme le pseudo-groupe des isométries locales agit dans notre situation sans point fixe sur $M \setminus S$ (isotropie triviale), la forme quadratique q n'est préservée par aucune transformation adjointe (voir [16]).

Prouvons que le groupe G ne peut pas être unimoduaire (il est, par conséquent, résoluble) [16]. Si par l'absurde G est unimodulaire alors la transformation adjointe préserve le volume de la forme quadratique considérée sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ (qui fournit la restriction de q à $M \setminus S$). Soit (K_1,K_2,K_3) une base fixée de $\mathcal{G}$ et considérons les trois champs de Killing locaux linéairement indépendants définis au voisinage d'un point $m \in M\setminus S$ qui correspondent à la base (K_1,K_2,K_3) de $\mathcal{G}$. Si on agit par une isométrie locale qui envoie le point m sur un autre point m' dans $M \setminus S$ les trois champs de Killing initiaux sont conjugués à trois autres champs de Killing qui correspondent à l'image de la base (K_1,K_2,K_3) par la transformation adjointe (qui est supposée préserver le volume). L'action de $\mathcal{G}$ préserve donc le volume $vol(K_1,K_2,K_3)$ des champs K_1,K_2 et K_3. Comme cette action est transitive ce volume est constant.

Autrement dit, quelque soient trois champs de Killing locaux définis au voisinage d'un point de $M \setminus S$, leur volume par rapport à q est une fonction constante. Pour obtenir la contradiction recherchée considérons un point u dans S et considérons un voisinage U de u dans S qui vérifie la propriété de prolongement de champs de Killing. Considérons au voisinage d'un point de $U \setminus S$ trois champs de Killing linéairement indépendants, correspondant à une base (K_1, K_2, K_3) de $\mathcal{G}$. Ces champs de Killing se prolongent à U en des champs de Killing dont les valeurs en u sont nécessairement des vecteurs de T_uM linéairement dépendants (tangents à S car S est invariant sous l'action de $\mathcal{G}$). Le volume associé à ces trois champs de Killing est donc une fonction constante non nulle sur $U \setminus S$, qui se prolonge (holomorphiquement et donc continument) en une fonction qui s'annule en les points de S : impossible. □

Proposition 5.4. — *Les composantes connexes de S sont des surfaces complexes lisses (sous-variétés de codimension 1 de M).*

Démonstration. — Remarquons que $\bar{O} \setminus O$ étant de dimension complexe 2, les orbites de dimension 2 sont des ouverts de $\bar{O} \setminus O$. Par connexité, le fibré des repères au-dessus de chaque composante connexe de S est envoyé par l'application s-jet de φ sur une même orbite (de dimension 2) contenue dans $\bar{O} \setminus O$ (et le stabilisateur B d'une telle orbite dans $SO(3, \mathbf{C})$ est une extension par un groupe fini d'un sous-groupe à un paramètre). Par conséquent le pseudo-groupe des isométries locales de $\varphi = (q, Y)$ agit transitivement sur chaque composante connexe de S. Il vient donc que chaque composante connexe de S est *lisse*.

Au-dessus de chaque composante connexe de S on bénéficie d'une application holomorphe $SO(3, \mathbf{C})$-équivariante du fibré des repères $R(M)$ restreint à S dans l'espace homogène $SO(3, \mathbf{C})/B$. Ceci s'interprète comme la donnée d'un champ de vecteurs holomorphe au-dessus de S qui est q-isotrope ou de q-norme constante égale à 1 selon que l'unique sous-groupe à un paramètre contenu dans B est unipotent ou semi-simple.

En résumé, chaque composante connexe de S est *lisse* et en chaque point $u \in S$ il existe un vecteur $X(u) \in T_uM$ tel que toute isométrie locale de q restreinte au sous-ensemble invariant S préserve X.

Nous démontrons que le champ de vecteurs X est tangent à S. Pour tout $u \in S$ les transformations linéaires de T_uM qui préservent $X(u)$ préservent le s-jet de φ et s'intègrent donc en des isométries locales de φ qui fixent tous les points de la géodésique issue de u en la direction $X(u)$. Comme l'isotropie de l'action de $\mathcal{G}$ est triviale sur $M \setminus S$, ceci implique que cette géodésique est entièrement contenue dans S et donc $X(u) \in T_uS$. Nous avons prouvé en même temps que chaque composante connexe de S est de dimension complexe au moins 1.

On démontre maintenant que chaque composante connexe de S est de dimension complexe 2 (de codimension 1 dans M). Supposons le contraire et considérons que S est une telle composante connexe de dimension complexe 1. Associons à chaque élément de l'algèbre de Lie de champs de Killing $\mathcal{G}$ au voisinage d'un point $u \in S$ sa valeur en u. Ceci donne un morphisme d'espaces vectoriels défini sur $\mathcal{G}$ et à valeurs dans T_uM. Comme S est invariant par l'action de $\mathcal{G}$, l'image de notre morphisme est incluse dans la droite T_uS. Ceci implique qu'il existe au moins deux champs de Killing linéairement indépendants dans le noyau et donc le groupe d'isotropie en u serait nécessairement de dimension au moins 2. Dans le cas où ce groupe d'isotropie est de dimension 2, le stabilisateur du s-jet de φ en u est de dimension 2, ce qui montre que ce s-jet possède une orbite de dimension 1. Ce cas a été exclus par le lemme 5.2. Si le groupe d'isotropie est de dimension 3, il est nécessairement isomorphe à $PSL(2, \mathbf{C})$: il vient que $\mathcal{G}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de $PSL(2, \mathbf{C})$ qui est unimodulaire (car semi-simple). Ceci est en contradiction avec la conclusion de la proposition 5.3. □

Nous savons à présent que S est de dimension complexe 2. Dans ce cas une isométrie locale qui est triviale en restriction à S admet un 1-jet trivial en chaque point de S et elle est, par conséquent, triviale. La restriction de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ à S est donc un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Rappelos que le champ de vecteurs X tangent à une composante connexe de S construit précédemment est q-isotrope ou bien de q-norme constante égale à 1 selon que le sous-groupe à un paramètre contenu dans B qui le fixe est respectivement unipotent ou semi-simple. Cette considération sépare les deux cas qu'on étudie dans la suite.

5.1. Isotropie unipotente

Plaçons-nous d'abord dans le cas où *il existe dans l'image de* $\varphi^{(s)}$ *au moins une orbite* O_1 *de dimension* 2, *contenue dans* $\bar{O} \setminus O$ *et dont le stabilisateur contient un sous-groupe à un paramètre unipotent.*

Nous étudions une composante connexe de S (que l'on note encore S) où le s-jet de φ est dans O_1. Il existe alors sur un revêtement fini de S un champ de vecteurs q-isotrope X préservé par la restriction à S de tout champ de Killing local. Le raisonnement suivant étant local on considère que X est un champ de vecteurs défini directement sur S.

Dans ce cas nous allons démontrer la

PROPOSITION 5.5. — *La surface compacte connexe lisse S est totalement géodésique et dégénérée pour la métrique riemannienne holomorphe q. Le feuilletage holomorphe engendré par le noyau de la restriction de q à S est transversalement riemannien. Par conséquent, S est ou bien un tore complexe, ou bien une surface de Kodaira primaire (fibré principal en courbes elliptiques sur une courbe elliptique).*

Démonstration. — La réstriction de la métrique riemanienne holomorphe à S est nécessairement dégénérée. En effet, supposons pour un instant le contraire et désignons par Z l'unique champ de vecteurs tangent à S, colinéaire à la deuxième direction isotrope de la restriction de q à l'espace tangent à S (la droite engendrée par X étant l'autre direction isotrope) et tel que $q(X,Z) = 1$ et par H l'unique champ de vecteurs de norme 1 orthogonal au plan engendré par X et Z et tel que $vol(H,X,Z) = 1$. Toute isométrie locale qui relie deux points de S préserve nécessairement X et donc Z et H. Nous avons expliqué un peu plus haut que le point u admet un voisinage ouvert V dans M tel que toute isométrie de φ proche de l'identité définie dans un (petit) ouvert connexe de V se prolonge à tout l'ouvert V. Considérons une telle isométrie qui relie deux points de $V \setminus S$ (une telle isométrie existe car φ est localement homogène sur $M \setminus S$) et qui se prolonge donc sur tout l'ouvert V. Cette isométrie respecte nécessairement S car le pseudo-groupe des isométries locales préserve l'ouvert $M \setminus S$. Toutes les isométries locales qui relient deux points de S préservent le champ de vecteurs transverse H et donc également le temps t du flot géodésique de H. On vient de voir que dans l'ouvert V l'action de $\mathcal{G}$ fixe chaque feuille du feuilletage local de dimension 2 donné par l'image de S par le flot géodésique de H (chaque feuille $exp_S(tH)$, à t fixé, est stabilisée). L'action de $\mathcal{G}$ n'est donc pas transitive sur $M \setminus S$, ce qui est absurde.

Il reste que la restriction de q à l'espace tangent à S est dégénérée et cet espace tangent n'est rien d'autre que l'orthogonal $X^{\perp}$ du champ de vecteurs X. Nous montrons que la surface q-dégénérée S est *totalement géodésique.*

Le champ de vecteurs X étant défini seulement sur S, on prendra soin de considérer sa dérivée covariante uniquement le long de champs de vecteurs W tangents à S (autrement dit, contenus dans $X^{\perp}$). Comme la q-norme de X est constante, nous avons déjà que pour tout $W \in X^{\perp} : 2 \cdot q(\nabla_W X, X) = W \cdot q(X,X) = 0$. Le champ de plans $X^{\perp}$ est donc stable par l'opérateur $\nabla . X$, que l'on peut interpréter comme une section au-dessus de S du fibré $End(X^{\perp}) = End(TS)$ des endomorphismes de $X^{\perp}$.

Constatons d'abord que le champ X est géodésique. Pour s'assurer que X est bien géodésique considérons l'action du champ de Killing (unipotent) qui fixe un point u de S. Si $H(u) \in X^{\perp}(u)$ est un vecteur de q-norme unitaire, la différentielle du temps t du flot de champ de Killing envoie le vecteur $H(u)$ sur $H(u) + t \cdot X(u)$. Comme ce flot préserve la connexion ∇ et le champ de vecteurs X, il vient que $\nabla_{H(u)}X = \nabla_{H(u)+t\cdot X(u)}X$, ce qui implique que $\nabla_X X$ s'annule au point u.

Par conséquent l'opérateur $\nabla.X$ contient le champ X dans son noyau.

L'autre valeur propre de l'opérateur $\nabla.X$ (qui est constante sur S car le pseudo-groupe des isométries locales de q qui préservent X agit transitivement sur S) est nécessairement nulle : dans le cas contraire l'opérateur $\nabla.X$ serait diagonalisable et tout champ de Killing devrait préserver la décomposition de $X^{\perp}$ en espaces propres, or ceci n'est pas réalisé pour notre champ de Killing unipotent dont la différentielle ne fixe aucune autre droite de $X^{\perp}$ à part celle engendrée par X. Il reste que le champ d'endomorphismes $\nabla.X$ est nilpotent (d'ordre au plus 2) : l'image de $\nabla.X$ est incluse dans le noyau de $\nabla.X$. Deux cas se présentent : ou bien $\nabla.X$ est nul, ou bien le noyau de $\nabla.X$ et l'image de $\nabla.X$ coïncident avec la droite engendrée par X (l'unique droite de $X^{\perp}$ invariante par toutes les isométries locales). Dans les deux cas le calcul suivant est valide pour tous les champs de vecteurs locaux W_1 et W_2 tangents à S : $q(\nabla_{W_1}W_2, X) = W_1 \cdot q(W_2, X) - q(\nabla_{W_1}X, W_2) = 0$, le deuxième terme du membre de droite de l'égalité étant nul car $\nabla_{W_1}X$ est contenu dans l'image de $\nabla.X$ et donc colinéaire à X (tandis que $W_2 \in X^{\perp}$). Ceci montre que $\nabla_{W_1}W_2 \in X^{\perp}$, et que S est totalement géodésique.

Comme q est dégénérée en restriction à la surface totalement géodésique S, le feuilletage engendré par le champ q-isotrope X est transversalement riemannien [27].

Le feuilletage engendré par le champ de vecteurs non singulier X admet une structure transverse modelée sur le groupe de Lie $\mathbf{C}$. On en déduit facilement (voir [17] pour la théorie générale et [5] pour le cas des surfaces complexes) que le revêtement universel de S est biholomorphe à $\mathbf{C}^2$ et qu'il existe seulement deux cas possibles pour S : ou bien, S est un tore complexe, quotient de $\mathbf{C}^2$ par un réseau de translations et X est un champ de vecteurs constant, ou bien S est une surface de Kodaira primaire, fibré principal en courbes elliptiques sur une courbe elliptique et le champ X engendre la fibration principale. $\square$

Analysons maintenant l'action de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ des champs de Killing de φ au voisinage d'un point u de S. La restriction à S de chaque élément de $\mathcal{G}$ donne un champ de vecteurs (tangent à S) défini au voisinage de

u dans S dont le flot préserve X et donc, en particulier, le feuilletage (transversalement riemannien) $\mathcal{F}$ défini par X. Désignons par $\mathcal{H}$ l'idéal de $\mathcal{G}$ formé par les éléments de $\mathcal{G}$ dont la restriction à S agit trivialement sur la transversale de $\mathcal{F}$. Les éléments de $\mathcal{H}$ fixent chaque feuille de $\mathcal{F}$ et ils commutent avec X : ils sont de la forme $f \cdot X$ avec f fonction holomorphe constante sur les orbites de X (en particulier, les éléments de $\mathcal{H}$ sont q-isotropes sur S). Remarquons que l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ est de dimension complexe 2 : en effet, $\mathcal{H}$ ne peut être de dimension 3 (sinon le groupe d'isotropie de φ en u serait de dimension au moins 2) et le quotient $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ qui agit non trivialement sur la transversale de $\mathcal{F}$ est nécessairement de dimension 1 isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathbf{C}$ (agissant par translation). Comme $\mathcal{F}$ est transversalement riemannien, le flot de X (comme le flot de tout champ de vecteurs tangent au feuilletage) préserve la restriction de q à S.

On peut choisir sur un voisinage ouvert U de u dans S un champ de vecteurs holomorphe H de q-norme constante égale à 1 et tel que $[X, H] = 0$ (il suffit de définir H de q-norme constante égale à 1 sur une petite transversale à $\mathcal{F}$ et de le transporter par le flot du champ X qui préserve la restriction de q à S). Définissons sur un voisinage de u dans S un système de coordonnées (x, h) centré en u et tel que $\frac{\partial}{\partial x} = X$ et $\frac{\partial}{\partial h} = H$. Dans ces coordonnées l'expression locale de la forme quadratique q restreinte à S est dh^2 et les éléments de $\mathcal{H}$ restreint à S sont de la forme $f(h)\frac{\partial}{\partial x}$ (car ils préservent $\frac{\partial}{\partial x}$ et dh^2). Par ailleurs l'algèbre de Lie $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ est engendrée par un élément qui s'exprime $\frac{\partial}{\partial h} + l(h)\frac{\partial}{\partial x}$, avec l une fonction holomorphe définie au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$. Nous avons que $[\frac{\partial}{\partial h} + l(h)\frac{\partial}{\partial x}, f(h)\frac{\partial}{\partial x}] = f'(h)\frac{\partial}{\partial x}$.

Pour comprendre la structure de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ qui agit par isométries affines pour la restriction de la connexion ∇ à S, nous allons préciser la structure locale de cette connexion sur S.

Proposition 5.6. — i) *Si R est le tenseur de courbure de (S, ∇) alors $R(X, H)X = 0$ et $R(X, H)H = \gamma X$, où γ est un nombre complexe.*

ii) *La restriction de ∇ à S est localement symétrique. De plus (S, ∇) est localement isométrique ou bien à la connexion canonique du groupe affine de la droite complexe si $\gamma \neq 0$, ou bien à la connexion canonique de $\mathbf{C}^2$ si $\gamma = 0$.*

Avant de passer à la preuve rappelons que le revêtement universel AG du groupe affine de la droite complexe est un groupe de Lie complexe de dimension 2 qui peut être vu comme l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ muni de la multiplication $(a, b) \cdot (a', b') = (a + a', exp(a)b' + b)$. Ce groupe admet (comme tout groupe de Lie) une unique connexion linéaire holomorphe, bi-invariante, sans torsion, complète et localement symétrique. Le groupe des isométries de cette connexion est formé par les translations à droite et à gauche et il est, par conséquent, isomorphe au produit $AG \times AG$ [26].

Avant de passer à la preuve rappelons que si h est l'élément de l'algèbre de Lie du groupe affine qui engendre les homothéties (le temps T de du flot de h agissant donc sur la droite complexe comme $z \to exp(T)z$) et x est l'élément de l'algèbre de Lie qui engendre les translations (le temps T du flot étant $z \to z+T$) nous avons $[h,x] = -x$.

La connexion canonique d'un groupe de Lie est définie, en général, au niveau de l'algèbre de Lie par la relation $\nabla_u v = \frac{1}{2}[u,v]$; ce qui donne pour la courbure le tenseur $R(u,v)v = \frac{1}{4}[v,[u,v]]$.

Dans le cas particulier du groupe affine il vient que $R(x,h)x = 0$ et $R(x,h)h = -\frac{1}{4}x$. Si l'on pose $X = x$ et $H = h$, ceci ressemble formellement, du moins dans le cas $\gamma = -\frac{1}{4}$, aux relations figurant au point i) de la proposition 5.6.

Les arguments suivants inspirés de [26] (partie 8) montrent que la valeur du paramètre γ n'est pas relevante pour la géométrie de la connexion, tant que γ reste non nul.

Démonstration. — Remarquons d'abord que $\nabla_H X$ ne dépend pas du champ de vecteurs H de q-norme unitaire chosi. En effet, si H' est un autre champ de vecteurs local tangent à S et de q-norme constante égale à 1, alors $H' = H + f \cdot X$, pour une certaine fonction holomorphe locale f et comme X est géodésique, $\nabla_H X = \nabla_{H'} X$. Le champ de vecteurs $\nabla_H X$ est donc invariant par l'action de $\mathcal{G}$ et, comme cette action est transitive sur S, ceci implique qu'il existe un nombre complexe a tel que $\nabla_H X = aX$.

Comme $[X,H] = 0$, nous avons que $R(X,H)X = \nabla_X \nabla_H X - \nabla_H \nabla_X X = \nabla_X(aX) = 0$.

Pour la deuxième formule sur la courbure remarquons que le terme $R(X,H)H$ ne dépend pas du choix de H car si $H' = H + f \cdot X$, alors la première égalité implique que $R(X,H)f \cdot X = 0$ et donc $R(X,H)H = R(X,H')H'$. Comme précédemment le champ de vecteurs $R(X,H)H$ est alors invariant par l'action de $\mathcal{G}$, ce qui implique que $R(X,H)H = \gamma X$ pour un certain nombre complexe γ. Un calcul direct montre que $\gamma = -a^2$.

La deuxième assertion de la proposition est prouvée dans [26] sous l'hypothèse supplémentaire $\nabla_H H = 0$ qui est utilisée pour montrer que la courbure est parallèle (connexion localement symétrique sur S). Nous montrons que dans notre situation nous pouvons nous passer de l'hypothèse faite sur

H. Remarquons d'abord que H étant de q-norme constante, $\nabla_H H$ est orthogonal à H. Comme $\nabla_H H \in X^{\perp}$ ceci implique qu'il existe une fonction holomorphe g telle que $\nabla_H H = g \cdot X$.

Rappelons que la dérivée du tenseur R est donnée par la formule :

$$\nabla R(A,B,C,D) = \nabla_A(R(B,C)D) - R(\nabla_A B,C)D - R(B,\nabla_A C)D \\ - R(B,C)\nabla_A D,$$

où les vecteurs A, B, C, D prennent les valeurs X ou H. Ce n'est que dans le cas où trois des vecteurs A,B,C,D valent H que l'hypothèse supplémentaire est utilisée dans [26]. Nous traitons ici ce cas et pour le reste de la preuve nous renvoyons à [26] (proposition 8.4 et proposition 9.2).

1) $\nabla R(H,X,H,H) =$

$$\nabla_H R(X,H)H - R(\nabla_H X,H)H - R(X,\nabla_H H)H - R(X,H)\nabla_H X =$$

$$\nabla_H \gamma X - R(aX,H)H - R(X,gX)H - R(X,H)aX = a\gamma X - a\gamma X = 0.$$

2) $\nabla R(H,X,H,H) =$

$$\nabla_H R(X,H)H - R(\nabla_H X,H)H - R(X,\nabla_H H)H - R(X,H)\nabla_H H =$$

$$\nabla_H \gamma X - R(aX,H)H - R(X,gX)H - R(X,H)gX = a\gamma X - a\gamma X - 0 - 0 = 0.$$

3) $\nabla R(H,H,H,X) =$

$$\nabla_H R(H,H)X - R(\nabla_H H,H)X - R(H,\nabla_H H)X - R(H,H)\nabla_H X =$$

$$0 - R(gX,H)X - R(H,gX)X - 0 = 0.$$

□

Revenons à présent à l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Dans le cas où $\gamma = 0$ notre algèbre de Lie se plonge dans l'algèbre de Lie du groupe des transformations affines de $\mathbf{C}^2$ qui préservent la forme quadratique dh^2 et le champ de vecteurs X qui est isotrope, parallèle, et non trivial. Cette algèbre est engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial h}, h\frac{\partial}{\partial x}$. Il s'agit de l'algèbre de Lie du groupe Heisenberg car $\frac{\partial}{\partial x}$ est dans le centre et $\frac{\partial}{\partial x} = [\frac{\partial}{\partial h}, h\frac{\partial}{\partial x}]$. L'algèbre de Heisenberg est unimodulaire (car nilpotente) et cette situation a déjà été analysée et éliminée comme contradictoire.

Supposons maintenant que $\gamma \neq 0$. Dans ce cas $\mathcal{G}$ se plonge dans l'algèbre de Lie du produit $AG \times AG$ (comme AG est simplement connexe et complet, toute isométrie locale proche de l'identité de ∇ se prolonge en une isométrie globale [1], [11], [19]).

Nous allons montrer que l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ admet un centre non trivial. Pour cela nous prouvons d'abord que X est un champ de Killing pour la restriction de ∇ à S.

Rappelons que, d'après la proposition 5.5, la surface S est biholomorphe à un tore complexe ou bien à une surface de Kodaira primaire.

Considérons d'abord le cas où S est un tore complexe. Il vient que le fibré holomorphe tangent à S est holomorphiquement trivial et que le champ de vecteurs local H de norme constante égale à 1 peut être choisi comme étant globalement défini sur S. De même le champ de vecteurs $\nabla_H H$ sera globalement défini et comme H est de q-norme constante, $\nabla_H H$ est orthogonal à H, donc en tout point colinéaire à X. Comme le fibré en droites défini par X est trivial (car X non singulier), on a que $\nabla_H H = \lambda X$, pour une certaine constante $\lambda \in \mathbf{C}$.

Comme le flot de X préserve H, les relations $\nabla_X X = 0$, $\nabla_H X = \nabla_X H = aX$ et $\nabla_H H = \lambda X$ impliquent que le flot de X préserve la connexion ∇ de S.

Une manière plus directe de conclure est de dire que toute connexion linéaire holomorphe sur un tore complexe est invariante par les translations (pour une description des connexions affines sur les tores complexes le lecteur pourra consulter [14]).

Dans le cas où S est une surface de Kodaira primaire, nous utilisons la classification des connexions linéaires holomorphes sur ce type de surface faite par A. Vitter dans [22] (page 239). Cette description montre, en particulier, que sur une surface de Kodaira primaire toute connexion linéaire holomorphe est invariante par la fibration principale. Dans notre cas, il vient que X est bien un champ de Killing pour la restriction de ∇ à S.

Dans le modèle local constitué par le groupe affine, l'élément X correspond alors à un élément x de l'algèbre de Lie du produit $AG \times AG$. Comme les éléments de $\mathcal{G}$ préservent X, l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de Lie de dimension 3 du commutateur de x dans l'algèbre de Lie du produit $AG \times AG$. Comme, par ailleurs, le commutateur de chaque élément x est une algèbre de Lie de dimension au plus 3, il vient que $\mathcal{G}$ coïncide avec le commutateur de x et possède donc x comme élément central non trivial.

On vient de prouver que X est la restriction à S d'un champ de Killing local qui se trouve dans le centre de $\mathcal{G}$. Comme ce champ de Killing est invariant par l'action de G sur lui-même, il fournit un champ de Killing globalement défini sur $M \setminus S$ et de norme constante (nécessairement égale à 0 car ce champ de Killing se prolonge sur un ouvert de S en le champ q-isotrope X).

Analysons la situation au voisinage d'un point u de S. Pour cela, considérons un voisinage U de u dans M qui satisfait la propriété de prolongement de champs de Killing et considérons dans $U \setminus S$ un champ de Killing K_1

qui correspond à l'élément central de $\mathcal{G}$. Ce champ de Killing est de norme constante sur $U \setminus S$ car invariant par l'action transitive de $\mathcal{G}$ et se prolonge sur $U \cap S$ en un champ colinéaire à X. Nous avons donc que K_1 est bien défini sur U et q-isotrope. Rappelons que la section Y de $S^n(TM)$ est également invariante par l'action de $\mathcal{G}$ et (par construction) q-isotrope. Nous avons donc que $q(K_1^{\otimes n}, Y)$ est une fonction constante, où l'on a noté encore par q la forme quadratique induite sur $TM^{\otimes n}$ par la métrique riemannienne holomorphe. Comme Y s'annule sur S cette fonction est nulle. Nous pouvons donc conclure que si l'on choisit en un point $v \in U \setminus S$ le vecteur $\tilde{Y}(v)$ tel que $\tilde{Y}(v)^{\otimes n} = Y(v)$ alors les vecteurs $\tilde{Y}(v)$ et $K_1(v)$ sont q-isotropes et q-orthogonaux, ce qui implique qu'ils sont colinéaires : il existe donc une fonction méromorphe g, définie sur U, telle que que $K_1^{\otimes n} = g \cdot Y$. L'invariance de $K_1^{\otimes n}$ et de Y par l'action transitive de $\mathcal{G}$ implique que g est constante et qu'il existe donc $\mu \in \mathbf{C}^*$ tel que $K_1^{\otimes n} = \mu Y$ sur U. La contradiction recherchée vient du fait que Y s'annule sur S, tandis que le champ de Killing K_1 est non identiquement nul sur $U \cap S$ (car nous avons vu que la restriction à S est un isomorphisme). En fait, en tant que champ de Killing q-isotrope en dimension 3, le champ de vecteurs K_1 est même non singulier [8] (lemme 6.7).

5.2. Isotropie semi-simple

Il reste à régler les cas où l'isotropie est semi-simple et de dimension 1. Plaçons-nous dans le dernier cas à régler où *en dehors de O, il n'existe dans l'image de $\varphi^{(s)}$ que des orbites de dimension* 2 *et dont le stabilisateur contient un sous-groupe à un paramètre semi-simple.*

Nous étudions une composante connexe de S (que l'on note encore S) où le s-jet de φ est dans une orbite O_1 de dimension 2 et dont le stabilisateur contient un sous-groupe à un paramètre semi-simple. Ce stabilisateur fournit en chaque point u de S un champ de Killing s'annulant en u et dont la différentielle fixe un unique vecteur q-unitaire de T_uS. Il existe alors sur S un champ de vecteurs tangent X de q-norme constante égale à 1 préservé par la restriction à S de tout élément de $\mathcal{G}$.

La métrique riemannienne holomorphe q est nécessairement dégénérée sur S car sinon il existe sur S un deuxième champ de vecteurs H défini par les relations $q(X,H) = 0$ et $q(H) = 1$. Le champ H est bien défini seulement à signe près, car sur la droite orthogonale à X il existe deux vecteurs (opposés) q-unitaires. Faisons un choix local et optons pour l'un de ces vecteurs au voisinage d'un point u de S : ceci permet de définir un champ H préservé par l'action de $\mathcal{G}$.

L'orthogonal (par rapport à q) de l'espace tangent à S est engendré par un unique champ de vecteurs Z de norme 1 tel que $vol(X, H, Z) = 1$. Les champs H et Z sont donc également préservés par l'action au voisinage du point u de la restriction de $\mathcal{G}$ à S. On conclut alors qu'au voisinage d'un point de S l'action de $\mathcal{G}$ fixe chaque feuille du feuilletage obtenu en poussant S par le flot géodésique de Z : ceci implique que $\mathcal{G}$ n'agit pas transitivement sur $M \setminus S$, ce qui est absurde.

Il reste à analyser le cas où q est dégénérée en restriction à S. Le noyau de q définit alors en restriction à S un feuilletage en droites non singulier transverse au champ de vecteurs X. Nous sommes à nouveau en présence d'un feuilletage holomorphe transversalement riemannien. En effet, désignons par ω la 1-forme différentielle holomorphe sur S qui vaut 1 sur le champ de vecteurs X et dont le noyau coïncide avec celui de q. Il vient que $\omega^2 = q$ et que ω est fermée ; nous venons d'utiliser un résultat classique qui affirme que sur les surfaces complexes compactes, les 1-formes différentielles holomorphes sont nécessairement fermées (pour une preuve de ce fait le lecteur pourra consulter, par exemple, la référence [6]). Par conséquent, le noyau de ω définit bien un feuilletage transversalement riemannien $\mathcal{F}$ et S est nécessairement totalement géodésique [27]. Il résulte, en utilisant la classification des surfaces possèdant une connexion linéaire holomorphe [23] que S ne peut être qu'un tore complexe ou une surface de Hopf. Néanmoins le raisonnement local suivant n'utilise pas la structure analytique globale de S.

Proposition 5.7. — *Il existe un champ de vecteurs holomorphe $\tilde{Y}$ tel que $Y = \tilde{Y}^{\otimes n}$. De plus, le 1-jet de $\tilde{Y}$ en un point de S est non trivial.*

Démonstration. — Analysons l'action de l'algèbre de Lie des champs de Killing de φ au voisinage d'un point u dans S. Dans un voisinage (suffisamment petit) U de u dans S, il existe un champ de vecteurs holomorphe tangent H qui est q-isotrope et non singulier dans U. En chaque point de U il existe alors un unique vecteur Z (transverse à U) uniquement déterminé par les relations $q(Z) = 0, q(X, Z) = 0$ et $q(H, Z) = 1$. Le flot géodésique de Z permet de définir un feuilletage au voisinage de U dont les feuilles sont $exp_U(tZ)$, à t fixé.

Rappelons qu'un 1-jet de biholomorphisme local qui relie deux points de S se prolonge en une isométrie locale si et seulement si sa différentielle préserve X. Le 1-jet d'application qui envoie u sur un point $u' \in U$ et dont la différentielle est triviale dans les repères $(X(u), H(u), Z(u))$ et

$(X(u'), H(u'), Z(u'))$ se prolonge donc de manière unique en une isométrie locale de $\varphi = (q, Y)$ qui envoie le temps t de la géodésique issue de u dans la direction $Z(u)$ sur le temps t de la géodésique issue de u' dans la direction $Z(u')$. Le pseudo-groupe des isométries locales de φ agit donc transitivement sur chaque feuille $exp_U(tZ)$ du feuilletage. Plus précisément, u étant fixé, quelque soit $u' \in U$ il existe une unique isométrie locale $i_{u'}$ (qui dépend de manière holomorphe de u') qui relie u et u' et qui envoie la géodésique $exp_u(tZ(u))$ sur la géodésique $exp_{u'}(tZ(u'))$ en respectant le paramétrage.

Le tenseur Y est entièrement déterminé si l'on connaît sa restriction à la géodésique issue de u dans la direction du vecteur $Z(u)$ (en effet, on obtient alors la restriction de Y à la géodésique $exp_{u'}(tZ(u'))$ en transportant avec $i_{u'}$).

Pour préciser ceci considérons sur un voisinage ouvert de u dans U, un système de coordonnées locales w, centré en u. Un voisinage ouvert de u dans M sera alors paramétré à l'aide du flot géodésique de Z par les coordonnées (w, t). Désignons par Y' la restriction de Y à la géodésique issue de u dans la direction Z. Il vient que $Y'(t) = Y(0, t) = f(t)(\bar{Y}(t))^{\otimes n}$, où f est une fonction holomorphe à une variable définie sur un voisinage de 0 et qui admet un zéro isolé en 0 et $\bar{Y}(t)$ est un vecteur non nul et q-isotrope de $T_{(0,t)}M$ (cette écriture n'est pas unique). Si i_w est l'unique isométrie locale qui relie 0 à w et qui envoie la géodésique $exp_0(tZ(0))$ sur la géodésique $exp_w(tZ(w))$ en respectant le paramétrage, alors $Y(w, t) = f(t)(di_w \cdot \bar{Y}(t))^{\otimes n}$.

Si μt^l, avec μ nombre complexe non nul et l entier strictement positif, est le premier jet non nul de f en 0, alors le premier jet non nul de Y' à l'origine (qui s'interprète comme un polynôme homogène défini sur la droite $Z(u)$ et à valeurs dans l'espace vectoriel $T_uM^{\otimes n}$) est de la forme $\mu t^l \bar{Y}(0)^{\otimes n} = \mu t^l (aX(0) + bH(0) + cZ(0))^{\otimes n}$, avec a, b, c des nombres complexes dont au moins un est non nul. Nous démontrons que l'invariance de cette expression par le flot du champ de Killing semi-simple K qui fixe u (flot qui stabilise la géodésique issue de u dans la direction $Z(u)$ sans préserver le paramétrage et fixe $X(u)$) implique que le premier jet non nul de f à l'origine est de la forme μt^n, avec μ nombre complexe non nul et $a = b = 0$.

En effet, l'action de la différentielle en u du temps T de ce flot est

$$T \cdot (X(0), H(0), Z(0)) = (X(0), T^2 H(0), T^{-2} Z(0)),$$

tandis que l'action sur le l-jet de f est $T \cdot \mu t^l = T^{2l} \mu t^l$. Le l-jet de Y' se décompose en une somme dont les termes sont de la forme $\mu t^l a^p b^q c^r X(0)^p \otimes H(0)^q \otimes Z(0)^r$, où p, q, r sont des entiers positifs dont la somme vaut n.

Comme l'action linéaire du temps T du flot de K sur $(T_0M)^{\otimes n}$ est diagonalisable dans la base $X(0)^p \otimes H(0)^q \otimes Z(0)^r$, et la valeur propre associée à ce vecteur propre est $T^{2(q-r)}$, l'invariance du l-jet de Y' par l'action du flot de K implique que tous les termes de la forme $X(0)^p \otimes H(0)^q \otimes Z(0)^r$ avec $p + q + r = n$ qui ont un coéfficient non nul doivent être associés à la même valeur propre. Comme $\bar{Y}(0)$ est $q(0)$-isotrope, ceci montre que la seule possibilité est $a = b = 0$ et $l = n$.

Ceci implique qu'au voisinage du point u il existe un champ de vecteurs holomorphe $\tilde{Y}$ tel que $Y = (\tilde{Y})^{\otimes n}$. En effet, on peut prendre $\tilde{Y}(w,t) = l(t)tdi_w\bar{Y}(t)$, où l(t) est une "racine n-ème" de $\frac{f(t)}{t^n}$ dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$.

Cette propriété étant vraie au voisinage de chaque point de S nous avons que (eventuellement sur un revêtement fini non ramifié de M) le tenseur Y est la puissance n-ème d'un champ de vecteurs.

Considérons $\tilde{Y}'$ la restriction du champ $\tilde{Y}$ à la géodésique issue de u dans la direction $Z(u)$, prenons le premier jet non trivial de $\tilde{Y}'$ en 0 et exprimons l'invariance de ce jet par le flot du champ de Killing K. Nous sommes dans la même situation que précédemment et dans le cas particulier $n = 1$. Le calcul du point i) implique alors que le premier l-jet non trivial de $\tilde{Y}'$ à l'origine correspond à $l = 1$. En particulier, le premier jet de $\tilde{Y}$ en u est non trivial. Comme $\mathcal{G}$ agit transitivement sur S en préservant Y ceci est vrai pour tous les points de S. □

Nous donnons maintenant un renseignement plus précis sur le 1-jet de $\tilde{Y}$ en un point de S avec le lemme local suivant :

Lemme 5.8. — *Considérons un voisinage ouvert U de l'origine dans $\mathbf{C}^3$ muni d'une métrique riemannienne holomorphe q.*

Soit $\tilde{Y}$ un champ de vecteurs holomorphe non identiquement nul q-isotrope qui s'annule à l'origine. Supposons qu'il existe un champ (de Killing) holomorphe K dans U qui s'annule à l'origine, dont le flot local préserve à la fois q et $\tilde{Y}$ et dont la différentielle à l'origine stabilise un vecteur non isotrope de $T_0\mathbf{C}^3$. Alors le premier jet de $\tilde{Y}$ à l'origine est de la forme $\nu z\frac{\partial}{\partial z}$, $\nu \in \mathbf{C}$.

Remarque : rappelons encore une fois que la condition d'invariance par la différentielle à l'origine d'un champ de vecteurs non isotrope est une condition algébrique qui porte sur la partie linéaire du champ de Killing K à l'origine. Il est équivalent de dire que cette partie linéaire est semi-simple.

Démonstration. — Le flot du champ K fixe un vecteur $\frac{\partial}{\partial x}$ de q-norme égale à 1 dans $T_0\mathbf{C}^3$. Considérons une base $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ de l'espace tangent à l'origine avec la propriété que $\frac{\partial}{\partial x}$ est un vecteur de q-norme égale à 1, tandis que les vecteurs $\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ sont q-isotropes, q-orthogonaux à $\frac{\partial}{\partial x}$ et $q(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = 1$.

Dans les coordonées exponentielles fixées par le choix de la base précédente de l'espace tangent à l'origine le champ de Killing K est linéaire et le temps T de son flot est donné par la transformation linéaire : $T \cdot (x, y, z) = (x, T^{-2}y, T^2 z)$.

Un calcul simple donne la forme des champs de vecteurs holomorphes s'annulant à l'origine et invariants par ce flot :
$\tilde{Y} = f(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + g(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + h(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}$ est invariant par le flot de K si et seulement si $f = F(x, yz), g = yG(x, yz)$ et $h = zH(x, yz)$, où F, G et H sont des fonctions holomorphes à deux variables s'annulant à l'origine.

On en déduit les seuls 1-jets possibles pour des champs de vecteurs s'annulant à l'origine et invariants par le flot de K : un tel 1-jet est nécessairement de la forme $Y^1 = \lambda x\frac{\partial}{\partial x} + \mu y\frac{\partial}{\partial y} + \nu z\frac{\partial}{\partial z}$, avec λ, μ, ν, des nombres complexes eventuellement nuls.

Il s'agit maintenant d'exploiter le fait que $\tilde{Y}$ est q-isotrope. Dans les coordonnées exponentielles considérées le 1-jet à l'origine de la métrique riemannienne holomorphe q vaut $q_0 = dx^2 + dydz$. Ceci permet d'en déduire le 2-jet à l'origine de la fonction $q(Y)$: il s'agit de $q_0(Y^1) = 2\mu\nu yz + \lambda^2 x^2$. Comme la fonction $q(Y)$ est identiquement nulle, ce 2-jet doit être trivial et donc Y^1 est de la forme $\nu z\frac{\partial}{\partial z}$ (ou bien de la forme $\mu y\frac{\partial}{\partial y}$ ce qui revient au même) . □

Remarque : dans notre situation on applique le lemme précédent au voisinage d'un point u de S et pour une base $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = (X(u), H(u), Z(u))$ de l'espace tangent en u. Comme $\tilde{Y}$ s'annule sur S et $T_u S$ est l'espace vectoriel engendré par $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, il vient que le 1-jet de $\tilde{Y}$ en u est de la forme $\nu z\frac{\partial}{\partial z}$, avec ν non nul.

Le lemme précédent et la proposition 5.7 impliquent que dans notre situation le 1-jet de $\tilde{Y}$ est non nul, de la forme $\nu z\frac{\partial}{\partial z}$, avec ν nombre complexe non nul. La trace de l'opérateur $\nabla.\tilde{Y}$, vu comme section de $End(TM)$, est une fonction holomorphe constante sur M qui vaut ν en les points de S. Cette fonction est donc une constante non nulle ν. Rappelons que la trace de $\nabla.\tilde{Y}$ coïncide avec la divergence du champ de vecteurs $\tilde{Y}$ par rapport à la forme volume vol de q. Autrement dit, $L_{\tilde{Y}}vol = \nu vol$, où $L_{\tilde{Y}}vol$ est la dérivée de Lie de la forme volume par rapport au champ $\tilde{Y}$. Le fait que ν soit non nulle est en contradiction avec le fait bien connu qu'un champ de vecteurs holomorphe sur une variété compacte doit préserver les formes volumes holomorphes. La preuve de cette propriété fait l'objet de la proposition suivante qui achève la démonstration de ce dernier cas.

PROPOSITION 5.9. — *Le flot de $\tilde{Y}$ préserve la forme volume de q.*

Démonstration. — Désignons par ψ^t le temps t du flot de $\tilde{Y}$ et remarquons que le fibré canonique de M étant trivial, pour chaque temps t il existe une constante $c(t) \in \mathbf{C}$ tel que $(\psi^t)^* vol = c(t) vol$. Comme le volume réel de M, donné par l'intégrale de la forme réelle $vol \wedge \bar{vol}$, doit être préservé par l'action du flot, on a que la valeur absolue du nombre complexe $c(t)$ vaut 1 pour tout t. La fonction $t \to c(t)$ est alors une fonction entière à valeurs dans le cercle unité et par le théorème de Liouville elle est nécessairement constante, égale donc à $c(0) = 1$. Ceci montre que le flot de $\tilde{Y}$ préserve la forme volume et par conséquent la divergence de $\tilde{Y}$ est nulle. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. M. AMORES, « Vector fields of a finite type G-structure », *J. Differential Geom.* **14** (1979), n° 1, p. 1-6.

[2] W. BARTH, C. PETERS & A. VAN DE VEN, *Compact complex surfaces*, Springer-Verlag, 1984.

[3] F. BELGUN, « Null-geodesics in complex conformal manifolds and the LeBrun correspondence », *J. Reine Angew. Math.* **536** (2001), p. 43-63.

[4] Y. BENOIST, « Orbites des structures rigides (d'après M. Gromov) », in *Integrable systems and foliations. Feuilletages et systèmes intégrables. Papers from a colloquium, Montpellier, France, May 22–26, 1995* (Boston), Prog. Math., vol. 145, Birkhäuser, 1997, p. 1-17.

[5] F. BOSIO, « Actions holomorphes et localement libres de groupes de Lie abéliens », Thèse, École Norm. Sup. de Lyon, 1996.

[6] M. BRUNELLA, « On holomorphic forms on compact complex threefolds », *Comment. Math. Helv.* **74** (1999), n° 4, p. 642-656.

[7] G. D'AMBRA & M. GROMOV, « Lectures on transformations groups : geometry and dynamics », *J. Differential Geom. Suppl.* **1** (1991), p. 19-111.

[8] S. DUMITRESCU, « Métriques riemanniennes holomorphes en petite dimension », *Ann. Institut Fourier* **51** (2001), n° 6, p. 1663-1690.

[9] ———, « Structures géométriques holomorphes sur les variétés complexes compactes », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **34** (2001), n° 4, p. 557-571.

[10] E. GHYS, « Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $SL(2, \mathbf{C})$ », *J. Reine Angew. Math.* **468** (1995), p. 113-138.

[11] M. GROMOV, « Rigid transformation groups », in *Géométrie Différentielle*, Travaux en cours, vol. 33, Hermann, Paris, 1988, p. 65-141.

[12] J. HUMPHREYS, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 21, Springer-Verlag, 1975.

[13] J. M. Hwang & N. Mok, « Uniruled projective manifolds with irreducible reductive G-structure », *J. Reine Angew. Math.* **490** (1997), p. 55-64.

[14] M. Inoue, S. Kobayashi & T. Ochiai, « Holomorphic affine connections on compact complex surfaces », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **27** (1980), n° 2, p. 247-264.

[15] C. Lebrun, « Spaces of complex null geodesics in complex-Riemannian geometry », *Trans. Amer. Math. Soc.* **278** (1983), p. 209-231.

[16] J. Milnor, « Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups », *Advances in Math.* **21** (1976), p. 293-329.

[17] P. Molino, *Riemannian Foliations*, Birkhäuser, 1988.

[18] D. Mumford, *Introduction to algebraic geometry*, Harvard University, 1966.

[19] K. Nomizu, « On local and global existence of Killing vector fields », *Ann. Math.* **72** (1960), n° 2, p. 105-120.

[20] I. Singer, « Infinitesimally homogeneous spaces », *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (1960), p. 685-697.

[21] K. Ueno, « On compact analytic threefolds with non-trivial Albanese tori », *Math. Ann.* **278** (1987), p. 41-70.

[22] A. Vitter, « Affine structures on compact complex manifolds », *Inventiones math.* **17** (1972), p. 231-244.

[23] C. Wall, « Geometric structures on compact complex analytic surfaces », *Topology* **25** (1986), n° 2, p. 119-153.

[24] H. C. Wang, « Complexe parallelisable manifolds », *Proc. Amer. Math. Soc.* **5** (1954), p. 771-776.

[25] J. Wolf, *Spaces of constant curvature*, Series in Higher Math., McGraw-Hill, 1967.

[26] A. Zeghib, « Killing fields in compact Lorentz 3-manifolds », *J. Differential Geom.* **43** (1996), p. 859-894.

[27] ———, « Geodesic foliations in Lorentz 3-manifolds », *Comment. Math. Helv.* **74** (1999), p. 1-21.

Manuscrit reçu le 30 mars 2006,
accepté le 20 juin 2006.

Sorin DUMITRESCU
Université Paris-Sud (11)
Département de Mathématiques d'Orsay
Équipe de Topologie et Dynamique, Bat. 425
U.M.R. 8628 C.N.R.S.
91405 Orsay Cedex (France)
Sorin.Dumitrescu@math.u-psud.fr