

JEAN-FRANÇOIS MÉLA

**Suites lacunaires de Sidon, ensembles propres  
et points exceptionnels**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 14, n° 2 (1964), p. 533-538

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1964\\_\\_14\\_2\\_533\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_2_533_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUITES LACUNAIRES DE SIDON, ENSEMBLES PROPRES ET POINTS EXCEPTIONNELS

par Jean-François MÉLA

### Introduction

Dans [2], les auteurs obtiennent certains résultats sur « l'abondance » des points exceptionnels pour la répartition modulo  $2\pi$  d'une suite de Sidon réelle, dans les ensembles propres (§ 1) pour cette suite. (Ces résultats sont rappelés au § 3).

Notre objet est de montrer que l'on peut obtenir de plus, par la même méthode, des résultats sur « l'abondance » des points de divergence d'une série lacunaire dans les ensembles propres pour la suite spectrale; on obtient ainsi une caractérisation de ces ensembles plus stricte que celle obtenue dans [2]. (La condition de convergence uniforme est remplacée ici par une condition de convergence simple) (§ 4, prop. 2).

On trouvera dans [2] des critères et des exemples d'ensembles propres pour des suites lacunaires convenables (cf. aussi [1]).

### 1. Rappels et notations.

Soit  $G$  un groupe abélien compact; soit  $\Gamma$  son dual discret. Si  $\lambda \in \Gamma$ ,  $x \in G$ , on notera  $(x, \lambda)$  la valeur du caractère  $\lambda$  au point  $x$  et l'on posera :

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G (x, \lambda) f(x) dx \quad \text{pour toute } f \in L^1(G)$$
$$\hat{\mu}(\lambda) = \int_G (x, \lambda) d\mu(x)$$

pour toute mesure de Radon  $\mu$  sur  $G$ .

Soit  $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty} \subset \Gamma$  un ensemble de Sidon dénombrable [3].

DÉFINITION. — Un compact  $K \subset G$  est dit propre pour  $\wedge$  [2], s'il existe un entier  $\nu \geq 0$  tel que pour l'ensemble des polynômes trigonométriques sur  $G$  de la forme :

$$P(x) = \sum_{j \geq \nu} \hat{P}(-\lambda_j)(x, \lambda_j)$$

les normes suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \|P\|_{K, \infty} &= \sup_{x \in K} |P(x)|, \\ \|P\|_A &= \sum_{j \geq \nu} |\hat{P}(-\lambda_j)|. \end{aligned}$$

(Pour la clarté des notations nous supposons dans la suite que  $\nu = 0$ .)

Pour un compact  $K$  quelconque nous noterons :

$\mathcal{F}_K$  l'ensemble des suites  $\{(x, \lambda_j)\}_{j \geq 0}$  pour lesquelles  $x \in K$ ,  $\mathfrak{M}_K$  l'ensemble des suites  $\{\hat{\mu}(\lambda_j)\}_{j \geq 0}$  pour lesquelles  $\mu$  est une mesure portée par  $K$ .

On a alors :

$$\mathcal{F}_K \subset \mathfrak{M}_K \subseteq l^\infty(\wedge).$$

On démontre par une méthode analogue à celle utilisée dans [3] (cf. [2]) la propriété :

$$K \text{ propre pour } \wedge \iff \mathfrak{M}_K = l^\infty(\wedge).$$

## 2.

Soit  $a_n$  une suite d'éléments de  $l^1(\wedge)$  ayant les propriétés :

$$(1) \text{ Si } a_n = \{a_n^j\}_{j \geq 0}$$

pour tout  $j \geq 0$   $a_n^j \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

$$(2) \text{ Si } \|a_n\|_{l^1} = \sum_{j \geq 0} |a_n^j|$$

il existe des constantes  $m$  et  $M$  telles que pour tout  $n$  :

$$m < \|a_n\|_{l^1} < M.$$

*Nota.* — Ceci revient à considérer une classe de procédés de sommation pour les suites de  $l^\infty(\wedge)$ , de matrice  $(a_n^j)$ , qui comprend notamment les procédés réguliers de Toeplitz (pour lesquels  $\sum_j a_n^j = 1$ ).

Pour un compact  $K$  quelconque on a :

LEMME. — Si  $a_n$  converge faiblement sur  $\mathcal{F}_K$ , alors  $a_n$  converge faiblement sur  $\mathcal{M}_K$ .

En effet supposons que :

$$\sum_{j \geq 0} a_n^j(x, \lambda_j) \text{ converge } (n \rightarrow \infty) \text{ pour tout } x \in K.$$

Comme d'autre part

$$\left| \sum_{j \geq 0} a_n^j(x, \lambda_j) \right| \leq \sum |a_n^j| < M,$$

pour toute mesure  $\mu$  portée par  $K$  :

$$\sum_{j \geq 0} a_n^j \hat{\mu}(\lambda_j) \text{ converge } (n \rightarrow \infty)$$

puisque

$$\sum_{j \geq 0} a_n^j \hat{\mu}(\lambda_j) = \int_G \left( \sum_{j \geq 0} a_n^j(x, \lambda_j) \right) d\mu(x).$$

PROPOSITION 1. — Si  $K$  est un compact propre pour  $\wedge$ , le sous-ensemble de  $\mathcal{F}_K$  sur lequel  $a_n$  ne converge pas faiblement est non dénombrable.

En effet si  $a_n$  converge sur  $\mathcal{F}_K$ , sauf peut-être sur un sous-ensemble dénombrable; à cause de (2) on peut en extraire, par le procédé diagonal, une sous-suite  $a_{n_k}$  qui converge faiblement sur  $\mathcal{F}_K$ , donc sur  $\mathcal{M}_K$  (lemme), donc sur  $l^\infty(\wedge)$  puisque  $K$  est propre. Alors  $a_{n_k}$  converge fortement dans  $l^1(\wedge)$  [4] ce qui est impossible car il résulte de (1) et (2) que, pour tout  $n_0$  :

$$\|a_n - a_{n_0}\|_{l^1} \sim \|a_n\|_{l^1} + \|a_{n_0}\|_{l^1} > 2m.$$

### 3. Répartition modulo $2\pi$ des suites de Sidon. Points exceptionnels.

Dans le cas où les  $a_n^j$  sont les coefficients d'une matrice de sommation régulière de Toeplitz  $A$ , on a :

COROLLAIRE 1. — Si  $K$  est un compact propre, pour tout procédé régulier de sommation  $A$ , l'ensemble des points  $x$  de  $K$  pour lesquels  $\{(x, \lambda_j)\}_{j \geq 0}$  n'est pas  $A$ -sommable est non dénombrable.

Dans les cas :

$$\begin{aligned} G = T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; & & \Gamma = \mathbb{Z} \\ G = \overline{\mathbb{R}} \text{ compactifié de Bohr de } \mathbb{R}; & & \Gamma = \mathbb{R} \text{ discret} \end{aligned}$$

$\Lambda$  est alors une suite d'entiers ou de réels.

Si  $K \subset T$  ou  $K \subset \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$  et  $x \in K$  on a :  $(x, \lambda) = \exp i\lambda x$ .

Nous rappelons :

**DÉFINITION.** — Si  $A$  est un procédé régulier de sommation, une suite réelle  $\{u_j\}$  est dite  $A$ -répartie modulo  $2\pi$  si  $\{\exp inu_j\}$  est  $A$ -sommable pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

Si  $A$  a pour matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots\dots\dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & 0 & \dots \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

on a la notion ordinaire de répartition.

Pour une suite  $\Lambda$  réelle, nous dirons que  $x \in \mathbb{R}$  est un *point exceptionnel* pour un procédé  $A$  si  $\{\lambda_j x\}_{j \geq 0}$  n'est pas  $A$ -répartie. On sait, par exemple, que pour une suite croissante d'entiers tendant vers l'infini, l'ensemble des points exceptionnels pour la répartition ordinaire est de mesure nulle. Pour les suites lacunaires on a des résultats plus précis :

Dans le cas qui nous occupe, le corollaire I prend la forme :

**COROLLAIRE 1'.** — Si  $K$  est un compact contenu dans  $\mathbb{R}$ , propre pour une suite de Sidon réelle  $\Lambda$ , alors, pour tout procédé régulier de sommation  $A$ , l'ensemble des points exceptionnels de  $K$  est non dénombrable.

#### 4. Ensembles propres et points de divergence.

Soit  $\Lambda$  une suite de Sidon quelconque. Considérons une série trigonométrique (S) :

$$\sum_{j \geq 0} \alpha_j(x, \lambda_j), \quad \text{avec} \quad \sum_{j \geq 0} |\alpha_j| = \infty.$$

Soit A un procédé régulier de sommation de matrice  $(a_p^n)$  dont les lignes sont finies ( $a_p^n = 0$  si  $n > n(p)$ ).

Posons :

$$S_n = \sum_{j \leq n} \alpha_j(x, \lambda_j), \quad \{T_p\} = A\{S_n\}.$$

On a :

$$T_p = \sum_{n \geq 0} a_p^n S_n,$$

$$T_p = \sum_{n \geq 0} a_p^n \sum_{j \leq n} \alpha_j(x, \lambda_j) = \sum_{j \geq 0} \alpha_j(x, \lambda_j) \sum_{n \geq j} a_p^n$$

soit en posant :

$$R_p^j = \sum_{n \geq j} a_p^n, \quad T_p = \sum_{j \geq 0} \alpha_j(x, \lambda_j) R_p^j.$$

Si en un point  $x \in G$  la série (S) est A-sommable, la suite  $\{T_p\}$  est convergente en ce point. Alors il existe un procédé de sommation B ayant les propriétés (1) et (2) qui somme la suite  $\{(x, \lambda_j)\}$  au point considéré. En effet il suffit de prendre :

$$B = (b_p^j) \quad \text{avec} \quad b_p^j = \alpha_j R_p^j / \sum_{j \geq 0} |\alpha_j| R_p^j.$$

Alors, si

$$\{U_p\} = B\{(x, \lambda_j)\}, \quad U_p = T_p / \sum_{j \geq 0} |\alpha_j| R_p^j.$$

Or il est facile de voir que :

$$\sum_{j \geq 0} |\alpha_j| R_p^j \rightarrow \infty \quad (p \rightarrow \infty)$$

car  $\sum_{j \geq 0} |\alpha_j| = \infty$  et  $R_p^j \rightarrow 1$  ( $p \rightarrow \infty$ ;  $j$  fixé).

Ceci entraîne que les propriétés (1) et (2) sont vérifiées et que  $\{U_p\}$  converge (vers 0).

Dans ces conditions on déduit de la proposition 1 :

**COROLLAIRE 2.** — Si K est un compact propre pour  $\wedge$ , pour toute série (S) :  $\sum_{j \geq 0} \alpha_j(x, \lambda_j)$  avec  $\sum_{j \geq 0} |\alpha_j| = \infty$ , pour tout procédé régulier de sommation A à lignes finies, l'ensemble des points de K où (S) n'est pas A-sommable est non dénombrable.

Or si K n'est pas propre pour  $\wedge$ , il résulte de la définition qu'il existe une suite de polynômes trigonométriques  $\{P_n\}$  à spectre dans  $\wedge$  avec :

$$\|P_n\|_A = 1, \quad \|P_n\|_{K, \infty} < \frac{1}{n^2}.$$

De plus on peut supposer les spectres des  $P_n$  disjoints.

Si 
$$P_n(x) = \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} \alpha_j(x, \lambda_j), \quad (k_{n-1} < k_n),$$

la série (S) :  $\sum_{j \geq 0} \alpha_j(x, \lambda_j)$  a ses sommes partielles de rang  $k_n$  partout convergentes ( $n \rightarrow \infty$ ) sur  $K$ . Autrement dit, il existe un procédé régulier de sommation à lignes finies qui somme (S) en tout point de  $K$  alors que :

$$\sum_{j \geq 0} |\alpha_j| = \infty.$$

D'où une caractérisation des ensembles non propres :

**PROPOSITION 2.** — *Une condition nécessaire et suffisante pour que  $K$  soit non propre pour  $\wedge$  est qu'il existe une série (S) :  $\sum_{j \geq 0} \alpha_j(x, \lambda_j)$ , avec  $\sum_{j \geq 0} |\alpha_j| = \infty$ , et un procédé régulier de sommation à lignes finies  $A$  tel que (S) soit  $A$ -sommable sur  $K$ .*

*Remarque.* — Dans tout ce paragraphe on peut remplacer «  $A$ -sommable » par «  $A$ -bornée » comme on le voit aisément.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. P. KAHANE et R. SALEM, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, Paris 1963.
- [2] H. HELSON et J. P. KAHANE, A Fourier method in diophantine problems, *J. d'Analyse Math.* d'Israël (à paraître).
- [3] W. RUDIN, Trigonometric series with gaps. *J. Math. Mech.*, 9 (1960), 203-228.
- [4] DUNFORD et SCHWARTZ, *Linear Operators*.

Manuscrit reçu en Novembre 1964.

Jean-François MÉLA,  
69, rue Galande,  
Paris (5<sup>e</sup>),