ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALBERT PFLUGER

Quasikonforme Abbildungen und logarithmische Kapazität

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 69-80

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__69_0>

QUASIKONFORME ABBILDUNGEN UND LOGARITHMISCHE KAPAZITÄT

von **Albert PFLUGER** (Zürich).

Die Eigenschaft einer abgeschlossenen ebenen Punktmenge, dass ihre logarithmische Kapazität verschwindet, ist bekanntlich gegenüber konformen Abbildungen des Aussengebietes, die sich übrigens auf lineare Transformationen reduzieren, invariant. Es soll im folgenden gezeigt werden, dass diese Invarianz gegenüber einer viel allgemeinern Klasse von Abbildungen, den sogenannten quasikonformen Abbildungen (¹) gegenüber bestehen bleibt. Anderseits beruhen die bekannten Verzerrungssätze der schlichten Funktionen auf Extremaleigenschaften gewisser potentialtheoretischer Grössen, wie zum Beispiel der Kapazitätskonstanten, und ihrer Invarianz gegenüber solchen konformen Abbildungen, deren Ableitung im Bezugspunkt den Betrag 1 hat. Es soll daher im folgenden auch untersucht werden, wie sich die Kapazitätskonstante oder der transfinite Durchmesser einer ebenen Punktmenge verhält, wenn ihr Aussengebiet quasikonform und mit besonderer Normierung im Unendlichen abgebildet wird (²). Die diesbezüglichen Resultate liefern dann als Anwendung gewisse Verzerrungssätze über quasikonforme Abbildungen, die denjenigen der schlichten Funktionen analog sind und sie als Spezialfälle enthalten. Die Methode beruht auf einem einfachen Grundgedanken, der schon in dem Beweis, dass die offene

(¹) Vgl. etwa *H. Grötsch*, Leipziger Berichte, Math. Phys. Kl., 1928 und 1930; *L. Ahlfors*, Acta Math. vol. 65 (1935); *M. Lavrentieff*, Rec. Math., Moscou, vol. 42 (1935); *O. Teichmüller*, D. Math. Bd. 2 (1937) und D. Math. Bd. 3 (1938).

(²) Vgl. auch *M. Brelot*, J. de Math. vol. 19 (1940), 319-337 und ebenda vol. 24 (1945), 1-32, wo im Gegensatz zu oben das Verhalten der Kapazität gegenüber gewissen stetigen Transformationen der Punktmenge selbst untersucht wird.

Ebene nicht auf den Einheitskreis quasikonform abgebildet werden kann, zum Ausdruck kommt.

1. Wir betrachten zunächst *quasikonforme Abbildungen.* Durch die Funktion

$$z' = \Phi(z) = p + iq \; (p = \Re\Phi,\; q = \mathfrak{J}\Phi,\; z = x + iy,\; z' = x' + iy')$$

werde ein Gebiet G der z-Ebene topologisch auf ein Gebiet G′ der z'-Ebene abgebildet. Dabei sollen p und q stetige partielle Ableitungen besitzen und die Funktionaldeterminante $p_x q_y - p_y q_x$ überall in G positiv sein. Ein infinitesimaler Kreis vom Radius ε um z wird dann in eine infinitesimale Ellipse mit den Achsen $a\varepsilon$ und $b\varepsilon (a \geqq b)$ transformiert, deren Verhältnis $\frac{a}{b} (\geqq 1)$ als *Dilatationsquotient* $Q(z)$ im folgenden von Bedeutung sein wird. $|dz|$ und $|dz'|$ bezeichnen entsprechende Längenelemente, $d\sigma_x$ und $d\sigma'_z$ entsprechende Flächenelemente. Für alle Richtungen im Punkte z ist dann $b < \left|\frac{dz'}{dz}\right| \leqq a$, woraus sich die fundamentale Ungleichung zwischen Längen- und Flächenverzerrung ergibt :

$$Q^{-1}(z) \cdot \frac{d\sigma'_z}{d\sigma_z} \leqq \left|\frac{dz'}{dz}\right|^2 \leqq Q(z) \cdot \frac{d\sigma'_z}{d\sigma_z}. \tag{1}$$

Es ist klar, dass sich $Q(z)$ nicht ändert, wenn auf $z' = \Phi(z)$ noch eine konforme Abbildung ausgeübt wird. Ebenso ist der Dilatationsquotient der inversen Abbildung $z = \Phi^{-1}(z')$ in z' wiederum $Q(z)$.

Die Abbildung ist konform, wenn $Q(z) \equiv 1$ ist. Werden dem Dilatationsquotienten geeignete globale Bedingungen auferlegt, z. B., dass $Q(z)$ beschränkt bleibt in G, $Q(z) \leqq K (\geqq 1)$, $z \in G$, so heisst die Abbildung *quasikonform.* Bei solchen Abbildungen ist zu erwarten, dass sich konform invariante Gebietsgrössen nur innerhalb gewisser Grenzen ändern können.

2. Die im folgenden betrachtete Grösse reduziert sich im Fall eines zweifach zusammenhängenden Gebietes auf den wohlbekannten Modul. Der Rand des Gebietes G bestehe aus n Jordankurven γ_1, $\gamma_2, \cdots, \gamma_n$. Wir teilen sie in zwei Klassen ein : $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k = \Gamma_0$ sei der « innere » und $\gamma_{k+1} + \cdots + \gamma_n = \Gamma_1$ der « äussere » Rand. Bei so klassifizierten Randkurven nennen wir das Gebiet kurz den *Ring* (Γ_0, Γ_1). Für die Klasse der in (Γ_0, Γ_1) eindeutigen harmonis-

chen Funktionen u mit $\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 2\pi$ (n ist die innere Normale) wird das Dirichletintegral $D(u) = \iint_D |\text{grad } u|^2 dx dy$ bekanntlich dann und nur dann minimalisiert, wenn u auf Γ_0 und Γ_1 je einen konstanten Wert annimmt. Ist u eine solche Extremale, so nennen wir die Grösse $M = \frac{1}{2\pi} \cdot D(u)$ den *Modul des Ringes* (Γ_0, Γ_1) und bezeichnen ihn mit Mod (Γ_0, Γ_1) (3). Es ist Mod $(\Gamma_0, \Gamma_1) =$ Mod (Γ_1, Γ_0). Wenn u auf Γ_0 verschwindet, so hat es auf Γ_1 den Wert M.

3. Wir bilden jetzt (Γ_0, Γ_1) quasikonform $(Q(z) \leqq K)$ auf (Γ'_0, Γ'_1) ab und setzen Mod $(\Gamma_0, \Gamma_1) = M$, Mod $(\Gamma'_0, \Gamma'_1) = M'$. Um zu untersuchen, wieviel M' von M höschstens abweichen wird, führen wir in G und G′ geeignete Parameter ein. Die Funktion u (bezw. u') sei in G (bezw. G′) eindeutig und harmonisch, verschwinde auf Γ_0 (bezw. Γ'_0) und nehme auf Γ_1 (bezw. Γ'_1) den Wert M (bezw. M′) an. v und v' seien die konjugiert harmonischen Funktionen. Es sind dann $w = u + iv$ und $w' = u' + iv'$ im Kleinen eindeutig und sie können ausserhalb der kritischen Stellen (grad $u = 0$ bezw. grad $u' = 0$) als lokale Parameter verwendet werden ; denn ausserhalb der genannten Stellen ist der Zusammenhang zwischen w und z bezw. w' und z' ein konformer. Ist also $|dw|$ das $|dz|$ entsprechende Längenelement in der w-Ebene, $d\sigma_w$ das Flächenelement, das $d\sigma_z$ entspricht, und analog $|dw'|$ und $d\sigma'_w$ die $|dz'|$ und $d\sigma'_z$ entsprechenden Elemente in der w'-Ebene, so ist gemäss Nr. 1 auch

$$\left|\frac{dw'}{dw}\right|^2 \leqq Q(z) \cdot \frac{d\sigma'_w}{d\sigma_w}; \tag{2}$$

denn die Abbildung $w \to w'$ hat den Dilatationsquotienten $Q(z)$.

Wir bezeichnen die Niveaulinie $u = \lambda$ $(0 \leqq \lambda \leqq M)$ mit Γ_λ ihr Bild mit Γ'_λ (das im allgemeinen von der Niveaulinie $u' = \lambda$ verschieden ist) und setzen

$$\operatorname*{Max}_{z \in \Gamma_\lambda} Q(z) = K_\lambda. \tag{3}$$

Es ist $K_\lambda \leqq K$. Liegt auf Γ_λ keine kritische Stelle von u, so ist

$$2\pi = \int_{\Gamma_\lambda} dv' \leqq \int_{\Gamma'_\lambda} \left|\frac{dw'}{dw}\right| \cdot |dw|,$$

(3) $\frac{2\pi}{M}$ ist nichts anderes als die Kapazität des 2-dimensionalen Kondensators (Γ_0, Γ_1).

wobei Γ im Sinne des wachsenden v durchlaufen wird. Die Schwarz'sche Ungleichung in Verbindung mit (2) und (3) ergibt dann

$$4\pi^2 \leqq \int_{\Gamma_\lambda} \left|\frac{dw'}{dw}\right|^2 |dw| \cdot \int_{\Gamma_\lambda} |dw| \leqq 2\pi K_\lambda \cdot \int_{\Gamma_\lambda} \left(\frac{d\sigma'_w}{d\sigma_w}\right) |dw|.$$

Enthält der Ring $(\Gamma_{\lambda_1}, \Gamma_{\lambda_2})$ keine kritischen Stellen von u, so liefert die Integration wegen $d\sigma'_w = |\text{grad}\, u'|^2 \cdot d\sigma'_z$

$$2\pi \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{K\lambda} \leqq \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\int_{\Gamma_\lambda} \left(\frac{d\sigma'_w}{d\sigma_w}\right) |dw| \right) d\lambda = \iint_{\lambda_1 \leqq u \leqq \lambda_2} \left(\frac{d\sigma'_w}{d\sigma_w}\right) d\sigma_w$$

$$= \iint_{(\Gamma'_{\lambda_1}, \Gamma'_{\lambda_2})} |\text{grad}\, u'|^2 dx' dy'.$$

Da nur endlich viele solche kritische Stellen vorhanden sind, folgt schliesslich

$$\int_0^M \frac{d\lambda}{K\lambda} \leqq \frac{1}{2\pi} \iint_{G'} |\text{grad}\, u'|^2 dx' dy' = M'.$$

Satz 1 : *Es seien die beiden Ringe* (Γ_0, Γ_1) *und* (Γ'_0, Γ'_1) *quasikonform aufeinander bezogen mit* $Q(z) \leqq K$ *und* K_λ *gemäss* (3). *Es sei ferner* $M = \text{Mod}\,(\Gamma_0, \Gamma_1)$ *und* $M' = \text{Mod}\,(\Gamma'_0, \Gamma'_1)$.

Dann gilt

$$\int_0^M \frac{d\lambda}{K\lambda} \leqq M' \tag{4}$$

und

$$K^{-1} M \leqq M' \leqq KM. \tag{5}$$

Für zweifach zusammenhängende Gebiete sind die Ungleichungen (4) und (5) bekannt([4]). $K = 1$ bestätigt den konform invarianten Charakter von M.

4. *Anwendung auf Punktmengen der Kapazität null.*

Wir betrachten ein Gebiet G in der z-Ebene und schöpfen es durch eine wachsende Folge von solchen Teilgebieten

$$G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n \subset \cdots$$

([4]) Vgl. *H. Grötsch*, loc. citat. und *O. Teichmüller*, D. Math, Bd. 3, p. 668.

aus, deren Rand Γ_n nur aus endlich vielen Jordankurven besteht. Es ist dann Mod $(\Gamma_0, \Gamma_n) = M_n (n = 1, 2, \cdots)$ monoton wachsend und je nach dem $\lim_{n \to \infty} M_n = M$ endlich oder unendlich ist, heisst der Rand Γ des Gebietes G von *positiver* oder *verschwindender logarithmischer Kapazität*. Denn die genannte Fallunterscheidung ist von der gewählten Ausschöpfung unabhängig ([5]).

Wird nun das Gebiet G quasikonform abgebildet, so ist der Rand des Bildgebietes wegen Satz 1 von der Kapazität null, falls jener von G es ist.

Satz 2: *Die Eigenschaft eines Randes, dass seine logarithmische Kapazität verschwindet, ist invariant gegenüber quasikonformen Abbildungen des Gebietes* ([6]).

Für die Invarianz der gennanten Eigenschaft genügt es schon, dass der Dilatationsquotient $Q(z)$ gegen den Rand hin nicht zu stark anwächst. Um dies zu präzisieren betrachten wir die in (Γ_0, Γ_n) harmonische Funktion u_n, die auf Γ_0 verschwindet und auf Γ_n den Wert M_n annimt. $\Gamma_\lambda^{(n)}$ bezeichnet die Niveaulinie $u_n = \lambda \, (0 \leqq \lambda \leqq M_n)$ und es sei $K_\lambda^{(n)} = \operatorname{Max}_{z \in \Gamma_\lambda^{(n)}} Q(z)$. Ist nun die Abbildung so beschaffen, dass der Ausdruck $\int_0^{M_n} \frac{d\lambda}{K_\lambda^{(n)}}$ für $n \to \infty$ nicht beschränkt bleibt, so wird ein « Nullrand » wieder in einen « Nullrand » transformiert.

5. *Die Kapazitätskonstante.*

Das Gebiet G, dessen Rand Γ zunächst wieder aus endlich vielen Jordankurven bestehen soll, enthalte jetzt den unendlich fernen Punkt. Es sei $\varkappa_R$ der Kreis $|z| = R$. Wir setzen Mod $(\Gamma, \varkappa_R) = M_R$ (für R genügend gross) und bemerken, dass $M_R - \log R$ monoton wachsend ist für $R \uparrow \infty$. Sei nämlich $R' > R$ und u die Extremale für $(\Gamma, \varkappa_{R'})$ (vgl. Nr. 2). Dann ist u Konkurrenzfunktion für $(\Gamma, \varkappa_R)$ und $(\varkappa_R, \varkappa_{R'})$ und daher

$$M_R + \log \frac{R'}{R} \leqq \frac{1}{2\pi} \Big(\iint\limits_{(\Gamma, \varkappa_R)} + \iint\limits_{(\varkappa_R, \varkappa_{R'})} \Big) |\operatorname{grad} u|^2 dx dy = M_{R'}.$$

([5]) Vgl. *R. Nevanlinna*, Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1935, p. 106 ff.

([6]) Dieser Satz gilt auch für die von *R. Nevanlinna* (Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, Nr. 1 (1941) eingeführten Riemann'schen Flächen mit Nullrand. Vgl. hierzu auch C. R. Acad. Sci., Paris, t. 227 (1948), p. 25-26.

Wir nennen

$$\lim_{R \to \infty} (M_R - \log R) = M^*_\infty(\Gamma) \tag{6}$$

den *reduzierten Modul des Gebietes* $G - (\infty)$ ([7]).

Statt der Kreise $\varkappa_R$ kann man auch eine Folge von Jordankurven Γ_λ ($\lambda = 1, 2, \cdots$) nehmen, die für $\lambda \to \infty$ eine Bedingung für Kreisähnlichkeit erfüllen, das heisst mit $r_\lambda = \operatorname{Min}_{z \in \Gamma_\lambda} |z|$ und $R_\lambda = \operatorname{Max}_{z \in \Gamma_\lambda} |z|$ gilt

$$\lim_{\lambda \to \infty} r_\lambda = \infty \qquad \text{und} \qquad R_\lambda \sim r_\lambda (\lambda \to \infty) \tag{7}$$ ([8]).

Wegen der Monotonieeigenschaft des Moduls folgt nämlich aus (6), dass für ein ρ_λ mit $\rho_\lambda \sim R_\lambda$ auch

$$\lim_{\lambda \to \infty} (M_\lambda - \log \rho_\lambda) = M^*_\infty(\Gamma) \tag{8}$$

ist.

Der reduzierte Modul $M^*_\infty(\Gamma)$ ist nun nichts anderes als die *Robin'sche Konstante* γ des Randes Γ, also

$$\gamma = M^*_\infty(\Gamma). \tag{9}$$

Ist nämlich $g(z, \infty)$ die Green'sche Funktion von G und Γ_λ die Niveaulinie $g = \lambda$, so erfüllt diese für $\lambda \to \infty$ wegen

$$g = \log |z| + \gamma + o(1) = \lambda$$

die obige Bedingung für Kreisähnlichkeit. Mit $\log \rho_\lambda = \lambda - \gamma$ folgt dann aus $\operatorname{Mod}(\Gamma, \Gamma_\lambda) = M_\lambda = \lambda$ und (8) die Behauptung.

Für einen beliebigen Rand Γ von G schöpfen wir G wie in Nr. 4 durch eine wachsende Folge von regulären Teilgebieten G_n aus. Die zugehörigen γ_n sind monoton wachsend und

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n = \gamma = M^*_\infty(\Gamma)$$

die Robin'sche Konstante von Γ bezw. der reduzierte Modul von $G - (\infty)$. Die nicht negative Zahl $C = e^{-\gamma}$ heisst die *Kapazitätskonstante* oder der *transfinite Durchmesser* von Γ bezw. der Komple-

([7]) Vgl. *O. Teichmüller*, D. Math. Bd. 3, p. 628.

([8]) $s \sim t$ heisst $\lim \frac{s}{t} = 1$.

mentärmenge E von G [9]. Es ist dann und nur dann $C=0$, wenn E im Sinn von Nr. 4 die Kapazität null hat.

6. *Der Einfluss quasikonformer Abbildung auf die Robin'sche Konstante.* Das Gebiet G werde nun quasikonform auf ein Gebiet G′ abgebildet und zwar so, dass der unendlich ferne Punkt festbleibt und dort die Normierungsbedingung

$$|z'| \sim c\cdot|z|^{\eta}, \qquad c>0, \qquad \eta>0, \tag{10}$$

erfüllt ist [10]. Sei γ die Robin'sche Konstante von Γ und γ' diejenige des Bildrandes Γ', $g(z, \infty)$ die Green'sche Funktion von G, Γ_λ die Niveaulinie $g=\lambda$ und Γ'_λ die Bildkurve. Beide Kurven verhalten sich, wegen (10) für $\lambda\to\infty$ kreisähnlich. Mit

$$M_\lambda = \mathrm{Mod}(\Gamma, \Gamma_\lambda), \qquad M'_\lambda = \mathrm{Mod}(\Gamma', \Gamma'_\lambda)$$

und K_λ gemäss (3) und wegen $M_\lambda=\lambda$ finden wir dann gemäss Satz 1 $\int_0^\Lambda \frac{d\lambda}{K\lambda} \leqq M'_\Lambda$. Die Subtraktion von $\log\rho'_\Lambda = \log c + \eta(\Lambda-\gamma)$ ergibt

$$\eta\gamma - \log c + \int_0^\Lambda \left(\frac{1}{K_\lambda} - \eta\right) d\lambda \leqq M'_\Lambda - \log\rho'_\Lambda.$$

Da die ρ'_Λ in Bezug auf Γ'_Λ die in Nr. 5 verlangte Bedingung erfüllen, so folgt

Satz 3: *Sind die beiden Gebiete* G *und* G′ *quasikonform mit* $Q(z)\leqq K$ *aufeinander bezogen, derart, dass der unendlich ferne Punkt festbleibt und dort die Normierungsbedingung* (10) *erfüllt ist, so besteht zwischen den Robin'schen Konstanten ihrer Ränder* Γ *und* Γ' *die Ungleichung*

$$\gamma' \geqq \eta\gamma - \log c + \int_0^\infty \left(\frac{1}{K_\lambda} - \eta\right) d\lambda. \tag{11}$$

(9) Vgl. *M. Fekete*, Math. Zeitschr. Bd. 17 (1923); *G. Szegö*, Math. Zeitschr., Bd. 21 (1924); *O. Frostman*, Meddel. Lunds. Univ. Mat. Sem. vol. 3 (1935); *R. Nevanlinna*, loc. citat. p. 114 ff. Der Begriff der quasikonformen Abbildungen kann sinngemäss auf höherdimensionale Räume verallgemeinert werden. Ob für die Kapazität bezw. den transfiniten Durchmesser räumlicher Punktmengen (vgl. *G. Pólya* und *G. Szegö*, J. reine und angew. Math. Bd. 165 (1931)) analoge Resultate gelten wie die nachstehenden, kann hier nicht beantwortet werden.

(10) Wie an anderer Stelle gezeigt werden soll, ist mit $Q(z)\leqq K$ stets $\frac{1}{K}\leqq\eta\leqq K$ verknüpft.

Insbesondere folgt für $c=1$ *und* $\eta=1$

$$\gamma'-\gamma \geqq \int_0^\infty \left(\frac{1}{K_\lambda}-1\right)d\lambda \quad (12)$$

[11]

und für $c=1$ *und* $\eta=\frac{1}{K}$

$$\gamma \leqq K\gamma'. \quad (13)$$

Um Abschätzungen in der andem Richtung zu erhalten, braucht man nur die inverse Abbildung zu betrachten. Dabei ist allerdings zu beachten, dass η durch $\frac{1}{\eta}$, c durch $c^{-\frac{1}{\eta}}$ und K_λ durch den maximalen Dilatationsquotienten auf $g'=\lambda$ zu ersetzen ist. Dies führt abgesehen von (12) dazu, dass die Schranken in der einen Richtung immer ∞ bezw. $-\infty$ werden.

Durch einfache Bespiele lässt sich zeigen, dass die obigen Ungleichungen exakt sind. Insbesondere bestätigt sich, dass gegenüber normierten konformen Abbildungen, also für $K=1$, $\eta=1$ und $c=1$ die Robin'sche Konstante invariant bleibt.

7. Es ist klar, dass die Betrachtungen der beiden vorangehenden Nummern 6 und 5 auch in Bezug auf einen beliebigen andern Gebietspunkt als ∞ durchgeführt werden können. Für einen Punkt $a \in G$ bezeichnen wir den reduzierten Modul des Gebietes $G-a$ mit $M_a^*(\Gamma)$. Das Glied γ_a in $g(z,a)=\log\left|\frac{1}{z-a}\right|+\gamma_a+o(1)$ ist wieder gleich $M_a^*(\Gamma)$ und die der Kapazitätskonstante entsprechende Grösse $e^{+\gamma_a}=r_a$ nennen wir mit *Pólya* und *Szegö* den innern Abbildungsradius des Gebietes G im Punkte a. Analog gilt

Satz 3': *Sind die beiden Gebiete* G *und* G' *konform aufeinander bezogen, derart, dass der Punkt* $a \in G$ *fest bleibt und dort die Normierungsbedingung* $|z'-a| \sim |z-a|^\eta$, $\eta>0$ [12], *erfüllt ist, so be-*

[11] Die Konvergenz des Integrals $\int_0^\infty \left(1-\frac{1}{K_\lambda}\right)d\lambda$ ist gleichbedeutend mit derjenigen des Integrals $\int_0^\infty (K_\lambda-1)d\lambda$. Im letztern Falle hat *O. Teichmüller* (D. Math., Bd. 3 (1938) p. 670) die Existenz einer positiven Konstanten c nachgewiesen, sodass

$$|z'| \sim c\cdot|z|$$

für $z \to \infty$. Vgl. hierzu auch *H. Wittich*, Math. Zeitschr. Bd. 51 (1948), p. 278-288.

[12] Vgl. Anm. 10.

steht zwischen den Abbildungsradien r_a und r'_a der Gebiete G *und* G′ *im Punkte a die Ungleichung*

$$(11') \qquad \log r'_a \geqq \eta \log r_a + \int_0^\infty \left(\frac{1}{K_\lambda} - \eta\right) d\lambda.$$

Für $\eta = 1$ *folgt*

$$(12') \qquad \log \frac{r'_a}{r_a} \geqq \int_0^\infty \left(\frac{1}{K_\lambda} - 1\right) d\lambda$$

und für $\eta = \frac{1}{K}$

$$(13') \qquad r_a \leqq (r'_a)^K.$$

8. *Anwendung auf Verzerrungssätze.*

Die bekannten Extremaleigenschaften der Grössen $M_a^*(\Gamma)$ bezw. C und r_a ergeben nun in Verbindung mit Satz 3 und Satz 3′ eine Reihe von Verzerrungssätzen. Wir beschränken uns hiebei auf einfach zusammenhängende Gebiete.

Es soll zunächst das Gebiet G den unendlich fernen Punkt enthalten. Zwischen dem Durchmesser D und der Kapazitätskonstanten C seines Randes gilt dann die bekannte Ungleichung

$$(14) \qquad D(\Gamma) \leqq 4C(\Gamma) = 4e^{-\gamma}.$$

Gleichheit besteht dann und nur dann, wenn Γ eine Strecke ist. Wir bilden nun das Kreisäussere $|z| > r$ quasikonform ab, wobei der unendlich ferne Punkt festbleibt und die Normierungsbedingung (10) erfüllt ist. Dann liefert die Ungleichung (14) in Verbindung mit Satz 3 obere Schranken für den Durchmesser des Bildrandes. Wir setzen.

$$\mu = \int_r^\infty \left(1 - \frac{1}{K_\rho}\right) \frac{d\rho}{\rho} \quad \text{mit} \quad K_\rho = \operatorname*{Max}_{|z|=\rho} Q(z)$$

und erhalten insbesondere

Satz 4 : *Wird das Kreisäussere $|z| > r$ derart quasikonform* ($Q(z) \leqq K$) *in die z′-Ebene abgebildet, dass der unendlich ferne Punkt festbleibt und dort die Bedingung $|z'| \sim |z|$ bezw. $|z'| \sim |z|^{\frac{1}{K}}$ erfüllt ist, so gilt für den Durchmesser* D(Γ′) *des Bildrandes*

$$(15) \qquad D(\Gamma') \leqq 4re^{\mu} \qquad \textit{bezw.} \qquad D(\Gamma') \leqq 4 \cdot r^{\frac{1}{K}}.$$

Ist der Nullpunkt nicht in G' enthalten, so folgt nach Ausübung der Inversionen $w = \frac{1}{z}$ und $w' = \frac{1}{z'}$

Satz 4': *Wird der Kreis $|w| < r$ quasikonform auf ein Gebiet der w'-Ebene abgebildet, das den unendlich fernen Punkt nicht enthält, und zwar so, dass der Nullpunkt festbleibt und dort $|w'| \sim |w|^{\frac{1}{K}}$ ist, so enthält die Kreisscheibe $|w'| < \frac{1}{4} r^{\frac{1}{K}}$ keinen Randpunkt des Bildgebietes.*

Dies ist für $K = 1$ der *Koebe-Bieberbach'* sche Viertelssatz. Diese Aussage ist scharf. Die Extremalabbildungen erhält man im Falle $r = 1$ durch Zusammensetzung von $\zeta = e^{i\alpha} \cdot w \cdot |w|^{\frac{1}{K} - 1}$ und

$$w' = \frac{\zeta}{(1 - \zeta)^2}.$$

Es werde wieder der Einheitskreis $|w| < 1$ wie in Satz 4' $(r = 1)$ in die w'-Ebene abgebildet. Wir setzen $\min\limits_{|w| = r} |w'| = m(r)$ $(0 < r < 1)$ und suchen für $m(r)$ eine untere Schranke. Es darf angenommen werden, dass das Minimum von $|w'|$ auf $|w| = r$ im Punkte $w = -r$ angenommen wird. Einer Methode von *K. Löwner* ([13]) folgend wird nun der Einheitskreis von $w = -1$ bis $w = -r$ aufgeschnitten wodurch in der w'-Ebene ein Einschnitt vom Rand Γ' bis zum Punkt $w'(-r)$ entsteht. Dieser aufgeschnittene Kreis hat im Mittelpunkt den Abbildungsradius $r_0 = 4\frac{r}{(1 + r)^2}$, wie man leicht mit Hilfe der Funktion $\zeta = \frac{w}{(1 - w)^2}$ nachrechnet. Er kann also konform auf den Kreis $|t| < r_0$ abgebildet werden mit $w = w(t) = t + a_2 t^2 + \cdots$. Durch Anwendung von Satz 4' auf die quasikonforme Abbildung

$$t \to w \to w'$$

folgt dann, dass

$$m(r) \geqq \frac{1}{4}\left(\frac{4r}{(1 + r)^2}\right)^{\frac{1}{K}} \tag{16}$$

ist. Diese Ungleichung ist exakt, sofern wir den in Nr. 1 festgelegten Begriff der quasikonformen Abbildung erweitern und zulassen, dass

([13]) Vgl. Math. Zeitschr., Bd. 3 (1919), p. 74 und 75.

die Forderung der Differenzierbarkeit auf einzelnen Kurvenbogen verloren geht, wenn nur die Eineindeutigkeit und Stetigkeit der Abbildung gewährleistet ist. Alle vorangehenden Ueberlegungen gelten nämlich auch für diese Abbildungsklasse. Um eine extremale Abbildung zu konstruieren, bilden wir den obigen aufgeschnittenen Kreis mit $w = w(t)$ auf den Kreis $|t| < \frac{4r}{(1+r)^2} = r_0$ ab, diesen mit $t' = t \cdot |t|^{\frac{1}{K}-1}$ auf den Kreis $|t'| < r_0^{\frac{1}{K}}$ und dann den letztern mit $n' = \frac{t'}{(1 - r_0^{-1/K} \cdot t')^2}$ auf die von $-\frac{r_0^{1/K}}{4}$ längs der negativen reellen Achse bis ∞ aufgeschnittene Ebene ab. Diese Abbildung ist auf dem Kreiseinschnitt noch stetig und ordnet aus Symetriegründen gegenüberliegenden Punkten des obern und untern Ufers die gleichen Bildpunkte zu. Die Abbildung $w \to w'$ ist im genannten Sinne noch quasikonform in $|w| < 1$.

Für die Gültigkeit der obigen Sätze ist die Normierung

$$|z'| \sim |z|^{\frac{1}{K}}$$

im Nullpunkt sehr wesentlich. Will man aber Schranken in der andern Richtung haben, so ist die Normierung zu ändern. In Satz 4' zum Beispiel wurde eine untere Schranke für den *nächsten Randpunkt* des Bildgebietes gegeben. Will man aber für diesen *nächsten Randpunkt* eine obere Schranke geben, so ist die Abbildung im Nullpunkt mit $|z'| \sim |z|^K$ zu normieren. Dies führt zu

Satz 4'': *Wird der Einheitskreis $|z| < 1$ quasikonform in die z'-Ebene abgebildet, wobei der Nullpunkt festbleibt und dort die Bedingung $|z'| \sim |z|^K$ erfüllt ist, so ist der nächste Randpunkt um weniger als 1 vom Nullpunkt entfernt, ausgenommen wenn*

$$z' = e^{i\alpha} \cdot z \cdot |z|^{K-1}$$

ist.

Zum Beweis ist lediglich zu beachten, dass unter allen Gebieten, die den Einheitskreis $|z| < 1$ enthalten, dieser Kreis und nur dieser den minimalen Abbildungsradius $r_0 = 1$ liefert und dass ferner die inverse Abbildung $z' \to z$ gemäss (13') die Ungleichung

$$r_0' \leqq (r_0)^K = 1$$

ergibt.

9. Es soll zum Schluss darauf hingewiesen werden, dass die bewiesenen Resultate für eine viel allgemeinere Abbildungsklasse als die in Nr. 1 definierte gültig sind. Man darf nicht nur die Forderung der Differenzierbarkeit der Abbildung längs einzelner Kurvenbogen fallen lassen, wie schon oben bemerkt wurde, sondern es genügt, dem rein topologischen Charakter der Abbildung eine globale Zusatzbedingung beizufügen, die in ihrer Wirkung der Bedingung $Q(z) \leqq K$ gleich kommt. Um sie zu formulieren, nennen wir ein Jordangebiet, auf dem vier Randpunkte ausgezeichnet sind, von denen keine zwei zusammenfallen, kurz ein *Viereck*. Jedem solchen Viereck ist konform invariant eine Zahl $M \geqq 1$ zugeordnet, nämlich der eine der beiden Moduln, die im Falle des Rechteckes die beiden Seitenverhältnisse sind. Eine topologische Abbildung heisst nun quasikonform, wenn eine Konstante $K(\geqq 1)$ existiert, so dass für alle Vierecke und Bildvierecke die entsprechenden Moduln M und M' der Bedingung

$$K^{-1}M \leqq M' \leqq KM \tag{17}$$

genügen. Es genügt übrigens, diese Bedingung für kleine Vierecke zu fordern. Als Dilatationsquotienten $Q(z)$ definieren wir die untere Grenze der Zahlen K, mit denen (17) für alle Vierecke in der Umgebung von z erfüllt ist. Mit diesem Begriff des Dilatationsquotienten an Stelle des frühern bleiben alle hier bewiesenen Resultate gültig. Darauf soll bei anderer Gelegenheit zurückgekommen werden.

(Parvenu aux Annales en janvier 1951.)