

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LIVIU DAIA

La transformation de Fourier pour les $\mathcal{D}$ -modules

Annales de l'institut Fourier, tome 50, n° 6 (2000), p. 1891-1944

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_6_1891_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_6_1891_0)

© Annales de l'institut Fourier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA TRANSFORMATION DE FOURIER POUR LES $\mathcal{D}$ -MODULES

par Liviu DAIA

Sommaire.

Introduction	1892
1. Rappels sur les $\mathcal{D}$ -modules	1892
1.1. L'algèbre de Weyl	1893
1.2. Dualité	1894
1.3. Images inverses	1895
1.4. Images directes	1895
1.5. Solutions et complexes de de Rham	1898
1.6. Cohomologie locale algébrique	1899
1.7. V -filtrations et $\mathcal{D}$ -modules spécialisables	1900
1.8. $\mathcal{D}$ -modules 1-spécialisables	1902
2. Transformation de Fourier géométrique	1904
2.1. Transformation de Fourier formelle pour les $W(E)$ -modules	1904
2.2. Transformation de Fourier géométrique pour les $\mathcal{D}_E$ -modules	1906
2.3. Transformation de Fourier faisceautique	1913
3. Commutation entre la transformation de Fourier géométrique et le foncteur solutions	1914
3.1. Énoncé du résultat principal	1914
3.2. Cas des coefficients cohérents	1915
3.3. Réduction au système $b(t\partial_t) - tP$	1921
3.4. Réduction au système $t\partial_t$	1923
3.5. Le système $t\partial_t$	1939
Annexe A. Fonctions admettant à l'infini un développement asymptotique nul. .	1940
Bibliographie	1942

Mots-clés : Transformation de Fourier géométrique – $\mathcal{D}$ -modules réguliers.
Classification math. : 35A27 – 32C38.

Introduction.

Dans son article [30] de 1988, B. Malgrange montre le résultat suivant :

Si W_n est l'algèbre de Weyl sur $\mathbb{C}^n$ et si M est un W_n -module de type fini monodromique, alors on a un isomorphisme $Sol(\mathcal{F}M) \simeq \mathcal{F}^+Sol(M)$,

où $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier formelle pour les W_n -modules, $\mathcal{F}^+$ est la transformation de Fourier faisceautique de [7] et [8], et $Sol()$ est le foncteur solutions pour les W_n -modules.

Il conjecture aussi que le même résultat reste vrai lorsque, à l'infini, les éléments de M admettent une b -fonction avec condition de degré sur l'équation fonctionnelle du type considéré dans [20], th. 7.2, ce qui entraînerait — d'après un résultat de [18] — que le résultat est vrai aussi pour tout M holonome régulier.

Le but est de cette thèse est de donner une réponse affirmative à cette conjecture (voir l'énoncé précis au chapitre 3).

Toutefois, le résultat que nous avons obtenu devrait être valable sous des conditions encore plus générales, car en dimension 1, la bonne condition est que le polygone de Newton de M à l'infini ait ses pentes < 1 (voir [32] sur ce point). Une approche deux-microlocale systématique du problème semble adéquate en ce sens, mais des nouvelles difficultés — liées à la réduction que nous faisons dans la proposition 3.4.2.1 — semblent s'élever. Enfin, le résultat devrait se transposer sans beaucoup de difficulté dans le contexte des $\mathcal{D}_{(E)}$ -modules de [28].

La méthode que nous avons utilisée dans la démonstration de notre résultat principal est largement inspirée du [27]. Nous tenons à remercier très chaleureusement Yves Laurent pour de nombreuses discussions sur ce thème.

Nos remerciements vont aussi à Bernard Malgrange pour ses encouragements et ses conseils, sans lesquels la réalisation de cette thèse aurait été impossible.

1. Rappels sur les $\mathcal{D}$ -modules.

Dans cette section nous allons rappeler quelques définitions et résultats sur les $\mathcal{D}$ -modules, dont nous aurons besoin dans la suite. Pour les

preuves de ces résultats, ainsi que pour plus de détails, commentaires, *etc.*, nous renvoyons le lecteur à la très riche littérature classique sur ce sujet (voir [2], [3], [5], [12], [13]–[15], [19], [35], [37], [40], *etc.*).

Dans tout ce que va suivre, nous allons désigner par E un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 1$, par E' son dual, et par σ (ou bien par $\langle \cdot, \cdot \rangle$) l'application de dualité $E \times E' \longrightarrow \mathbb{C}$.

1.1. L'algèbre de Weyl.

On note par $W(E)$ la $\mathbb{C}$ -algèbre engendrée par $E \oplus E'$ avec les relations

$$(1.1.1) \quad [e_1, e_2] = [e'_1, e'_2] = 0, \quad (\forall) e_1, e_2 \in E, e'_1, e'_2 \in E',$$

$$(1.1.2) \quad [e, e'] = \langle e, e' \rangle, \quad (\forall) e \in E, e' \in E'.$$

Si on fixe une base $x = (x_1, \dots, x_n)$ de E' et si on note par $\partial_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$ la base duale de E , les éléments de $W(E)$ peuvent s'écrire alors de façon unique sous la forme

$$(1.1.3) \quad P(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq q} a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial_x^\beta,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, et $\partial_x^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n}$; il existe donc un isomorphisme entre $W(E)$ et $\Gamma(E, \mathcal{D}_E)$, où $\mathcal{D}_E$ est le faisceau des opérateurs différentiels *algébriques* sur E (*i.e.* à coefficients polynomiaux). On peut montrer que cet isomorphisme ne dépend pas du système de coordonnées choisi.

De plus, on a une équivalence entre la catégorie $\text{Mod}_f(W(E))$ des $W(E)$ -modules (à gauche) de type fini, et la catégorie $\text{Mod}_c(\mathcal{D}_E)$ des $\mathcal{D}_E$ -modules (à gauche aussi) cohérents, de telle façon que tout $M \in \text{Ob}(\text{Mod}_f(W(E)))$ correspond à un $\mathcal{M} \in \text{Ob}(\text{Mod}_c(\mathcal{D}_E))$ tel que $\Gamma(E, \mathcal{M}) \simeq M$ (voir [3], p. 207–209). Dans la suite on va changer librement M et $\mathcal{M}$, tout en notant que l'hypothèse d'*algébricité* des opérateurs impliqués est essentielle.

Nous allons désigner comme d'habitude par $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_E)$ la catégorie dérivée (des complexes bornées) de $\text{Mod}(\mathcal{D}_E)$, et par $\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_E)$, $\mathbf{D}_h^b(\mathcal{D}_E)$ et respectivement $\mathbf{D}_{rh}^b(\mathcal{D}_E)$ les sous-catégories pleines de $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_E)$ des complexes à cohomologie cohérente, respectivement holonome, ou encore holonome régulière.

De même, nous notons par $\mathbf{D}^b(W(E))$ la catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathcal{M}od(W(E))$, et par $\mathbf{D}_f^b(W(E))$ sa sous-catégorie pleine formée par des complexes à cohomologie dans $\mathcal{M}od_f(W(E))$.

Enfin, nous ne ferons aucune distinction entre les *objets* d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ et les *complexes* concentrés en degré 0 qui leur sont associés dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$.

1.2. Dualité.

Si X est une variété analytique ou algébrique lisse (sur $\mathbb{C}$), et si $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X))$ est un complexe de $\mathcal{D}_X$ -modules à gauche, alors

$$(1.2.1) \quad \mathcal{N} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)[\dim_{\mathbb{C}} X]$$

est un complexe de $\mathcal{D}_X$ -modules à droite (cf. [36], [3], [35]).

On définit alors le *complexe dual* $\mathbb{D}_X(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ comme étant le complexe de $\mathcal{D}_X$ -modules à gauche

$$(1.2.2) \quad \mathcal{N}^g = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \mathcal{N})$$

associé à $\mathcal{N}$ (où ω_X est comme d'habitude le faisceau des $n = \dim_{\mathbb{C}} X$ -formes holomorphes — ou algébriques — sur X). Néanmoins, comme il arrive assez souvent que la structure à droite sur $\mathcal{N}$ soit bien plus simple que celle à gauche sur $\mathcal{N}^g$, nous allons utiliser librement $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}^g$ comme représentants de $\mathbb{D}_X(\mathcal{M})$, en prenant bien sûr le soin d'utiliser l'action correspondante de $\mathcal{D}_X$.

Nous obtenons ainsi un foncteur

$$(1.2.3) \quad \mathbb{D}_X(-) : \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$$

qui préserve la cohérence, l'holonomie et la régularité, et qui est involutif sur $\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_X)$ (dans le sens que si $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_X))$, alors il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_X(\mathbb{D}_X(\mathcal{M}))$ — voir [35], [3]).

Remarque 1.2.1. — Nous précisons ici que la notion de régularité que nous utilisons dans le cas algébrique est celle de Mebkhout (voir [35], p. 185) : si X est une variété algébrique lisse, $X \xrightarrow{j} \bar{X}$ une compactification d'Hironaka-Nagata de X et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$ -module cohérent, alors $\mathcal{M}$ est régulier si $(j_*\mathcal{M})^{\text{an}}$ l'est comme $\mathcal{D}_{\bar{X}^{\text{an}}}$ -module. Cela revient à la notion de *régularité complète* de [12], p. 331 (voir aussi dans le même article l'exemple 3.4, p. 337), et c'est équivalent à la définition de [3], p. 302 (cf. [35], p. 183 et 163).

Remarque 1.2.2. — Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$ -module cohérent, $\mathbb{D}_X(\mathcal{M})$ est concentré en degré 0 si et seulement si $\mathcal{M}$ est holonome ([35], [3]). Cela justifie le décalage choisi dans la définition, car on peut montrer alors que la restriction aux modules holonomes de $\mathbb{D}_X(-)$ est un foncteur exact.

1.3. Images inverses.

On considère X et Y variétés analytiques (ou algébriques) complexes lisses, et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme analytique (ou algébrique).

On note $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ le $(\mathcal{D}_Y, f^{-1}\mathcal{D}_X)$ -bimodule suivant (voir [35], p. 60, [3], p. 233) :

$$(1.3.1) \quad \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} = \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{D}_X$$

où $f^{-1}(-)$ est l'image inverse faisceautique, et on définit les foncteurs

$$f^!, f^* : \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_Y)$$

par

$$(1.3.2) \quad f^!(-) = \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}(-)[d],$$

$$(1.3.3) \quad f^*(-) = \mathbb{D}_Y(f^!(\mathbb{D}_X(-)))$$

où $d = \dim_{\mathbb{C}} Y - \dim_{\mathbb{C}} X$ (voir aussi [35], [3] pour les détails).

En général, si f n'est pas lisse, $f^!$ et f^* ne préservent pas la cohérence, mais ils préservent l'holonomie et la régularité (voir [35], [3]).

De plus, on peut montrer que dans le cas des variétés *algébriques* on a

$$(1.3.4) \quad f^*(\mathcal{M}) \simeq f^!(\mathcal{M})[-2d]$$

si f est lisse, et si $\mathcal{M}$ est à cohomologie cohérente (voir [3], p. 291).

1.4. Images directes.

On considère de nouveau X et Y des variétés analytiques (ou algébriques) complexes lisses et $f : Y \rightarrow X$ morphisme analytique (ou algébrique).

On note par $\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}$ le $(f^{-1}\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y)$ -bimodule suivant (voir [35], p. 61, [3], p. 242, [36], p. 35) :

$$(1.4.1) \quad \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} = f^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \mathcal{D}_X) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \omega_Y.$$

On définit alors le foncteur

$$(1.4.2) \quad \int_{f_*} : \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_Y) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X), \quad \int_{f_*}(-) = \mathbb{R}f_*(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} -),$$

où $f_*(-)$ est l'image directe faisceautique et $\mathbb{R}f_*(-)$ son foncteur dérivé.

On définit encore un foncteur

$$\int_{f_!} : \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_Y) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$$

de la façon suivante :

- dans le cas analytique

$$(1.4.3) \quad \int_{f_!}(-) = \mathbb{R}f_!(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} -),$$

où $f_!(-)$ est l'image directe faisceautique à support propre, et $\mathbb{R}f_!(-)$ son foncteur dérivé;

- dans le cas algébrique

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j} & \bar{Y} \\ & \searrow f & \swarrow \bar{f} \\ & X & \end{array}$$

on prend la compactification $\bar{f}$ d'Hironaka-Nagata de f , et on pose

$$(1.4.4) \quad \int_{f_!} \mathcal{M} = \int_{\bar{f}_*} \mathbb{D}_{\bar{Y}}(\mathbb{R}j_*(\mathbb{D}_Y(\mathcal{M})))$$

pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_Y))$. On vérifie alors que le résultat ne dépend pas de la compactification choisie.

Les foncteurs $\int_{f_!}$ et $\int_{f_*}$ ainsi définis *ne préservent pas* la cohérence, mais, dans le cas algébrique, ils préservent l'holonomie et la régularité (voir [35], [3]).

Si f est propre, on voit aisément que les foncteurs $\int_{f_!}$ et $\int_{f_*}$ coïncident (cf. [3], p. 288 pour le cas algébrique), et dans le cas algébrique on peut montrer qu'on a aussi des isomorphismes canoniques d'adjonction (cf. [3], p. 289, [35], p. 185) :

$$(1.4.5) \quad \mathbb{R}f_* \mathbb{R}Hom_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}, f^! \mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}Hom_{\mathcal{D}_X} \left(\int_{f_!} \mathcal{M}, \mathcal{N} \right)$$

si f est toujours propre, $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_Y))$ et $\mathcal{N} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X))$, et

$$(1.4.6) \quad \mathbb{R}f_* \mathbb{R}Hom_{\mathcal{D}_Y}(f^* \mathcal{N}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}Hom_{\mathcal{D}_X}\left(\mathcal{N}, \int_{f_*} \mathcal{M}\right)$$

de nouveau si f est propre, $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_Y))$ et $\mathcal{N} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_X))$.

Dans le cas analytique, il faut encore ajouter l'hypothèse sur $\mathcal{M}$ d'existence des bonnes filtrations globales sur Y , ou au moins sur X dans le sens suivant : il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X tel que $\mathcal{M}$ admet des bonnes filtrations sur chaque $f^{-1}(U_i)$, $i \in I$. Remarquons que, d'après un théorème de B. Malgrange, cette condition est remplie si en particulier $\mathcal{M}$ est à cohomologie *holonome* (cf. [33], [34]).

Une précision de la formule de projection faisceautique [35], p. 241, permet de montrer qu'on a un isomorphisme canonique

$$(1.4.7) \quad \int_{f_*} (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f^! \mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \left(\int_{f_*} \mathcal{M} \right) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}[d]$$

où $d = \dim_{\mathbb{C}} Y - \dim_{\mathbb{C}} X$ (voir [3], p. 288 pour le cas algébrique, [35], p. 242 pour le cas analytique).

Dans le cas algébrique, on a aussi un théorème de dualité relative : si $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_Y))$, on a un morphisme canonique (dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$)

$$(1.4.8) \quad \int_{f_*} \mathbb{D}_Y(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{D}_X\left(\int_{f_!} \mathcal{M}\right)$$

qui n'est pas un isomorphisme en général, mais qui devient un isomorphisme si f est propre. En fait, cette formule se déduit immédiatement de (1.4.5) en prenant $\mathcal{N} = \mathcal{D}_X$, donc elle est encore valable dans le cas analytique, à condition qu'on ajoute aussi l'hypothèse d'existence des bonnes filtrations de $\mathcal{M}$ sur X comme avant.

Enfin, dans le cas algébrique, si on note par $\mathcal{N}^{\text{an}}$ l'analysé

$$\mathcal{N}^{\text{an}} = \mathcal{O}_{X^{\text{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$$

de $\mathcal{N} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X))$, on a un morphisme canonique

$$(1.4.9) \quad \left(\int_{f_*} \mathcal{M} \right)^{\text{an}} \longrightarrow \int_{f_*} \mathcal{M}^{\text{an}}$$

qui devient un isomorphisme si f est propre (voir [3], p. 330).

1.5. Solutions et complexes de de Rham.

Si X est une variété analytique complexe lisse de dimension n et si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$ -module à gauche cohérent (ou plus généralement un objet de $\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_X)$), nous posons

$$(1.5.1) \quad \text{Sol}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)[n],$$

$$(1.5.2) \quad \text{DR}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})[n]$$

et nous les appelons *complexe des solutions* et respectivement *complexe de de Rham* de $\mathcal{M}$ (voir par exemple [37] et [2] pour une justification pour le choix de ces noms). Ce sont des objets de $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}_X)$.

Si maintenant X est une variété algébrique complexe lisse et si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$ -module cohérent (ou un objet de $\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_X)$), nous considérons l'analytisé

$$\mathcal{M}^{\text{an}} = \mathcal{O}_{X^{\text{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

de $\mathcal{M}$ (qui est $\mathcal{D}_{X^{\text{an}}}$ -cohérent ou dans $\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_X)$), et nous posons

$$\text{Sol}(\mathcal{M}) = \text{Sol}(\mathcal{M}^{\text{an}}), \quad \text{DR}(\mathcal{M}) = \text{DR}(\mathcal{M}^{\text{an}})$$

(voir aussi l'article de B. Malgrange dans [3], ch. IV). C'est-à-dire : même dans le cas algébrique, nous allons nous intéresser aux objets *analytiques* $\text{Sol}(\mathcal{M})$ et $\text{DR}(\mathcal{M})$, leurs version algébriques semblant être peu utiles.

Nous avons un isomorphisme canonique $\text{DR}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \text{Sol}(\mathbb{D}_X(\mathcal{M}))$ pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_X))$ (cf. [35], p. 41), et, dans le contexte algébrique, si Y est une autre variété algébrique lisse et $Y \xrightarrow{f} X$ est un morphisme algébrique, nous avons aussi un isomorphisme canonique

$$(1.5.3) \quad \text{DR}\left(\int_{f_*} \mathcal{M}\right) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}f_* \text{DR}(\mathcal{M})$$

dans $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}_X)$ pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_Y))$ (voir [35], p. 77), qui donne par dualité relative un morphisme (aussi dans $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}_X)$)

$$(1.5.4) \quad \mathbb{R}f_* \text{Sol}(\mathcal{M}) \longrightarrow \text{Sol}\left(\int_{f!} \mathcal{M}\right)$$

qui devient un isomorphisme si f est propre.

Nous aurons besoin de ce résultat dans la suite.

1.6. Cohomologie locale algébrique.

Soient X une variété analytique complexe lisse, $Y \hookrightarrow X$ un sous-espace analytique fermé, et $\mathcal{I}_Y$ l'idéal de Y . Si $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\text{Mod}(\mathcal{D}_X))$, on considère les faisceaux

$$(1.6.1) \quad \Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) = \varinjlim_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^k, \mathcal{M}),$$

$$(1.6.2) \quad \Gamma_{[X|Y]}(\mathcal{M}) = \varinjlim_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_Y^k, \mathcal{M}).$$

On voit facilement (voir [35], p. 80) que $\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})$ et $\Gamma_{[X|Y]}(\mathcal{M})$ sont des $\mathcal{D}_X$ -modules, et on obtient donc deux foncteurs

$$(1.6.3) \quad \Gamma_{[Y]}(-) : \text{Mod}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow \text{Mod}(\mathcal{D}_X),$$

$$(1.6.4) \quad \Gamma_{[X|Y]}(-) : \text{Mod}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow \text{Mod}(\mathcal{D}_X)$$

exacts à gauche, qui se dérivent à droite pour donner

$$(1.6.5) \quad \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(-) : \mathbf{D}^+(\mathcal{D}_X) \longrightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{D}_X),$$

$$(1.6.6) \quad \mathbb{R}\Gamma_{[X|Y]}(-) : \mathbf{D}^+(\mathcal{D}_X) \longrightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{D}_X).$$

On peut montrer qu'on a un triangle distingué dans $\mathbf{D}^+(\mathcal{D}_X)$

$$(1.6.7) \quad \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{[X|Y]}(\mathcal{M}) \xrightarrow{+1}$$

pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}^+(\mathcal{D}_X))$ (cf. [35], p. 81), et qu'il existe des isomorphismes canoniques

$$(1.6.8) \quad \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}),$$

$$(1.6.9) \quad \mathbb{R}\Gamma_{[X|Y]}(\mathcal{O}_X) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{[X|Y]}(\mathcal{M})$$

pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X))$ (cf. [35], p. 86).

Enfin, si on considère

$$\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}} = \varprojlim_k \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^k$$

le complété formel de $\mathcal{O}_X$ le long de Y , on a

$$(1.6.10) \quad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\widehat{X|Y}})$$

pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_X))$ (cf. [35], p. 137).

1.7. V -filtrations et $\mathcal{D}$ -modules spécialisables.

Nous rappelons ici quelques résultats de [16] et [39] (voir aussi [28], [14], [26] et [35], p. 203–211).

Soient X une variété analytique complexe, $Y \hookrightarrow X$ un sous-espace analytique fermé lisse de X , et $\mathcal{J}_Y$ l'idéal de Y . Nous utiliserons les notions qui suivent seulement dans le cas où Y est une hypersurface (lisse) de X , donc nous allons choisir un système de coordonnées $(x_1, \dots, x_n, t)$ sur X tel que Y soit donné par l'équation $\{t = 0\}$ (les résultats étant quand même vrais aussi dans le cas général). On a donc en particulier $\mathcal{J}_Y = t \cdot \mathcal{O}_X$, et on pose

$$(1.7.1) \quad V_k \mathcal{D}_X = \{P \in \mathcal{D}_X \mid P \mathcal{J}_Y^j \subset \mathcal{J}_Y^{j-k} \ (\forall) j \in \mathbb{N}\}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$, où on convient de considérer $\mathcal{J}_Y^{j-k} = \mathcal{O}_X$ si $j - k \leq 0$.

$(V_k \mathcal{D}_X)_{k \in \mathbb{Z}}$ est alors une filtration croissante de $\mathcal{D}_X$, par rapport à laquelle la multiplication par t a l'ordre -1 et la multiplication par $\partial_t = \partial/\partial t$ a l'ordre 1 . L'anneau $\mathrm{gr}_0^V(\mathcal{D}_X)$ s'identifie à $\mathcal{D}_Y[s]$, où $s = \partial_t t$, et on a $V_{-k} = t^k V_0(\mathcal{D}_X)$ pour tout $k \geq 0$ (voir [39], [28]).

Si maintenant $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$ -module cohérent, une filtration croissante de $\mathcal{M}$ $(V_k \mathcal{M})_{k \in \mathbb{Z}}$ sera dite *bonne par rapport à $V_* \mathcal{D}_X$* (ou *bonne V -filtration*) si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- 1) $V_k(\mathcal{M})$ est $V_0(\mathcal{D}_X)$ -cohérent pour tout $k \in \mathbb{Z}$;
- 2) $\mathcal{M} = \varinjlim_{k \in \mathbb{Z}} V_k(\mathcal{M})$;
- 3) $V_{k'}(\mathcal{D}_X) \cdot V_k(\mathcal{M}) \subset V_{k'+k}(\mathcal{M})$ pour tous $k, k' \in \mathbb{Z}$;
- 4) il existe $k_0 \geq 0$ tel que l'inclusion de 3) devienne égalité si $k' \geq 0$, $k \geq k_0$, ou si $k' < 0$, $k \leq -k_0$.

On déduit comme dans [5] que si une filtration $(V_k \mathcal{M})_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifie 1)–3), alors la condition 4) est équivalente à la cohérence de $\mathrm{gr}^V(\mathcal{M})$ sur $\mathrm{gr}^V(\mathcal{D}_X)$, et que pour tout $\mathcal{D}_X$ -module cohérent $\mathcal{M}$ il existe toujours localement de telles bonnes V -filtrations. De plus, si

$$(1.7.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte des $\mathcal{D}_X$ -modules cohérents, alors une bonne V -filtration de $\mathcal{M}$ induit des bonnes V -filtrations sur $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$.

Soit maintenant θ un champ des vecteurs tangents à Y qui agit comme l'identité sur $\mathcal{J}_Y/\mathcal{J}_Y^2$ (θ s'écrit donc localement $\theta = t\partial_t + P$ où $P \in V_{-1}(\mathcal{D}_X)$).

On appelle un $\mathcal{D}_X$ -module (à gauche) $\mathcal{M}$ *spécialisable le long de Y* s'il est cohérent, et si, localement sur Y , il existe une bonne V -filtration $(V_k \mathcal{M})_{k \in \mathbb{Z}}$ de $\mathcal{M}$ et un polynôme non-nul $b \in \mathbb{C}[s]$, tel que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$(1.7.3) \quad b(\theta + k)V_k(\mathcal{M}) \subset V_{k-1}(\mathcal{M}).$$

On dira alors que la V -filtration $(V_k \mathcal{M})_{k \in \mathbb{Z}}$ admet *une b -fonction*, et on appelle le polynôme minimal unitaire $b \in \mathbb{C}[s]$ qui vérifie (1.7.3) le *polynôme de Bernstein-Sato* (ou la *b -fonction*) de $(V_k \mathcal{M})_{k \in \mathbb{Z}}$.

On peut prouver (cf. [39], [35] p. 205) que tout autre bonne V -filtration de $\mathcal{M}$ admet aussi une b -fonction, et que cette condition est aussi équivalente à la condition suivante :

Pour tout système de générateurs $(m_1, \dots, m_p)$ de $\mathcal{M}$ sur un ouvert de X , il existe un polynôme non nul $b \in \mathbb{C}[s]$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$,

$$(1.7.4) \quad b(\theta)m_i \in \sum_{j=1}^p V_{-1}(\mathcal{D}_X) \cdot m_j.$$

Pour éclaircir le sens de cette affirmation et aussi dans le but d'être complet, nous donnons une preuve du lemme 1, p. 138 de [16] :

LEMME 1.7.1. — Pour tout $b \in \mathbb{C}[s]$ et tout $P \in V_k(\mathcal{D}_X)$, on a $b(\theta)P - Pb(\theta - k) \in V_{k-1}(\mathcal{D}_X)$.

Preuve. — Supposons d'abord $k \geq 0$, et soient $(x_1, \dots, x_n, t)$ des coordonnées locales sur X , de tel façon que Y soit donné par $\{t = 0\}$.

Il existe alors $Q = Q(x, \partial_x, (t\partial_t)) \in V_0(\mathcal{D}_X)$ et $R \in V_{k-1}(\mathcal{D}_X)$ tels que $P = Q\partial_t^k + R$, et on a, de façon évidente,

$$b(\theta)R - Rb(\theta) \in V_{k-1}(\mathcal{D}_X) \quad \text{et} \quad Qb(\theta) = b(\theta)Q.$$

Il suffit de montrer que $b(t\partial_t)\partial_t^k = \partial_t^k b(t\partial_t - k)$.

D'autre part, il existe $s_1, \dots, s_p, a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, tel que

$$b(s) = a(s - s_1) \cdots (s - s_p),$$

donc il suffit de prouver encore que $(t\partial_t)\partial_t^k = \partial_t^k((t\partial_t) - k)$. Cela résulte immédiatement de la formule de Leibniz.

Si maintenant $k < 0$, on note $\ell = -k$, et on réduit le problème à montrer que $(t\partial_t)t^\ell = t^\ell((t\partial_t) + \ell)$. Enfin, la dernière égalité est évidente. $\square$

On peut encore prouver (voir [39], [16], p. 137, [35], p. 207) que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$ -module spécialisable et si G est l'image d'une section de la projection canonique $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, alors il existe une *unique* bonne V -filtration $(V_k^G \mathcal{M})_{k \in \mathbb{Z}}$ admettant une b -fonction $b \in \mathbb{C}[s]$ tel que $b^{-1}(0) \subset G$.

Si on a une suite exacte

$$(1.7.5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$$

de $\mathcal{D}_X$ -modules cohérents, alors $\mathcal{M}$ est spécialisable si et seulement si $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ le sont (voir [39], p. 59), et dans ce cas les suites

$$(1.7.6) \quad 0 \rightarrow \mathrm{gr}_k^{V^G}(\mathcal{M}') \rightarrow \mathrm{gr}_k^{V^G}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathrm{gr}_k^{V^G}(\mathcal{M}'') \rightarrow 0$$

sont aussi exactes pour tout G , et tout $k \in \mathbb{Z}$.

On a aussi le résultat fondamental suivant (voir [14], [2], [26]) :

Si un $\mathcal{D}_X$ -module $\mathcal{M}$ est holonome, alors il est spécialisable le long de tout hypersurface lisse de X .

On note par $\mathcal{B}_Y$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$ -modules spécialisables le long de Y , et par $\mathbf{D}_{\mathcal{B}_Y}^b(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_X)$ des complexes à cohomologie dans $\mathcal{B}_Y$.

1.8. $\mathcal{D}$ -modules 1-spécialisables.

Nous gardons les notations de la section précédente, et nous nous intéressons maintenant aux $\mathcal{D}_X$ -modules cohérents $\mathcal{M}$ qui admettent une bonne V -filtration $(V_k \mathcal{M})_{k \in \mathbb{Z}}$ et une b -fonction $b \in \mathbb{C}[s]$ (non nulle) tel que pour toute section locale m de $\mathcal{M}$ (sur un ouvert de X), il existe $P \in V_0 \mathcal{D}_X$ de degré usuel inférieur à $\deg b$, et tel que

$$(b(\theta) - tP) \cdot m = 0.$$

Nous appelons un tel $\mathcal{D}$ -module 1-spécialisable le long de Y , et nous notons (suivant [39]) par $\mathcal{R}_Y$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$ -modules 1-spécialisables le long de Y , et par $\mathbf{D}_{\mathcal{R}_Y}^b(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_X)$ des complexes à cohomologie dans $\mathcal{R}_Y$.

Un $\mathcal{D}_X$ -module $\mathcal{M}$ 1-spécialisable le long de Y est, évidemment, spécialisable, et donc, dans ce cas, pour tout $G \subset \mathbb{C}$ image d'une section de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, il existe une unique bonne V -filtration $(V_k^G \mathcal{M})_{k \in \mathbb{Z}}$ et une unique b -fonction $b \in \mathbb{C}[s]$ qui vérifie la condition précédente, et tel que $b^{-1}(0) \subset G$. On montre alors que, en plus, $\mathrm{gr}^{V^G}(\mathcal{M})$ ne dépend pas du G

choisi (cf. [16], p. 137), et aussi que $\mathcal{M}$ est régulier le long de Y (dans le sens de Mebkhout, [35], p. 135).

La réciproque de la dernière assertion n'est pas vraie en général, mais si $\mathcal{M}$ est régulier (*i.e.* régulier le long de toute hypersurface de X , cf. [35], p. 138), alors d'après un résultat de M. Kashiwara et T. Kawai, il est aussi 1-spécialisable le long de toute hypersurface (voir [18], lemme 4.1.5, p. 59).

Nous aurons aussi besoin dans la suite de l'existence de résolutions (locales) par des modules élémentaires. Nous rappelons (voir [39]) le point suivant.

Sur $\mathcal{D}_X$ nous introduisons la filtration $(F_\ell \mathcal{D}_X)_{\ell \in \mathbb{N}}$ par l'ordre des opérateurs, et nous définissons la bifiltration $(VF_{k,\ell} \mathcal{D}_X)_{k \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N}}$ par

$$(1.8.1) \quad VF_{k,\ell}(\mathcal{D}_X) = V_k(\mathcal{D}_X) \cap F_\ell(\mathcal{D}_X) \quad (k \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N}).$$

Nous considérons alors le $\mathcal{D}_X$ -module

$$L_{k,\ell} = \mathcal{D}_X$$

muni de la bifiltration $VF_{*,*}(\mathcal{D}_X)$ décalée de (k, ℓ) à gauche (*i.e.* $VF_{k',\ell'}(L_{k,\ell}) = VF_{k+k',\ell+\ell'}(\mathcal{D}_X)$), et nous fixons un $b \in \mathbb{C}[s]$ non nul, dont les racines ne diffèrent pas par des entiers non nuls.

Nous appelons un $\mathcal{D}_X$ -module L (à gauche) *élémentaire de polynôme b* s'il existe $k_0, \ell_0 \in \mathbb{N}$ tel que L admet localement une présentation

$$(1.8.2) \quad \bigoplus_{\substack{-k_0 \leq k \leq k_0 \\ 0 \leq \ell \leq \ell_0}} L_{k,\ell} \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{\substack{-k_0 \leq k \leq k_0 \\ 0 \leq \ell \leq \ell_0}} L_{k,\ell+\deg b} \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

où $\varphi = \varphi_0 + \psi$, φ_0 étant la multiplication à droite par $b(\partial_t t + k)$ sur chaque $L_{k,\ell}$, *i.e.*

$$(1.8.3) \quad L_{k,\ell} \xrightarrow{\cdot b(\partial_t t + k)} L_{k,\ell+\deg b}$$

et ψ étant un morphisme de bidegré $(-1, 0)$ si on considère les bifiltrations somme directe sur les deux sommes (cf. [39] pour les détails).

On montre alors (toujours cf. [39]) que pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathcal{R}_Y)$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}$ admet localement sur X une résolution

$$(1.8.4) \quad L_{-\ell} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_{-1} \longrightarrow L_0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

par des $\mathcal{D}_X$ -modules élémentaires L_k de polynôme b , où b est la b -fonction de $\mathcal{M}$.

D'autre part, on prouve aussi (cf. [39]) que si

$$(1.8.5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte des $\mathcal{D}_X$ -modules cohérents, alors $\mathcal{M}$ est 1-spécialisable le long de Y si et seulement si $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ le sont, et cela implique $\mathcal{R}_Y$ épaisse. Ce résultat va nous permettre d'appliquer le lemme du «way-out functor» pour réduire (localement) l'étude des complexes de $\mathbf{D}_{\mathcal{R}_Y}^b(\mathcal{D}_X)$ à l'étude des $\mathcal{D}_X$ -modules de la forme $\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(b(\theta) - tP)$, où $P \in V_0(\mathcal{D}_X)$ et $\deg^F P \leq \deg b$.

2. Transformation de Fourier géométrique.

Nous reprenons ici brièvement quelques définitions et résultats de [7], [8], [23], [30]–[32], [6], [28], [24], et aussi [12].

Nous rappelons que nous avons noté par E un espace vectoriel complexe de dimension n , par E' son dual, et par σ (ou $\langle \cdot, \cdot \rangle$) l'application de dualité $E \times E' \rightarrow \mathbb{C}$.

Nous avons aussi désigné par $W(E)$ l'algèbre de Weyl de E .

2.1. Transformation de Fourier formelle pour les $W(E)$ -modules.

Nous considérons le morphisme des $\mathbb{C}$ -algèbres $W(E) \xrightarrow{\mathcal{F}} W(E')$ donné sur les générateurs $(e, e') \in E \oplus E'$ par $\mathcal{F}(e, e') = (-e', e)$.

En prenant des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ sur E et $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ sur E' (où ξ_i sont les variables duales de x_i), cela veut dire que $\mathcal{F}x_i = -\partial_{\xi_i}$ et $\mathcal{F}\partial_{x_i} = \xi_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et par conséquent nous aurions dû appeler $\mathcal{F}$ la *transformation de Laplace* plutôt que de Fourier. Néanmoins, nous allons suivre la terminologie utilisée dans la littérature, et appeler $\mathcal{F}$ la *transformation de Fourier formelle* de $W(E)$.

On voit alors immédiatement que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres, et que son inverse $\bar{\mathcal{F}}$ est donné par $\bar{\mathcal{F}}\xi_i = \partial_{x_i}$, $\bar{\mathcal{F}}\partial_{\xi_i} = -x_i$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, i.e. la transformation « $\mathcal{F}$ à partir de E' », suivie de la symétrie par rapport à l'origine dans E .

Si maintenant on prend un $W(E)$ -module à gauche M , $\mathcal{F}$ fait de M un $W(E')$ -module qu'on note par $\mathcal{F}M$.

On obtient ainsi deux équivalences de catégories inverses l'une de l'autre

$$(2.1.1) \quad \text{Mod}(W(E)) \xrightleftharpoons[\overline{\mathcal{F}}]{\mathcal{F}} \text{Mod}(W(E'))$$

qui préservent, évidemment, la finitude. Ils donnent donc (cf. 1.1) des équivalences

$$(2.1.2) \quad \text{Mod}_f(W(E)) \xrightleftharpoons[\overline{\mathcal{F}}]{\mathcal{F}} \text{Mod}_f(W(E'))$$

et

$$(2.1.3) \quad \mathbf{D}_f^b(W(E)) \xrightleftharpoons[\overline{\mathcal{F}}]{\mathcal{F}} \mathbf{D}_f^b(W(E')).$$

Soit maintenant $\theta = \sum_{j=1}^n x_j \partial_{x_j}$ le vecteur d'Euler de E (θ ne dépend pas du système des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ choisies sur E), et appelons un $W(E)$ -module à gauche M *monodromique* s'il est de type fini, et si pour tout $m \in M$ il existe $b \in \mathbb{C}[s]$ non nul tel que $b(\theta) \cdot m = 0$. Nous avons alors :

PROPOSITION 2.1.1. — *Un $W(E)$ -module M est monodromique si et seulement si $\mathcal{F}M$ l'est.*

Preuve. — Si $m \in M$ et $b \in \mathbb{C}[s]$ tel que $b \neq 0$ et $b(\theta) \cdot m = 0$, alors

$$\mathcal{F}(b(\theta)) = \mathcal{F}\left(b\left(\sum_{j=1}^n x_j \partial_{x_j}\right)\right) = b\left(-n - \sum_{j=1}^n \xi_j \partial_{\xi_j}\right) = b(-n - \theta')$$

où θ' est le vecteur d'Euler de E' , et donc $b(-n - \theta') \cdot m = 0$. □

Enfin, nous avons aussi :

PROPOSITION 2.1.2. — *Si M est un $W(E)$ -module de type fini, alors $\mathcal{F}M$ a la même dimension et la même multiplicité de Bernstein que M (cf. la définition de [3], p. 177). En particulier, M est holonome si et seulement si $\mathcal{F}M$ l'est.*

Preuve. — Cf. [3], la dimension et la multiplicité de M peuvent se calculer à l'aide de la filtration de Bernstein. Considérons donc la filtration $(T_\ell W(E))_{\ell \in \mathbb{N}}$ de $W(E)$:

$$(2.1.4) \quad T_\ell(W(E)) = \left\{ P = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial_x^\beta ; |\alpha| + |\beta| \leq \ell \right\}$$

(on voit facilement que $T_\ell(W(E))$ ne dépend pas des coordonnées choisies sur E).

On a alors de façon évidente $\mathcal{F}T_\ell(W(E)) = T_\ell(W(E'))$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, donc une filtration $(T_\ell M)_{\ell \in \mathbb{N}}$ de M qui est bonne par rapport à $(T_\ell W(E))_{\ell \in \mathbb{N}}$ sera aussi bonne par rapport à $(T_\ell W(E'))_{\ell \in \mathbb{N}}$.

Cela montre que M et $\mathcal{F}M$ ont en fait le même polynôme de Hilbert par rapport aux filtrations de Bernstein sur $W(E)$ et respectivement $W(E')$. $\square$

COROLLAIRE 2.1.3. — $\mathcal{F}$ et $\bar{\mathcal{F}}$ engendrent des équivalences des catégories inverse l'un à l'autre :

$$(2.1.5) \quad \text{Mod}_c(\mathcal{D}_E) \xrightleftharpoons[\bar{\mathcal{F}}]{\mathcal{F}} \text{Mod}_c(\mathcal{D}_{E'}),$$

$$(2.1.6) \quad \text{Mod}_h(\mathcal{D}_E) \xrightleftharpoons[\bar{\mathcal{F}}]{\mathcal{F}} \text{Mod}_h(\mathcal{D}_{E'}),$$

$$(2.1.7) \quad \mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_E) \xrightleftharpoons[\bar{\mathcal{F}}]{\mathcal{F}} \mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_{E'}),$$

$$(2.1.8) \quad \mathbf{D}_h^b(\mathcal{D}_E) \xrightleftharpoons[\bar{\mathcal{F}}]{\mathcal{F}} \mathbf{D}_h^b(\mathcal{D}_{E'}).$$

Par contre, $\mathcal{F}$ et $\bar{\mathcal{F}}$ ne préservent pas en général la régularité, et une étude des relations qui existent entre la régularité d'un $W(E)$ -module de type fini M et la régularité de $\mathcal{F}M$ devrait faire intervenir les structures de Stokes; jusqu'à présent, ce problème n'est complètement résolu qu'en dimension $n = 1$ (voir notamment [32] pour une discussion de ce point).

2.2. Transformation de Fourier géométrique pour les $\mathcal{D}_E$ -modules.

2.2.1. Le noyau $e^{-\sigma}$. — Nous considérons d'abord sur $\mathbb{C} = \text{Spec } \mathbb{C}[t]$ le fibré trivial $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, muni de la connexion

$$(2.2.1) \quad \nabla : \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{C}}^1 = \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}} \Omega_{\mathbb{C}}^1, \quad \nabla(P) = dP - P dt$$

(c'est une connexion car $\nabla(f \cdot P) = f dP + P df - fP dt$ pour tout $f, P \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$), et nous désignons par $\tilde{\mathcal{L}}$ le $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ -module à gauche qui lui est associé.

Il est isomorphe comme $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ -module à $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(d/dt+1)$, donc il est holonome.

Nous prenons maintenant $\sigma = \langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application $E \times E' \rightarrow \mathbb{C}$ de dualité, et nous considérons

$$(2.2.2) \quad \mathcal{L} = \sigma^! \tilde{\mathcal{L}}[-(2n-1)] = \mathcal{O}_{E \times E'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\sigma^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}} \sigma^{-1} \tilde{\mathcal{L}}.$$

$\mathcal{L}$ est concentré en degré 0, et il est égal comme ensemble à $\mathcal{O}_{E \times E'}$. L'action de $\mathcal{D}_{E \times E'}$ est donnée par

$$(2.2.3) \quad \partial_{x_i}(g(x, \xi) \otimes 1) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \xi_i \right) g(x, \xi) \right] \otimes 1,$$

$$(2.2.4) \quad \partial_{\xi_i}(g(x, \xi) \otimes 1) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} - x_i \right) g(x, \xi) \right] \otimes 1.$$

Donc si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{E \times E'}$ -module à gauche, $\mathcal{M} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{E \times E'}} \mathcal{L}$ va être égal à $\mathcal{M}$ comme ensemble, et muni de l'action de $\mathcal{D}_{E \times E'}$ donnée par

$$(2.2.5) \quad \partial_{x_i}(m \otimes 1) = (\partial_{x_i} - \xi_i)m \otimes 1,$$

$$(2.2.6) \quad \partial_{\xi_i}(m \otimes 1) = (\partial_{\xi_i} - x_i)m \otimes 1.$$

Par conséquent, nous allons noter $\mathcal{M} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{E \times E'}} \mathcal{L}$ par $\mathcal{M} \otimes e^{-\sigma}$.

2.2.2. *Le foncteur $\mathcal{F}_*$.* — Nous considérons maintenant les projections

$$\begin{array}{ccc} & E \times E' & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ E & & E' \end{array}$$

et nous définissons le foncteur

$$(2.2.7) \quad \mathcal{F}_* : \mathbf{D}_{\mathbb{C}}^b(\mathcal{D}_E) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathbb{C}}^b(\mathcal{D}_{E'}), \quad \mathcal{F}_*(\mathcal{M}) = \int_{p_{2*}} (p_1^! \mathcal{M}) \otimes e^{-\sigma}[-n].$$

Puisque E et E' sont des variétés affines, $\mathcal{F}_*(\mathcal{M})$ est isomorphe, d'après (1.3.4), au complexe

$$(2.2.8) \quad \int_{p_{2*}} (p_1^* \mathcal{M}) \otimes e^{-\sigma}[n]$$

considéré par B. Malgrange dans [30], et on peut montrer (voir [8], p. 197, [23], p. 195 et 200–201) qu'il coïncide aussi avec $\mathcal{F}M$ défini au § 2.1 *modulo le choix d'une mesure de volume* $d\xi$ sur E' , dans le sens que si M est un $W(E)$ -module de type fini et $\mathcal{M}$ est le $\mathcal{D}_E$ -module associé à M , alors il existe un isomorphisme (fonctoriel en $\mathcal{M}$) canonique entre $\mathcal{F}_*\mathcal{M}$ et le $\mathcal{D}_E$ -module associé à $\mathcal{F}M \otimes_{\mathbb{C}} (\bigwedge^n E')$.

Par conséquent on a, en traduisant les propriétés de $\mathcal{F}$:

COROLLAIRE 2.2.2.1.

1) Si $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_E))$ est concentré en degré 0, alors $\mathcal{F}_*\mathcal{M}$ n'a aussi de cohomologie qu'en degré 0.

2) On a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathcal{F}_{E',*} \circ \mathcal{F}_{E,*} \simeq a^*,$$

où $\mathcal{F}_{E,*}$ et $\mathcal{F}_{E',*}$ sont les foncteurs $\mathcal{F}_*$ sur E et respectivement E' , et $a : E \rightarrow E$ est l'application antipodale $a(e) = -e$.

3) $\mathcal{F}_{E,*}$ est une équivalence de catégories dont l'inverse est

$$\bar{\mathcal{F}}_{E,*} = a^* \circ \mathcal{F}_{E',*}.$$

4) Si $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_E))$, alors il existe un isomorphisme canonique

$$(2.2.9) \quad \mathbb{D}_{E'}(\mathcal{F}_*(\mathcal{M})) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{F}}_*(\mathbb{D}_E(\mathcal{M})).$$

Enfin, par l'holonomie de $\tilde{\mathcal{L}}$ de 2.2.1, on a $\mathcal{L}$ holonome sur $E \times E'$, donc si $\mathcal{M}$ est à cohomologie holonome alors $\mathcal{F}_*\mathcal{M}$ l'est aussi. Ceci est encore valable pour $\bar{\mathcal{F}}_*$, et on a le

COROLLAIRE 2.2.2.2. — $\mathcal{F}_*$ et $\bar{\mathcal{F}}_*$ établissent des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre :

$$(2.2.10) \quad \mathbf{D}_h^b(\mathcal{D}_E) \xrightleftharpoons[\bar{\mathcal{F}}_*]{\mathcal{F}_*} \mathbf{D}_h^b(\mathcal{D}_{E'}).$$

2.2.3. *Le foncteur $\mathcal{F}_!$.* — Nous gardons les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, et nous considérons le foncteur

$$(2.2.11) \quad \mathcal{F}_! : \mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_E) \longrightarrow \mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_{E'}), \quad \mathcal{F}_!(\mathcal{M}) = \int_{p_{2!}} (p_1^* \mathcal{M}) \otimes e^{-\sigma}[n].$$

Dans le contexte algébrique, l'image directe $\int_{p_{2!}}$ (voir 1.4) admet aussi la description suivante, qui montre en particulier que notre foncteur $\mathcal{F}_!$ coïncide avec celui de [30], p. 4 :

$$\begin{array}{ccccc} E \times E' & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{E} \times E' \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 & q_1 \swarrow & \searrow q_2 \\ E & & E' & \bar{E} & E' \end{array}$$

Si $E \xhookrightarrow{j} \bar{E}$ est la compactification projective de E , et si nous désignons par $\bar{j}$ l'application $\bar{j} = j \times \text{id} : E \times E' \longrightarrow \bar{E} \times E'$ et par q_1, q_2 les projections de $\bar{E} \times E'$ sur les deux facteurs, alors nous avons :

PROPOSITION 2.2.3.1. — Si $\mathcal{N} \in \mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_{E \times E'})$ alors

$$(2.2.12) \quad \int_{p_{2!}} \mathcal{N} = \int_{q_{2*}} \mathbb{D}_{\bar{E} \times E'} \left(\int_{\bar{j}_*} \mathbb{D}_{E \times E'}(\mathcal{N}) \right).$$

Preuve. — En effet, q_2 est propre, donc $\int_{p_{2!}} = \int_{q_{2*}} \int_{\bar{j}_!}$, et par conséquent il suffit de montrer que

$$(2.2.13) \quad \int_{\bar{j}_!} \mathcal{N} = \mathbb{D}_{\bar{E} \times E'} \left(\int_{\bar{j}_*} \mathbb{D}_{E \times E'}(\mathcal{N}) \right).$$

Si nous considérons $\tilde{j}$ une compactification de Hironaka-Nagata de $\bar{j}$, nous avons

$$\begin{array}{ccc} E \times E' & \xrightarrow{k} & \bar{E} \times \bar{E}' \\ \tilde{j} \searrow & & \swarrow \tilde{j} \\ & \bar{E} \times E' & \end{array}$$

$$(2.2.14) \quad \int_{\bar{j}_!} \mathcal{N} = \int_{\tilde{j}_*} \mathbb{D}_{\bar{E} \times \bar{E}'} (\mathbb{R}k_* (\mathbb{D}_{E \times E'}(\mathcal{N}))),$$

donc il suffit de voir que, pour tout $\mathcal{N} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_{E \times E'}))$,

$$(2.2.15) \quad \mathbb{D}_{\bar{E} \times E'} \left(\int_{\bar{j}_*} \mathcal{N} \right) = \int_{\tilde{j}_*} \mathbb{D}_{\bar{E} \times \bar{E}'} (\mathbb{R}k_* (\mathcal{N})).$$

Mais $\mathbb{R}k_*(\mathcal{N})$ est à cohomologie cohérente (car k est une immersion ouverte), et le morphisme $\tilde{j}$ est propre, donc par le théorème de dualité relative (1.4.8), nous avons

$$(2.2.16) \quad \int_{\tilde{j}_*} \mathbb{D}_{\bar{E} \times \bar{E}'} (\mathbb{R}k_* (\mathcal{N})) \simeq \mathbb{D}_{\bar{E} \times E'} \left(\int_{\bar{j}_*} \mathbb{R}k_* (\mathcal{N}) \right).$$

Il suffit donc de montrer que

$$(2.2.17) \quad \int_{\bar{j}_*} \mathcal{N} = \int_{\bar{j}_*} \mathbb{R}k_*(\mathcal{N}),$$

et cette dernière égalité est vraie, car k est une immersion ouverte. $\square$

Nous allons utiliser cette description dans ce que va suivre.

L'intérêt du foncteur $\mathcal{F}_!$ est donné par la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2.3.2. — *Il existe un isomorphisme fonctoriel canonique*

$$(2.2.18) \quad \mathcal{F}_! \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_*.$$

Preuve. — Le morphisme cherché est induit par le morphisme naturel $\int_{p_{2!}} \rightarrow \int_{p_{2*}}$, car si $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_E))$, nous avons $p_1^*(\mathcal{M})[n] = p_1^!(\mathcal{M})[-n]$ (voir (1.3.4)).

Pour voir maintenant qu'il s'agit d'un isomorphisme, nous remarquons d'abord que $\mathcal{F}_!$ et $\mathcal{F}_*$ sont de type « way-out » ($\mathcal{F}_!$ l'est car les foncteurs qui le composent le sont), et donc il suffit de montrer que le morphisme $\mathcal{F}_!(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}_*(\mathcal{M})$ est un isomorphisme pour $\mathcal{M} = \mathcal{D}_E$.

Nous avons $\int_{p_{2*}} = \int_{q_{2*}} \int_{\bar{j}_*}$ et $\int_{p_{2!}} = \int_{q_{2*}} \int_{\bar{j}_!}$ car q_2 est propre, et

$$(2.2.19) \quad \int_{\bar{j}_!} \mathcal{N} = \mathbb{D}_{\bar{E} \times E'} \left(\int_{\bar{j}_*} \mathbb{D}_{E \times E'}(\mathcal{N}) \right) = \mathbb{D}_{\bar{E} \times E'} (\mathbb{R}\bar{j}_* \mathbb{D}_{E \times E'}(\mathcal{N})),$$

où $\mathcal{N} = (\mathcal{O}_{E \times E'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{p_1^{-1}\mathcal{O}_E} p_1^{-1}\mathcal{D}_E) \otimes e^{-\sigma}$, donc la question revient à montrer que le morphisme

$$(2.2.20) \quad \mathbb{D}_{\bar{E} \times E'}(\mathbb{R}\bar{j}_*\mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{R}\bar{j}_*\mathbb{D}_{E \times E'}(\mathcal{N})$$

est un isomorphisme.

Nous ne pouvons pas utiliser le théorème de dualité relative, car $\bar{j}$ n'est pas propre.

Le problème est local sur $\bar{E} \times E'$, donc il suffit de montrer que le morphisme (2.2.20) est un isomorphisme au voisinage de $Z \times E'$, où Z est l'hypersurface à l'infini $Z = \bar{E} \setminus E$ (car de façon évidente il l'est sur $E \times E' = (\bar{E} \times E') \setminus (Z \times E')$).

En prenant $(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ coordonnées locales sur $E \times E'$ et en considérant $t = 1/x_1$ comme coordonnée sur $\bar{E}^* = \bar{E} \setminus \{x \in E \mid x_1 = 0\}$, nous sommes ramenés à montrer que (2.2.20) est un isomorphisme sur $\bar{E}^* \times E'$.

D'autre part, si nous désignons par « $\boxtimes$ » le produit tensoriel externe pour les $\mathcal{D}$ -modules (voir [3], [35]) et si nous prenons des coordonnées sur l'espace affine $\mathbb{A}^n$, nous avons un isomorphisme (dépendant des coordonnées)

$$\mathcal{D}_{\mathbb{A}^n} \simeq \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}.$$

Puisque $\mathbb{R}\bar{j}_*(-)$, $\mathbb{D}_{E \times E'}(-)$ et $\mathbb{D}_{\bar{E} \times E'}(-)$ commutent avec $\boxtimes$, nous pouvons donc supposer, par récurrence sur $n = \dim_{\mathbb{C}} E$, que $n = 1^{(1)}$.

De plus, la preuve peut se faire à l'aide des sections sur $\bar{E}^* \times E'$, donc il nous reste à montrer que

$$(2.2.21) \quad \mathbb{R}\Gamma(\bar{E}^* \times E', \mathbb{D}_{\bar{E} \times E'}(\mathbb{R}\bar{j}_* \mathcal{N})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(\bar{E}^* \times E', \mathbb{R}\bar{j}_* \mathbb{D}_{E \times E'}(\mathcal{N})) \\ = \mathbb{R}\Gamma(E^* \times E', \mathbb{D}_{E \times E'}(\mathcal{N}))$$

où $E^* = E \setminus \{x \in E \mid x = 0\}$.

Nous avons :

$$(2.2.22) \quad \mathbb{R}\Gamma(\bar{E}^* \times E', \mathbb{D}_{\bar{E} \times E'}(\mathbb{R}\bar{j}_* \mathcal{N})) \\ \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathbb{R}\Gamma(E^* \times E', \mathcal{N}), \mathcal{D})[2]$$

où $\mathcal{D} = \Gamma(\bar{E}^* \times E', \mathcal{D}_{\bar{E} \times E'}) = \mathbb{C}\langle t, \xi, \partial_t, \partial_\xi \rangle$, et

$$(2.2.23) \quad \mathbb{R}\Gamma(E^* \times E', \mathbb{D}_{\bar{E} \times E'}(\mathcal{N})) \\ = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}[t^{-1}]}(\mathbb{R}\Gamma(E^* \times E', \mathcal{N}), \mathcal{D}[t^{-1}])[2]$$

où $\mathcal{D}[t^{-1}] = \Gamma(E^* \times E', \mathcal{D}_{E \times E'}) = \mathbb{C}\langle t, t^{-1}, \xi, \partial_t, \partial_\xi \rangle$.

⁽¹⁾ En fait on a ici un résultat plus fort : si E_1, E_2 sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ et si $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_{\mathbb{C}}^b(\mathcal{D}_{E_1}))$, $\mathcal{N} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_{\mathbb{C}}^b(\mathcal{D}_{E_2}))$, alors

$$\mathcal{F}_*(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}) \simeq \mathcal{F}_*(\mathcal{M}) \boxtimes \mathcal{F}_*(\mathcal{N})$$

(ce que signifie que $\mathcal{F}_*$ agit « variable par variable »). *Esquisse de preuve.* — Par « way-out », il suffit de prendre $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{E_1}$, $\mathcal{N} = \mathcal{D}_{E_2}$; d'autre part, $\mathcal{F}_*(\mathcal{D}_{E_1}) = \mathcal{D}_{E'_1}$ et $\mathcal{F}_*(\mathcal{D}_{E_2}) = \mathcal{D}_{E'_2}$, et la formule à montrer devient $\mathcal{D}_{E'_1} \boxtimes \mathcal{D}_{E'_2} = \mathcal{D}_{E'_1 \times E'_2}$; enfin, la dernière formule est évidente.

D'autre part, $\mathcal{N} = (\mathcal{O}_{E \times E'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{p_1^{-1}\mathcal{O}_E} p_1^{-1}\mathcal{D}_E) \otimes e^{-\sigma}$. Il est égal comme ensemble à $\mathcal{O}_{E \times E'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{p_1^{-1}\mathcal{O}_E} p_1^{-1}\mathcal{D}_E$, et il est muni de l'action de $\mathcal{D}_{E \times E'}$ donnée par

$$(2.2.24) \quad \begin{cases} \partial_x(m \otimes 1) = [(\partial_x - \xi) \cdot m] \otimes 1, \\ \partial_\xi(m \otimes 1) = [(\partial_\xi - x) \cdot m] \otimes 1. \end{cases}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\Gamma(E^* \times E', \mathcal{O}_{E \times E'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{p_1^{-1}\mathcal{O}_E} p_1^{-1}\mathcal{D}_E) \\ = \mathbb{C}[t, t^{-1}, \xi] \otimes_{\mathbb{C}[t, t^{-1}]} \mathbb{C}\langle t, t^{-1}, \partial_t \rangle \\ = \mathbb{C}\langle t, t^{-1}, \xi, \partial_t \rangle = \mathbb{C}\langle t, t^{-1}, \xi, \partial_t, \partial_\xi \rangle / (\partial_\xi) \end{aligned}$$

(∂_ξ) étant l'idéal à gauche, et

$$(2.2.25) \quad \mathbb{R}\Gamma(E^* \times E', \mathcal{N}) = \mathbb{C}\langle t, t^{-1}, \xi, \partial_t, \partial_\xi \rangle / (t\partial_\xi - 1),$$

car $\partial_\xi(m \otimes 1) = [(\partial_\xi - x) \cdot m] \otimes 1$.

Notons

$$N = \mathbb{R}\Gamma(E^* \times E', \mathcal{N}), \quad N_1 = \mathbb{C}\langle t, \xi, \partial_t, d_\xi \rangle / (t\partial_\xi - 1).$$

Comme dans [32], p. 218, nous pouvons montrer que $N \simeq N_1$, donc

$$(2.2.26) \quad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(N, \mathcal{D}) = \mathbb{C}\langle t, \xi, \partial_t, d_\xi \rangle / (t\partial_\xi + 1)[-1].$$

D'autre part nous avons aussi

$$(2.2.27) \quad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}[t^{-1}]}(N, \mathcal{D}[t^{-1}]) = \mathbb{C}\langle t, t^{-1}, \xi, \partial_t, d_\xi \rangle / (t\partial_\xi + 1)[-1],$$

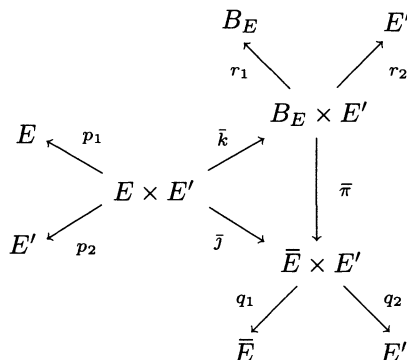
donc, en utilisant le même résultat de [32] avec $t\partial_\xi + 1$ au lieu de $t\partial_\xi - 1$, nous obtenons bien l'isomorphisme (2.2.21). $\square$

Nous pourrions par conséquent identifier les actions de $\mathcal{F}_*$ et de $\mathcal{F}_!$ dans la suite.

2.3. Transformation de Fourier faisceautique.

Nous allons rappeler ici brièvement la construction de [7].

Nous utilisons les notations de la section précédente, et nous considérons B_E l'éclaté réel de $\bar{E}$ le long de Z (Z étant l'hypersurface à l'infini $Z = \bar{E} \setminus E$ de $\bar{E}$). Remarquons qu'il est simplement le complété en boules de E , et qu'il coïncide aussi avec la *transformation réelle monoïdale* ${}^Z\bar{E}$ de [40], p. 266 (voir aussi [21], p. 36). C'est donc une variété à bord.



Par conséquent, il existe une projection canonique $\pi : B_E \rightarrow \bar{E}$ et une injection canonique $k : E \hookrightarrow B_E$, et nous allons désigner par $\bar{\pi}$ et respectivement $\bar{k}$ les morphismes $\bar{\pi} = \pi \times \text{id}_{E'} : B_E \times E' \rightarrow \bar{E} \times E'$ et $\bar{k} = k \times \text{id}_{E'} : E \times E' \hookrightarrow B_E \times E'$. Enfin, nous notons par r_1 et r_2 les projections de $B_E \times E'$ sur les deux facteurs.

Nous considérons maintenant

$$P^- = \{(x, \xi) \in E \times E' \mid \text{Re}\langle x, \xi \rangle \leq 0\},$$

$$Q^- = \overline{\bar{k}(P^-)} \quad (\text{i.e. l'adhérence dans } B_E \times E' \text{ de } \bar{k}(P^-)),$$

$$Q^+ = (B_E \times E') \setminus Q^-,$$

$$L^- = (E \times E') \cup Q^-, \quad L^+ = (E \times E') \cup Q^+.$$

Si nous désignons par $\text{Mod}_f(\mathbb{C}_E)$ la catégorie des (faisceaux de) $\mathbb{C}_E$ -espaces vectoriels de dimension bornée (globalement), par $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}_E)$ la catégorie dérivée des complexes bornés associée à $\text{Mod}_f(\mathbb{C}_E)$, et de même pour E' , alors nous avons la *transformation de Fourier faisceautique* de [7] :

$$(2.3.1) \quad \begin{cases} \mathcal{F}^+ : \mathbf{D}^b(\mathbb{C}_E) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathbb{C}_{E'}), \\ \mathcal{F}^+(\mathcal{V}) = \mathbb{R}r_{2*}(\mathbb{R}\bar{k}_*(p_1^{-1}\mathcal{V}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{C}_{B_E \times E'}} \mathbb{C}_{L^+})[n]. \end{cases}$$

Bien que cela soit inutile pour la suite, nous rappelons que nous pouvons aussi définir un foncteur $\mathcal{F}^-$ à partir de $\mathbb{C}_{L^-}$ à la place de $\mathbb{C}_{L^+}$, et nous obtenons ainsi deux foncteurs qui ont des bonnes propriétés sur les complexes à cohomologie homogène ou monodromique (voir [7]–[8] et [6] pour une étude en détail, et aussi [22] pour une approche légèrement différente).

Du point de vue des systèmes différentiels, si un $W(E)$ -module de type fini M est monodromique (dans le sens de 2.1), alors le complexe des solutions de M est aussi monodromique. Réciproquement, si $\mathcal{V}$ est un complexe monodromique constructible, alors le complexe des $W(E)$ -modules à cohomologie régulière qui lui est associé par la correspondance de Riemann-Hilbert (*cf.* [17], [35]) est aussi monodromique; voir [6] et [30] pour d'autres commentaires.

3. Commutation entre la transformation de Fourier géométrique et le foncteur solutions.

3.1. Énoncé du résultat principal.

Avant d'énoncer le théorème central de cette thèse, nous donnons encore une définition :

Soient X une variété algébrique lisse, $X \xrightarrow{j} \bar{X}$ une compactification projective de X , $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels algébriques sur X , et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$ -module cohérent. Nous disons alors que $\mathcal{M}$ est *1-spécialisable à l'infini* si $(j_*\mathcal{M})^{\text{an}}$ est 1-spécialisable (comme $\mathcal{D}_{\bar{X}^{\text{an}}}$ -module) le long de l'hypersurface à l'infini $\bar{X}^{\text{an}} \setminus X^{\text{an}}$.

Comme dans [12] (1.5, p. 331), on peut montrer que cette notion ne dépend pas de la compactification choisie.

Nous pouvons énoncer maintenant :

THÉORÈME 3.1.1. — *Soient E un espace vectoriel complexe de dimension finie, E' son dual, $\mathcal{D}_E$ le faisceau des opérateurs différentiels algébriques sur E , et $\mathcal{M}$ un complexe borné de $\mathcal{D}_E$ -modules à gauche, à cohomologie 1-spécialisable à l'infini. Il existe alors un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}_{E'})$:*

$$(3.1.1) \quad \mathcal{F}^+ \text{Sol}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \text{Sol}(\mathcal{F}_*\mathcal{M}).$$

Comme nous l'avons déjà dit au § 1.8, d'après un résultat de M. Kashiwara et T. Kawai ([18], lemma 4.1.5. p. 59), la condition du théorème est remplie si $\mathcal{M}$ est régulier sur E (dans le sens de la remarque 1.2.1), et dans ce cas nous obtenons un résultat conjecturé dans [30].

Le reste de ce chapitre sera consacré à la démonstration de ce théorème.

3.2. Cas des coefficients cohérents.

En général, si $\mathcal{M}$ est seulement à cohomologie cohérente, nous ne pouvons pas définir de façon canonique un morphisme dans $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}_{E'})$

$$(3.2.1) \quad \mathcal{F}^+ \text{Sol}(\mathcal{M}) \longrightarrow \text{Sol}(\mathcal{F}_* \mathcal{M}),$$

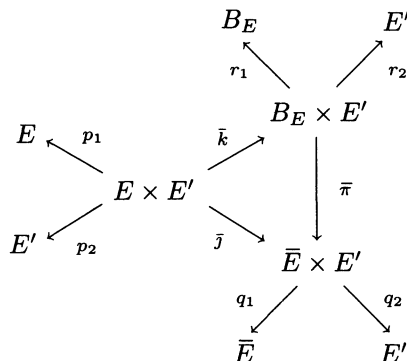
ni un morphisme dans le sens inverse. Néanmoins, nous pouvons associer à $\mathcal{M}$ un objet $\Psi(\mathcal{M})$ de $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}_{E'})$, et deux morphismes canoniques :

$$(3.2.2) \quad \mathcal{F}^+ \text{Sol}(\mathcal{M}) \longleftarrow \Psi(\mathcal{M}) \longrightarrow \text{Sol}(\mathcal{F}_* \mathcal{M}).$$

Aucun de ces deux morphismes n'est *a priori* un quasi-isomorphisme, mais — comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants — ils le deviennent si $\mathcal{M}$ est 1-spécialisable à l'infini. Ils fourniront donc dans ce cas l'isomorphisme $\mathcal{F}^+ \text{Sol}(\mathcal{M}) \simeq \text{Sol}(\mathcal{F}_* \mathcal{M})$ que nous avons annoncé.

Le but principal de ce paragraphe est de construire $\Psi(\mathcal{M})$ et ces deux morphismes, en détaillant [30]. Nous allons finir en donnant aussi une formule de changement de base, dont nous aurons besoin dans la suite.

Nous reprenons les notations de 2.2 et 2.3, que nous pouvons résumer par le diagramme suivant :



De plus, pour tout $\mathcal{P} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_E))$ nous allons noter, pour abrégier l'écriture,

$$\bar{\mathcal{P}} = \bar{\pi}^{-1}(\bar{j}_* p_1^{-1} \mathcal{P})^{\text{an}},$$

et nous allons identifier $E, E', E \times E', \text{etc.}$ à leurs versions analytiques $E^{\text{an}}, E'^{\text{an}}, E \times E'^{\text{an}}$. $\bar{\mathcal{P}}$ sera donc un complexe de faisceaux sur $B_E \times E'$.

Le premier terme de (3.2.2) admet alors la description suivante :

PROPOSITION 3.2.1. — Si $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_E))$, alors il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}_{E'})$:

$$(3.2.3) \quad \mathcal{F}^+ \text{Sol}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}r_{2*}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\bar{\mathcal{D}}_E}(\bar{\mathcal{M}}, \bar{k}_*(p_1^{-1} \mathcal{O}_{E^{\text{an}}})) \otimes_{\mathbb{C}_{B_E \times E'}}^{\mathbb{L}} \mathbb{C}_{L+})[2n].$$

Preuve. — Nous avons par définition :

$$\mathcal{F}^+ \text{Sol}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}r_{2*}(\mathbb{R}\bar{k}_*(p_1^{-1} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{E^{\text{an}}}}(\mathcal{M}^{\text{an}}, \mathcal{O}_{E^{\text{an}}})) \otimes_{\mathbb{C}_{B_E \times E'}}^{\mathbb{L}} \mathbb{C}_{L+})[2n].$$

En représentant $\mathcal{O}_{E^{\text{an}}}$ par une résolution $\mathcal{D}_{E^{\text{an}}}$ -injective (et donc aussi $\mathcal{D}_E$ -injective) dans $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{E^{\text{an}}}}(\mathcal{M}^{\text{an}}, \mathcal{O}_{E^{\text{an}}}) \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_E}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{E^{\text{an}}})$, et en prenant des sections, nous pouvons définir de façon canonique trois morphismes :

$$(3.2.4) \quad p_1^{-1} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_E}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{E^{\text{an}}}) \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{p_1^{-1} \mathcal{D}_E}(p_1^{-1} \mathcal{M}, p_1^{-1} \mathcal{O}_{E^{\text{an}}}),$$

$$(3.2.5) \quad \mathbb{R}\bar{k}_* \mathbb{R}\mathcal{H}om_{p_1^{-1} \mathcal{D}_E}(p_1^{-1} \mathcal{M}, p_1^{-1} \mathcal{O}_{E^{\text{an}}}) \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\bar{k}_*(p_1^{-1} \mathcal{D}_E)}(\bar{k}_*(p_1^{-1} \mathcal{M}), \bar{k}_*(p_1^{-1} \mathcal{O}_{E^{\text{an}}}),$$

$$(3.2.6) \quad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\bar{k}_*(p_1^{-1} \mathcal{D}_E)}(\bar{k}_*(p_1^{-1} \mathcal{M}), \bar{k}_*(p_1^{-1} \mathcal{O}_{E^{\text{an}}})) \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\bar{\pi}^{-1} \bar{j}_*(p_1^{-1} \mathcal{D}_E)}(\bar{\pi}^{-1} \bar{j}_*(p_1^{-1} \mathcal{M}), \bar{k}_*(p_1^{-1} \mathcal{O}_{E^{\text{an}}}).$$

Par « way-out », ils sont tous des isomorphismes, car $\mathcal{M}$ est à cohomologie cohérente (il suffit de le vérifier pour $\mathcal{M} = \mathcal{D}_E$, et dans ce cas l'affirmation est triviale), donc nous avons finalement l'isomorphisme annoncé. $\square$

Pour le dernier terme de (3.2.2) il convient d'utiliser la description « modérée » suivante.

Nous notons par S la sphère à l'infini de B_E (i.e. $S = B_E \setminus E$), et nous considérons le faisceau (sur $B_E \times E'$)

$$\mathcal{A}^{<0} = \mathcal{A}^{<0}_{B_E \times E' | S \times E'}$$

des fonctions holomorphes sur $E \times E'$, admettant à l'infini un développement asymptotique nul (voir l'annexe A). Nous avons alors :

PROPOSITION 3.2.2. — Si $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_E))$, alors il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}_{E'})$:

$$(3.2.7) \quad \text{Sol}(\mathcal{F}_* \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}r_{2*} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\overline{\mathcal{D}}_E}(\overline{\mathcal{M}}, \Phi_E)[2n],$$

$$\text{où } \Phi_E = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\overline{\pi}^{-1}\mathcal{D}_{\overline{E} \times E'}}(\overline{\pi}^{-1}\bar{j}_*(\mathcal{D}_{E \times E' \rightarrow E} \otimes e^{-\sigma}), \mathcal{A}^{<0}).$$

Preuve. — Nous avons $\text{Sol}(\mathcal{F}_* \mathcal{M}) = \text{Sol}(\int_{q_{2*}} \int_{\bar{j}_*} p_1^! \mathcal{M} \otimes e^{-\sigma}[-n])$. Puisque q_2 est propre, il existe un isomorphisme canonique (voir (1.5.4)) :

$$(3.2.8) \quad \begin{aligned} \text{Sol}\left(\int_{q_{2*}} \int_{\bar{j}_*} p_1^! \mathcal{M} \otimes e^{-\sigma}[-n]\right) &\xleftarrow{\sim} \mathbb{R}q_{2*} \text{Sol}\left(\int_{\bar{j}_*} p_1^! \mathcal{M} \otimes e^{-\sigma}[-n]\right) \\ &= \mathbb{R}q_{2*} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\overline{E} \times E'}}(\bar{j}_*(p_1^! \mathcal{M} \otimes e^{-\sigma}), \mathcal{O}_{\overline{E} \times E'}^{\text{an}})[3n], \end{aligned}$$

et par un raisonnement simple (cf. annexe A), on voit qu'on a aussi :

$$(3.2.9) \quad \begin{aligned} &\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\overline{E} \times E'}}(\bar{j}_*(p_1^! \mathcal{M} \otimes e^{-\sigma}), \mathcal{O}_{\overline{E} \times E'}^{\text{an}}) \\ &\xleftarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\overline{E} \times E'}}(\bar{j}_*(p_1^! \mathcal{M} \otimes e^{-\sigma}), \mathbb{R}\overline{\pi}_* \mathcal{A}^{<0}) \\ &\simeq \mathbb{R}\overline{\pi}_* \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\overline{\pi}^{-1}\mathcal{D}_{\overline{E} \times E'}}(\overline{\pi}^{-1}\bar{j}_*(p_1^! \mathcal{M} \otimes e^{-\sigma}), \mathcal{A}^{<0}). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \bar{j}_*(p_1^! \mathcal{M} \otimes e^{-\sigma}) &= \bar{j}_*((\mathcal{D}_{E \times E' \rightarrow E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{p_1^{-1}\mathcal{D}_E} p_1^{-1}\mathcal{M}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{E \times E'}} \mathcal{L})[n] \\ &= \bar{j}_*((\mathcal{D}_{E \times E' \rightarrow E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{E \times E'}} \mathcal{L}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{p_1^{-1}\mathcal{D}_E} p_1^{-1}\mathcal{M})[n], \end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ étant défini en 2.2.1, et en représentant $\mathcal{M}$ par une résolution $\mathcal{D}_E$ -plate et en prenant des sections, nous pouvons définir un morphisme canonique

$$\begin{aligned} &\bar{j}_*(\mathcal{D}_{E \times E' \rightarrow E} \otimes e^{-\sigma}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\bar{j}_*(p_1^{-1}\mathcal{D}_E)} \bar{j}_*(p_1^{-1}\mathcal{M}) \\ &\longrightarrow \bar{j}_*((\mathcal{D}_{E \times E' \rightarrow E} \otimes e^{-\sigma}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{p_1^{-1}\mathcal{D}_E} p_1^{-1}\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Par «way-out», ce morphisme est un isomorphisme car $\mathcal{M}$ est à cohomologie cohérente (il suffit de le voir pour $\mathcal{M} = \mathcal{D}_E$, et dans ce cas l'assertion est, évidemment, vraie), et on montre facilement qu'il est aussi $\mathcal{D}_{\bar{E} \times E'}$ -linéaire à gauche. Nous avons alors par adjonction :

$$\begin{aligned} & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\bar{\pi}^{-1}\mathcal{D}_{\bar{E} \times E'}}(\bar{\pi}^{-1}\bar{j}_*(p_1^!\mathcal{M} \otimes e^{-\sigma}), \mathcal{A}^{<0}) \\ & \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\bar{\pi}^{-1}\mathcal{D}_{\bar{E} \times E'}}(\bar{\pi}^{-1}\bar{j}_*(\mathcal{D}_{E \times E' \rightarrow E} \otimes e^{-\sigma}) \otimes_{\bar{\mathcal{D}}_E}^{\mathbb{L}} \bar{\mathcal{M}}, \mathcal{A}^{<0})[-n] \\ & \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\bar{\mathcal{D}}_E}(\bar{\mathcal{M}}, \Phi_E)[-n], \end{aligned}$$

donc aussi l'isomorphisme annoncé. $\square$

Nous détaillons maintenant la structure de Φ_E .

PROPOSITION 3.2.3. — *Le complexe*

$$\Phi_E = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\bar{\pi}^{-1}\mathcal{D}_{\bar{E} \times E'}}(\bar{\pi}^{-1}\bar{j}_*(\mathcal{D}_{E \times E' \rightarrow E} \otimes e^{-\sigma}), \mathcal{A}^{<0})$$

est isomorphe dans $\mathbf{D}^b(\bar{\mathcal{D}}_E)$ au sous-faisceau de $\bar{k}_*(p_1^{-1}\mathcal{O}_{E^{\text{an}}})$ des fonctions f telles que $e^{-\sigma}f$ admet à l'infini (i.e. près de $S \times E'$) une décroissance exponentielle.

Preuve. — En prenant des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ sur E et leurs coordonnées duales $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ sur E' , $\mathcal{D}_{E \times E' \rightarrow E}$ se représente comme $\mathcal{D}_{E \times E'}$ -module à gauche par le complexe de Koszul

$$\mathbf{K}(\partial_{\xi_1}, \dots, \partial_{\xi_n}; \mathcal{D}_{E \times E'})[n].$$

Les différentielles de ce complexe sont, évidemment, $p_1^{-1}\mathcal{D}_E$ -linéaires à droite.

Le changement de structure « $\otimes e^{-\sigma}$ » revient alors au changement des différentielles de ce complexe :

$$\begin{aligned} (3.2.10) \quad \mathbf{K}(\partial_{\xi_1}, \dots, \partial_{\xi_n}; \mathcal{D}_{E \times E'}) \otimes e^{-\sigma} \\ = \mathbf{K}(\partial_{\xi_1} - x_1, \dots, \partial_{\xi_n} - x_n; \mathcal{D}_{E \times E'}), \end{aligned}$$

et on voit facilement que cette affirmation est encore vraie pour la structure à droite.

Par conséquent, Φ_E se représente comme $\bar{\pi}^{-1}\bar{j}_*(p_1^{-1}\mathcal{D}_E) = \bar{\mathcal{D}}_E$ -module à gauche par le complexe de Koszul *dual*

$$\mathbf{K}(-\partial_{\xi_1} - x_1, \dots, -\partial_{\xi_n} - x_n; \mathcal{A}^{<0})[-n].$$

Il suffit alors de voir que ce complexe se représente par le sous-faisceau de $\mathcal{A}^{<0}$ des fonctions φ de la forme $\varphi = e^{-\sigma} f$, où f est indépendante de ξ , et sur lequel ∂_{x_i} agissent par $\partial_{x_i}(e^{-\sigma} f) = e^{-\sigma} \partial_{x_i}(f)$, et pour cela il suffit encore de montrer que si φ est une fonction holomorphe de la forme

$$(3.2.11) \quad \varphi_k = e^{-(x_1 \xi_1 + \dots + x_k \xi_k)} f_k(x_1, \dots, x_n; \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$$

($1 \leq k \leq n-1$), admettant un développement asymptotique nul à l'infini, alors il existe une fonction ψ_k de la même forme et admettant un développement asymptotique nul à l'infini, telle que

$$(\partial_{\xi_{k+1}} + x_{k+1})\psi_k = \varphi_k.$$

Cela se fait comme en dimension $n = 1$ (voir [32], p. 84). □

Nous pouvons prouver maintenant :

PROPOSITION 3.2.4. — *Si nous désignons par Ψ le foncteur*

$$(3.2.12) \quad \Psi : \mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_E) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathbb{C}_{E'}),$$

$$\Psi(\mathcal{M}) = \mathbb{R}r_{2*}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\overline{\mathcal{D}}_E}(\overline{\mathcal{M}}, \Phi_E) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{C}_{B_E \times E'}} \mathbb{C}_{L+})[2n],$$

alors pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_E))$ il existe deux morphismes canoniques de $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}_{E'})$:

$$(3.2.13) \quad \mathcal{F}^+ Sol(\mathcal{M}) \longleftarrow \Psi(\mathcal{M}) \longrightarrow Sol(\mathcal{F}_* \mathcal{M}).$$

Preuve. — En rappelant que L^+ est un sous-ensemble ouvert de $B_E \times E'$, nous avons d'abord une inclusion canonique $\mathbb{C}_{L+} \hookrightarrow \mathbb{C}_{B_E \times E'}$, et donc un morphisme

$$(3.2.14) \quad \Phi_E \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{C}_{B_E \times E'}} \mathbb{C}_{L+} \longrightarrow \Phi_E.$$

D'autre part, d'après le résultat précédent, il existe une autre inclusion canonique $\Phi_E \hookrightarrow \bar{k}_*(p_1^{-1} \mathcal{O}_{E^{\text{an}}})$, donc aussi un morphisme

$$(3.2.15) \quad \bar{k}_*(p_1^{-1} \mathcal{O}_{E^{\text{an}}}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{C}_{B_E \times E'}} \mathbb{C}_{L+} \longleftarrow \Phi_E \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{C}_{B_E \times E'}} \mathbb{C}_{L+}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer le foncteur $\mathbb{R}r_{2*} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\overline{\mathcal{D}}_E}(\overline{\mathcal{M}}, -)[2n]$ à (3.2.14) et (3.2.15). □

Nous finissons cette section par un autre résultat valable dans le cas cohérent, et dont nous aurons besoin dans la suite :

PROPOSITION 3.2.5. — Si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}_E$ -module cohérent, alors il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\bar{E} \times E'})$:

$$(3.2.16) \quad q_1^* j_* (\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \bar{j}_* p_1^* (\mathcal{N}).$$

Preuve. — On a d'abord un morphisme fonctoriel $q_1^{-1} j_* \rightarrow \bar{j}_* p_1^{-1}$, car $\bar{j}^{-1} q_1^{-1} = p_1^{-1} j^{-1}$, d'où par adjonction $q_1^{-1} \rightarrow \bar{j}_* p_1^{-1} j^{-1}$, d'où $q_1^{-1} j_* \rightarrow \bar{j}_* p_1^{-1} j^{-1} j_* \rightarrow \bar{j}_* p_1^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} E \times E' & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{E} \times E' \\ p_1 \downarrow & & \downarrow q_1 \\ E & \xrightarrow{j} & \bar{E} \end{array}$$

Par la formule de projection, il existe aussi des morphismes

$$\begin{aligned} (3.2.17) \quad \mathcal{O}_{\bar{E} \times E'} \otimes_{q_1^{-1} \mathcal{O}_{\bar{E}}} q_1^{-1} j_* (\mathcal{N}) &\longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{E} \times E'} \otimes_{q_1^{-1} \mathcal{O}_{\bar{E}}} \bar{j}_* p_1^{-1} (\mathcal{N}) \\ &\longrightarrow \bar{j}_* (\bar{j}^{-1} \mathcal{O}_{\bar{E} \times E'} \otimes_{\bar{j}^{-1} (q_1^{-1} \mathcal{O}_{\bar{E}})} p_1^{-1} \mathcal{N}) \\ &= \bar{j}_* (\mathcal{O}_{E \times E'} \otimes_{p_1^{-1} \mathcal{O}_E} p_1^{-1} \mathcal{N}), \end{aligned}$$

donc on a un morphisme $q_1^* j_* (\mathcal{N}) \rightarrow \bar{j}_* p_1^* (\mathcal{N})$ dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\bar{E} \times E'})$.

Pour montrer qu'il est un isomorphisme, il suffit par « way-out » de le faire pour $\mathcal{N} = \mathcal{D}_E$. Et comme ce morphisme est de façon évidente un isomorphisme sur $E \times E'$, il suffit même de nous placer au voisinage de $Z \times E'$ (nous rappelons que nous avons noté par Z l'hypersurface à l'infini $Z = \bar{E} \setminus E$ de $\bar{E}$).

Comme dans la preuve de 2.2.3.2, nous pouvons nous ramener au cas où $\dim_{\mathbb{C}} E = 1$, et dans cette situation nous choisissons une coordonnée x sur E , sa coordonnée duale ξ sur E' , et $t = 1/x$ coordonnée à l'infini sur $\bar{E}$.

Il suffit alors de faire la démonstration sur $\bar{E}^* \times E'$, où

$$\bar{E}^* = \bar{E} \setminus \{x = 0\},$$

et la question revient à montrer que

$$(3.2.18) \quad \mathbb{C}\langle t, t^{-1}, \xi, \partial_t \rangle = \mathbb{C}[t, \xi] \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{C}\langle t, t^{-1}, \partial_t \rangle.$$

Enfin, la dernière égalité est évidente. □

En particulier, la dernière proposition signifie que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_E$ -module cohérent, alors $\bar{\mathcal{M}}$ s'écrit encore $\bar{\mathcal{M}} = \bar{\pi}^{-1} q_1^{-1} (j_* \mathcal{M})$. Nous allons utiliser cette formule dans le paragraphe suivant.

3.3. Réduction au système $b(t\partial_t) - tP$.

Nous considérons de nouveau $\mathcal{M} \in \mathcal{O}b(\mathbf{D}_c^b(\mathcal{D}_E))$ à cohomologie 1-spécialisable à l'infini. Nous allons montrer maintenant comment on peut réduire le problème à l'étude d'un système de la forme $b(t\partial_t)I_p - tP$ au voisinage de $0 \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ (dans un sens qui sera précisé plus loin).

Pour prouver que les morphismes (3.2.2) du paragraphe précédent sont des quasi-isomorphismes si $\mathcal{M}$ est à cohomologie 1-spécialisable à l'infini, il suffit de montrer qu'alors les morphismes

$$(3.3.1) \quad \bar{k}_*(p_1^{-1}\mathcal{O}_{E^{\text{an}}}) \otimes_{\mathbb{C}_{B_E \times E'}}^{\mathbb{L}} \mathbb{C}_{L^+} \longleftarrow \Phi_E \otimes_{\mathbb{C}_{B_E \times E'}}^{\mathbb{L}} \mathbb{C}_{L^+} \longrightarrow \Phi_E$$

deviennent des quasi-isomorphismes quand on applique $\mathbb{R}Hom_{\overline{\mathcal{D}}_E}(\overline{\mathcal{M}}, -)$.

Par « way-out », il suffit de supposer encore que $\mathcal{M}$ est un seul $\mathcal{D}_E$ -module spécialisable à l'infini, et dans ce cas $\overline{\mathcal{M}} = \bar{\pi}^{-1}q_1^{-1}(j_*\mathcal{M})$ d'après 3.2.5.

De plus, les morphismes (3.3.1) sont déjà des isomorphismes sur $E \times E'$, donc il suffit de considérer des voisinages de $S \times E'$.

Mais alors l'hypothèse sur $\mathcal{M}$ implique (cf. 1.8) que $(j_*\mathcal{M})^{\text{an}}$ admet (au voisinage de $S \times E'$) des résolutions par des $\mathcal{D}_{\overline{E}^{\text{an}}}$ -modules élémentaires, et, de nouveau par « way-out », il suffit donc de supposer que $(j_*\mathcal{M})^{\text{an}}$ est lui-même élémentaire — c'est-à-dire de la forme φ de 1.8.2.

Voyons maintenant ce que cela signifie en coordonnées.

Soit (s^0, ξ^0) un point quelconque de $S \times E'$, et choisissons des coordonnées $(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ sur $E \times E'$ telles que les ξ_i soient les variables duales des x_i , et telles que $s^0 = (1, 0, \dots, 0) \cdot \mathbb{R}_+$.

En faisant le changement de coordonnées $y_1 = 1/x_1$, $y_j = x_j/x_1$ ($j \in \{2, \dots, n\}$) et en considérant $(y_1, \dots, y_n)$ comme coordonnées à l'infini sur $\overline{E}$, nous avons $Z = \{y_1 = 0\}$, et le champ d'Euler $\theta = \sum_{i=1}^n x_i \partial_{x_i}$ de E devient $\theta = -y_1 \partial_{y_1}$.

La condition $(j_*\mathcal{M})^{\text{an}}$ *élémentaire* revient alors à dire que $(j_*\mathcal{M})^{\text{an}}$ se représente par un complexe

$$(3.3.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{D}_{\overline{E}^{\text{an}}}^p \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D}_{\overline{E}^{\text{an}}}^p \rightarrow 0$$

(concentré en degrés -1 et 0), où $p \in \mathbb{N}^*$, $\varphi = b(\partial_{y_1} y_1)I_p + y_1 P$, avec $b \in \mathbb{C}[s]$ polynôme unitaire dont les racines ne diffèrent pas par des

entiers non nuls, et P matrice $p \times p$, $P = (P_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, p\}}$, à coefficients $P_{ij} \in \mathcal{D}_{\bar{E}^{\text{an}}}$ d'ordre usuel $\leq \deg b$, et d'ordre 0 par rapport à la V -filtration $(V_k \mathcal{D}_{\bar{E}^{\text{an}}})_{k \in \mathbb{Z}}$ donnée par y_1 . C'est-à-dire encore que P_{ij} sont de la forme $P_{ij} = P_{ij}(y_1, \dots, y_n; (y_1 \partial_{y_1}), \partial_{y_2}, \dots, \partial_{y_n})$.

De plus, la fibre en (s^0, ξ^0) de $\mathbb{C}_{L^+}$ est $\mathbb{C}$ si $\text{Re}(\xi_1^0) > 0$ (où $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$) et $\{0\}$ dans le cas contraire; donc il nous reste à montrer que le complexe

$$(3.3.3) \quad 0 \rightarrow \Phi_{E, (s^0, \xi^0)}^p \xrightarrow{\varphi^*} \Phi_{E, (s^0, \xi^0)}^p \rightarrow 0$$

est acyclique si $\text{Re}(\xi_1^0) \leq 0$, et quasi-isomorphe au complexe

$$(3.3.4) \quad 0 \rightarrow \bar{k}_*(p_1^{-1} \mathcal{O}_{E^{\text{an}}})_{(s^0, \xi^0)}^p \xrightarrow{\varphi^*} \bar{k}_*(p_1^{-1} \mathcal{O}_{E^{\text{an}}})_{(s^0, \xi^0)}^p \rightarrow 0$$

si $\text{Re}(\xi_1^0) > 0$, où φ^* est l'adjoint de φ , c'est-à-dire de la forme

$$(3.3.5) \quad \varphi^* = b(-y_1 \partial_{y_1}) I_p + y_1 P(y_1, \dots, y_n; (-y_1 \partial_{y_1}), -\partial_{y_2}, \dots, -\partial_{y_n}).$$

Enfin, compte tenant de la structure de Φ_E , le problème se réduit à l'affirmation suivante (en changeant les notations, pour simplifier l'écriture) :

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, soient :

1) $\Sigma_\varepsilon \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ le secteur

$$\Sigma_\varepsilon = \{(t, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n; \|x\| < \varepsilon, |t| < \varepsilon, |\arg t| < \varepsilon\},$$

2) $G_\varepsilon = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}}(\Sigma_\varepsilon)$;

3) $\tilde{G}_{a, \varepsilon} = \{f \in G_\varepsilon; (\exists) f \in G_\varepsilon \text{ tel que } \varphi = e^{a/t} f, \\ \text{et } (\exists) 0 < \varepsilon' < \varepsilon \text{ et } A, B > 0 \text{ tels que} \\ |f(t, x)| < A e^{-B/|t|} \text{ si } (t, x) \in \Sigma_{\varepsilon'}\}$

(c'est-à-dire : le sous-espace de G_ε des fonctions φ de la forme $\varphi = e^{a/t} f$ où f est à décroissance exponentielle dans un secteur plus petit $\Sigma_{\varepsilon'}$) ;

4) $G = \varinjlim_{\varepsilon > 0} G_\varepsilon$, et $\tilde{G}_a = \varinjlim_{\varepsilon > 0} \tilde{G}_{a, \varepsilon}$.

Alors le complexe

$$(3.3.6) \quad 0 \rightarrow \tilde{G}_a^p \xrightarrow{\varphi^*} \tilde{G}_a^p \rightarrow 0$$

est acyclique si $a \leq 0$, et quasi-isomorphe au complexe

$$(3.3.7) \quad 0 \rightarrow G^p \xrightarrow{\varphi^*} G^p \rightarrow 0$$

si $a > 0$, où $p \in \mathbb{N}^*$, et φ^* est de la forme $\varphi^* = b(t\partial_t)I_p - tP$, tel que $b \in \mathbb{C}[s]$ soit un polynôme unitaire dont les racines ne diffèrent pas par des entiers non nuls, et $P = (P_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, p\}}$ soit une matrice $p \times p$, à coefficients $P_{ij} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}^{n+1}}$ d'ordre usuel $\leq \deg b$, et de la forme $P_{ij} = P_{ij}(t, x; t\partial_t, \partial_x)$ (on a noté comme d'habitude $x = (x_1, \dots, x_n)$, et $\partial_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$).

Il suffit donc de considérer dans la suite le système $b(t\partial_t)I_p - tP$ au voisinage de $0 \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.

3.4. Réduction au système $t\partial_t$.

Nous gardons les notations que nous avons établies à la fin de la section précédente, et nous notons de plus $m = \deg b$, $X = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ et $Y = \mathbb{C}^n$.

Nous allons réduire maintenant le système $b(t\partial_t)I_p - tP$ à un système de la forme $(t\partial_t)I_{mp}$, dans le sens suivant : nous allons construire un opérateur inversible $S : G^p \rightarrow G^{mp}$, tel que S et S^{-1} agissent aussi sur $\tilde{G}_a^p$ et respectivement $\tilde{G}_a^{mp}$, et tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} G^p & \xrightarrow{b(t\partial_t)I_p - tP} & G^p \\ S^{-1} \uparrow & & \downarrow S \\ G^{mp} & \xrightarrow{(t\partial_t)I_{mp}} & G^{mp} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{G}_a^p & \xrightarrow{b(t\partial_t)I_p - tP} & \tilde{G}_a^p \\ S^{-1} \uparrow & & \downarrow S \\ \tilde{G}_a^{mp} & \xrightarrow{(t\partial_t)I_{mp}} & \tilde{G}_a^{mp} \end{array}$$

soient commutatifs.

La construction de S est inspirée de [27] et [40].

3.4.1. Ordres et normes formelles. — Nous définissons ici l'ordre et la norme formelle d'une matrice d'opérateurs différentiels sur $Y = \mathbb{C}^n$.

Pour cela, nous regardons d'abord $\mathcal{D}_Y$ comme étant un sous-faisceau du faisceau $\mathcal{E}_Y$ des opérateurs microdifférentiels analytiques sur Y . Si $Q \in \mathcal{D}_Y$ est d'ordre usuel $q \in \mathbb{N}$ et de symbole total

$$(3.4.1) \quad \sigma(Q)(x, \xi) = \sum_{k=0}^q Q_k(x, \xi)$$

(où $Q_k(x, \xi)$ est homogène de degré k en ξ) et si $K \subset T^*Y$ est un compact et $T > 0$, nous définissons (suivant [4], p. 302) la *norme formelle* $N_q^K(Q, T)$ de Q comme étant

$$N_q^K(Q, T) = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ \alpha, \beta}} \frac{2(2n)^{-k} k!}{(|\alpha| + k)! (|\beta| + k)!} \sup_{(x, \xi) \in K} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta Q_{q-k}(x, \xi)| T^{2k + |\alpha| + |\beta|},$$

où nous avons noté comme d'habitude $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, et de même pour β et ∂_ξ .

Si maintenant $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, m\}}$ est une matrice $m \times m$ (m étant celui d'avant) à coefficients $a_{ij} \in \mathcal{D}_Y$, et si $r \in \mathbb{N}$, nous disons que A est d'ordre $\leq r$ si a_{ij} est d'ordre usuel $\leq (r + i - j)$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, m\}$, et nous posons alors

$$(3.4.2) \quad N_r^K(A, T) = \sup_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{j=1}^m N_{r+i-j}^K(a_{ij}, T) \right).$$

Si B est une matrice $mp \times mp$ (le même p que ci-dessus), à coefficients dans $\mathcal{D}_Y$, nous le découpons en p^2 blocs carrés B^{ij} de dimension $m \times m$, ($i, j \in \{1, \dots, p\}$), et nous disons que B est d'ordre $\leq r$ si chaque B^{ij} est d'ordre $\leq r$ dans le sens précédent. Dans ce cas, nous posons

$$(3.4.3) \quad N_r^K(B, T) = \sup_{1 \leq i \leq p} \left(\sum_{j=1}^p N_r^K(B^{ij}, T) \right).$$

Nous allons utiliser la notation $\text{ord}(B)$ pour désigner le plus petit entier r tel que B soit d'ordre $\leq r$.

Ces notions dépendent, bien sûr, de m et de p , mais elles sont bien adaptées à notre but.

On prouve facilement (comme par exemple dans [40], p. 378) que si B_1 et B_2 sont deux matrices $mp \times mp$ d'ordres $\leq r_1$ et respectivement $\leq r_2$, alors $B_1 B_2$ est d'ordre $\leq r_1 + r_2$, et que

$$(3.4.4) \quad N_{r_1+r_2}^K(B_1 B_2, T) \ll N_{r_1}^K(B_1, T) N_{r_2}^K(B_2, T)$$

(où « $\ll$ » signifie *majoration terme à terme*).

De plus, si B est de dimension $mp \times mp$ et d'ordre $\leq r$, et si $s \in \mathbb{N}$, alors

$$(3.4.5) \quad N_{r+s}^K(B, T) \ll \frac{1}{s!} \left(\frac{T^2}{2n} \right)^s N_r^K(B, T).$$

3.4.2. *Réductions sur $\mathcal{D}_X$.* — En revenant maintenant au système $b(t\partial_t)I_p - tP$, nous allons le réduire à la forme $(t\partial_t)I_{mp} - A - tB$ où A est à coefficients constants. Plus précisément :

PROPOSITION 3.4.2.1. — *Il existe deux matrices A et B de dimension $mp \times mp$, avec A à coefficients constants, et un isomorphisme $\mathcal{D}_X$ -linéaire*

$$(3.4.6) \quad \mathcal{D}_X^{mp} / \mathcal{D}_X^{mp}((t\partial_t)I_{mp} - A - tB) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_X^p / \mathcal{D}_X^p(b(t\partial_t)I_p - tP).$$

Preuve. — En considérant $(F_\ell \mathcal{D}_X)_{\ell \in \mathbb{N}}$ la filtration de $\mathcal{D}_X$ par l'ordre usuel des opérateurs et $(V_k \mathcal{D}_X)_{k \in \mathbb{Z}}$ la V -filtration de $\mathcal{D}_X$ donnée par $Y = \{t = 0\}$, nous rappelons que les éléments P_{ij} de P sont dans $(F_m \mathcal{D}_X) \cap (V_0 \mathcal{D}_X)$. Par conséquent, chaque P_{ij} peut s'écrire sous la forme

$$(3.4.7) \quad P_{ij}(t, x, \partial_t, \partial_x) = \sum_{k=0}^m P_{ij}^k(t, x, \partial_x) (t\partial_t)^k,$$

où P_{ij}^k est d'ordre $\leq (m-k)$ en ∂_x ; en particulier donc, P_{ij}^m est indépendant de ∂_x .

Si nous notons par λ_k ($k \in \{0, \dots, m-1\}$) les coefficients de b :

$$(3.4.8) \quad b(s) = s^m + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k s^k,$$

alors la matrice $b(t\partial_t)I_p - tP$ s'écrit

$$(3.4.9) \quad b(t\partial_t)I_p - tP = [I_p + tP_m(x, t)] (t\partial_t)^m + \sum_{k=0}^{m-1} [\lambda_k I_p + tP_k(x, t, \partial_x)] (t\partial_t)^k,$$

et comme $[I_p + tP_m(x, t)]$ est inversible dans l'anneau des matrices $p \times p$ à coefficients holomorphes au voisinage de $\{t = 0\}$, nous pouvons supposer même que $P_m = 0$.

Soit maintenant $(u_1, \dots, u_p)$ la base canonique de $\mathcal{D}_X^p$, soit $(v_{ij})_{\substack{i \in \{1, \dots, p\} \\ j \in \{1, \dots, m\}}}$ une base de $\mathcal{D}_X^{mp}$, et soit encore $\varphi : \mathcal{D}_X^{mp} \rightarrow \mathcal{D}_X^p$ le morphisme donné par

$$\varphi(v_{ij}) = (t\partial_t)^{j-1} u_i \quad (i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, \dots, m\}).$$

Il induit alors l'isomorphisme (3.4.6) cherché si nous considérons les matrices A et B suivantes : A est formée de p blocs diagonaux égaux à C_0 (nous notons cela en écrivant $A = C_0^\Delta$), où

$$(3.4.10) \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 & \cdots & -\lambda_{m-1} \end{pmatrix}$$

et B est formée de p^2 blocs $m \times m$, $B = (B^{ij})_{i,j \in \{1, \dots, p\}}$,

$$(3.4.11) \quad B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ P_{ij}^0 & \cdots & P_{ij}^{m-1} \end{pmatrix}$$

où P_{ij}^k sont ceux d'avant (et donc d'ordre usuel $\leq (m-k)$). □

Par conséquent, pour obtenir l'opérateur S de 3.4, il suffit de construire un opérateur inversible $R : G^{mp} \rightarrow G^{mp}$, tel que R et R^{-1} agissent aussi sur $\tilde{G}_a^{mp}$, et tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} G^{mp} & \xrightarrow{(t\partial_t)I_{mp}-A-Bt} & G^{mp} \\ R^{-1} \uparrow & & \downarrow R \\ G^{mp} & \xrightarrow{(t\partial_t)I_{mp}} & G^{mp} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{G}_a^{mp} & \xrightarrow{(t\partial_t)I_{mp}-A-Bt} & \tilde{G}_a^{mp} \\ R^{-1} \uparrow & & \downarrow R \\ \tilde{G}_a^{mp} & \xrightarrow{(t\partial_t)I_{mp}} & \tilde{G}_a^{mp} \end{array}$$

soient commutatifs.

3.4.3. Construction de R . — Nous allons construire maintenant l'opérateur R . Soit d'abord, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$(3.4.12) \quad V_k \widehat{\mathcal{D}_{X|Y}} = \varprojlim_{j \leq k} V_k \mathcal{D}_X / V_j \mathcal{D}_X,$$

et soit encore

$$(3.4.13) \quad \widehat{\mathcal{D}_{X|Y}} = \varinjlim_{k \in \mathbb{Z}} V_k \widehat{\mathcal{D}_{X|Y}}.$$

$\widehat{\mathcal{D}_{X|Y}}$ est donc un faisceau d'anneaux, dont les sections dans un voisinage du $x_1 = \cdots = 0$, $t = 0$ ont la forme

$$(3.4.14) \quad \sum_{\ell=0}^{\ell_0} Q_{\ell}(x, \partial_x, (t\partial_t)) \partial_t^{\ell} + \sum_{k=1}^{+\infty} S_k(x, \partial_x, (t\partial_t)) t^k,$$

où $\ell_0 \in \mathbb{N}$ (sans aucune condition de convergence en t sur la deuxième somme).

Nous pouvons donner maintenant :

PROPOSITION 3.4.3.1. — *Il existe une matrice R inversible $mp \times mp$ à coefficients dans $\widehat{\mathcal{D}_{X|Y}}$, telle que*

$$(3.4.15) \quad R((t\partial_t)I_{mp} - A - tB) = (t\partial_t)R.$$

Preuve. — Nous cherchons R sous la forme

$$(3.4.16) \quad R = R_0(t) \left[I_{mp} + \sum_{k=1}^{+\infty} R_k(x, \partial_x) t^k \right].$$

On prouve facilement (voir [40]) que, pour que R soit inversible, il suffit que $R_0(t)$ le soit. La matrice $R_0(t)$ doit alors vérifier

$$(3.4.17) \quad R_0(t) [(t\partial_t)I_{mp} - A] = (t\partial_t)R_0(t),$$

soit

$$(3.4.18) \quad [(t\partial_t), R_0(t)] = -R_0(t)A,$$

ou encore

$$(3.4.19) \quad t \frac{dR_0}{dt} = -R_0(t)A$$

car $R_0(t)$ ne dépend pas de ∂_t .

Vu la forme de A ($= C_0^{\Delta}$), il suffit de prendre $R_0(t) = S_0(t)^{\Delta}$ (c'est-à-dire formée de p blocs diagonaux $m \times m$ égaux à $S_0(t)$), où $S_0(t)$ est une matrice holomorphe inversible, solution de

$$(3.4.20) \quad t \frac{dS_0}{dt} = -S_0(t)C_0$$

(C_0 étant défini par (3.4.10)).

Une telle matrice est donnée par $S_0(t) = (\sigma_{ij}(t))_{i,j \in \{1, \dots, m\}}$,

$$(3.4.21) \quad \sigma_{ij}(t) = [(t\partial_t)^{m-j} + \sum_{k=j}^{m-1} \lambda_k (t\partial_t)^{k-j}] \delta_i(t)$$

où $\delta_1(t), \dots, \delta_m(t)$ sont m solutions indépendantes de $b(t\partial_t)\delta(t) = 0$, ou encore, si $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ sont les racines distinctes de $b(s)$ avec les multiplicités $\mu_1, \dots, \mu_\nu$:

$$(3.4.22) \quad \sigma_{ij}(t) = \sum_{\ell=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\mu_\ell} \alpha_{\ell k} t^{-\beta_\ell} (\log t)^k.$$

La matrice $R_0(t)$ étant choisie, on décompose

$$(3.4.23) \quad tB(t, x, \partial_x) = \sum_{k=1}^{+\infty} B_k(x, \partial_x) t^k,$$

et $B_k(x, \partial_x)$ seront des matrices $mp \times mp$ à coefficients dans $\mathcal{D}_Y$, d'ordre ≤ 1 au sens de 3.4.1, car nous rappelons que $B = (B_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, p\}}$, et

$$(3.4.24) \quad B_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ P_{i,j}^0 & \cdots & P_{i,j}^{m-1} \end{pmatrix}$$

avec $P_{i,j}^k$ d'ordre usuel $\leq m-k$.

Les $R_k(x, \partial_x)$ de (3.4.16) doivent vérifier alors

$$(3.4.25) \quad t \left(\frac{dR_0}{dt} \right) \left(I_{mp} + \sum_{k=1}^{+\infty} R_k(x, \partial_x) t^k \right) \\ = -R_0(t) \left(I_{mp} + \sum_{k=1}^{+\infty} R_k(x, \partial_x) t^k \right) \left(A + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k(x, \partial_x) t^k \right),$$

soit encore

$$(3.4.26) \quad kR_k(x, \partial_x) - [A, R_k(x, \partial_x)] \\ = -B_k(x, \partial_x) - \sum_{j=1}^{k-1} R_{k-j}(x, \partial_x) B_j(x, \partial_x).$$

En notant $\text{ad}_A(Q) = [A, Q]$ pour tout Q matrice $mp \times mp$ à coefficients dans $\mathcal{D}_Y$, on peut regarder $L_k = (k \cdot I_{mp} - \text{ad}_A)$ comme étant un opérateur à coefficients constants

$$(3.4.27) \quad L_k : \mathcal{D}_Y^{(mp)^2} \longrightarrow \mathcal{D}_Y^{(mp)^2}.$$

On a alors d'après un résultat classique

$$(3.4.28) \quad \det(L_k) = \prod_{i,j} [k - (\omega_i - \omega_j)]$$

où $\omega_1, \dots, \omega_{mp}$ sont les valeurs propres de $A = C_0^\Delta$, et donc les racines de $b(s)$. Ces racines ne diffèrent pas par des entiers non nuls, donc $\det(L_k) \neq 0$.

Par conséquent, les R_k sont bien déterminés par récurrence sur k :

$$(3.4.29) \quad R_k(x, \partial_x) = \begin{cases} -L_1^{-1} B_1(x, \partial_x) & \text{si } k = 1, \\ -L_k^{-1} (B_k(x, \partial_x) + \sum_{j=1}^{k-1} R_{k-j}(x, \partial_x) B_j(x, \partial_x)) & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

et nous avons obtenu un opérateur R inversible qui vérifie (3.4.15). $\square$

3.4.4. Décomposition de L_k^{-1} . — Pour finir la construction annoncée au début de 3.4, il nous reste à prouver maintenant que R et R^{-1} agissent sur G^{mp} et sur $\tilde{G}_a^{mp}$. Par le même raisonnement que celui que nous venons de faire à 3.4.3, nous pouvons montrer qu'il existe aussi un opérateur R' inversible tel que

$$(3.4.30) \quad [(t\partial_t)I_{mp} - A - tB]R' = R'(t\partial_t),$$

et par l'unicité de l'inverse nous avons $R' = R^{-1}$; il suffit donc de prouver seulement que $R = R_0(t) [I_{mp} + \sum_{k=1}^{+\infty} R_k(x, \partial_x) t^k]$ agit sur G^{mp} et sur $\tilde{G}_a^{mp}$.

Enfin, $R_0(t)$ est à coefficients de classe de Nilsson (car $S_0(t)$ l'est, d'après (3.4.21)), donc il suffit encore de prouver que

$$I_{mp} + \sum_{k=1}^{+\infty} R_k(x, \partial_x) t^k$$

agit sur G^{mp} et sur $\tilde{G}_a^{mp}$.

Pour cela, nous examinons d'abord L_k^{-1} .

Soit donc de nouveau $L_k = k \cdot I_{mp} - \text{ad}_A$. Comme nous l'avons déjà vu, il est inversible comme opérateur à coefficients constants agissant sur $\mathcal{D}_Y^{(mp)^2}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Si nous regardons maintenant aussi ad_A comme opérateur à coefficients constants sur $\mathcal{D}_Y^{(mp)^2}$, et si nous le notons dans cette situation par N , l'inverse L_k^{-1} de L_k s'écrit encore

$$(3.4.31) \quad (kI_{(mp)^2} - N)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{N^\ell}{k^{\ell+1}}$$

si $k \geq \|N\|$ (où $\|\cdot\|$ est ici par exemple la norme sup sur les matrices $(mp)^2 \times (mp)^2$).

Puisque $A = C_0^\Delta$ est d'ordre ≤ 1 (au sens de 3.4.1), nous avons *a priori*

$$(3.4.32) \quad \text{ord}(N^\ell Q) \leq \text{ord}(Q) + \ell$$

pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tout Q matrice $mp \times mp$ à coefficients dans $\mathcal{D}_Y$. Mais à cause du fait que N est à *coefficients constants*, nous pouvons donner aussi une autre estimation : pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tout Q nous avons

$$(3.4.33) \quad \text{ord}(N^\ell Q) \leq \text{ord}(Q) + 2(m-1),$$

car les éléments de $N^\ell Q$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des éléments de Q .

Si nous notons maintenant

$$(3.4.34) \quad N_{k,\ell} = \begin{cases} \frac{1}{k^{\ell+1}} N^\ell & \text{si } \ell \in \{0, \dots, 2m-3\}, \\ L_k^{-1} - \sum_{j=0}^{2m-3} \frac{1}{k^{j+1}} N^j & \text{si } \ell = 2m-2, \end{cases}$$

nous avons alors

$$(3.4.35) \quad L_k^{-1} = \sum_{\ell=0}^{2m-2} N_{k,\ell},$$

$$(3.5.36) \quad \text{ord}(N_{k,\ell} Q) \leq \text{ord}(Q) + \ell,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ell \in \{0, \dots, 2m-2\}$, et Q matrice $mp \times mp$ à coefficients dans $\mathcal{D}_Y$.

Enfin, si $k > \|N\|$, nous avons

$$(3.4.37) \quad \|N_{k,\ell}\| < \frac{\|N\|^\ell}{k^{\ell+1}}$$

si $\ell \in \{0, \dots, 2m-3\}$, et

$$(3.4.38) \quad \|N_{k,2m-2}\| = \left\| \frac{N^{2m-2}}{k^{2m-2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{N^j}{k^{j+1}} \right\| \leq \frac{\|N\|^{2m-2}}{k^{2m-2}(k-\|N\|)}.$$

D'autre part, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq \|N\|\}$ est fini. Il existe donc $C_0 > 0$ tel que, pour toute Q matrice $mp \times mp$ à coefficients dans $\mathcal{D}_Y$ d'ordre $\leq r$, on ait

$$(3.4.39) \quad N_{r+\ell}^K(N_{k,\ell}Q, T) \leq \frac{C_0}{k^{\ell+1}} N_r^K(Q, T)$$

pour tout $\ell \in \{0, \dots, 2m-2\}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $K \subset T^*Y$ compact et $T > 0$. Par conséquent, nous avons aussi une estimation pour les normes.

3.4.5. Ordre et norme de R_k . — Nous voulons maintenant trouver des estimations convenables pour l'ordre et pour la norme formelle de R_k . Pour cela, nous avons besoin d'une décomposition de R_k .

Rappelons que les R_k sont donnés par

$$(3.4.40) \quad R_k(x, \partial_x) = \begin{cases} -L_1^{-1} B_1(x, \partial_x) & \text{si } k = 1, \\ -L_k^{-1} \left(B_k(x, \partial_x) + \sum_{j=1}^{k-1} R_{k-j}(x, \partial_x) B_j(x, \partial_x) \right) & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Pour abréger l'écriture, soit d'abord

$$(3.4.41) \quad M_{k,s} = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^s \mid k = k_1 > k_2 > \dots > k_s \geq 1\}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $s \in \{1, \dots, k\}$, et soit également

$$(3.4.42) \quad R^{(\bar{k},s)} = (L_{k_1}^{-1} \dots L_{k_s}^{-1})(B_{k_s} B_{k_{s-1}-k_s} \dots B_{k_1-k_2})$$

pour tout $\bar{k} = (k_1, \dots, k_s) \in M_{k,s}$. Alors :

PROPOSITION 3.4.5.1. — *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons*

$$(3.4.43) \quad R_k = \sum_{s=1}^k (-1)^s \sum_{\bar{k} \in M_{k,s}} R^{(\bar{k},s)}.$$

Preuve. — Par récurrence sur k :

- Si $k = 1$: $R_1 = -L_1^{-1}B_1$, ce qui vérifie l'affirmation de l'énoncé.
- Si nous supposons maintenant que l'affirmation est vraie pour les R_j avec $j \leq k-1$, nous avons pour $k \geq 2$:

$$(3.4.44) \quad R_k = -L_k^{-1}B_k - L_k^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} R_j B_{k-j}$$

$$(3.4.45) \quad R_j = \sum_{s=1}^j (-1)^s \sum_{\bar{k} \in M_{j,s}} (L_j^{-1} L_{k_2}^{-1} \cdots L_{k_s}^{-1}) \times (B_{k_s} B_{k_{s-1}-k_s} \cdots B_{j-k_2})$$

donc

$$\begin{aligned} R_k &= -L_k^{-1}B_k - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{s=1}^j (-1)^s \sum_{\bar{k} \in M_{j,s}} [(L_k^{-1} L_j^{-1} L_{k_2}^{-1} \cdots L_{k_s}^{-1}) \\ &\quad \times (B_{k_s} B_{k_{s-1}-k_s} \cdots B_{j-k_2} B_{k-j})] \\ &= -L_k^{-1}B_k + \sum_{s=2}^k (-1)^s \sum_{\bar{k} \in M_{k,s}} (L_{k_1}^{-1} \cdots L_{k_s}^{-1}) (B_{k_s} B_{k_{s-1}-k_s} \cdots B_{k_1-k_2}). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'affirmation est vraie aussi pour R_k . □

D'autre part maintenant, d'après (3.4.35), chaque L_k^{-1} s'écrit encore

$$(3.4.46) \quad L_k^{-1} = \sum_{\ell=0}^{2m-2} N_{k,\ell}$$

donc en notant

$$(3.4.47) \quad L_s = \{\bar{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_s) \in \mathbb{N}^s \mid \ell_j \leq 2m-2, (\forall) j \in \{1, \dots, s\}\}$$

pour tout $s \in \{1, \dots, k\}$, et en notant aussi

$$(3.4.48) \quad Q^{(\bar{k}, \bar{\ell}, s)} = (N_{k_1, \ell_1} \cdots N_{k_s, \ell_s}) (B_{k_s} B_{k_{s-1}-k_s} \cdots B_{k_1-k_2})$$

pour tout $\bar{k} = (k_1, \dots, k_s) \in M_{k,s}$ et $\bar{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_s) \in L_s$, chaque $R^{(\bar{k},s)}$ se décompose à son tour en $(2m-1)^s$ termes :

$$(3.4.49) \quad R^{(\bar{k},s)} = \sum_{\bar{\ell} \in L_s} Q^{(\bar{k},\bar{\ell},s)}.$$

Pour $Q^{(\bar{k},\bar{\ell},s)}$ nous pouvons donner des estimations pour l'ordre et la norme formelle :

PROPOSITION 3.4.5.2. — Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $s \in \{1, \dots, k\}$, $\bar{k} = (k_1, \dots, k_s) \in M_{k,s}$ et $\bar{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_s) \in L_s$, si $\ell = (\ell_1+1) + \dots + (\ell_s+1)$, nous avons :

$$1) \text{ ord}(Q^{(\bar{k},\bar{\ell},s)}) \leq \ell;$$

2) Pour tout $K \subset T^*Y$ compact et tout $T_0 > 0$, il existe $C_1, C_2 > 0$ (indépendants de k et ℓ), tel que

$$(3.4.50) \quad N_\ell^K(Q^{(\bar{k},\bar{\ell},s)}, T_0) \leq C_1^s C_2^k \frac{(2m-1)^\ell}{\ell!}.$$

Preuve. — La première affirmation est immédiate : par (3.4.36), nous avons

$$\text{ord}(Q^{(\bar{k},\bar{\ell},s)}) \leq \ell_1 + \dots + \ell_s + \text{ord}(B_{k_s} B_{k_{s-1}-k_s} \dots B_{k_1-k_2}),$$

donc aussi $\text{ord}(Q^{(\bar{k},\bar{\ell},s)}) \leq \ell_1 + \dots + \ell_s + s$, car les B_j sont d'ordre ≤ 1 .

Pour la deuxième affirmation, remarquons d'abord que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} B_k(x, \partial_x) t^k = tB$$

est une matrice à coefficients dans $\mathcal{D}_X$ (cf. 3.4.2), donc la série $\sum_{k=1}^{+\infty} N_1^K(B_k, T_0) t^k$ est convergente pour $t > 0$ assez petit. Par conséquent, il existe $C', C'' > 0$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(3.4.51) \quad N_1^K(B_k, T_0) \leq C' C''^k.$$

D'autre part, par (3.4.39), et (3.4.4), il existe $C_0 > 0$ tel que

$$N_\ell^K(Q^{(\bar{k},\bar{\ell},s)}, T_0) \leq \frac{C_0^s}{k_1^{\ell_1+1} \dots k_s^{\ell_s+1}} N_1^K(B_{k_s}, T_0) N_1^K(B_{k_{s-1}-k_s}, T_0) \dots N_1^K(B_{k_1-k_2}, T_0)$$

et donc, puisque $k_1 = k$,

$$(3.4.52) \quad N_\ell^K(Q^{(\bar{k}, \bar{\ell}, s)}, T_0) \leq \frac{(C_0 C')^s C''^k}{k_1^{\ell_1+1} \dots k_s^{\ell_s+1}}.$$

Si nous prenons maintenant $C_1 = C_0 C'$ et $C_2 = C''$, l'inégalité que nous avons annoncée découle alors du lemme 3.4.5.3 suivant. $\square$

LEMME 3.4.5.3. — *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $s \in \{1, \dots, k\}$, $\bar{k} = (k_1, \dots, k_s) \in M_{k,s}$ et $\bar{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_s) \in L_s$, si $\ell = (\ell_1+1) + \dots + (\ell_s+1)$, nous avons*

$$(3.4.53) \quad \frac{1}{k_1^{\ell_1+1} \dots k_s^{\ell_s+1}} \leq \frac{(2m-1)^\ell}{\ell!}.$$

Preuve. — Par récurrence sur s :

- Si $s = 1$, nous avons

$$(3.4.54) \quad \frac{1}{k_1^{\ell_1+1}} \leq 1 \leq \left(\frac{2m-1}{\ell_1+1} \right)^{\ell_1+1} \leq \frac{(2m-1)^{\ell_1+1}}{(\ell_1+1)!}.$$

- Si maintenant nous supposons que l'affirmation est vraie pour $s-1$, nous avons $k_2 > \dots > k_s \geq 1$, donc $k_2 \geq (s-1)$, et donc

$$(3.4.55) \quad \frac{1}{k_2^{\ell_2+1} \dots k_s^{\ell_s+1}} \leq \frac{(2m-1)^{(\ell_2+1)+\dots+(\ell_s+1)}}{[(\ell_2+1) + \dots + (\ell_s+1)]!}.$$

Il suffit alors de montrer encore que

$$(3.4.56) \quad \frac{1}{k_1^{\ell_1+1}} \leq \frac{(2m-1)^{\ell_1+1}}{\prod_{j=1}^{\ell_1+1} [j + (\ell_2+1) + \dots + (\ell_s+1)]}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\ell_1+1} [j + (\ell_2+1) + \dots + (\ell_s+1)] &\leq [(\ell_1+1) + (\ell_2+1) + \dots + (\ell_s+1)]^{\ell_1+1} \\ &\leq [s(2m-1)]^{\ell_1+1} \leq [k_1(2m-1)]^{\ell_1+1}, \end{aligned}$$

donc nous avons bien l'inégalité annoncée. $\square$

Ces estimations étant établies, regroupons maintenant les $Q^{(\bar{k}, \bar{\ell}, s)}$ par ordre. Soit d'abord

$$(3.4.57) \quad J_{\ell, s} = \{ \bar{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_s) \in L_s \mid (\ell_1 + 1) + \dots + (\ell_s + 1) = \ell \}$$

pour tout $\ell, s \in \mathbb{N}^*$, $s \leq \ell \leq s(2m-1)$ (de façon à avoir donc $L_s = \bigcup_{\ell=s}^{s(2m-1)} J_{\ell, s}$), et soit encore

$$(3.4.58) \quad R_k^\ell = \sum_{s=1}^k (-1)^s \sum_{\bar{k} \in M_{k, s}} \sum_{\bar{\ell} \in J_{\ell, s}} Q^{(\bar{k}, \bar{\ell}, s)}$$

pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}^*$, $\ell \leq k(2m-1)$.

Alors, d'après la proposition précédente, les R_k^ℓ sont d'ordre $\leq \ell$, ils forment une décomposition de R_k :

$$(3.4.59) \quad R_k = \sum_{\ell=1}^{k(2m-1)} R_k^\ell$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (cf. proposition 3.4.5.1 et (3.4.4.49)), et nous avons pour eux des bonnes estimations pour les normes formelles :

PROPOSITION 3.4.5.4. — Pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}^*$, $\ell \leq k(2m-1)$, tout $K \subset T^*Y$ compact et tout $T_0 > 0$, il existe $C_3, C_4 > 0$ (indépendants de k et ℓ), tels que

$$(3.4.60) \quad N_\ell^K(R_k^\ell, T_0) \leq \frac{1}{\ell!} C_3^\ell C_4^k.$$

Preuve. — D'après la proposition précédente, pour les K et T_0 donnés, il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que

$$(3.4.61) \quad N_\ell^K(Q^{(\bar{k}, \bar{\ell}, s)}, T_0) \leq C_1^s C_2^k \frac{(2m-1)^\ell}{\ell!}.$$

Maintenant, l'ensemble $M_{k, s}$ de (3.4.41) est à $\binom{k-1}{s-1} < 2^k$ éléments (nous notons par $\binom{k}{s}$ les coefficients binomiaux), et d'autre part l'ensemble $J_{\ell, s}$ a moins de $\binom{\ell-1}{s-1}$ éléments, car d'après un résultat d'Euler, le nombre des solutions $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ de l'équation

$$(3.4.62) \quad x_1 + \dots + x_n = m$$

où $m \in \mathbb{N}^*$, est donné par le nombre des combinaisons avec répétition de m éléments n à n — c'est-à-dire par $\binom{n+m-1}{n-1}$.

Par conséquent nous avons

$$\begin{aligned} N_\ell^K(R_k^\ell, T_0) &\leq \frac{(2m-1)^\ell}{\ell!} (2C_2)^k \sum_{s=1}^k \binom{\ell-1}{s-1} C_1^s \\ &\leq \frac{(2m-1)^\ell}{\ell!} C_1 (2C_2)^k \sum_{s=0}^{\ell-1} \binom{\ell-1}{s} C_1^s \\ &\leq \frac{1}{\ell!} [(1+C_1)(2m-1)]^\ell (2C_2)^k, \end{aligned}$$

ce que nous permet de choisir $C_3 = (1+C_1)(2m-1)$ et $C_4 = 2C_2$. □

Enfin, nous pouvons énoncer maintenant :

PROPOSITION 3.4.5.5. — *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:*

- 1) R_k est d'ordre $\leq k(2m-1)$;
- 2) *Pour tout $K \subset T^*Y$ compact et tout $T_0 > 0$, il existe $C > 0$ (indépendant de k), tel que*

$$(3.4.63) \quad N_{k(2m-1)}^K(R_k, T_0) \leq \frac{C^k}{[k(2m-1)]!}.$$

Preuve. — La première affirmation est évidente, et pour la deuxième, par (3.4.5) et par la proposition précédente, pour K et T_0 donnés il existe $C_3, C_4 > 0$ tels que

$$\begin{aligned} N_{k(2m-1)}^K(R_k, T_0) &\leq \sum_{\ell=1}^{k(2m-1)} \frac{1}{[k(2m-1) - \ell]!} \left(\frac{T_0^2}{2n}\right)^{k(2m-1) - \ell} N_\ell^K(R_k^\ell, T_0) \\ &\leq C_4^k \sum_{\ell=1}^{k(2m-1)} \frac{1}{\ell! [k(2m-1) - \ell]!} C_3^\ell \left(\frac{T_0^2}{2n}\right)^{k(2m-1) - \ell} \\ &\leq \frac{1}{[k(2m-1)]!} \left[C_4 \left(C_3 + \frac{T_0^2}{2n} \right)^{2m-1} \right]^k. \end{aligned}$$

Cela nous amène à choisir $C = C_4(C_3 + T_0^2/2n)^{2m-1}$. □

Cet estimation va nous permettre dans le paragraphe suivant de montrer que R agit sur G^{mp} et sur $\tilde{G}_a^{mp}$.

3.4.6. *Action de R sur G^{mp} et sur $\tilde{G}_a^{mp}$.* — Rappelons d'abord les notations que nous avons prises en 3.3 :

1) $\Sigma_\varepsilon \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ est le secteur

$$\Sigma_\varepsilon = \{(t, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \mid \|x\| < \varepsilon, |t| < \varepsilon, |\arg t| < \varepsilon\};$$

2) $G_\varepsilon = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}}(\Sigma_\varepsilon)$;

3) $\tilde{G}_{a,\varepsilon} = \{\varphi \in G_\varepsilon \mid (\exists) f \in G_\varepsilon \text{ tel que } \varphi = e^{a/t} f,$

et $(\exists) 0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et $A, B > 0$ tels que

$$|f(t, x)| < A e^{-B/|t|} \text{ si } (t, x) \in \Sigma_{\varepsilon'}\};$$

4) $G = \varinjlim_{\varepsilon > 0} G_\varepsilon$, et $\tilde{G}_a = \varinjlim_{\varepsilon > 0} \tilde{G}_{a,\varepsilon}$.

Nous sommes en mesure de prouver maintenant :

PROPOSITION 3.4.6.1. — *R agit sur G^{mp} et sur $\tilde{G}_a^{mp}$.*

Preuve. — Comme nous l'avons déjà dit en 3.4.4, il suffit de montrer que la partie $\sum_{k=1}^{+\infty} R_k(x, \partial_x) t^k$ agit sur G^{mp} et sur $\tilde{G}_a^{mp}$, car $R_0(t)$ de (3.4.16) est à coefficients de classe de Nilsson. Si nous notons

$$R_k = (r_{ij}^{(k)})_{i,j \in \{1, \dots, mp\}},$$

il suffit de prouver donc que chaque $\sum_{k=1}^{+\infty} r_{ij}^{(k)} t^k$ agit sur G et sur $\tilde{G}_a$.

Fixons donc $i, j \in \{1, \dots, mp\}$, et notons

$$r_{ij}^{(k)} = r^{(k)}.$$

Par ce que nous venons de voir, $r^{(k)}(x, \partial_x)$ est d'ordre $\leq k(2m-1) + q$ (où $q \in \{0, \dots, (m-1)\}$); donc si $r^{(k)}(x, \partial_x)$ s'écrit

$$(3.4.64) \quad r^{(k)}(x, \partial_x) = \sum_{|\lambda| \leq k(2m-1)+q} p_{k,\lambda}(x) \partial_x^\lambda,$$

alors pour montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} r^{(k)} t^k$ agit sur G , il suffit de voir que si $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}}(\Sigma_\varepsilon)$, et si $K \subset T^*Y$ est un compact, alors il existe un $t_0 > 0$ tel que la série

$$(3.4.65) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{|\lambda| \leq k(2m-1)+q} \sup_{x \in K} |p_{k,\lambda}(x) \partial_x^\lambda f(x)| \right) t_0^k$$

soit convergente.

Fixons $\varepsilon > 0$. Si nous notons maintenant par $P(x, \varepsilon)$ le polydisque

$$P(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{C}^n; |y_j - x_j| < \varepsilon, (\forall) j \in \{1, \dots, n\}\}$$

et par $\partial_0 P(x, \varepsilon)$ sa frontière distinguée

$$\partial_0 P(x, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{C}^n; |y_j - x_j| = \varepsilon, (\forall) j \in \{1, \dots, n\}\},$$

nous avons pour tout $\frac{1}{2}\varepsilon < \rho < \varepsilon$, $(t, x) \in \Sigma_\varepsilon$, $\lambda \in \mathbb{N}^n$ et $f \in G_\varepsilon$:

$$(3.4.66) \quad \partial_x^\lambda f(t, x) = \frac{\lambda!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 P(x, \varepsilon - \rho)} \frac{f(t, \zeta)}{(\zeta - x)^{\lambda+1}} d\zeta$$

(où $\lambda+1 = (\lambda_1+1, \dots, \lambda_n+1)$), donc

$$(3.4.67) \quad |\partial_x^\lambda f(t, x)| \leq \frac{\lambda!}{(\varepsilon - \rho)^{|\lambda|}} \sup_{\zeta \in \partial_0 P(x, \varepsilon - \rho)} |f(t, \zeta)|.$$

Il suffit donc de montrer que si $K \subset T^*Y$ est un compact, alors il existe un $\frac{1}{2}\varepsilon < \rho < \varepsilon$ et un $t_0 > 0$ tel que la série

$$(3.4.68) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{|\lambda| \leq k(2m-1)+q} \frac{\lambda!}{(\varepsilon - \rho)^{|\lambda|}} \sup_{x \in K} |p_{k,\lambda}(x)| \right) t_0^k$$

soit convergente, et cela suffit encore pour montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} r^{(k)} t^k$ agit aussi sur l'espace $\tilde{G}_a$: les $r^{(k)}$ sont indépendants de ∂_t , donc ils commutent à $e^{a/t}$, et les majorations que nous obtenons ainsi ne changent pas les conditions de décroissance en t .

D'autre part, par ce que nous avons vu dans la section précédente, pour tout $K \subset T^*Y$ compact tel que $K' = \text{pr}_Y(K) \subset \{x \in Y; \|x\| < \varepsilon\}$, et pour tout $T_0 > 0$, il existe $C > 0$ tel que

$$(3.4.69) \quad N_{k(2m-1)+q}^K(r^{(k)}, T_0) \leq \frac{C^k}{[k(2m-1)]!}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, pour tout $0 < T < T_0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{C^k}{[k(2m-1)]!} &\geq \sum_{s=0}^{k(2m-1)+q} \sum_{\alpha, \beta} \frac{(2n)^{-s} s!}{(s+|\alpha|)! (s+|\beta|)!} \\ &\quad \times \sup_{(x, \xi) \in K} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sum_{|\lambda|=k(2m-1)+q-s} p_{k,\lambda}(x) \xi^\lambda \right| T^{2s+|\alpha|+|\beta|}, \end{aligned}$$

ou, si nous retenons de la deuxième somme seulement les termes où $\alpha = 0$ et $|\beta| = k(2m-1) + q - s$:

$$\frac{C^k}{[k(2m-1)]!} \geq \sum_{s=0}^{k(2m-1)+q} \sum_{|\lambda|=k(2m-1)+q-s} \frac{\lambda!}{(2n)^s [k(2m-1) + q]!} \times \sup_{x \in K'} |p_{k,\lambda}(x)| T^{2s+|\lambda|}.$$

Enfin, $q \leq (m-1)$, donc

$$[k(2m-1) + q]! \leq [k(2m-1)]! [k(2m-1) + (m-1)]^{m-1},$$

et $(2n)^s \leq (2n)^{k(2m-1)+q}$, et nous avons

$$\begin{aligned} [k(2m-1) + (m-1)]^{m-1} C^k \\ \geq \sum_{|\lambda| \leq k(2m-1)+q} \left(\frac{\lambda!}{T^{|\lambda|}} \right) \sup_{x \in K'} |p_{k,\lambda}(x)| \left(\frac{T^2}{2n} \right)^{k(2m-1)+q}. \end{aligned}$$

Si nous choisissons maintenant $0 < T < \frac{1}{4}\varepsilon$ et $\frac{1}{2}\varepsilon < \rho < \varepsilon$ tels que $(\varepsilon - \rho) > T$, nous avons

$$\sum_{|\lambda| \leq k(2m-1)+q} \frac{\lambda!}{(\varepsilon - \rho)^{|\lambda|}} \sup_{x \in K'} |p_{k,\lambda}(x)| \leq [k(2m-1) + (m-1)]^{m-1} \left(\frac{2n}{T^2} \right)^q \left[C \left(\frac{2n}{T^2} \right)^{2m-1} \right]^k$$

donc la série (3.4.68) est convergente pour $0 < t_0 < C^{-1}(T^2/2n)^{2m-1}$, et cela termine la preuve. $\square$

Comme nous l'avons dit en 3.4.4, l'existence de R implique celle de S annoncée au début de 3.4.

Incidentement, les mêmes estimations montrent que l'action de R sur G_ε^{mp} est *continue* (par rapport à la topologie usuelle), et cela signifie que les coefficients de R sont dans $\mathcal{D}_X^\infty$ (voir [35], p. 116), et donc aussi ceux de S .

3.5. Le système $t\partial_t$.

Pour finir la preuve du résultat principal, il nous reste maintenant à prouver :

PROPOSITION 3.5.1. — *Le complexe*

$$(3.5.1) \quad 0 \rightarrow \tilde{G}_a \xrightarrow{t\partial_t} \tilde{G}_a \rightarrow 0$$

est acyclique si $a \leq 0$, et quasi-isomorphe au complexe

$$(3.5.2) \quad 0 \rightarrow G \xrightarrow{t\partial_t} G \rightarrow 0$$

si $a > 0$.

Preuve.

• Si $a \leq 0$, il suffit de voir que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, l'action de t et celle de ∂_t sur $\tilde{G}_{a,\varepsilon}$ sont inversibles. Cela est évident pour t , et pour ∂_t on vérifie facilement que l'inverse est donné par

$$(3.5.3) \quad (\partial_t^{-1}f)(t, x) = t \int_0^1 f(\tau t, x) d\tau$$

pour tout $(t, x) \in \Sigma_\varepsilon$ et tout $f \in \tilde{G}_{a,\varepsilon}$.

• Si $a > 0$, $\tilde{G}_{a,\varepsilon}$ est le sous-espace de G_ε des fonctions holomorphes sur Σ_ε , à croissance au plus exponentielle sur un secteur $\Sigma_{\varepsilon'}$ plus petit ($0 < \varepsilon' < \varepsilon$). La question revient alors à montrer que le complexe

$$(3.5.4) \quad 0 \rightarrow G_\varepsilon / \tilde{G}_{a,\varepsilon} \xrightarrow{t\partial_t} G_\varepsilon / \tilde{G}_{a,\varepsilon} \rightarrow 0$$

est acyclique, et cela résulte immédiatement de la régularité de $t\partial_t$. □

Annexe A.

Fonctions admettant à l'infini un développement asymptotique nul.

Nous reprenons les notations de 2.2 et de 2.3 : soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie, vu comme variété algébrique, et soit $\bar{E}$ une compactification projective de E . Soient encore $Z = \bar{E} \setminus E$, et B_E l'éclaté réel de $\bar{E}$ le long de Z (qui coïncide avec le complété en boules de E).

Notons par j et π les morphismes canoniques $j : E \rightarrow \bar{E}$ et $\pi : B_E \rightarrow \bar{E}$, par E' le dual de E , et par $\bar{j}$ et $\bar{\pi}$ les morphismes

$\bar{j} = j \times \text{id} : E \times E' \rightarrow \bar{E} \times E'$ et $\bar{\pi} = \pi \times \text{id} : B_E \times E' \rightarrow \bar{E} \times E'$.
Notons encore $S = B_E \setminus E$.

Nous considérons sur $B_E \times E'$ le faisceau

$$\mathcal{A}^{<0} = \mathcal{A}_{B_E \times E' | S \times E'}^{<0}$$

défini comme suit :

- si U est un ouvert de $E \times E'$, $\Gamma(U, \mathcal{A}^{<0}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_{E \times E'})$;
- si $U = V \times V'$ est un voisinage ouvert d'un point $(s^0, \xi^0) \in S \times E'$, $\Gamma(U, \mathcal{A}^{<0})$ est le sous-espace de $\Gamma((V \cap E) \times V', \mathcal{O}_{E \times E'})$ des fonctions f telles que pour tout compact $K \subset V'$, on a

$$(A.1) \quad \lim_{\substack{\|x\| \rightarrow +\infty \\ x \in V \cap E}} \|x\|^m \cdot |f(x, \xi)| = 0$$

uniformément par rapport à $\xi \in K$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire : les fonctions holomorphes sur $E \times E'$ admettant à l'infini un développement asymptotique nul, uniformément par rapport à ξ).

Pour ce faisceau, on a un théorème de Borel-Ritt (voir [38]), et comme en dimension $n = 1$ (voir [29]) on peut prouver que si on note par $\widehat{\mathcal{O}}$ le complété formel de $\mathcal{O}_{\bar{E} \times E'}$ le long de $Z \times E'$, alors on a

$$(A.2) \quad \widehat{\mathcal{O}} / \mathcal{O}_{\bar{E} \times E'} \simeq \mathbb{R}\bar{\pi}_*(\mathcal{A}^{<0})[1].$$

D'autre part, si $\mathcal{N}$ est un complexe borné de $\mathcal{D}_{E \times E'}$ -modules à cohomologie cohérente, on a

$$(A.3) \quad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\bar{E} \times E'}}(\mathbb{R}\bar{j}_*(\mathcal{N}), \widehat{\mathcal{O}}) = 0$$

(il suffit d'utiliser 1.6.10), et par conséquent

$$(A.4) \quad \begin{aligned} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\bar{E} \times E'}}(\mathbb{R}\bar{j}_*(\mathcal{N}), \mathcal{O}_{\bar{E} \times E'}) \\ \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\bar{E} \times E'}}(\mathbb{R}\bar{j}_*(\mathcal{N}), \mathbb{R}\bar{\pi}_*(\mathcal{A}^{<0})). \end{aligned}$$

Nous avons besoin de ce résultat dans 3.2.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. ABDEL GADIR, Analyse microlocale des systèmes différentiels holonomes, Thèse, Univ. de Grenoble 1, 1992.
- [2] J.E. BJÖRK, Rings of Differential Operators, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [3] A. BOREL et al., Algebraic $\mathcal{D}$ -modules, Persp. in Math., n° 2, Academic Press, 1987.
- [4] L. BOUTET DE MONVEL, P. KRÉE, Pseudo-differential operators and Gevrey classes, Ann. Inst. Fourier, 17-1 (1967), 295-323.
- [5] L. BOUTET DE MONVEL, M. LEJEUNE, B. MALGRANGE, Opérateurs différentiels et pseudo-différentiels.
- [6] J.-L. BRYLINSKY, Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques, Astérisque, n° 140-141 (1986), 3-134.
- [7] J.-L. BRYLINSKY, B. MALGRANGE, J.-L. VERDIER, Transformation de Fourier géométrique I, C. R. Acad. Sci. Paris, 294 (1983), 55-58.
- [8] J.-L. BRYLINSKY, B. MALGRANGE, J.-L. VERDIER, Transformation de Fourier géométrique II, C. R. Acad. Sci. Paris, 303 (1986), 193-198.
- [9] P. DELIGNE, Le formalisme des cycles évanescents, Lecture Notes in Math., n° 340, Springer Verlag, Berlin (1973, SGA 7 II, exp. 13,14.).
- [10] R. HARTSHORNE, Residues and Duality, Lecture Notes in Math., n° 20, Springer Verlag, Berlin, 1966.
- [11] L. HÖRMANDER, An introduction to complex analysis in several variables, D. van Nostrand Comp., Princeton, 1966.
- [12] R. HOTTA, M. KASHIWARA, The invariant holonomic system on a semisimple Lie algebra, Inv. Math., 75 (1984), 327-358.
- [13] M. KASHIWARA, On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I, Publ. RIMS Kyoto, 10 (1975), 563-579.
- [14] M. KASHIWARA, b -functions and holonomic systems, Inv. Math., 38 (1976), 33-53.
- [15] M. KASHIWARA, On the holonomic systems of linear differential equations II, Inv. Math., 49 (1978), 121-135.
- [16] M. KASHIWARA, Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equation, Lecture Notes in Math., n° 1016, Springer Verlag, Berlin, 1983, 134-142.
- [17] M. KASHIWARA, The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems, Publ. RIMS Kyoto, 20 (1984), 319-365.
- [18] M. KASHIWARA, T. KAWAI, Second microlocalization and asymptotic expansions, Lecture Notes in Physics, n° 126, Springer Verlag, Berlin, 1980, 21-76.
- [19] M. KASHIWARA, T. KAWAI, On holonomic systems of micro-differential equations III - Systems with regular singularities, Publ. RIMS Kyoto, 17 (1981), 813-979.
- [20] M. KASHIWARA, T. KAWAI, Microlocal analysis, Publ. RIMS Kyoto, 19 (1983), 1003-1032.
- [21] M. KASHIWARA, T. KAWAI, T. KIMURA, Foundations of algebraic analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, 1986.

- [22] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA, *Sheaves on manifolds*, Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [23] N.M. KATZ, G. LAUMON, Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles, *Publ. Math. IHES*, 62 (1986), 361–418.
- [24] G. LAUMON, Transformation de Fourier géométrique, *Prépubl. IHES M/52*, 1985.
- [25] Y. LAURENT, Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe, *Progress in Math.*, n° 53, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [26] Y. LAURENT, Polygone de Newton et b -fonctions pour les modules microdifférentiels, *Ann. École Norm. Sup.*, 4^e série, 20 (1987), 391–441.
- [27] Y. LAURENT, Vanishing cycle sheaves of $\mathcal{D}$ -modules, *Inv. Math.*, 112 (1993), 491–539.
- [28] Y. LAURENT, B. MALGRANGE, Cycles proches, spécialisation et $\mathcal{D}$ -modules, *Prépubl. Inst. Fourier*, n° 275, 1994.
- [29] B. MALGRANGE, Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers, *Lecture Notes in Math.*, n° 712, Springer Verlag, 1979, 77–86.
- [30] B. MALGRANGE, Transformation de Fourier géométrique, *Sém. Bourbaki*, 692 (1987–88).
- [31] B. MALGRANGE, Fourier transforms and differential equations, *Proc. of the Summer School on Mathematical Physics*, Braşov, 1989.
- [32] B. MALGRANGE, Equations différentielles à coefficients polynomiaux, *Progress in Math.*, n° 96, Birkhäuser, Berlin, 1991.
- [33] B. MALGRANGE, Connexions méromorphes, in ‘Singularities Lille 1991’, J.-P. Brasselet, éd., *London Math. Soc. Lecture Notes*, n° 201, Cambridge Univ. Press, 1994, 251–261.
- [34] B. MALGRANGE, Filtrations des modules holonomes, in ‘Analyse algébrique des perturbations singulières II’, L. Boutet de Monvel, éd., Hermann, 1994, 35–41.
- [35] Z. MEBKHOUT, Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}$ -modules cohérents, *Travaux en cours*, n° 35, Hermann, Paris, 1989.
- [36] T. ODA, Introduction to algebraic analysis on complex manifolds, *Adv. Stud. in Pure Math.*, n° 1, 1983.
- [37] F. PHAM, Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, *Progress in Math.*, n° 2, Birkhäuser, Boston, 1979.
- [38] J.-P. RAMIS, À propos du théorème de Borel-Ritt à plusieurs variables, *Lecture Notes in Math.*, n° 712, Springer Verlag, 1979, 289–292.
- [39] C. SABBABH, $\mathcal{D}$ -modules et cycles évanescents, *Travaux en cours*, n° 24, Hermann, Paris, 1987, 53–98.
- [40] M. SATO, M. KASHIWARA, T. KAWAI, Microfunctions and pseudo-differential equations, *Lecture Notes in Math.*, n° 287, Springer Verlag, Berlin, 1973, 265–529.
- [41] P. SCHAPIRA, *Microdifferential systems in the complex domain*, Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [42] J.-P. SCHNEIDERS, Dualité pour les modules différentiels, Thèse, Univ. de Liège, 1986–87.
- [43] J.-C. TOUGERON, An introduction to the theory of Gevrey expansions and to the Borel-Laplace transforms, with some applications, notes de cours, 1989–1990.

- [44] J.-L. VERDIER, Dualité pour les espaces localement compacts, Sémin. Bourbaki, 300 (1966).
- [45] J.-L. VERDIER, Géométrie microlocale, Lecture Notes in Math., n° 1016, Springer Verlag, Berlin, 1983, 127–133.

Manuscrit reçu le 3 janvier 2000,
accepté le 16 mai 2000.

Liviu DAIA,
Institute of Mathematics
of the Romanian Academy
P.O. Box 1–764
70700 Bucharest (Romania).

Note de la Rédaction

L'article ci-dessus est le travail de thèse de l'auteur (thèse soutenue le 27 octobre 1995). Compte tenu de la date de parution, et sur proposition du *referee*, la Rédaction a jugé utile d'ajouter les références suivantes :

- [H] C. HUYGUE, Transformation de Fourier des $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}(\infty)$ -modules, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 321 (1995), 759–762.
- [KS] M. KASHIWARA, P. SHAPIRA, Laplace transforms and Fourier-Sato transforms, Algebraic analysis methods in microlocal analysis (Japanese), Sūrikaiseikiken-kyūsho Kōkyūroku, 983 (1997), 33–35.
- [R] L. RAMERO, Fourier transforms in geometry and arithmetic, Number theory, II (Rome, 1995), Rend. Sem. Math. Univ. Politec Torino, 53–4 (1995), 419–436.
- [S] C. SABBABH, Monodromy at infinity and Fourier transform, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 33–4 (1997), 643–685.