

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PAUL KRÉE

**Remarques relatives à certains ensembles
convexes plans liés à des espaces L^p**

Annales de l'institut Fourier, tome 15, n° 2 (1965), p. 313-323

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_313_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_313_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REMARQUES RELATIVES A CERTAINS ENSEMBLES CONVEXES PLANS LIÉS A DES ESPACES L^p

par Paul KRÉE

Introduction.

On se donne un espace X avec une mesure μ positive et une fonction numérique $\varpi: X \rightarrow \mathbf{R}$, strictement positive μ p.p. (presque partout relativement à la mesure μ), (P) désigne un plan réel: les coordonnées du point courant m de ce plan sont notées $\left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$, les axes sont rectangulaires.

(D) désigne le demi plan droit où $\frac{1}{p} \geq 0$;

(B) désigne la bande verticale où $0 \leq \frac{1}{p} \leq 1$.

A toute fonction mesurable $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, on associe la partie D_f du demi plan (D) formée par les points $m\left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$ tels que $f\varpi^\alpha$ soit de puissance $p^{\text{ème}}$ sommable soit

$$(1) \quad \|f\|_{p, \alpha p}^p = \int_{x \in X} |f(x)\varpi(x)|^p d\mu(x) < \infty$$

D_f est toujours un ensemble convexe.

En effet :

— Si $m_0\left(\frac{1}{p_0}, \alpha_0\right)$ et $m_1\left(\frac{1}{p_1}, \alpha_1\right)$ sont dans (B) et si $\theta \in [0, 1]$

on pose

$$(2) \quad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

$$(3) \quad \alpha_\theta = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$$

et l'on écrit

$$(4) \quad \|f\|_{p_\theta, \alpha_\theta p_\theta} = \|f\varpi^{\alpha_\theta}\|_{p_\theta} = \underbrace{\|f^{1-\theta}\varpi^{(1-\theta)\alpha_0}\|_{p_0}}_{\|f\|_{p_0, \alpha_0 p_0}} \underbrace{\|f^\theta\varpi^{\theta\alpha_1}\|_{p_1}}_{\|f\|_{p_1, \alpha_1 p_1}}$$

et on majore le dernier membre en utilisant l'inégalité de Hölder.

— Si m_0 et m_1 sont quelconques dans (D), on se ramène au cas précédent en utilisant 1A5 pour amener par la transformation (10) le segment $m_0 m_1$ dans la bande (B).

Mais réciproquement, si l'on se donne un convexe du demi plan (D), ainsi que X et ϖ , existe-t-il une $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ qui admette ce convexe comme domaine D_f ? Nous donnerons une réponse à cette question dans le cas où :

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} X = \text{la demi droite } [1, +\infty[\\ d\mu(x) = \frac{dx}{x} \\ \varpi(x) = x \end{array} \right.$$

Et la réponse ne sera partielle en ce sens que l'on ne caractérisera que l'intérieur de D_f .

Ensuite nous en déduirons la réponse dans d'autres cas.

1. Examen du cas (5).

On peut se limiter à des fonctions f positives. On étudie d'abord l'application $f \rightarrow D_f$ (§ 1.A). Puis on aborde la recherche d'une f ayant un D_f donné. On traite d'abord le cas où D_f est l'intersection du demi plan (D) avec un demi plan ouvert en donnant deux précisions supplémentaires (relatives au support de f et à $\|f\|_{p, \alpha p}$). Puis on traite le cas général, en utilisant la propriété 1.A.3 et le fait que tout convexe permis est à sa frontière près, une intersection dénombrable de demi plans.

1.A. Propriétés de l'application $f \rightarrow D_f$.

1.A.1. Elle est décroissante

$$(6) \quad 0 \leq f \leq f' \implies D_{f'} \supseteq D_f.$$

1.A.2. L'inégalité (où a et b sont des nombres positifs)

$$|a + b|^p \leq |2a|^p + |2b|^p$$

montre que :

$$(7) \quad D_f \cap D_{f'} \subseteq D_{f+f'}.$$

1.A.3. Si $\inf(f, f') = 0$
on a :

$$(8) \quad \|f\|_{p, \alpha p}^p + \|f'\|_{p, \alpha p}^p = \|f + f'\|_{p, \alpha p}^p$$

d'où

$$(9) \quad D_f \cap D_{f'} = D_{f+f'}.$$

Mais si l'on considère une famille non finie (f_i) de fonctions à supports disjoints on peut seulement affirmer que :

$$(9 \text{ bis}) \quad D_{\sum f_i} \subseteq \bigcap_i D_{f_i}.$$

1.A.4. D_f ne change pas si f subit les modifications suivantes :

- a) translation sur la variable : $f(\cdot) \rightarrow f(\cdot + C)$;
- b) homothétie sur f ou sur x ;
- c) addition d'une fonction bornée à support compact.

1.A.5. Si f est élevée à une puissance β positive, D_f subit une homothétie de rapport β .

$$(10) \quad D_{f^\beta} = \beta D_f.$$

1.A.6. Remplaçons f par

$$g = f\varpi^\beta \quad \beta \text{ réel.}$$

Alors

$$(11) \quad \|g\|_{p, \alpha p}^p = \|f\|_{p, (\alpha + \beta)p}^p.$$

Donc D_g se déduit de D_f par une translation $-\beta$ suivant la direction $O\alpha$.

1.A.7. Remplaçons $d\mu(x)$ par $\varpi^\beta(x) d\mu(x)$. Alors on voit que D_f subit la transformation affine :

$$\left(\frac{1}{p}, \alpha\right) \rightarrow \left(\frac{1}{p}, \alpha - \frac{\beta}{p}\right).$$

1.A.8. De même, posant :

$$g(x) = f(x^\beta) \quad \text{avec} \quad \beta > 0$$

on voit que D_g se déduit de D_f par une affinité ayant pour axe, l'axe $\frac{1}{p}$, de rapport β , suivant l'axe $O\alpha$.

1.A.9. On a dans notre cas particulier

$$(12) \quad \varpi(x) = x \geq 1.$$

Alors si

$$(13) \quad m_0\left(\frac{1}{p_0}, \alpha_0\right) \quad \text{est dans } D_f$$

on a encore

$$(14) \quad \left(\frac{1}{p_0}, \alpha\right) \quad \text{dans } D_f \text{ si } \alpha < \alpha_0.$$

1.A.10. On a dans notre cas particulier

$$(15) \quad \int_1^\infty \varpi(x)^{\alpha p} \frac{dx}{x} < \infty \quad \text{si } \alpha < 0.$$

Alors si D_f contient $m_0\left(\frac{1}{p_0}, \alpha_0\right)$, l'adhérence $\overline{D}_f$ de D_f contient aussi les points $\left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$ de (D) avec $\alpha < \alpha_0$ et $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{p_0}$.

Preuve. — Avec 1.A.6 on peut supposer $\alpha_0 = 0$. Puis avec 1.A.5 on peut se limiter à $\frac{1}{p} \leq 1$. Cela résulte alors de l'inégalité de Hölder

$$(16) \quad \int_1^\infty f(x) x^\alpha \frac{dx}{x} \leq \left(\int_1^\infty f^p(x) \frac{dx}{x} \right)^{1/p} \left(\int_1^\infty x^{\alpha p'} \frac{dx}{x} \right)^{1/p'}$$

avec

$$(17) \quad 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}.$$

Remarque. — Notons que si $(f_k)_k$ est une suite de fonctions tendant μ p. p. vers f , cela n'entraîne pas que D_{f_k} « tende » vers D_f : considérer par exemple f localement bornée et la suite f_k :

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.B. *Un lemme.*

On cherche maintenant une f telle que D_f soit l'intersection de (D) avec un demi plan ouvert et l'on donne des précisions sur f que nous utiliserons plus tard.

LEMME. — On se donne une droite (d) du plan (P) d'équation

$$(18) \quad \alpha = \frac{A}{p} + B \quad \text{avec } A \geq 0.$$

1) Il existe une $f: X \rightarrow \mathbf{R}^+$, telle que D_f soit l'intersection de (D) avec le demi plan ouvert situé sous (d).

2) Quel que soit l'entier positif n , et une succession de segments de X de longueur 1, dont les extrémités gauches (ou droites!!) forment une progression arithmétique de raison 2^n , il existe une fonction f à support dans cette succession et ayant les propriétés du 1).

3) Quel que soit $\lambda \geq 1$, il existe une $\tilde{f}$ satisfaisant aux conditions du 2) et en plus à celle-ci: pour tout point $\left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$ de $D_{\tilde{f}}$ on a:

$$(19) \quad \|\tilde{f}\|_{p, \alpha p}^p \leq \frac{2 + 2^n}{\lambda \left(A - \frac{\alpha - B}{1/p}\right)}.$$

Preuve. — Avec la propriété 1.A.6. et la relation (11), on voit qu'on peut supposer $B = 0$.

On se fixe (pour l'instant de façon arbitraire) deux nombres

$$\lambda \geq 1 \quad \text{et} \quad \mu \leq 0$$

k étant un entier ≥ 1 , I_k désigne l'intervalle $[k^\lambda, k^\lambda + k^\mu]$.

On considère f , fonction caractéristique de la réunion des I_k .

$$\|f\|_{p, \alpha p}^p = \sum_{k \geq 1} \int_{k^\lambda}^{k^\lambda + k^\mu} \frac{x^{\alpha p}}{x} dx \sim \sum_{k \geq 1} k^\nu$$

avec

$$\nu = \mu + (\alpha p - 1)\lambda$$

(la formule des accroissements finis montre que le terme négligé est majoré par $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\nu-1}$). $\|f\|_{p, \alpha p}^p$ est donc fini si et seulement si:

$$(21) \quad \alpha < \frac{1}{p} \frac{\lambda - \mu - 1}{\lambda}.$$

On voit alors que: quel que soit $A \geq 0$, quel que soit $\lambda \geq 1$ (arbitrairement grand par exemple), on peut choisir μ de façon que

$$\frac{\lambda - \mu - 1}{\lambda} = A.$$

2) Je modifie un peu f en $\tilde{f}$ de la façon suivante. $\tilde{f}$ est la fonction caractéristique de la réunion des intervalles $\tilde{I}_k \cdot \tilde{I}_k$

est un intervalle égal à I_k , et il est déduit de I_k en le déplaçant de 2^n au plus, de façon à l'amener dans un segment de la succession donnée.

La formule des accroissements finis montre encore que :

$$||f||_{p, \alpha p}^p - ||\tilde{f}||_{p, \alpha p}^p \quad \text{est majoré par} \quad 2^n \sum_{k \geq 1} k^{p-1}.$$

3) Le point $\left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$ étant situé en dessous de (d) , on a :

$$\begin{aligned} ||f||_{p, \alpha p}^p &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^p + \sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1} + 2^n \sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1} \leq (2 + 2^n) \int_1^{\infty} x^p dx \\ &\leq - \frac{2 + 2^n}{\mu + \lambda \alpha p - \lambda + 1} = \frac{2 + 2^n}{\lambda \left(A - \frac{\alpha}{1/p} \right)}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors en déduire la :

1.C. Caractérisation de l'intérieur de D_f .

PROPOSITION. — *Dans le cas particulier (5), quel que soit le convexe (O) de (P), ouvert dans (P), stable par toute translation à droite et vers le bas, soit*

$$\left(\frac{1}{p_0}, \alpha_0\right) \text{ dans } (O) \Rightarrow \left(\frac{1}{p}, \alpha\right) \text{ dans } (O) \text{ si } \begin{cases} \alpha \leq \alpha_0 \\ \text{et } \frac{1}{p} \geq \frac{1}{p_0} \end{cases}$$

alors il existe une fonction $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, telle que (O) soit l'intérieur de D_f .

Preuve. — a) Si (O) est tout le demi plan (P) on prend $f = 0$.

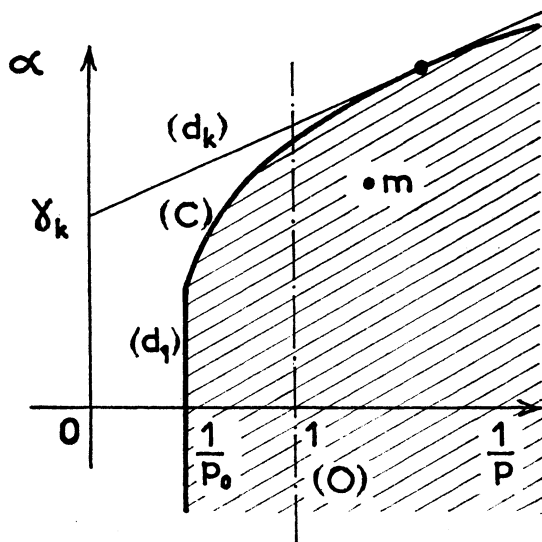
b) Sinon, (O) est limité au-dessus par un arc de courbe (C) et éventuellement (c'est le cas de la figure) à gauche par une demi droite portée par une verticale (d) où $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} > 0$.

Considérant une famille dénombrable de points dense sur (C) et la famille dénombrable $(d_n)_{n \geq 2}$ des droites qui portent les $1/2$ tangentes à (C) en ces points, (O) apparaît, à quelques points frontières près, comme l'intersection des demi plans situés à droite de (d_1) , et sous les droites $(d_n)_{n \geq 2}$.

On cherche alors à appliquer (9 bis) en prenant

$$(22) \quad f = f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} f_n$$

les fonctions $(f_n)_{n \geq 2}$ étant celles du lemme. Il faut d'abord fabriquer une suite infinie de successions infinies et disjointes d'intervalles équidistants de longueur 1.



Il suffit de prendre la partition suivante de X en segments de longueur 1 :

— la succession de pas 2^1 des intervalles $[1, 2[$, $[3, 4[$, $[5, 6[$, $[7, 8[$...

— la succession de pas 2^2 des intervalles $[2, 3[$, $[6, 7[$, $[10, 11[$...

— la succession de pas 2^3 des intervalles $[4, 5[$, $[12, 13[$, $[20, 21[$...

On prend alors $f_n (n \geq 2)$ à support dans la $n^{\text{ième}}$ succession définie par le lemme, (λ est indéterminé pour l'instant) et dont le domaine est limité au-dessus par la droite d_n .

f_1 a une définition particulière qui dépend de la présence éventuelle de (d_1) sur le bord de (O) :

si (d_1) existe on prend

$$f_1(x) = \begin{cases} e^n & \text{si } 2n - 1 \leq x \leq 2n - 1 + e^{-np_0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sinon

$$f_1(x) = 0.$$

Montrons à présent qu'en prenant $\lambda_n = 2^{2^n}$ par exemple, on a dans (9 bis) l'égalité des 2 membres.

Il suffit de montrer pour cela, que pour tout $m\left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$ dans (O) on a :

$$(23) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \|\tilde{f}_n\|_{p, \alpha p} < \infty.$$

Cela résulte de la majoration (20) et du fait que pour m fixé et (d_n) variable, la parenthèse du dénominateur de (19) est uniformément minorée (ça se voit par exemple en l'interprétant géométriquement comme la différence des pentes des droites (d_k) et $\gamma_k m$, γ_k étant défini comme étant l'intersection de (d_k) avec $O\alpha$.

Remarque. — Pour faire converger la série (23) on pourrait aussi garder λ constant et remplacer les f_n par $2^{-2^n} f_n$ ce qui a pour effet de diminuer les nombres $\|f_n\|$ sans modifier D_{f_n} , mais cela ne permet pas de se passer de la majoration (19).

1.D Remarques à propos de la frontière de D_f .

Si l'on considère au lieu de la fonction f définie par (20)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\log x)^t} & \text{si } x \text{ appartient à un des intervalles } I_k. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

on a pour cette fonction

$$\|f\|_{p, \alpha p}^p = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k^\lambda}^{k^\lambda + k^\mu} \frac{x^{\alpha p - 1} dx}{(\log x)^{tp}} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\mu + (\alpha p - 1)}}{(\log k)^{tp}}$$

Cette série converge :

- ou bien si $\mu + (\alpha p - 1)\lambda < -1$;
- ou bien si $\mu + (\alpha p - 1)\lambda = -1$ et $l_p > 1$.

Ce qui signifie que f a pour domaine D_f l'intersection de (D) avec la réunion :

- d'un demi plan ouvert;
- d'une demi droite située sur le bord de ce demi plan.

On pourrait utiliser de telles fonctions pour construire des f admettant des D_f fermés.

2. Extensions à d'autres cas.

Nous nous limiterons à quelques observations.

2.A. Les propriétés 1.A.1 à 1.A.7 sont générales. Les propriétés 1.A.9 et 1.A.10 résultent des hypothèses (12) et (13). On voit de même que si $\varpi(x) \leq 1$ alors D_f est stable par toute translation vers le haut.

2.B. Dans le cas d'un espace X localement compact et d'un poids ϖ continu, on « voit » que ce qui importe, c'est le comportement de ϖ à l'infini et au voisinage des points où il s'annule. Ainsi si l'on fait une partition finie de X

$$X = \bigcup_{i=1}^n X_i$$

telle que l'intérieur de chaque X_i contient un ensemble de zéros de ϖ ou le voisinage de l'infini, en posant

$$f_i = \begin{cases} f & \text{sur } X_i \\ 0 & \text{sur } X - X_i \end{cases}$$

on a avec 1.A.3.

$$D_f = \bigcap_{i=1}^n D_{f_i}$$

et l'on est ramené à des cas plus simples.

Exemple 1.

$$\left| \begin{array}{l} X = \mathbf{R}^+ \\ d\mu(x) = \frac{dx}{x} \\ \varpi(x) = x. \end{array} \right.$$

Soit $X_1 = [1, +\infty[$ et $X_2 = [0, 1[$

D_{f_1} a été étudié et caractérisé, à sa frontière près) au § 1.

L'étude analogue pour D_{f_2} s'en déduit facilement car en faisant le changement de variable :

$$x = \frac{1}{u}.$$

Posant : $g_2(u) = f_2\left(\frac{1}{u}\right)$

g est une fonction définie sur X_1 et D_f est le symétrique par rapport au 1^{er} axe de D_{g_2} .

D'où une caractérisation des D_f (à leurs frontières près) dans ce cas. Ce sont des intersections :

— D'un convexe de (D) stable par translations à droite ou vers le bas;

— D'un convexe de (D) stable par translation à droite vers le haut.

Ce sont donc tous les convexes de (D) stables par translation à droite.

Exemple 2.

Transposition évidente de ces constatations pour

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \mathbf{R}^n \\ d\mu(x) = \frac{dx}{|x|^n} \\ \varpi(x) = |x| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}. \end{array} \right.$$

Avec 1.A.7, on a également la réponse si l'on remplace ci-dessus

$$\frac{dx}{|x|^n} \quad \text{par} \quad dx.$$

2.C. Dans le cas de :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \mathbf{Z}^+ = \{1, 2, \dots, n, \dots\} \\ u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{n} \\ \varpi(n) = n. \end{array} \right.$$

On voit que les raisonnements du § 1 se transposent de la façon suivante.

On constate d'abord que D_f est stable par toute translation suivant la direction de la bissectrice du 3^e angle formé par les axes; cela résulte de 1.A.5, 1.A.6 et de :

$$\|f\|_{1,1} = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|n \cdot \frac{1}{n} < \infty \implies f(n) \rightarrow 0 \implies \|f\|_{\infty,0} < \infty.$$

Le lemme du § 1 B se transpose mais il faut supposer en plus :

$$0 \leq A \leq 1$$

(d'ailleurs dans sa démonstration on remplace (20) par :

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un entier } k \text{ avec } n = [k^\lambda] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui « revient » à faire $\mu = 0$ dans (20).

λ n'étant plus arbitraire on a toujours (19) : on transpose alors le § 1.C en utilisant la remarque terminant ce paragraphe. Et l'on obtient que tout convexe de (D) stable par toute translation de direction celles du 1^{er} axe ou de la 3^e bissectrice est (à sa frontière près peut-être), un domaine D_f et réciproquement.

Manuscrit reçu le 8 décembre 1964.

Paul KRÉE,
Service de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Parc Valrose,
Nice (A.-M.).