ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROSE-MARIE HERVÉ

Un principe du maximum pour les sous-solutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forme $Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) = 0$

Annales de l'institut Fourier, tome 14, nº 2 (1964), p. 493-507

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_2_493_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 2 (1964), 493-508.

UN PRINCIPE DU MAXIMUM POUR LES SOUS-SOLUTIONS LOCALES D'UNE ÉQUATION UNIFORMÉMENT ELLIPTIQUE DE LA FORME

$$\mathrm{L}u = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0.$$

par Rose-Marie HERVÉ

On sait que les fonctions φ, limites dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ ainsi que leurs dérivées partielles premières, de fonctions $\in \mathcal{D}(\Omega)$, jouent le rôle de fonctions « nulles à la frontière ». Le principe du maximum démontré dans cet article est le suivant : une sous-solution locale de $\mathrm{L}u = 0$ dans l'ouvert Ω, majorée p.p. au voisinage de la frontière par une fonction φ, est $\leqslant 0$ p.p. dans Ω (th. 1).

Puis, en utilisant des propriétés maintenant classiques des solutions locales de $\mathrm{L}u = 0$, on montre qu'elles constituent un système de fonctions harmoniques satisfaisant à l'axiomatique de M. Brelot, ce qui permet de parler de fonctions sous-harmoniques et de problème de Dirichlet au sens de Perron-Wiener-Brelot. La question se posait alors de comparer la solution du problème de Dirichlet à celle construite par Littman, Stampacchia et Weinberger dans un article récent [4].

Comme conséquences du th. 1, on démontre d'abord un principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques : une fonction sous-harmonique dans un ouvert Ω, majorée au voisinage de la frontière par une fonction φ s.c.i., est

$\leqslant 0$ dans Ω (th. 2); puis on montre que la solution du problème de Dirichlet, correspondant à une donnée sur $\partial\Omega$ prolongeable en une fonction f continue sur $\overline{\Omega}$ et dont les dérivées partielles premières $\in L^2(\Omega)$, n'est autre que la solution de $Lu = 0$ dans Ω, telle que u-f soit une fonction φ (th. 3).

Notations.

Ω est un domaine borné de l'espace euclidien R^n.

L'opérateur $Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$ satisfait aux hypothèses suivantes : $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ sont des fonctions mesurables dans Ω et, $\forall x \in \Omega$:

$$\frac{1}{\lambda}\sum_i \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leqslant \lambda \sum_i \xi_i^2,$$

où $\lambda \geqslant 1$; de là résulte que les a_{ij} sont bornés.

$W^{1,q}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f \in L^q(\Omega)$, $q \geqslant 1$, telles que $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^q(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots n$, muni de la norme

$$\|f\|_{W^{1,q}(\Omega)} = \|f\|_{L^q(\Omega)} + \|\text{grad } f\|_{L^q(\Omega)}.$$

$W^{1,q}_{\text{loc}}(\Omega)$ est l'espace des $f \in W^{1,q}(\Omega')$ pour tout ouvert $\Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$.

$W^{1,q}_0(\Omega)$ est l'adhérence, dans $W^{1,q}(\Omega)$, de $\mathfrak{D}(\Omega)$ (espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω); c'est aussi l'adhérence, dans $W^{1,q}(\Omega)$, des fonctions $\in W^{1,q}(\Omega)$ à support compact dans Ω. Pour les fonctions $f \in W^{1,q}_0(\Omega)$, la norme de $W^{1,q}(\Omega)$ est équivalente à $\|\text{grad } f\|_{L^q(\Omega)}$, notée $\|f\|_{W^{1,q}_0(\Omega)}$.

$C^0(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ et $C^1(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions $\in C^0(\overline{\Omega})$, dont les dérivées partielles premières dans Ω sont prolongeables continûment dans $\overline{\Omega}$.

Une solution (resp. une solution locale) de $Lu = 0$ dans Ω est une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ (resp. $W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$) telle que

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega),$$

ou encore $\forall \varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)$ (resp. $\forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ à support compact dans Ω); une sous-solution (resp. une sous-solution locale) dans Ω est une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ (resp. $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$) telle que

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \leqslant 0, \ \forall \varphi \geqslant 0 \text{ et } \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ou encore $\forall \varphi \geqslant 0$ et $\in W^{1,2}_0(\Omega)$ (resp. $\forall \varphi \geqslant 0$, $\in W^{1,2}(\Omega)$ et à support compact dans Ω).

Plus généralement, une solution de l'équation

$$\mathrm{L}u = -\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

dans Ω, où $f_1, f_2 \dots f_n \in L^2(\Omega)$, est une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ telle que $\displaystyle\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_\Omega \sum_i f_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

1. Un principe du maximum pour les sous-solutions.

LEMME 1. — *L'application $f \to |f|$ de $W^{1,q}(\Omega)$ dans lui-même est continue.*

$f \in W^{1,q}(\Omega)$ entraîne $|f| \in W^{1,q}(\Omega)$, car $\dfrac{\partial |f|}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\chi_{A^+} - \chi_{A^-})$, où $A^+ = \{x \in \Omega | f(x) > 0\}$, $A^- = \{x \in \Omega | f(x) < 0\}$ et χ_A désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A.

Soit f_n tendant vers f dans $W^{1,q}(\Omega)$. On a :

$$\| |f_n| - |f| \|_{L^q(\Omega)} \leqslant \| f_n - f \|_{L^q(\Omega)} \to 0.$$

D'autre part :

$$\frac{\partial |f_n|}{\partial x_i} - \frac{\partial |f|}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(\chi_{A_n^+} - \chi_{A_n^-}) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(\chi_{A_n^+} - \chi_{A^+} - \chi_{A_n^-} + \chi_{A^-});$$

pour le premier terme de la somme :

$$\left\| \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(\chi_{A_n^+} - \chi_{A_n^-}) \right\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \left\| \frac{\partial f_n}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^q(\Omega)} \to 0;$$

comme le second terme est majoré en valeur absolue par $2\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right| \in L^q(\Omega)$, il suffit d'extraire de la suite n une suite partielle

n' pour laquelle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\chi_{A^+_{n'}} - \chi_{A^+} - \chi_{A^-_{n'}} + \chi_{A^-}) \to 0$ p.p. dans Ω : on choisit une suite partielle telle que $f_{n'} \to f$ p.p. dans Ω, et on remarque que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ p.p. sur $\Omega - (A^+ \cup A^-)$.

Conséquence : si $f_n \to f$ et $g_n \to g$ dans $W^{1,q}(\Omega)$, alors $\inf(f_n, g_n) \to \inf(f, g)$ et $\sup(f_n, g_n) \to \sup(f, g)$ dans $W^{1,q}(\Omega)$.

Lemme 2. — *Soit* $\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$, *et* $f \in W^{1,q}(\Omega)$, $\geqslant 0$ *p.p. au voisinage de* $\partial\Omega$ *(c'est-à-dire sur* Ω — *un compact* $\subset \Omega$*). Alors* $\inf(\varphi, f) \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

φ est limite dans $W^{1,q}(\Omega)$ d'une suite de fonctions $\varphi_n \in W^{1,q}(\Omega)$, nulles au voisinage de $\partial\Omega$; donc $\inf(\varphi, f)$ est limite, dans $W^{1,q}(\Omega)$, des fonctions $\inf(\varphi_n, f)$, qui sont nulles p.p. au voisinage de $\partial\Omega$; par suite $\inf(\varphi, f) \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Conséquence : si $\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$, φ^+ et φ^- aussi.

Lemme 3. — *Soit* $f \in W^{1,q}(\Omega)$. *S'il existe une fonction* $\varphi \in W_0^{1,q}$ *telle que* $0 \leqslant f \leqslant \varphi$ *p.p. au voisinage de* $\partial\Omega$, *alors* $f \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

D'après le lemme 2, $\inf(\varphi, f) \in W_0^{1,q}(\Omega)$, donc aussi f qui lui est égal p.p. au voisinage de $\partial\Omega$.

Une application du lemme 3 est la suivante : une fonction $\in W^{1,q}(\Omega)$, $\geqslant m > 0$ au voisinage de $\partial\Omega$, n'appartient pas à $W_0^{1,q}(\Omega)$.

En effet, une constante non nulle $\notin W_0^{1,q}(\Omega)$.

Lemme 4. (1) — *Soit* u *une sous-solution dans* Ω, *majorée p.p. au voisinage de* $\partial\Omega$ *par une fonction* $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. *Alors* $u \leqslant 0$ *p.p. dans* Ω.

$\varphi^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$, et $u \leqslant \varphi$ p.p. au voisinage de $\partial\Omega$ entraîne $u^+ \leqslant \varphi^+$ p.p. au voisinage de $\partial\Omega$; donc $u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (lemme 3). On peut le porter dans la définition des sous-solutions dans Ω :

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u^+}{\partial x_j} dx = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \frac{\partial u^+}{\partial x_j} dx \leqslant 0,$$

(1) Ce principe du maximum sera étendu aux sous-solutions locales; c'est pourquoi, malgré ses conséquences, on ne l'énonce qu'en lemme.

donc aussi $\sum_i \left\| \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$ en utilisant l'hypothèse d'uniforme ellipticité.

On en déduit : $u^+ =$ une constante p.p. dans Ω, et cette constante est 0 car $u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Remarque. — Plus généralement, si u est une sous-solution dans Ω, telle que $u \leqslant M +$ une fonction $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ p.p. au voisinage de $\partial\Omega$, alors $u \leqslant M$ p.p. dans Ω.

Conséquences du lemme 4.

1) On retrouve (corollaire ci-dessous) le principe du maximum démontré par Littman, Stampacchia et Weinberger [4], et utilisant la notion de « fonction $\geqslant 0$ sur $\partial\Omega$ au sens de $H^{1,q}(\Omega)$ » : $H^{1,q}(\Omega)$ étant l'adhérence de $C^1(\overline{\Omega})$ dans $W^{1,q}(\Omega)$, une fonction $u \in H^{1,q}(\Omega)$ est $\geqslant 0$ sur $\partial\Omega$ au sens de $H^{1,q}(\Omega)$, si elle est limite, dans $W^{1,q}(\Omega)$, d'une suite de fonctions $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$, $\geqslant 0$ sur $\partial\Omega$.

Corollaire. — *Une sous-solution dans* Ω, $\in H^{1,2}(\Omega)$ *et* $\leqslant 0$ *sur* $\partial\Omega$ *au sens de* $H^{1,2}(\Omega)$, *est* $\leqslant 0$ *p.p. dans* Ω.

Soit u une telle fonction; elle est limite dans $W^{1,2}(\Omega)$ d'une suite de fonctions $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$, qu'on peut rendre < 0 sur $\partial\Omega$, donc $\leqslant 0$ au voisinage de $\partial\Omega$. Alors $u_n^+ \to u^+$ dans $W^{1,2}(\Omega)$ et chaque u_n^+ est une fonction $\in W^{1,2}(\Omega)$, à support compact dans Ω. Par suite, $u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$, et u, $\leqslant u^+$ dans Ω, satisfait aux hypothèses du lemme 4.

2) On peut aussi déduire du lemme 4 un autre principe du maximum, valable pour les sous-solutions locales :

Proposition 1. — *Si une sous-solution locale u dans Ω est telle que, pour chaque $y \in \partial\Omega$,* $\limsup \operatorname{ess}_{\substack{x\in\Omega \\ x\to y}}$ (²) $u(x) \leqslant 0$, *alors $u \leqslant 0$ p.p. dans Ω.*

L'hypothèse entraîne, pour chaque $\varepsilon > 0$, l'existence d'un voisinage V de $\partial\Omega$ tel que $u \leqslant \varepsilon$ p.p. dans $V \cap \Omega$. Si Ω' est un ouvert de Ω, tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ et V voisinage de $\partial\Omega'$, le lemme 4, appliqué à $u - \varepsilon$ dans Ω', donne $u - \varepsilon \leqslant 0$ p.p. dans Ω', donc aussi p.p. dans Ω, et ceci quel que soit $\varepsilon > 0$.

(²) C'est-à-dire la borne inférieure, quand V décrit le filtre des voisinages de y, du sup. ess. de u sur $V \cap \Omega$.

2. Énoncés de théorèmes connus [3].

1) Propriétés des solutions locales de $\mathrm{L}u = 0$.

Une propriété bien connue des solutions locales est la suivante (cf. par exemple [7]) :

LEMME. — *Soit u une solution locale de* $\mathrm{L}u = 0$ *dans* Ω. *Pour toute boule* $\mathrm{B}(y, \mathrm{R})$, *de centre y et de rayon* R, *contenue dans* Ω :

$$\sum_i \int_{\mathrm{B}(y,\mathrm{R}-\sigma)} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \leqslant \frac{4\lambda^4}{\sigma^2} \int_{\mathrm{B}(y,\mathrm{R})} u^2\, dx, \qquad \forall \sigma > 0 \quad et \quad < \mathrm{R}.$$

Plus généralement, pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$, *si* σ *est un nombre* > 0, *et* $<$ *la distance de* K *à* $\partial\Omega$, *et* K′ *l'ensemble des points dont la distance à* K *est* $\leqslant \sigma$:

$$\sum_i \int_{\mathrm{K}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \leqslant \frac{4\lambda^4}{\sigma^2} \int_{\mathrm{K}'} u^2\, dx.$$

Les deux propriétés essentielles des solutions locales sont, d'une part leur continuité, d'autre part une propriété de Harnack pour les solutions $\geqslant 0$:

THÉORÈME A [2, 9, 7]. — *Une solution locale de* $\mathrm{L}u = 0$ *dans* Ω *est localement lipschitzienne dans* Ω. *Plus précisément, si* $\int_\Omega u^2\, dx \leqslant 1$, *pour chaque compact* $\mathrm{K} \subset \Omega$, *il existe deux constantes* α *et* $\beta > 0$, *dépendant seulement de* n, λ, K *et* Ω, *telles que*

$$|u(x) - u(x')| \leqslant \beta |x - x'|^\alpha \quad \forall \quad x \text{ et } x' \in \mathrm{K}.$$

THÉORÈME B [8]. — *Si u est une solution locale* $\geqslant 0$ *de* $\mathrm{L}u = 0$ *dans* Ω, *pour tout compact* $\mathrm{K} \subset \Omega$:

$$\sup_{\mathrm{K}} u \leqslant c \inf_{\mathrm{K}} u,$$

où c est une constante > 0 *dépendant seulement de* n, λ, K *et* Ω.

2) Existence et unicité de la solution d'un problème aux limites du type de Dirichlet.

[3] Ce rappel est directement inspiré de celui donné dans [4].

Pour un domaine borné Ω quelconque, on a le théorème suivant :

Théorème C [5]. — *Soit f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, n fonctions* $\in L^2(\Omega)$. *Étant donné* $f \in W^{1,2}(\Omega)$, *il existe une fonction u unique, solution de* $Lu = -\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ *dans* Ω, *et telle que*

$$u - f \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

En outre :

$$\|u - f\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leqslant \lambda \sum_i \left\| f_i - \sum_j a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)},$$

où λ est la constante d'uniforme ellipticité de l'opérateur L.

En particulier, en prenant $f_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, le théorème C associe à chaque $f \in W^{1,2}(\Omega)$, une solution unique de $Lu = 0$ dans Ω, notée L_f^Ω dans la suite.

Si la frontière de Ω est assez régulière, par exemple pour des boules β, on peut préciser l'allure à la frontière de la solution donnée par le théorème C :

Théorème D [11, 6]. — *Soit β une boule de* R^n *et f_i, $i = 1, 2 \ldots n$, n fonctions* $\in L^p(\beta)$, *où $p > n$. Alors, la solution dans β de* $Lu = -\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, *associée par le théorème* C *à chaque* $f \in W^{1,p}(\beta)$, *est lipschitzienne dans β.*

En particulier, si $f \in W^{1,p}(\beta)$ avec $p > n$, L_f^β est lipschitzienne dans β, donc peut être prolongée continûment à $\overline{\beta}$; comme une fonction $\in W_0^{1,2}(\beta)$, continue sur $\overline{\beta}$, est nulle sur $\partial\beta$, si $f \in C^0(\overline{\beta}) \cap W^{1,p}(\beta)$, le prolongement de L_f^β est f sur $\partial\beta$ et L_f^β est la solution du problème classique de Dirichlet dans la boule β, pour la donnée f.

3. Propriétés de l'application $f \to L_f^\Omega$.

Où L_f^Ω est la solution de $Lu = 0$ dans Ω, associée à chaque $f \in W^{1,2}(\Omega)$, telle que $f - L_f^\Omega \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Proposition 2. — *L'application $f \to L_f^\Omega$ de* $W^{1,2}(\Omega)$ *dans lui-même est linéaire et croissante.*

La linéarité résulte de l'unicité de la solution donnée par le théorème C.

Soit f et $f' \in W^{1,2}(\Omega)$, $f \leqslant f'$ p.p. dans Ω.
$L_f^\Omega - L_{f'}^\Omega = f - f' + [\text{une fonction } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)] \leqslant \varphi$ p.p. dans Ω; donc (lemme 4) $L_f^\Omega - L_{f'}^\Omega \leqslant 0$ dans Ω.

Proposition 3. — *L'application* $f \to L_f^\Omega$ *vérifie, pour* $f \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$:

1) $\sup\limits_{\Omega} L_f^\Omega \leqslant \sup\limits_{\partial\Omega} f$;

2) $\delta \|\mathrm{grad}\, L_f^\Omega\|_{L^2(\Omega')} \leqslant d \sup\limits_{\partial\Omega} |f|$, $\forall$ *ouvert* $\Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$, *où* δ *est la distance de* $\overline{\Omega}'$ *à* $\partial\Omega$ *et* d *est une constante ne dépendant que de* n, λ *et* Ω [4].

Si Ω *est une boule* β, *on a, pour* $f \in C^0(\overline{\beta}) \cap W^{1,p}(\beta)$ *avec* $p > n$:

$$\sup_{\beta} L_f^\beta = \sup_{\partial\beta} f. \tag{1'}$$

f continue sur Ω entraîne $f \leqslant \sup\limits_{\partial\Omega} f + \varepsilon$ au voisinage de $\partial\Omega$; d'où $L_f^\Omega \leqslant \sup\limits_{\partial\Omega} f + \varepsilon + [\text{une fonction} \in W_0^{1,2}(\Omega)]$ au voisinage de $\partial\Omega$, et, d'après le lemme 4: $L_f^\Omega \leqslant \sup\limits_{\partial\Omega} f + \varepsilon$ dans Ω. On en déduit (1), et (1′) en tenant compte du théorème D.

L'inégalité (2) résulte alors du lemme rappelé au n° 2.

Proposition 4. — *L'application* $f \to L_f^\Omega$, *de* $W^{1,2}(\Omega)$ *dans lui-même, est continue. On a même, pour tout ouvert* $\omega \subset \Omega$:

$$\|L_f^\omega\|_{W^{1,2}(\omega)} \leqslant k \|f\|_{W^{1,2}(\omega)},$$

où k *ne dépend que de* n, λ *et* Ω.

L'inégalité du théorème C s'écrit :

$$\|\mathrm{grad}\,(L_f^\omega - f)\|_{L^2(\omega)} \leqslant \lambda \sum_i \left\| \sum_j a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\omega)}.$$

Les a_{ij} sont majorés par un nombre A ne dépendant que de λ; d'où

$$\|\mathrm{grad}\,(L_f^\omega - f)\|_{L^2(\omega)} \leqslant \lambda A n^2 \|\mathrm{grad}\, f\|_{L^2(\omega)},$$

[4] Ces inégalités sont démontrées dans [4] pour les $f \in C^1(\overline{\Omega})$.

et

$$\|\text{grad } L_f^\omega\|_{L^2(\omega)} \leqslant (1 + \lambda A n^2)\|\text{grad } f\|_{L^2(\omega)}.$$

D'autre part, pour toute $\varphi \in W_0^{1,2}(\omega)$:

$$\|\varphi\|_{L^2(\omega)} \leqslant \|\text{grad } \varphi\|_{L^2(\omega)} \times \text{le diamètre de } \omega.$$

Donc, si d est le diamètre de Ω :

$$\|L_f^\omega - f\|_{L^2(\omega)} \leqslant d\|\text{grad } (L_f^\omega - f)\|_{L^2(\omega)},$$

et

$$\|L_f^\omega\|_{L^2(\omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(\omega)} + d\lambda A n^2\|\text{grad } f\|_{L^2(\omega)}.$$

Proposition 5. — *Soit* $f \in W^{1,2}(\Omega)$; *pour tout ouvert* $\omega \subset \Omega$, *la fonction* $f_\omega = \left|\begin{array}{l} L_f^\omega \textit{ dans } \omega \\ f \textit{ dans } \Omega - \omega \end{array}\right. \in W^{1,2}(\Omega)$ *et*

$$\|f_\omega\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant k'\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \tag{1}$$

où k' ne dépend que de n, λ et Ω.

Par suite, L_f^Ω *est limite faible, dans* $W^{1,2}(\Omega)$, *de* f_{ω_n}, *pour toute suite d'ouverts* $\omega_n \subset \Omega$ *telle que tout compact* $\subset \Omega$ *soit contenu dans* ω_n *dès que* n *est assez grand.*

Par hypothèse, $\varphi = L_f^\omega - f \in W_0^{1,2}(\omega)$, donc

$$\tilde{\varphi} = \left|\begin{array}{l} \varphi \text{ dans } \omega \\ 0 \text{ dans } \Omega - \omega \end{array}\right.$$

a pour dérivées partielles premières celles de φ prolongées par 0 dans $\Omega - \omega$[10]. On en déduit: $\tilde{\varphi} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, d'où $f_\omega \in W^{1,2}(\Omega)$, puis l'inégalité (1), avec $k' = k + 1$, en utilisant celle de la proposition 4.

ω_n étant une suite d'ouverts satisfaisant aux hypothèses de l'énoncé, il existe, grâce à l'inégalité (1), une suite partielle notée, n', telle que $f_{\omega_{n'}}$ converge faiblement vers u, dans l'espace de Hilbert $W^{1,2}(\Omega)$. Il suffit de montrer que $u = L_f^\Omega$, c'est-à-dire que u est solution de $Lu = 0$ dans Ω et $u - f \in W_0^{1,2}(\Omega)$. La première assertion est immédiate et la seconde résulte de ce que $W_0^{1,2}(\Omega)$ est fortement, donc aussi faiblement, fermé dans $W^{1,2}(\Omega)$.

4. Les solutions locales de $Lu = 0$ forment un système de fonctions harmoniques dans Ω, satisfaisant à l'axiomatique de M. Brelot.

Dans chaque ouvert $\omega \subset \Omega$, les solutions locales de $Lu = 0$, appelées dans la suite fonctions harmoniques, sont finies continues et forment un espace vectoriel sur R. Vérifions les axiomes 1,2 et 3'.

Axiome 1. — u harmonique dans ω entraîne u harmonique dans tout ouvert partiel; u défini dans ω et harmonique dans un voisinage ouvert V_x de chaque point $x \in \omega$ entraîne u harmonique dans ω.

Il suffit de faire le recouvrement de ω à l'aide des voisinages V_x et une partition de l'unité en fonctions indéfiniment différentiables, subordonnée à ce recouvrement.

Axiome 2. — Il existe une base des ouverts de Ω formée de domaines réguliers.

Montrons que toute boule $\beta \subset \overline{\beta} \subset \Omega$ est un domaine régulier, c'est-à-dire que toute fonction f, finie continue sur $\partial\beta$, admet un prolongement unique, noté H_f^β, harmonique dans β, continu dans $\overline{\beta}$, et $\geqslant 0$ si $f \geqslant 0$.

L'unicité du prolongement résulte de la proposition 1. Pour en démontrer l'existence [5], on remarque que L_F^β répond à la question si f est la trace sur $\partial\beta$ d'une fonction

$$F \in C^0(\overline{\beta}) \cap W^{1,p}(\beta),$$

où $p > n$ (théorème D et proposition 2). Le cas général s'en déduit en utilisant la proposition 3 et le fait que toute fonction $\in C^0(\partial\beta)$ peut être approchée, uniformément sur $\partial\beta$, par les restrictions à $\partial\beta$ de fonctions $F \in C^0(\overline{\beta}) \cap W^{1,p}(\beta)$ (par exemple, des polynômes sur l'espace entier); enfin si $f \geqslant 0$, on peut choisir $F \geqslant 0$.

Axiome 3'. — Une fonction harmonique $\geqslant 0$ dans un domaine δ est soit > 0, soit $\equiv 0$ dans δ; et les fonctions harmoniques > 0 dans δ, s'il en existe, égales à 1 en un point $x_0 \in \delta$, sont également continues en x_0.

[5] Cette construction est très voisine de celle indiquée dans [4] pour un ouvert quelconque.

La première partie est une conséquence immédiate du théorème B. Pour vérifier la seconde, on considère un ouvert $\delta' \ni x_0$, $\overline{\delta}' \subset \delta$; pour chacune des fonctions u en question :

$$\sup_{\overline{\delta}'} u \leqslant c \inf_{\overline{\delta}'} u \leqslant c;$$

donc $\int_{\delta'} u^2\, dx \leqslant c_1$, et (théorème A), si K est un voisinage compact de x_0, $\subset \delta'$: $|u(x) - 1| \leqslant \beta c_2 |x - x_0|^\alpha \quad \forall x \in \mathrm{K}$.

Les axiomes 1, 2, 3′ étant satisfaits, on peut définir les fonctions sous-harmoniques et surharmoniques dans un ouvert $\omega \subset \Omega$, ainsi que les potentiels dans ω (ce sont les fonctions surharmoniques dans ω, admettant 0, comme plus grande minorante harmonique dans ω).

Les solutions dans Ω d'une équation de la forme

$$\mathrm{L}u = -\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \tag{1}$$

où $f_i \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ avec $p > n$, et $\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ est une mesure $\geqslant 0$ dans Ω, fournissent un exemple de fonctions sous-harmoniques continues dans Ω : la continuité résulte du théorème D, car une solution u de (1) dans Ω et une solution de (1) dans une boule $\beta \subset \Omega$ diffèrent d'une fonction harmonique dans β, et, dans toute boule $\beta \subset \overline{\beta} \subset \Omega$, on a $u \leqslant \mathrm{H}_u^\beta$ (proposition 1). Si en outre la mesure $\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ a pour support $\overline{\Omega}$, u n'est harmonique dans aucun ouvert partiel.

D'autre part, le théorème C permet d'avoir $u \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$, donc $u \leqslant 0$ (lemme 4) : par suite, il existe dans Ω des potentiels continus > 0.

5. Un principe du maximum pour les sous-solutions locales. Le problème de Dirichlet dans Ω.

Théorème 1. — *Une sous-solution locale dans Ω, majorée p.p. au voisinage de $\partial\Omega$ par une fonction $\in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$, est $\leqslant 0$ p.p. dans Ω.*

Soit u une sous-solution locale dans Ω et φ la fonction $\in \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$ majorant u p.p. au voisinage de $\partial\Omega$. On considère une suite croissante d'ouverts $\omega_n \subset \overline{\omega}_n \subset \Omega$, dont la réunion est Ω; la suite $\varphi_{\omega_n} = \left| \begin{array}{l} L_\varphi^{\omega_n} \text{ dans } \omega_n \\ \varphi \text{ dans } \Omega - \omega_n \end{array} \right.$ a pour limite faible O dans $W^{1,2}(\Omega)$ (proposition 5). D'autre part, pour n assez grand :

$u \leqslant \varphi$ p.p. dans $\Omega - \omega_n$, et p.p. au voisinage de $\partial\omega_n$, donc aussi $u - L_\varphi^{\omega_n} \leqslant \varphi - L_\varphi^{\omega_n}$ p.p. au voisinage de $\partial\omega_n$; par suite (lemme 4) :

$u - L_\varphi^{\omega_n} \leqslant 0$ p.p. dans ω_n, ou encore $u - \varphi_{\omega_n} \leqslant 0$ p.p. dans Ω. Alors, pour tout ensemble mesurable

$$E \subset \overline{E} \subset \Omega : \int_E (u - \varphi_{\omega_n})\, dx \leqslant 0;$$

comme $\int_E \varphi_{\omega_n}\, dx \to 0$, on a $\int_E u\, dx \leqslant 0\ \forall\ E$, d'où $u \leqslant 0$ p.p. dans Ω.

Corollaire. — *Une fonction surharmonique* $\geqslant 0$ *dans* Ω, $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, *est un potentiel dans* Ω.

Car toutes ses minorantes harmoniques dans Ω sont $\leqslant 0$.

Théorème 2. — *Une fonction sous-harmonique dans* Ω, *majorée au voisinage de* $\partial\Omega$ *par une fonction s.c.i* $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, *est* $\leqslant 0$ *dans* Ω (6).

Soit u sous-harmonique dans Ω, et φ une fonction s.c.i. $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ majorant u au voisinage de $\partial\Omega$. Si $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$ est un ouvert régulier, assez grand pour que $u \leqslant \varphi$ sur $\Omega - \omega$, en chaque point $y \in \partial\omega$:

$$\limsup_{\substack{x \in \omega \\ x \to y}} H_u^\omega(x) \leqslant u(y) \leqslant \varphi(y);$$

on en déduit, grâce à la s.c.i. de φ :

$H_u^\omega \leqslant \varphi + \varepsilon$ au voisinage de $\partial\omega$, ou encore

$$H_u^\omega - \varepsilon - L_\varphi^\omega \leqslant \varphi - L_\varphi^\omega \quad \text{au voisinage de } \partial\omega.$$

Donc (théorème 1) :

$H_u^\omega - \varepsilon - L_\varphi^\omega \leqslant 0$ dans ω, $\forall \varepsilon > 0$, soit $H_u^\omega \leqslant L_\varphi^\omega$ dans ω.

(6) Note ajoutée sur les épreuves : un article, à paraître prochainement, améliore ce résultat en supprimant l'hypothèse de s. c. i.

On considère une suite croissante d'ouverts réguliers ω_n, dont la réunion est Ω [3; proposition 7.1]; $H_u^{\omega_n}$ est une suite croissante de fonctions harmoniques, donc sa limite h est harmonique dans Ω ou $+\infty$. Or $H_u^{\omega_n}$ est majoré par $L_\varphi^{\omega_n}$ dans ω_n; donc (proposition 5), pour tout ensemble mesurable $E \subset \overline{E} \subset \Omega$: $\int_E h\, dx \leqslant 0$. Par suite, h est harmonique et $\leqslant 0$ dans Ω, et $u \leqslant h \leqslant 0$ dans Ω.

Remarque. — Comme cas particulier du théorème 2, on voit qu'une fonction sous-harmonique continue dans Ω, $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, est $\leqslant 0$ dans Ω.

Le problème de Dirichlet dans Ω, pour une donnée continue sur $\partial\Omega$.

Soit f une fonction continue sur $\partial\Omega$; la solution du problème de Dirichlet correspondante, H_f^Ω, est l'enveloppe supérieure des « sous-fonctions » (fonctions sous-harmoniques dans Ω dont la lim sup en chaque point frontière est $\leqslant f$) ou encore l'enveloppe inférieure des « surfonctions ».

$f \to H_f^\Omega$ est une application linéaire croissante de $C^0(\partial\Omega)$ dans l'espace des fonctions harmoniques dans Ω; elle vérifie

$$\sup_\Omega H_f^\Omega \leqslant \sup_{\partial\Omega} f; \tag{1}$$

on le voit, par exemple, en remarquant que $H_1^\Omega = 1$ et en utilisant la croissance de l'application.

Dans [4], Littman, Stampacchia et Weinberger définissent aussi une application $f \to H'^\Omega_f$ de $C^0(\partial\Omega)$ dans l'espace des fonctions harmoniques dans Ω, linéaire, croissante et vérifiant (1) : si f est la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction

$$F \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega),$$

H'^Ω_f est la solution L_F^Ω donnée par le théorème C; on passe au cas général en approchant f, uniformément sur $\partial\Omega$, par les traces sur $\partial\Omega$ de polynômes sur tout l'espace et en utilisant la proposition 3.

Grâce à l'inégalité (1), pour comparer H_f^Ω et H'^Ω_f, il suffit de supposer que f est la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction $\in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$; l'identité de ces deux fonctions résulte alors du théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Si* f *est la trace sur* $\partial\Omega$ *d'une fonction* $F \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$, *la solution du problème de Dirichlet, au sens de Perron-Wiener-Brelot, est la solution* L_F^Ω *de* $Lu = 0$ *dans* Ω, *telle que* $F - L_F^\Omega \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Soit u une « sous-fonction »; pour tout $y \in \partial\Omega$,

$$\limsup_{\substack{x \in \Omega \\ x \to y}} u(x) \leqslant f(y),$$

donc

$$u \leqslant F + \varepsilon \qquad \text{au voisinage de } \partial\Omega,$$

ou encore $u - L_F^\Omega \leqslant \varepsilon +$ une fonction continue $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, au voisinage de $\partial\Omega$. On en déduit (théorème 2) :

$$u - L_F^\Omega \leqslant \varepsilon \text{ dans } \Omega, \forall \varepsilon > 0, \text{ soit } u \leqslant L_F^\Omega \text{ dans } \Omega.$$

On a de même, pour toute « surfonction » $v : v \geqslant L_F^\Omega$ dans Ω; d'où $L_F^\Omega = H_f^\Omega$.

Remarque. — Une conséquence de l'identité de H_f^Ω et H'^Ω_f est que les points réguliers définis dans [4] sont les points réguliers pour le problème de Dirichlet au sens de Perron-Wiener-Brelot; ceux-ci ne dépendent donc pas de l'opérateur L et coïncident avec les points Δ-réguliers [4]. Notons que la méthode exposée dans [3] (pour des opérateurs à coefficients localement lipschitziens) et utilisant l'effilement, conduirait au même résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BRELOT, Lectures on potential theory, *Tata Institute of fundamental research*, 1960.

[2] E. DE GIORGI, Sulla differentiabilità e l'analiticità delle extremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Accad. Sci. Torino*, 1957.

[3] R. M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 1962.

[4] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA et H. F. WEINBERGER. Regular points for elliptic equations with discontinuous cœfficients, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 1963.

[5] E. MAGENES et G. STAMPACCHIA, I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 1958.

[6] C. B. MORREY, Second order elliptic equations in several variables and Holder continuity, *Math. Zeit*, 1959.

[7] J. Moser, A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1960.

[8] J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1961.

[9] J. Nash, Continuity of the solutions of parabolic and elliptic equations, *Amer. J. Math.*, 1958.

[10] L. Schwartz, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, 1954-55, *Secrétariat math.*, 11, rue P. Curie, Paris.

[11] G. Stampacchia, Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni holderiane, *Ann. di Matem.*, 1960.

Manuscrit reçu en septembre 1964

Mme R.-M. Hervé,
Faculté des Sciences de Nancy,
Nancy (M.-et-M.).