ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN CEA

Approximation variationnelle des problèmes aux limites

Annales de l'institut Fourier, tome 14, nº 2 (1964), p. 345-444
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_2_345_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 2 (1964), 345-444.

APPROXIMATION VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES AUX LIMITES

par Jean CEA

Introduction

Dans l'étude d'un problème aux limites menée jusqu'aux applications numériques il y a essentiellement trois stades :

1er *stade :* On se préoccupe de savoir si le problème est bien posé, c'est-à-dire, s'il a une solution unique dans un sens classique ou plus souvent dans un sens généralisé (le sens classique étant trop restrictif); supposons que le problème soit posé sous la forme suivante : déterminer u tel que

$$\text{(I)} \qquad Au = f \quad \text{dans un ouvert } \Omega \text{ de } R^n$$

et que

$$\text{(II)}_j \quad B_j u = 0 \quad \text{sur la frontière } \Gamma \text{ de } \Omega, \quad j = 1, \ldots, J.$$

2e *stade :* En général la solution u ne peut être explicitée, on construit alors des « problèmes approchés », on démontre l'existence et l'unicité de la solution (dite approchée) de chacun de ces problèmes et on montre enfin que ces solutions approchées convergent (dans un certain sens) vers u.

3e *stade :* On résout effectivement le problème approché. Notre travail se situe dans le deuxième stade : nous donnons un procédé convergent d'approximation *systématique* des solutions *faibles* d'une vaste classe de problèmes aux limites elliptiques. (Le cas des problèmes d'évolution fera l'objet d'une publication ultérieure.)

Chapitre 1 (Théorie générale). *Le problème* (P) dont on cherche une approximation de la solution u est le suivant : déterminer u dans V tel que

$$\text{(III)} \qquad a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V$$

où V est un espace de Hilbert, $a(u, v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $V \times V$ et $L(v)$ est une forme linéaire continue sur V. (Dans de nombreux exemples, la solution d'un problème du type précédent vérifie dans un sens faible des équations de la forme (I) et $(\mathrm{II})_j$). Le problème (P) est dit associé au triplet $\{V, a(u, v), L(v)\}$. On donne une famille de triplets $\{V_h, a_h(u_h, v_h), L_h(v_h)\}$ auxquels sont associés *les problèmes approchés* (P_h) et une famille d'opérateurs linéaires p_h et r_h

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, phantom, "\subset"] & V \arrow[r, phantom, "\subset"] & F \\ & V_h \arrow[ul, "r_h"] \arrow[ur, "p_h"'] & \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{V}$ est dense dans V qui est fermé dans l'espace de Hilbert F. Sous certaines hypothèses « H » (Resp. « K ») les problèmes (P) et (P_h) ont des solutions uniques u et u_h et de plus $p_h u_h$ converge vers u dans F faible (Resp. Fort).

Chapitre 2 : Nous prenons $F = V$; nous retrouvons la méthode de Galerkin, des résultats de Huet [8] sur les phénomènes de perturbation singulière dans les problèmes aux limites et des résultats de Lions [13] sur l'approximation de certains problèmes par des problèmes de Neumann ou de Dirichlet.

Le chapitre 3 : essentiellement technique est consacré à l'étude des fonctions étagées en vue du chapitre suivant.

Chapitre 4 : V est alors contenu dans F; nous donnons un procédé d'approximation systématique des problèmes d'ordre 2, des problèmes de transmissions, d'élasticité et de type mêlé d'ordre $2m$. Nous montrons aussi comment en partageant l'ouvert Ω en Ω_1 et Ω_2 nous pouvons utiliser la méthode de Galerkin (Resp. des différences finies) pour l'approximation de u dans Ω_1 (Resp. Ω_2). Des méthodes voisines de celles des chapitres 2 et 4 sont présentées dans [6], [12], [13] et [14].

Chapitre 5 : lorsque l'espace V_h est de dimension finie $N(h)$, le problème (P_h) est en fait un système de Cramer de $N(h)$

équations linéaires à $N(h)$ inconnues. Nous donnons quelques propriétés des matrices associées aux problèmes (P_h) et des indications sur la programmation de ces problèmes. Enfin nous donnons quelques-uns des résultats des essais numériques effectués sur ordinateur I.B.M. 704.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici toute ma profonde gratitude à M. Lions non seulement pour m'avoir suggéré les méthodes et les applications exposées dans ce travail mais aussi pour les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer.

Je suis heureux d'exprimer ma reconnaissance à M. de Possel qui a bien voulu présider le Jury et qui a facilité mon travail au Centre Blaise Pascal.

Mes remerciements vont également à M. Bruhat qui nous a fait l'honneur de participer au Jury.

TABLES DES MATIÈRES

CHAPITRE I. — THÉORIE GÉNÉRALE 351

1. Problèmes variationnels elliptiques 351
2. Généralités sur les approximations 353
3. Théorèmes d'approximations 354
4. Les problèmes approchés 359

CHAPITRE II. — APPROXIMATIONS INTERNES 360

1. Plan général d'étude 360
2. Rappels et notations 361
3. Méthode de Galerkin 362
4. Problèmes dans des espaces fixes 368
5. Critère général de stabilité 374

CHAPITRE III. — LES FONCTIONS ÉTAGÉES 378

1. Définitions et notations 378
2. Limites de fonctions dérivées 380
3. Les espaces $H^m(\Omega, R_h)$ 383
4. Traces des fonctions de $H^m(\Omega, R_h)$ 387
5. Convergence des traces de fonctions étagées 392
6. Une classe de fonctions étagées 399
7. Un opérateur de prolongement $\mathfrak{L}_h$ 400

CHAPITRE IV. — APPROXIMATIONS EXTERNES: MÉTHODE VARIATIONNELLE DES DIFFÉRENCES FINIES 402

1. Introduction 402
2. Problèmes de Neumann d'ordre 2 404
3. Autres problèmes aux limites d'ordre 2 408
4. Problèmes des transmissions 412
5. Problèmes de type mélé d'ordre 2 m 418
6. Problème d'élasticité 420
7. Un autre problème aux limites 424

CHAPITRE V. — LES PROBLÈMES APPROCHÉS 429

1. Propriétés des matrices des problèmes approchés 429
2. Formation des équations approchées 432
3. Forme des équations approchées 434
4. Programmation 438
5. Exemple 1 439
6. Exemple 2 441

BIBLIOGRAPHIE 443

CHAPITRE PREMIER

THÉORIE GÉNÉRALE

1. Problèmes variationnels elliptiques.

Nous allons rappeler brièvement la position variationnelle des problèmes aux limites elliptiques. On pourra voir une étude systématique de ces problèmes dans [10], [11] et [15].

1.1. — *Position variationnelle des problèmes aux limites elliptiques :*

On donne un triplet

$$\{V,\ a(u,\ v),\quad L(v)\}$$

où V est un espace de Hilbert, $a(u, v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $V \times V$, *i.e.* une application : $u, v \to a(u, v)$ de $V \times V$ dans C (corps des complexes) qui soit linéaire en u, semi (ou anti) linéaire en v, avec

$$|a(u, v)| \leqslant C_1 ||u||.||v||, \quad C_1 = \text{constante}$$

et enfin, où $L(v)$ est une forme anti-linéaire continue sur V(1).

Définition 1.1. — *La forme $a(u, v)$ est V-elliptique si*

$$(1.1) \qquad |a(v, v)| \geqslant \alpha ||v||_V^2 \quad \textit{pour tout } v \in V$$

le coefficient α étant un nombre positif indépendant de v.

Problème 1.1. — Déterminer u dans V vérifiant

$$(1.2) \qquad a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

(1) Dans la suite, nous supposerons que tout triplet (qu'il dépende d'un paramètre ou non) vérifiera les hypothèses précédentes.

THÉORÈME 1.1. — *Si la forme $a(u, v)$ est V-elliptique, alors, le problème* 1.1 *admet une solution unique.*

1.2. — *Exemple :*

Soit Ω *un ouvert borné dans* R^n *de frontière* Γ *qui sera, par exemple, une variété* de dimension $n-1$, une fois continûment différentiable, Ω étant d'un seul côté de Γ. On désigne par $H^1(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que les n dérivées (au sens des distributions) $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ soient aussi dans $L^2(\Omega)$. Muni du produit scalaire

$$(1.3) \quad (u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i u . \overline{D_i v}\, dx + \int_\Omega u\bar{v}\, dx, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

c'est un espace de Hilbert. Si Γ_1 est un morceau de Γ, Γ_2 désignant le reste de la frontière, on prend pour V le sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$ des fonctions u de $H^1(\Omega)$ nulles sur Γ_1. On prend, d'autre part,

$$(1.4) \quad a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i u . \overline{D_i v}\, dx + \lambda \int_\Omega u\bar{v}\, dx, \quad \lambda \in C$$

et

$$(1.5) \qquad L(v) = \int_\Omega f\bar{v}\, dx + \int_{\Gamma_2} g . \bar{v}\, d\sigma$$

où $d\sigma$ est « l'élément d'aire » sur Γ, f est une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$ et g est une fonction donnée, définie sur Γ_2 et continue par exemple.

Si l'on suppose que $\mathrm{Re}\,\lambda$ (= partie réelle de λ) > 0, alors

$$\mathrm{Re}\, a(v, v) \geqslant \inf (I, \mathrm{Re}\,\lambda) \|v\|_V^2$$

et par suite

$$|a(v, v)| \geqslant \inf (I, \mathrm{Re}\,\lambda) \|v\|_V^2$$

si bien que la forme sesquilinéaire $a(u, v)$ est V-elliptique, et on a le résultat suivant : l'équation

$$(1.6) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i u . \overline{D_i v}\, dx + \lambda \int_\Omega u\bar{v}\, dx = \int_\Omega f\bar{v}\, dx + \int_{\Gamma_2} g\bar{v}\, d\sigma \\ \text{pour tout } v \in V \end{cases}$$

admet une solution unique u dans V.

En utilisant formellement la formule de Green, on interprète facilement le problème précédent, il vient en effet

$$(1.7)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (-\Delta u + u)\bar{v}\, dx + \left(\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n}\bar{v}\, d\sigma\right) + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n}\bar{v} d\sigma \\ \displaystyle = \int_\Omega f\bar{v}\, dx + \int_{\Gamma_2} g\bar{v}\, d\sigma \quad \text{pour tout } v \in V \end{cases}$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ désigne la dérivée normale extérieure à Γ. Dans (1.7), l'intégrale $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n}\bar{v}\, d\sigma$ est nulle puisque les fonctions v de V sont nulles sur Γ_1, il s'agit donc du *problème de type mêlé suivant:*

$$(1.8)\quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_2 \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

2. Généralités sur les approximations.

Pour approcher la solution u dans V du problème (P) défini par le triplet

$$\{V,\ a(u, v),\quad L(v)\}$$

nous chercherons une suite d'éléments u_h^x qui converge vers u (dans un sens à préciser) lorsque h tend vers zéro.

DÉFINITION 2.1. — *Une approximation est dite* interne (Resp. externe) *lorsque u est approché par des éléments de* V (Resp. *d'un espace contenant* V).

Nous introduirons donc un espace F *contenant* V. *Les problèmes voisins (ou approchés)* (P_h) *seront définis, en toute généralité, par la donnée de*

$$\{V_h,\ a_h(u_h, v_h),\quad L_h(v_h)\}.$$

Pour assurer le lien entre les problèmes (P) et (P_h) nous introduirons deux opérateurs linéaires p_h et r_h:

$$r_h : V \to V_h$$
$$p_h : V_h \to F$$

enfin nous approcherons la solution u de (P) par $p_h u_h$, u_h étant la solution de (P_h), nous obtiendrons ainsi des théorèmes de convergence dans l'espace F.

3. Les théorèmes d'approximations.

3.1. — On donne les triplets

$$\{V, a(u, v), L(v)\}$$

et

$$\{V_h, a_h(u_h, v_h), L_h(v_h)\}$$

auxquels sont associés les problèmes (P) et (P_h).

Problème (P). — Déterminer u dans V vérifiant

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V. \tag{3.1}$$

Problème (P_h). — Déterminer u_h dans V_h vérifiant

$$a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h. \tag{3.2}$$

Nous ferons les hypothèses, de V et V_h-ellipticité, suivantes

$$|a(v, v)| \geqslant \alpha \|v\|_V^2 \quad \text{pour tout } v \in V,\ \alpha > 0, \tag{3.3}$$

$$|a_h(v_h, v_h)| \geqslant \alpha \|v_h\|_{V_h}^2 \quad \text{pour tout } v_h \in V_h. \tag{3.4}$$

On donne maintenant un espace $\mathcal{V}$ et un espace de Hilbert F tels que :

$$\mathcal{V} \subset V \subset F$$

l'espace V, n'étant pas nécessairement fermé ou dense dans F; puis un opérateur $p_h \in \mathcal{L}(V_h, F)$ et enfin un opérateur linéaire r_h de $\mathcal{V}$ dans V_h; nous supposerons en outre, que

$$\|p_h\|_{\mathcal{L}(V_h, F)} \leqslant C_0 \tag{3.5}$$

où C_0 est une constante donnée positive.

3.2. — Nous faisons maintenant les hypothèses suivantes :

Hypothèse (H 1). — Si la suite des éléments u_h de V_h est bornée, i.e

$$\|u_h\|_{V_h} \leqslant C_1 \tag{3.6}$$

compte tenu de (3.5) on a

$$\|p_h u_h\|_F \leqslant C_0 C_1 \tag{3.7}$$

et par conséquent, la suite $p_h u_h$ est bornée dans F; nous savons qu'il est possible d'extraire une sous-suite $p_{h_i} u_{h_i}$ qui converge faiblement dans F vers un certain élément $u^\times$ de F(1).

Nous supposons que :

i) $u^\times$ est dans V (et non seulement dans F);

ii) $\lim_{h_i=0} a_{h_i}(u_{h_i}, r_{h_i}\varphi) = a(u^\times, \varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{V}$.

Hypothèse (H 2). — Nous supposons que

i) $|L_h(\varphi_h)| \leqslant C_2 ||\varphi_h||_{V_h}$ pour tout $\varphi_h \in V_h$

C_2 étant une constante donnée

ii) $\lim_{h=0} L_h(r_h\varphi) = L(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{V}$.

Nous allons démontrer le

THÉORÈME 3.1 OU (THÉORÈME GÉNÉRAL DE CONVERGENCE FAIBLE). — Sous les hypothèses H 1 et H 2, nous avons

$$\lim_{h=0} p_h u_h = u \quad \text{dans F faible (2)}$$

où u et u_h désignent les solutions uniques des problèmes (P) et (P_h).

Démonstration. — Les formes sesquilinéaires $a(u, \varphi)$ et $a_h(u_h, \varphi_h)$ étant V et V_h-elliptiques (par hypothèse), les problèmes (P) et (P_h) admettent des solutions uniques u et u_h (Cf. [10]).

Dans l'équation approchée (3.2) faisons $\varphi_h = u_h$,

$$a_h(u_h, u_h) = L_h(u_h) \tag{3.8}$$

d'où

$$|a_h(u_h, u_h)| = |L_h(u_h)|. \tag{3.9}$$

Nous majorons et nous minorons respectivement les 2e et 1er membres de (3.9) à l'aide de (3.4) et de (H2) *i*) :

$$\alpha ||u_h||^2_{V_h} < C_2 ||u_h||_{V_h}$$

d'où

$$||u_h||_{V_h} < \frac{C_2}{\alpha}$$

(1) Dans 3.2. il suffit que F soit un espace de Banach réflexif.

(2) Dorénavant dans toutes les questions de convergence nous omettrons $h = 0$ ou $h \to 0$.

et enfin, compte tenu de (3.5) il vient :

$$(3.10) \qquad \|p_h u_h\|_F \leqslant \frac{C_0 C_2}{\alpha}$$

Nous pouvons donc extraire une sous-suite $p_{h_i} u_{h_i}$ qui converge, faiblement dans F, vers un élément $u^\times$ de F ; mais d'après l'hypothèse (H 1) nous savons que

i) $u^\times$ est dans V.

$$(3.11) \qquad ii) \quad \lim a_{h_i}(u_{h_i}, r_{h_i}\varphi) = a(u^\times, \varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V}.$$

Dans l'équation approchée

$$a_{h_i}(u_{h_i}, \varphi_{h_i}) = L_{h_i}(\varphi_{h_i}) \quad \text{pour tout } \varphi_{h_i} \in V_{h_i}$$

nous prenons $\varphi_{h_i} = r_{h_i}\varphi$, φ étant un élément quelconque de $\mathcal{V}$, il vient

$$(3.12) \qquad a_{h_i}(u_{h_i}, r_{h_i}\varphi) = L_{h_i}(r_{h_i}\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V}.$$

Lorsque $h_i \to 0$, compte tenu de (3.11) et de (H 2) *ii*), l'égalité (3.12) conduit à :

$$a(u^\times, \varphi) = L(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V}.$$

Mais $\mathcal{V}$ étant dense dans V, et le problème (P) admettant une solution unique u, nous avons

$$u = u^\times.$$

On démontrerait de même que pour toute sous-suite $p_k u_k$ de $p_h u_h$, il existe une sous-suite $p_{k_i} u_{k_i}$ telle que

$$\lim p_{k_i} u_{k_i} = u \quad \text{dans F faible}$$

c'est donc que la suite originelle $p_h u_h$ converge vers u dans F faible.

Remarque 3.1. — Lorsque l'approximation est interne (ou encore lorsque V = F) l'hypothèse (H 1) *i*) est automatiquement vérifiée ; de plus l'hypothèse (H 1) *ii*) est équivalente à :

$$(\text{H } 1)' \quad ii) \quad \lim \{a_{h_i}(u_{h_i}, r_{h_i}\varphi) - a(p_{h_i} u_{h_i}, \varphi)\} = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V}.$$

En résumé, dans le cas d'une approximation interne, nous remplacerons l'hypothèse (H 1) par :

Hypothèse (H 1)'. — Si la suite des éléments u_h de v_h est bornée, i.e.

$$||u_h||_{V_h} \leqslant C_1$$

alors

$$\lim \{a_h(u_h, r_h v) - a(p_h u_h, v)\} = 0 \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}.$$

3.3. — Nous allons établir maintenant un théorème de convergence forte; nous conservons les données du 3.1 et nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse (K 0). — *i*) l'espace V est fermé dans F :

$$(u, v)_V = (u, v)_F \quad \text{pour tout } u, v \in V;$$

ii) la forme sesquilinéaire $a(u, v)$ est la restriction $aV \times V$ d'une forme sesquilinéaire, encore notée $a(u, v)$, définie et continue sur $V \times V$ et sur $p_h V_h \times p_h V_h$; de plus

$$(3.13) \quad |a(u, u)| \geqslant \alpha ||u||_F^2 \quad \text{pour tout } u \text{ dans V ou dans } p_h V_h.$$

Hypothèse (K 1). — Si la suite des éléments u_h de V_h est bornée,

$$||u_h||_{V_h} \leqslant C_1$$

alors

i) il existe un élément $u^\times$ de l'espace V et une sous-suite u_{h_i} tels que :

$$\lim p_{h_i} u_{h_i} = u^\times \quad \text{dans F faible}$$

(comme dans 3.2 nous savions, *a priori*, que $u^\times$ était dans F);

ii) $\lim \{a_h(u_h, r_h v) - a(p_h u_h, v)\} = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$;

iii) $\lim \{a_h(u_h, u_h) - a(p_h u_h, p_h u_h)\} = 0$.

Hypothèse (K 2). — Nous supposons que

i) $|L_h(v_h)| \leqslant C_2 ||v_h||_{V_h}$ pour tout $v_h \in V_h$;

ii) $\lim L_h(r_h v) = L(v)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$;

iii) si la suite des éléments u_h de V_h est bornée, alors

$$\lim \{L(p_h u_h) - L_h(u_h)\} = 0.$$

Nous allons démontrer le :

THÉORÈME 3.2 (OU THÉORÈME GÉNÉRAL DE CONVERGENCE FORTE). — *Sous les hypothèses* (K 0), (K 1), (K 2)

$$\lim p_h u_h = u \quad \textit{dans } \mathrm{F} \textit{ fort}$$

où u et u_h désignent les solutions uniques des problèmes (P) *et* (P_h).

Démonstration. — Il est clair que toutes les hypothèses du théorème de convergence faible sont vérifiées ; nous avons donc :

$$\lim p_h u_h = u \quad \text{dans F faible} \tag{3.14}$$

et par suite

$$\lim a(p_h u_h, u) = a(u, u), \tag{3.15}$$
$$\lim a(u, p_h u_h) = a(u, u), \tag{3.16}$$
$$\lim \mathrm{L}(p_h u_h) = \mathrm{L}(u). \tag{3.17}$$

Comme $\mathrm{L}(p_h u_h)$ et $\mathrm{L}_h(u_h)$ ont même limite (voir hypothèse (K 2) *iii*)) on a

$$\lim \mathrm{L}_h(u_h) = \mathrm{L}(u). \tag{3.18}$$

Si maintenant, dans les équations (3.1) et (3.2) nous faisons $v = u$ et $v_h = u_h$, nous obtenons

$$a(u, u) = \mathrm{L}(u),$$
$$a_h(u_h, u_h) = \mathrm{L}_h(u_h)$$

et par passage à la limite, compte tenu de (3.18), il vient

$$\lim a_h(u_h, u_h) = a(u, u) \tag{3.19}$$

et par conséquent (voir hypothèse (K 1) *iii*))

$$\lim a(p_h u_h, p_h u_h) = a(u, u). \tag{3.20}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} &\{a(p_h u_h - u, p_h u_h - u) \\ &= a(p_h u_h, p_h u_h) - a(p_h u_h, u) - a(u, p_h u_h) + a(u, u)\} \end{aligned} \tag{3.21}$$

si bien que, compte tenu de (3.20), (3.16) et (3.15) il vient

$$\lim a(p_h u_h - u,\ p_h u_h - u) = 0$$

et puisque $a(u, v)$ est elliptique

$$\lim \|p_h u_h - u\|_F = 0 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

4. Les problèmes « approchés ».

Nous supposons que V_h est un espace de dimension finie $N(h)$; Soit e_h^i, $i = 1, 2, \ldots, N(h)$ une base de cet espace, l'équation approchée

$$(4.1) \qquad a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h$$

se traduit par

$$a_h(u_h, e_h^j) = L_h(e_h^j) \quad \text{pour tout } j = 1, 2, \ldots, N(h).$$

Si

$$u_h = \sum_{i=1}^{N(h)} u_h^i e_h^i.$$

On a

$$a_h(\Sigma u_h^i e_h^i, e_h^j) = L_h(e_h^j) \quad \text{pour } j = 1, 2, \ldots, N(h)$$

ou encore

$$(4.2) \quad \sum_{i=1}^{N(h)} u_h a_h(e_h^i, e_h^j) = L_h(e_h^j) \quad \text{pour } j = 1, \ldots, N(h).$$

En résumé, dans le cas où $V(h)$ est de dimension finie, l'équation approchée (4.1) se met sous la forme (4.2). Il est clair que (4.2) est un système de $N(h)$ équations à $N(h)$ inconnues (les composantes de u_h); d'autre part, ce système est de Cramer puisque le problème approché admet une solution unique u_h.

CHAPITRE II

APPROXIMATIONS INTERNES

1. Plan général d'étude des approximations internes.

Nous prendrons toujours $V = F$ et nous nous ramènerons aux théorèmes de convergence du chapitre I suivant le plan qui suit :

Point D 1. — Il est consacré au *problème exact* (P) associé au triplet

$$\{V, a(u, v), L(v)\}.$$

On vérifiera que

$$|a(v, v)| \geqslant \alpha ||v||_V^2 \quad \text{pour tout } v \in V, \ \alpha > 0.$$

Point D 2. — Il est consacré aux *problèmes approchés* (P_h) associés aux triplets

$$\{V_h, a_h(u_h, v_h), L_h(v_h)\}$$

on construira les problèmes (P_h) et on vérifiera que :

$$|a_h(v_h, v_h)| \geqslant \alpha ||v_h||_{V_h}^2 \quad \text{pour tout } v_h \in V_h.$$

Point D 3. — On définit les opérateurs p_h et r_h et l'espace $\mathcal{V}$; on montrera que

$$||p_h||_{\mathcal{L}(V_h, V)} \leqslant C_0.$$

Point V 1 (sur les *formes sesquilinéaires approchées*). — Il s'agit de vérifier que :

$$||u_h||_{V_h} \leqslant C_1$$

entraîne

$$\lim_{h=0} \{a_h(u_h, r_h v) - a(p_h u_h, v)\} = 0 \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}$$

et de plus, dans le cas du théorème de convergence forte

$$\lim \{a_h(u_h, u_h) - a(p_h u_h, p_h u_h)\} = 0.$$

Point V 2 (sur *les formes linéaires approchées*). — Il s'agit de vérifier que :

$$|L_h(v_h)| \leqslant C_2 ||v_h||_{V_h} \quad \text{pour tout } v_h \in V_h$$

et que

$$\lim_{h=0} L_h(r_h v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}.$$

De plus, dans le cas du théorème de convergence forte, nous devons montrer que :

$$||u_h||_{V_h} \leqslant C_1$$

entraîne

$$\lim \{L_h(u_h) - L(p_h u_h)\} = 0.$$

2. Rappels et notations.

2.1. — Quelques espaces fonctionnels.

Soit Ω un ouvert quelconque de R^n. On désigne par $L^2(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur Ω, et par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω. On pose

$$D^p = D_1^{p_1} \dots D_n^{p_n}, \qquad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et

$$|p| = p_1 + \cdots + p_n, \qquad p_i \text{ entier non négatif.}$$

On définit (l'espace de Sobolev) $H^m(\Omega)$ par

$$H^m(\Omega) = \{u | D^p u| \in L^2(\Omega), \qquad |p| \leqslant m\}$$

si u est dans $H^m(\Omega)$, on pose

$$(2.1) \qquad ||u||^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{|p| \leqslant m} \int_\Omega |D^p u(x)|^2 \, dx.$$

On vérifiera que l'espace $H^m(\Omega)$, muni de la norme (2.1) est un espace de Hilbert. On désigne maintenant par $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence dans $H^m(\Omega)$ du sous-espace $\mathcal{D}(\Omega)$. Si $\Omega = R^n$ alors $H^m(R^n) = H_0^m(R^n)$, mais en général

$$H^m(\Omega) \neq H_0^m(\Omega).$$

2.2. — Supposons maintenant que la frontière Γ de Ω soit régulière (par exemple : Γ est une variété de dimension $n-1$, indéfiniment différentiable et Ω est d'un seul côté de Γ). On montre alors qu'il existe un opérateur (de prolongement) π de $H^m(\Omega)$ dans $H^m(R^n)$ tel que

$$\pi u(x) = u(x) \quad \text{p.p. sur } \Omega, \text{ pour tout } u \in H^m(\Omega).$$

On dit que Ω a la propriété de m-prolongement s'il existe une application linéaire continue $u \to Pu$ de $H^r(\Omega)$ dans $H^r(R^n)$ pour r entier, $0 \leqslant r \leqslant m$, tel que $Pu = u$ p.p. dans Ω.

Si Γ est « régulière », l'espace $\mathcal{C}^m(\Omega)$ des fonctions u définies sur $\overline{\Omega}$ et dont les dérivées $D^p u$, $|p| \leqslant m$, sont continues dans $\overline{\Omega}$, est dense dans $H^m(\Omega)$. Il en est de même pour l'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ des restrictions à Ω des fonctions $\Psi \in \mathcal{D}(R^n)$.

On trouvera une étude détaillée des éléments introduits dans ce numéro dans : [7], [11] et [17].

2.3. — Dans les applications suivantes, nous désignerons par (Q) et (Q_h) les problèmes exacts et approchés et nous ramènerons au cas des problèmes (P) et (P_h) de la Théorie Générale du chapitre I.

3. Méthode de Galerkin.

3.1. — On donne un triplet

$$\{V, a(u, v), L(v)\}$$

on lui associe le

Problème (Q). — Déterminer u dans V vérifiant

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V. \tag{3.1}$$

On donne également un sous-espace

$$\mathcal{V} \subset V, \qquad \mathcal{V} \text{ dense dans } V$$

et une famille de sous-espaces fermés V_h satisfaisant à la propriété (de densité) suivante :

Il existe une famille d'opérateurs linéaires r_h de $\mathcal{V}$ dans V_h vérifiant

$$\lim_{h=0} r_h v = v \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}, \text{ dans V fort.} \tag{3.2}$$

Problème (Q_h). — Déterminer u_h dans V_h vérifiant

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h. \tag{3.3}$$

Nous supposerons que :

$$|a(v, v)| \geqslant \alpha \|v\|_V^2 \quad \text{pour tout } v \in V,\ \alpha > 0 \tag{3.4}$$

et que

$$|a(u, v)| \leqslant M\|u\|_V \|v\|_V \quad \text{pour tout } u, v \in V,\ M > 0. \tag{3.5}$$

THÉORÈME 3.1. — *Sous les hypothèses* (3.2), (3.4) *et* (3.5) *les problèmes* (Q) *et* (Q_h) *ont des solutions uniques* u *et* u_h. *De plus*

$$\lim_{h=0} u_h = u \quad \textit{dans } V \textit{ fort.}$$

Démonstration. — Nous nous ramènerons au théorème de convergence forte du chapitre I.

Point D 1. — Nous prenons (P) = (Q).

Point D 2. — Les triplets approchés sont

$$\{V_h, a(u_h, v_h), L(v_h)\}$$

il est clair que

$$|a(v_h, v_h)| \geqslant \alpha \|v_h\|_{V_h}^2 \quad \text{pour tout } v_h \in V_h$$

les problèmes (Q_h) sont confondus avec les problèmes (P_h).

Point D 3. — Nous prenons pour p_h, l'opérateur identité

$$p_h u_h = u_h \quad \text{pour tout } u_h \in V_h$$

on a

$$\|p_h\|_{\mathcal{L}(V_h, V)} = 1.$$

Point V 1. — Avec les données précédentes, il s'agit de montrer que :

$$\left\{\begin{array}{l} \|u_h\|_V \leqslant C_1 \\ \text{entraîne} \\ \lim \{a(u_h, r_h v) - a(u_h, v)\} = 0 \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}. \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Nous avons

$$a(u_h, r_h v) - a(u_h, v) = a(u_h, r_h v - v)$$

d'où compte tenu de (3.5)

$$|a(u_h, r_h v - v)| \leqslant M\|u_h\|_V \|r_h v - v\|_V$$

d'où il découle facilement (3.6).

Point V 2. — Puisque $r_h v$ converge fortement vers v dans V, il est clair que

$$\lim_{h=0} L(r_h v) = L(v).$$

Nous sommes donc, dans les conditions d'application du théorème de convergence forte et comme les problèmes (Q) et (Q_h) sont confondus avec les problèmes (P) et (P_h) nous obtenons le Théorème 3.1.

3.2. — *Cas particulier.*

Nous supposons que la forme $a(u, v)$ est hermitienne et que

$$(3.7) \qquad a(u, u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2 \quad \text{pour tout } u \in V,\ \alpha > 0.$$

Dans (3.1) et (3.3) nous faisons $v = v_h = w_h$ (où $w_h \in V_h$) et nous tirons par soustraction :

$$(3.8) \qquad a(u - u_h, w_h) = 0 \quad \text{pour tout } w_h \in V_h$$

et puisque $a(u, v)$ est hermitienne

$$(3.9) \qquad a(w_h, u - u_h) = 0 \quad \text{pour tout } w_h \in V_h$$

Nous avons maintenant

$$(3.10) \quad a(u - v_h, u - v_h) = a(u - u_h + u_h - v_h, u - u_h + u_h - v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h$$

en développant le 2e membre de (3.10) et en tenant compte de (3.8) et de (3.9) il vient :

$$(3.11) \quad a(u - v_h, u - v_h) = a(u - u_h, u - u_h) + a(u_h - v_h, u_h - v_h)$$

d'après (3.7), les trois nombres écrits dans (3.11) sont positifs, si bien que :

$$(3.12) \quad a(u - u_h, u - u_h) \leqslant a(u - v_h, u - v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h$$

et, en minorant et en majorant les 2 membres de (3.12) il vient la

PROPOSITION 3.1. — *Si u et u_h sont les solutions des problèmes* (Q) et (Q_h) *on a:*

$$(3.13) \quad ||u - u_h||_V \leqslant \sqrt{\frac{M}{\alpha}}\, ||u - v_h||_V \quad \text{pour tout } v \in V_h.$$

Si nous savons, *a priori*, que $u \in \mathcal{V}$ alors en prenant $v_h = r_h u$ il vient

$$(3.14) \qquad ||u - u_h|| \leqslant \sqrt{\frac{M}{\alpha}}\, ||u - r_h u||.$$

Enfin, dans un cas plus particulier on obtient, trivialement, la

PROPOSITION 3.2. — *Si $\mathcal{V} = V$ et si $r_h \in \mathcal{L}(V, V_h)$ on a*

$$(3.15) \qquad \frac{||u - u_h||_V}{||u||_V} \leqslant \sqrt{\frac{M}{\alpha}}\, ||1 - r_h||_{\mathcal{L}(V, V)}$$

3.3. — *Au point de vue pratique*, nous nous donnerons $N(h)$ vecteurs linéairement indépendants $e_1, \ldots, e_{N(h)}$ (que nous pouvons toujours considérer comme les $N(h)$ premiers vecteurs d'une base) et nous résoudrons le problème approché (P_h) dans l'espace V_h engendré par ces vecteurs. Si

$$u_h = \sum_{i=1}^{N(h)} u_h^i e_i$$

le problème (P_h) revient en fait à résoudre le système des équations linéaires

$$(3.16) \qquad \sum_{i=1}^{N(h)} u_h^i a(e_i, e_j) = L(e_j) \quad j = 1, \ldots, N(h)$$

où les inconnues sont les composantes u_h^i de u_h par rapport à la base (e_i). Il s'introduit la matrice $(N(h), N(h))$

$$A_h = (a(e_i, e_j)) \quad i, j = 1, \ldots, N(h)$$

dont nous étudierons les propriétés plus loin.

3.4. — Donnons-nous un ouvert Ω borné dans R^2 et prenons pour V l'espace $H^1(\Omega)$ et pour $a(u, v)$ une somme d'intégrales

sur Ω et sur Γ. Nous allons donner plusieurs exemples de systèmes e_i.

Exemple 3.1. — On prend pour e_i les restrictions $a\,\Omega$ de polynômes ou de fonctions trigonométriques en général

$$a(e_i, e_j) \neq 0.$$

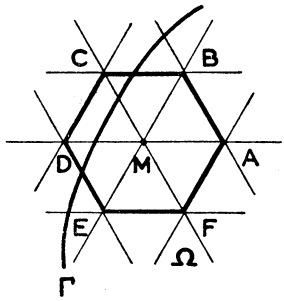
Exemple 3.2. — Soit un réseau triangulaire R_h; nous prenons pour base de V_h les restrictions $a\,\Omega$ des fonctions $\theta_M(x)$ définies comme suit :

— M est un sommet quelconque d'un triangle dont l'intersection avec Ω est non vide.

— $\theta_M(M) = 1$ et $\theta_M(N) = 0$ pour tout $N \in R_h$, $N \neq M$.

— $\theta_M(x)$ est une fonction linéaire sur chaque triangle. Il est clair que $\theta_M(x)$ est dans $H^1(\Omega)$ et que le support de θ_M est formé des 6 triangles dont M est un sommet; par suite $a(\theta_M, \theta_N)$ est nul lorsque M et N ne sont pas sommets d'un même triangle; dans la matrice A_h il y a, au plus, 7 coefficients non nuls par ligne :

$$a(\theta_M, \theta_N) \quad \text{et} \quad a(\theta_M, \theta_N) \qquad \text{où} \qquad N = A, \ldots, F.$$



Exemple 3.3. — R_h est maintenant un réseau rectangulaire. On définit les fonctions $\theta_M(x)$ comme dans l'exemple 3.2, mais en remplaçant les triangles par des rectangles. (On vérifierait que $\theta_M(x)$ a pour support l'ensemble des 4 rectangles dont M est un sommet, et que sur chacun de ces rectangles le graphe de $\theta_M(x)$ est un paraboloïde hyperbolique; de plus, il y a « raccordement » de ces paraboloïdes sur MB, MD, MF, MH).

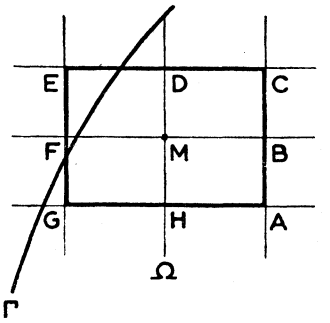
On montre facilement que dans la matrice A_h il y a au plus 9 coefficients non nuls par ligne :

$$a(e_M, e_M) \qquad \text{et} \qquad a(e_M, e_N)$$

où

$$N = A, B, \ldots, N$$

on obtiendrait le même résultat pour les colonnes de A_h.



En résumé : la mise en mémoires des éléments de l'équation approchée (3.16), $(a(e_i, e_j), u_h^i, L(e_j))$, nécessite

1) $N(h) \times N(h) + 2N(h)$ mémoires dans l'exemple 3.1 ;
2) moins de $9\,N(h)$ mémoires dans l'exemple 3.2 ;
3) moins de $11\,N(h)$ mémoires dans l'exemple 3.3.

Lorsque la forme sesquilinéaire $a(u, v)$ est hermitienne, nous savons que la méthode utilisant le Théorème du Minimum conduit aux mêmes résultats que la méthode de Galerkin (cf. [12]; ainsi, en utilisant le théorème du Minimum et respectivement les fonctions θ_M des exemples 3.2 et 3.3, K. O. Friedrichs [6] et J. Necas (communication personnelle) obtiennent un théorème d'approximation analogue au théorème 3.1 de la solution des problèmes de Neumann et de Dirichlet d'ordre 2.

Remarque 3.1. — Supposons que $V = H_0^1(\Omega)$. Nous pouvons prendre pour base de V_h les fonctions $\theta_M(x)$ définies dans l'exemple 3.2 (Resp. 3.3) et nulles sur tout triangle (Resp. Rectangle) dont l'intersection avec Γ est non vide.

4. Problèmes dans les espaces fixes.

4.1. — On donne deux espaces de Hilbert V et W, un sous-espace

$$\mathcal{V} \subset V, \qquad \mathcal{V} \text{ dense dans } V$$

un opérateur linéaire r de $\mathcal{V}$ dans W et un opérateur linéaire et continu p de W dans V.

On donne ensuite, des formes sesquilinéaires $a(u, v)$ et $a_h(u, v)$ définies et continues, respectivement sur $V \times V$ et sur $W \times W$; on pose

$$a_h(u, v) = a(pu, pu) + b_h(u, v)$$

on donne enfin des formes linéaires $L(v)$ et $L_h(v)$, respectivement définies et continues sur V et sur W. Pour simplifier, nous n'étudierons que le cas où

$$L_h(v) = L(pv) \quad \text{pour tout } v \in W.$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse (P 1).

i) $|a(v, v)| \geqslant \alpha \|v\|_V^2$ pour tout $v \in V$.

ii) $|a_h(v, v)| \geqslant \beta \|pv\|_V^2 + \beta(h)\|v\|_W^2$ pour tout $v \in W$,

où α, β et $\beta(h)$ sont des nombres positifs, et $\lim\limits_{h=0} \beta(h) = 0$

iii) $|a(u, v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V, \qquad u, v \in V, M > 0.$

iv) $|a_h(u, v)| \leqslant M(h)\|u\|_W\|v\|_W, \qquad u, v \in W, M(h) > 0.$

Hypothèse (P 2). — Si

$$\beta\|pu_h\|_V^2 + \beta(h)\|u_h\|_W^2 < C_1, \qquad (u_h \in W)$$

alors

$$\lim_{h=0} b_h(u_h, rv) = 0 \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}.$$

Hypothèse (P 3). — On suppose que

$$L(pru) = L(u) \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{V}.$$

Problème (Q). — Déterminer u dans V tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Problème (Q_h). — Déterminer u_h dans W tel que

$$a_h(u, v) = L(pv) \quad \text{pour tout } v \in W.$$

THÉORÈME 4.1. — *Sous les hypothèses* (P 1), (P 2), (P 3) *les problèmes* (Q) *et* (Q_h) *ont des solutions uniques* u *et* u_h; *de plus, lorsque* $h \to 0$, pu_h *converge vers* u *dans* V *faible.*

Démonstration. — Nous nous ramenons au théorème de convergence faible du premier chapitre.

Point D 1. — Nous prenons (P) confondu avec (Q).

Point D 2. — Nous prenons pour V_h l'ensemble des éléments de W et pour norme dans

$$||u||^2_{V_h} = \frac{\beta}{\alpha} ||pu||^2_V + \frac{\beta(h)}{\alpha} ||u||^2_W$$

on vérifie que

$$\frac{\beta(h)}{\alpha} ||u||^2_W \leqslant ||u||^2_{V_h} \leqslant \left(\frac{\beta}{\alpha} ||p||_{(W,V)} + \frac{\beta(h)}{\alpha}\right) ||u||^2_W$$

par suite, pour h fixé, les espaces W et V_h sont confondus et les problèmes (P_h) associés aux triplets

$$\{V_h, a_h(u_h, v_h), L(pv_h)\}$$

sont confondus avec les problèmes (Q_h). Avec le choix de la norme dans V_h, l'hypothèse (P 1) *ii*) s'écrit :

$$|a_h(v, v) \geqslant ||v||^2_{V_h} \quad \text{pour tout } v \in V_h$$

Point D 3. — On a déjà défini $\mathcal{V}$, on prend $p_h = p$, $r_h = r$, on vérifie que

$$||p_h||_{(V_h, V)} < \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Point V 1. — L'hypothèse

$$\begin{cases} \text{si la suite } ||u_h||_{V_h} \text{ est bornée, alors} \\ \lim \{a_h(u_h, r_h v) - a(p_h u_h, v)\} = 0 \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V} \end{cases}$$

n'est autre que l'hypothèse (P 2).

Point V 2. — Voir l'hypothèse (P 3).

Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème gènéral de convergence faible d'où le théorème 4.1.

4.2. — *Phénomène de perturbation singulière.*

Exemple 4.1. — On prend $V = H^1(\Omega)$; l'espace W est l'ensemble des u de $H^1(\Omega)$ tels que $\Delta u \in L^2(\Omega)$ muni de la norme

$$(||u||^2_{H^1(\Omega)} + ||\Delta u||^2_{L^2(\Omega)})^{1/2};$$

on prend $\mathcal{V} = W$ et on pose

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i u . \overline{D_i v}\, dx + \int_\Omega u\bar{v}\, dx$$

$$b_h(u, v) = h \int_\Omega \Delta u . \overline{\Delta v}\, dx, \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f\bar{v}\, dx, \quad f \text{ donnée dans } L^2(\Omega)$$

on a facilement

$$|a(v, v)| \geqslant ||v||^2_V \quad \text{pour tout } v \in V$$

et

$$|a_h(v, v)| \geqslant (1 - h)||v||^2_V + h||v||^2_W \quad \text{pour tout } v \in W.$$

Nous prenons pour p et r l'opérateur identité (dans W)

$$pu = ru = u \quad \text{pour tout } u \in W.$$

Vérifions maintenant l'hypothèse (P 2) : nous supposons que

$$(1 - h)||u_h||^2_V + h||u_h||^2_W < C_1 \tag{4.1}$$

d'où pour $h \leqslant 1$

$$h||u_h||^2_W < C_1 \tag{4.2}$$

nous avons facilement

$$\left|h \int_\Omega \Delta u_h . \overline{\Delta v}\, dx\right|^2 \leqslant h^2 . \int_\Omega |\Delta u_h|^2\, dx . \int_\Omega |\Delta v|^2\, dx,$$

$$\left|h \int_\Omega \Delta u_h . \Delta v\, dx\right|^2 \leqslant h^2 . ||u_h||^2_W . ||v||^2_W$$

et enfin compte tenu de (4.2)

$$\left|h \int_\Omega \Delta u_h . \Delta v\, dx\right|^2 < h . C_1 . ||v||^2_W$$

d'où

$$\lim_{h=0} b_h(u_h, v) = 0 \quad \text{pour tout } v \in V_h.$$

Ainsi l'hypothèse (P 2) est vérifiée; l'hypothèse (P 3) est trivialement vérifiée. On peut donc appliquer le théorème 4.1.

Problème (Q). — Déterminer u dans $H^1(\Omega)$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i u . \overline{D_i v}\, dx + \int_\Omega u \bar{v}\, dx = \int_\Omega f \bar{v}\, dx \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega). \tag{4.3}$$

Problème (Q_h). — Déterminer u_h dans W tel que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i u_h . \overline{D_i v}\, dx + \int_\Omega u_h . \bar{v}\, dx \\ \quad + h \int_\Omega \Delta u_h . \overline{\Delta v}\, dx = \int_\Omega f \bar{v}\, dx \quad \text{pour tout } v \in W. \end{cases} \tag{4.4}$$

THÉORÈME 4.2. — *Lorsque $h \to 0$, la solution (unique) u_h du problème (Q_h) converge dans $H^1(\Omega)$ faible vers la solution (unique) u du problème* (Q).

A l'aide des formules de Green (formelles) on transforme (4.3) et (4.4) respectivement en

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)\bar{v}\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \bar{v}\, d\sigma = \int_\Omega f \bar{v}\, dx \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega) \tag{4.5}$$

et

$$\begin{cases} \int_\Omega (h . \Delta^2 u_h - \Delta u_h + u_h)\bar{v}\, dx \\ \qquad + \int_\Gamma \left(-h \frac{\Delta u_1}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial n}\right)\bar{v}\, d\sigma \\ + \int_\Gamma h . \Delta u \cdot \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma = \int_\Omega f \bar{v}\, dx \quad \text{pour tout } v \in W \end{cases} \tag{4.6}$$

où n est la normale extérieure à Γ et où $d\sigma$ est « l'élément d'aire » sur Γ. Formellement les problèmes (Q) et (Q_h) sont équivalents (dans un sens faible).

Déterminer u dans $H^1(\Omega)$ tel que

$$(Q)' \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et à déterminer u_h dans W tel que

$$(Q_h)' \quad \begin{cases} h\Delta^2 u_h - \Delta u_h + u_h = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial n} - h\dfrac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \Delta u_h = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

4.3. — *Approximation d'un problème de Neumann* (par des problèmes de Neumann).

Pour une étude détaillée de ce type d'approximation Cf. [13].

Soit Ω un ouvert borné dans R^n, de frontière Γ assez régulière, et soit d'autre part un ouvert Ω_1 entourant Ω de frontière Γ et Γ_1. On pose :

$$\Omega^\times = \overline{\Omega} \cup \Omega_1.$$

On prend

$$V = H^m(\Omega), \qquad \mathcal{V} = V, \qquad W = H^m(\Omega^\times);$$

si u est dans $H^m(\Omega^\times)$, pu est la restriction de u à Ω; si u est dans $H^m(\Omega)$, ru est le prolongement de u à $\Omega^\times$:

$$ru = \pi u \quad \text{(voir 2.2. chap. 2).}$$

On donne maintenant des fonctions $a_{p,q}$, $|p|$, $|q| \leqslant m$, mesurables et bornées sur $\Omega^\times$ et une fonction f de $L^2(\Omega)$

$$(4.7) \qquad \begin{cases} a_{p,q} \in L^\infty(\Omega^\times) \\ f \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

et on suppose que :

$$(4.8) \qquad \begin{cases} \mathrm{Re}\Sigma a_{pq}(x)\xi_p\bar{\xi}_q \geqslant \alpha\Sigma|\xi_p|^2 \text{ p.p. sur } \Omega^\times \\ \alpha > 0, \qquad \xi_p \in C \end{cases}$$

On prend

$$a(u, v) = \sum_{|p|,|q|<m} \int_\Omega a_{pq} D^p u \,.\, \overline{D^q v}\, dx$$

$$b_h(u, v) = h \,.\, \sum_{|p|,|q|<m} \int_{\Omega_1} a_{pq} D^p u \,.\, \overline{D^q v}\, dx$$

$$a_h(u, v) = a(pu, pv) + b_h(u, v)$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f v\, dx$$

Problème (Q). — Déterminer u dans $H^m(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in H^m(\Omega).$$

Problème (Q_h). — Déterminer u_h dans $H^m(\Omega\times)$ tel que

$$a_h(u_h, v) = L(pv) \quad \text{pour tout } v \in H^m(\Omega\times)$$

on a le

THÉORÈME 4.3. — *Lorsque* $h \to 0$, *la restriction à* Ω, *de la solution (unique)* u_h *du problème* (Q_h) *converge dans* $H^m(\Omega)$ *faible vers la solution (unique)* u *du problème* (Q).

Démonstration. — On se ramène au théorème 4.1; nous ne vérifierons que les hypothèses (P1) *ii*) et (P 2). De l'inégalité (4.8) on tire

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{a(pv, pv) + b_h(v, v)\} \geqslant \alpha(1-h)\|pv\|^2_{H^m(\Omega)} \\ \text{pour tout } v \in H^m(\Omega\times) \qquad + \alpha h\|v\|^2_{H^m(\Omega\times)} \end{cases}$$

d'où, pour $h \leqslant \dfrac{1}{2}$

$$|a_h(v, v) \geqslant \frac{\alpha}{2}\|pv\|^2_V + \alpha h\|v\|^2_W \quad \text{pour tout } v \in W.$$

Ainsi (P 1) *ii*) est vérifiée.

Supposons maintenant que :

$$(4.9) \qquad \frac{\alpha}{2}\|pu_h\|^2_V + \alpha h\|u_h\|^2_W \leqslant C_1 \quad u_h \in W$$

et montrons que :

$$(4.10) \qquad \lim b_h(u_h, rv) = 0 \quad \text{pour tout } v \in V$$

nous avons

$$b_h(u_h, rv) = h.\sum_{|p|,\,|q|\leqslant m} \int_{\Omega_1} a_{pq}.D^p u_h.D^q rv\, dx$$

donc pour établir (4.10) il suffira de montrer que :

$$(4.11) \qquad \lim_{h=0} A^h_{pq} = 0 \quad \text{pour tout } v \in V$$

où

$$|A^h_{pq}|^2 \leqslant h\int_{\Omega_1} a_{pq}D^p u_h D^q rv\, dx.$$

Nous avons, puisque a_{pq} est majorée par M (voir (4.7))

$$|A^h_{pq}| \leqslant hM\int_{\Omega_1} D^p u_h.D^q rv\, dx$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz il vient

$$|A_{pq}^h|^2 \leqslant M^2 h^2 \int_{\Omega_1} |D^p u_h|^2 \, dx . \int_{\Omega_1} |D^q r\varphi|^2 \, dx$$

d'où

$$(4.12) \qquad |A_{pq}^h|^2 < M^2 h^2 ||u_h||_W^2 ||r\varphi||_W^2 .$$

Mais, à partir de (4.9) on tire

$$(4.13) \qquad h||u_h||_W^2 \leqslant \frac{C_1}{\alpha}$$

d'où en combinant (4.12) et (4.13)

$$|A_{pq}^h|^2 \leqslant h . M^2 \frac{C_1}{\alpha} ||r\varphi||_W^2$$

et il est clair que (4.11) est vérifiée.

4.4. — *Approximation d'un problème de Neumann* (par des problèmes de Dirichlet).

Dans 4.3, il suffit de remplacer $H^m(\Omega\times)$ par $H_0^m(\Omega\times)$ et de définir r par :

$$ru = (\pi u) . \Psi$$

où Ψ est une fonction de $\mathcal{C}^m(\Omega\times)$ qui vaut 1 sur Ω et 0 sur Γ_1.

5. Critère général de stabilité pour des ouverts variables.

Nous nous limiterons à la stabilité des problèmes de Neumann dans des ouverts variables Ω_h plus grands que l'ouvert Ω borné dans R^n : nous supposons donc que

$$\Omega \subset \Omega_h$$

on donne les fonctions a_{pq}, $|p|$, $|q| \leqslant m$, mesurables et bornées sur R^n et on suppose que :

$$(5.1) \qquad |a_{pq}(x)| \leqslant M \quad \text{p.p. dans } R^n, \ M = \text{constante}$$

et

$$(5.2) \qquad \begin{cases} \operatorname{Re} \sum\limits_{|p|,|q| \leqslant m} a_{pq}(x) \xi_p \bar{\xi}_q \geqslant \alpha \Sigma |\xi_p|^2 & \text{p.p. dans } R^n \\ \text{où} \qquad \alpha > 0 \qquad \text{et} \qquad \xi_p \in C. \end{cases}$$

On donne ensuite une fonction f dans $L^2(R^n)$. Dans la suite,

les restrictions de a_{pq} et de f à n'importe quel ouvert de R^n seront notées a_{pq} et f. On pose :

$$(5.3) \qquad a(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leqslant m} \int_\Omega a_{pq} D^p u . \overline{D^q v}\, dx, \quad u, v \in H^m(\Omega)$$

$$(5.4) \qquad a_h(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leqslant m} \int_{\Omega_h} a_{pq} D^p u . \overline{D^q v}\, dx, \quad u, v \in H^m(\Omega_h)$$

$$(5.5) \qquad L(v) = \int_\Omega f \bar{v}\, dx, \qquad v \in H^m(\Omega)$$

et enfin

$$(5.6) \qquad L_h(v) = \int_{\Omega_h} f \bar{v}\, dx \quad v \in H^m(\Omega_h).$$

Problème (Q). — Déterminer u dans $H^m(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in H^m(\Omega).$$

Problème (Q_h). — Déterminer u_h dans $H^m(\Omega_h)$ tel que

$$a_h(u_h, v) = L_h(v) \quad \text{pour tout } v \in H^m(\Omega_h).$$

Faisons l'hypothèse :

$$(5.7) \qquad \lim_{h=0} \text{mes}.(\Omega_h - \Omega) = 0.$$

Nous allons établir le

THÉORÈME 5.1. — *Sous les hypothèses* (5.1), (5.2), (5.7), *lorsque* $h \to 0$, *la restriction à* Ω *de la solution (unique) du problème* (Q_h) *converge dans* $H^m(\Omega)$ *faible vers la solution (unique) du problème* (Q).

Démonstration. — Nous nous ramenons au Théorème Général de convergence faible.

Point D 1. — Nous prenons $V_h = H^m(\Omega)$. Le problème (P) associé au triplet

$$\{V, a(u, v), L(v)\}$$

est alors confondu avec le problème (Q). A partir de (5.2) on montre facilement que

$$|a(v, v)| \geqslant \alpha \|v\|_V^2 \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Point D 2. — $V_h = H^m(\Omega_h)$, (P_h) est confondu avec (Q_h), on a de même

$$|a_h(v, v)| \geqslant \alpha \|v\|_{V_h}^2 \quad \text{pour tout } v \in V_h.$$

Point D 3. — Nous prenons $\mathcal{V} = V$ et nous définissons p_h et r_h par :

$r_h u$ est la restriction à Ω_h de πu (voir 2.2),
$p_h u$ est la restriction à Ω de u,

il est clair que

$$||p_h||_{(V_h, V)} \leqslant 1.$$

Point V 1. — Soit une suite u_h telle que

$$u_h \in V_h, \qquad ||u_h||_{V_h} \leqslant C_1 \tag{5.8}$$

et montrons que

$$\lim \{a_h(u_h, r_h v) - a(p_h u_h, v)\} = 0 \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}.$$

Avec les données précédentes, il s'agit d'établir

$$\lim \sum_{|p|, |q|} \int_{\Omega_h - \Omega} a_{pq} D^p u_h . \overline{D^q \pi v}\, dx = 0. \tag{5.9}$$

Il suffira de montrer que

$$\lim A^h_{pq} = 0 \quad |p|, \ |q| \leqslant m \tag{5.10}$$

avec

$$A^h_{pq} = \int_{\Omega_h - \Omega} a_{pq} D^p u_h . D^q \overline{\pi v}\, dx.$$

Nous avons, compte tenu de (5.1)

$$|A^h_{pq}| \leqslant M \int_{\Omega_h - \Omega} |D^p u_h| . \overline{|D^q \pi v|}\, dx$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz il vient

$$|A^h_{pq}|^2 \leqslant M^2 \cdot \int_{\Omega_h - \Omega} |D^p u_h|^2\, dx \cdot \int_{\Omega_h - \Omega} |D^q \pi v|^2\, dx$$

d'où compte tenu de (5.8) et en majorant l'intégrale de $|D^q \pi v|^2$

$$|A^h_{pq}|^2 < M^2 . C^2 . ||\pi v||^2_{H^m(\Omega_h - \Omega)}. \tag{5.11}$$

Puisque πv est dans $H^m(R^n)$, (5.7) entraîne

$$\lim_{h=0} ||\pi v||^2_{H^m(\Omega_h - \Omega)} = 0 \tag{5.12}$$

si bien que (5.10) est établie (on montre (5.12) en commençant par approcher πv par une fonction Ψ de $\mathcal{D}(R^n)$).

Point V 2. — Avec les données des points D 1, D 2, D 3, nous devons vérifier que

$$\lim_{h=0} D_h = 0 \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V} \tag{5.13}$$

où

$$D_h = \int_{\Omega_h - \Omega} f . \overline{\pi v} \, dx$$

on a facilement

$$|D_h|^2 \leqslant \|f\|^2_{H^m(R^n)} \|\pi v\|^2_{H^m(\Omega_h - \Omega)}$$

et (5.12) entraîne (5.13).

Ainsi nous pouvons appliquer le Théorème général de convergence faible d'où le théorème 5.1.

CHAPITRE III

LES FONCTIONS ÉTAGÉES

1. Définitions et notations.

1.1. — Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un point de R^n et si θ et h_i sont deux nombres réels, on pose

$$x + \theta h_i = (x_1, \ldots, x_i + \theta h_i, \ldots, x_n). \tag{1.1}$$

Si E est un sous-ensemble de R^n, $E + \theta h_i$ est l'ensemble des points $x + \theta h_i$, où x est dans E :

$$E + \theta h_i = \{y | y = x + \theta h_i, \ x \in E\}. \tag{1.2}$$

1.2. — Soit maintenant une fonction u définie (presque partout) dans Ω; on pose

$$\nabla_i u(x) = \frac{1}{h_i}\left\{u\left(x + \frac{h_i}{2}\right) - u\left(x - \frac{h_i}{2}\right)\right\} \tag{1.3}$$

partout où $u\left(x + \frac{h_i}{2}\right)$ et $u\left(x - \frac{h_i}{2}\right)$ sont définis.

On vérifie que :

$$\nabla_i(\nabla_j u(x)) = \nabla_j(\nabla_i u(x)) \tag{1.4}$$

si $p = (p_i, \ldots, p_n)$, p_i entiers non négatifs, on pose

$$|p| = \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{1.5}$$

et

$$\nabla^p u(x) = \nabla_1^{p_1} \nabla_2^{p_2} \ldots \nabla_n^{p_n} u(x). \tag{1.6}$$

La fonction $\nabla^p u$ s'appelle la *dérivée* d'ordre p *au sens des différences finies de* la fonction u : notons ceci : le domaine de définition de $\nabla^p u$ est un ouvert « plus petit » que Ω ; par exemple $\nabla_i u$ est définie dans l'ensemble des x tels que les points $x + \frac{h_i}{2}$ et $x - \frac{h_i}{2}$ soient dans Ω.

1.3. — Soit maintenant

$$h = (h_i, \ldots, h_n) \qquad \text{où} \qquad h_i > 0$$

on pose

$$|h| = h_i + \cdots + h_n$$

le *réseau* R_h est l'ensemble des points M (ou nœuds) de R^n.

$$M = (m_i h_i, \ldots, m_n h_n) \tag{1.7}$$

où les $m_i, \ldots, i = 1, n$, sont des nombres entiers quelconques. La *maille* du réseau est h. On désigne par $(C, M)_h$ le pavé de *centre* M, de côtés parallèles aux axes et de longueur $h_i, \ldots, h_n$:

$$(C, M)_h = \left\{ x | x = M + \sum_{i=1}^{n} \theta_i h_i, \ -\frac{1}{2} < \theta_i < \frac{1}{2} \right\}. \tag{1.8}$$

On définit les pavés dits *d'origine* M ou *d'axe* Mi par

$$(0, M)_h = \{ x | x = M + \Sigma \theta_i h_i, \ 0 < \theta_i < 1 \}, \tag{1.9}$$

$$(A, Mi)_h = \left(C, M + \frac{1}{2} h_i \right)_h. \tag{1.10}$$

Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on supprimera l'indice h qui figure dans les $(C, M)_h, \ldots$

Ensemble Mo. — Si M est un point du réseau, Mo désigne l'ensemble des sommets de (0, M).

Ensemble Mi. — M étant un point du réseau, Mi désigne l'ensemble des points N tels que N et N + hi soient des sommets de (0, M).

2. Limites de fonctions dérivées

(au sens des différences finies).

2.1. — Soit une suite d'ouverts Ω_h contenus dans l'ouvert Ω de R^n; on pose la

DÉFINITION 2.1. — *On dit que la famille Ω_h approche Ω si, pour tout compact* K *contenu dans Ω, il existe un nombre positif $h(K)$ tel que:*

$$h < h(K) \quad \textit{entraîne} \quad K \subset \Omega_h.$$

On donne maintenant $h = (h_i, \ldots, h_n)$ et des fonctions u, u^i, $i = 1, \ldots, n$, de $L^2(\Omega)$; on fait 1'.

Hypothèse 2.1. — Il existe une famille d'ouverts Ω_h qui approche Ω lorsque $|h| \to 0$, et tel que:

$$u^i(x) = \nabla_i u(x) \quad \text{p.p. dans } \Omega_h.$$

Nous allons établir la

PROPOSITION 2.1. — *Si les fonctions u et u^i de $L^2(\Omega)$ vérifient l'hypothèse* 2.1 *alors:*

$$(u^i, \Psi)_{L^2(\Omega)} = -(u, \nabla_i \Psi)_{L^2(\Omega)} \tag{2.2}$$

pour toute fonction Ψ de $L^2(\Omega)$ et à support compact dans Ω dès que $|h|$ est « assez petit » (i.e. $|h| \leqslant h(\Psi)$).

Démonstration. — Désignons par K le support de Ψ dans Ω et prenons h assez petit pour que Ω_h contienne l'ensemble $K + \theta h_i$, $-1 \leqslant \theta \leqslant +1$. On a alors:

$$\int_\Omega u^i \overline{\Psi}\, dx = \int_K \nabla_i u(x) . \overline{\Psi}(x)\, dx \tag{2.3}$$

or

$$\int_K \nabla_i u(x)\, \overline{\Psi}(x)\, dx = \int_K \frac{u\left(x + \frac{h_i}{2}\right) - u\left(x - \frac{h_i}{2}\right)}{h_i} \cdot \overline{\Psi}(x)\, dx$$

d'où

$$\int_{K} \nabla_i u(x)\overline{\Psi}(x)\,dx = \int_{K+\frac{h_i}{2}} \frac{u(x)\Psi\left(x-\frac{h_i}{2}\right)}{h_i}\,dx - \int_{K-\frac{h_i}{2}} \frac{u(x)\Psi\left(x+\frac{h_i}{2}\right)}{h_i}$$

posons maintenant

$$Ki = K + \theta\,\frac{h_i}{2}, \qquad -1 \leqslant \theta \leqslant +1$$

il est clair que $\Psi\left(x-\frac{1}{2}h_i\right)$ est nulle sur $Ki - \left(K+\frac{1}{2}h_i\right)$ et que $\Psi\left(x+\frac{1}{2}h_i\right)$ est nulle sur $Ki - \left(K-\frac{1}{2}h_i\right)$; par suite :

$$\int_{K} \nabla_i u(x)\overline{\Psi}(x)\,dx = \int_{Ki} \frac{u(x)\Psi\left(x-\frac{1}{2}h_i\right)}{h_i}\,dx - \int_{Ki} \frac{u(x)\Psi\left(x+\frac{1}{2}h_i\right)}{h_i}\,dx$$

ou encore

$$\int_{K} \nabla_i u.\overline{\Psi}dx = -\int_{Ki} u.\overline{\nabla_i\Psi}\,dx$$

mais $\nabla_i\Psi$ est nulle hors de Ki d'où compte tenu de (2.3)

$$\int_{\Omega} u^i\overline{\Psi}\,dx = -\int_{\Omega} u\overline{\nabla_i\Psi}\,dx \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On donne maintenant les fonctions de $L^2(\Omega)$

$$u^p,\ p = (p_i, \ldots, p_n),\ |p| \leqslant m;$$

on écrira u au lieu de $u^{0,\ldots,0}$. On fait 1'

Hypothèse 2.2. — Il existe un ouvert Ω_h qui approche Ω lorsque $|h| \to 0$ et tel que :

$$u^p(x) = \nabla^p u(x) \quad \text{p.p. dans } \Omega_h$$

En utilisant la proposition 2.1 il vient la

PROPOSITION 2.2. — *Si les fonctions u^p de $L^2(\Omega)$ vérifient l'hypothèse 2.2 alors :*

$$(2.4) \qquad (u^p, \Psi)_{L^2(\Omega)} = (-1)^{|p|} (u, \nabla^p \Psi)_{L^2(\Omega)}$$

pour toute fonction Ψ de $L^2(\Omega)$ et à support compact contenu dans Ω et pour $|h|$ assez petit.

2.2. — Considérons maintenant une suite de fonctions u_h^p de $L^2(\Omega)$, $|p| \leqslant m$ qui vérifient les hypothèses 2.2 et 2.3.

Hypothèse 2.3. — On a

$$\sum_{|p| \leqslant m} \|u_h^p\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_0, \quad C_0 = \text{Constante}.$$

Nous allons démontrer le

THÉORÈME 2.1. — *Sous les hypothèses 2.2 et 2.3, il existe une sous-suite u_k^p extraite de u_h^p et un élément u de $H^m(\Omega)$ tel que :*

$$\lim u_k^p = D^p u \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible}, \ |p| \leqslant m.$$

Démonstration. — De l'hypothèse 2.3 on déduit ceci :

Il existe une sous-suite u_k^p et des éléments u^p de $L^2(\Omega)$ tels que

$$(2.5) \qquad \lim u_k^p = u^p \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible}, \ |p| \leqslant m,$$

dans (2.4) on prend Ψ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, il vient [3]

$$(2.6) \qquad (u_k^p, \Psi)_{L^2(\Omega)} = (-1)^{|p|} (u_k, \nabla^p \Psi)_{L^2(\Omega)}.$$

On vérifie que :

$$(2.7) \qquad \lim \nabla^p \Psi = D^p \Psi \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort}, \ |p| \leqslant m$$

Compte tenu de (2.5), (2.6) et (2.7) il vient

$$(u^p, \Psi)_{L^2(\Omega)} = (-1)^{|p|} (u, D^p \Psi)_{L^2(\Omega)}, \quad |p| \leqslant m$$

et ceci pour toute fonction $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a donc

$$u^p = D^p u \quad |p| \leqslant m$$

et u dans $H^m(\Omega)$.

Remarque 2.1. — Dans tout le numéro 2, on obtiendrait des résultats identiques en remplaçant les dérivées au sens

[3] En écrivant encore u au lieu de $u^{0, \cdots, 0}$.

des différences finies par les dérivées au sens des distributions.

Nous allons donner maintenant deux exemples fondamentaux de fonctions u_h^p qui vérifient l'hypothèse 2.2.

Exemple 2.1. — On donne un réseau R_h de maille $h = (h_i, \ldots, h)$ et un ouvert Ω de R^n. On prend pour u_h une fonction étagée définie sur Ω et à valeurs dans C. On peut alors définir $\nabla^p u_h(x)$ p.p. dans un ouvert Ω_p contenu dans Ω. On pose

$$u_h^p(x) = \begin{cases} \nabla^p u_h(x) & \text{si} \quad x \in \Omega_p \\ 0 & \text{si} \quad x \in \Omega - \Omega_p \end{cases}$$

Exemple 2.2. — On donne R_h et Ω comme précédemment. On donne des fonctions étagées u_h^p définies sur Ω, $|p| \leqslant m$, et on suppose qu'il existe une fonction étagée u_h (définie dans un ouvert assez grand pour que $\nabla^p u_h(x)$ existe p.p. sur Ω) telle que :

$$u_h^p \quad \text{est égale à la restriction à } \Omega \text{ de} \quad \nabla^p u_h, \ |p| \leqslant m.$$

3. Les espaces $H^m(\Omega, R_h)$.

Nous allons construire des espaces qui seront associés (dans le chap. 4 aux espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$.

On donne un ouvert Ω dans R^n et un réseau R_h de maille $h = (\ldots, h_i, \ldots)$.

3.1. — Nous allons définir des ensembles de points que l'on utilise dans la dérivation au sens des différences finies.

DÉFINITION 3.1. — *i) On désigne par $\delta_i x$ l'ensemble des deux points $x + \frac{1}{2} h_i$ et $x - \frac{1}{2} h_i$.*

ii) *On désigne par $\delta_i \delta_j x$ l'ensemble des points $\delta_i y$ où $y \in \delta_j x$.*

iii) *On désigne par $\delta^p x$, $p = (\ldots, p_i, \ldots)$, $p_i =$ entier $\geqslant 0$ l'ensemble des points $\delta_1^{p_1} \ldots \delta_n^{p_n} x$; l'ensemble $\delta^{0, \ldots, 0}$ est réduit au seul point x.*

On vérifie que $\delta_i \delta_j x = \delta_j \delta_i x$. Posons, si $x = (\ldots, x_i, \ldots)$ et si $p = (\ldots, p_i, \ldots)$

$$x + \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{1}{2} h_i = \left(\ldots, x_i + m_i \frac{1}{2} h_i, \ldots \right)$$

$$p - i = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i - 1, p_{i+1}, \ldots, p_n).$$

Posons aussi

$$E(p_i) = \{-p_i, -p_i + 2, \ldots, p_i - 2, p_i\}.$$

On vérifie que :

$$(3.1) \quad \delta^p x = \cup \left(x + \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{1}{2} h_i\right) \quad \text{où} \quad m_i \in E(p_i).$$

Ceci entraîne immédiatement

$$(3.2) \quad \text{si} \quad y \in \delta^p x \quad \text{alors} \quad x \in \delta^p y$$

$$(3.3) \quad \text{si} \quad y, y + h_i \in \delta^p x \quad \text{alors} \quad y + \frac{1}{2} h_i \in \delta^{p-i} x$$

Définition 3.2. — *On désigne par*

$$\tau(x, r), \; r = \textit{nombre entier} \geqslant 0,$$

la réunion des $\delta^p x$, $|p| \leqslant r$.

Nous allons établir la

Proposition 3.1. — *Il n'y a, au plus, qu'un point de* $\delta^p x$ *qui n'appartient pas à la réunion des pavés (du type* (C, M), $M \in R_h$) *qui coupent* $\tau(x, |p| - 1)$) (*i.e. qui contiennent au moins un point de* $\tau(x, |p| - 1)$.

Démonstration. — Soient y et z dans $\delta^p x$, $y \neq z$ on a donc

$$y = x + \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{1}{2} h_i$$

$$z = x + \sum_{i=1}^{n} s_i \frac{1}{2} h_i \quad r_i, s_i \in E(p_i).$$

Puisque $y \neq z$ il existe un indice j tel que $r_j \neq s_j$; on suppose que $r_j < s_j$: les nombres r_j, $r_j + 2$, $\nabla_j - 2$ et s_j sont donc des éléments de $E(p_i)$ et par suite y, z, $y + h_j$, $z - h_j \in \delta^p x$ d'où compte tenu de (3.3)

$$y + \frac{1}{2} h_j, \; z - \frac{1}{2} h_j \in \delta^{p-j} x$$

et *a fortiori*

$$(3.4) \qquad y + \frac{1}{2} h_j, \; z - \frac{1}{2} h_j \in \tau(x, |p| - 1).$$

Supposons que y et z ne soient pas dans la réunion des pavés qui coupent $\tau(x, p - 1)$ et montrons que cela est absurde.

On suppose donc en particulier (voir 3.4) que :

(3.5) y et $y + \frac{1}{2} h_j$ ne sont pas dans un même pavé,

(3.6) z et $z - \frac{1}{2} h_j$ ne sont pas dans un même pavé.

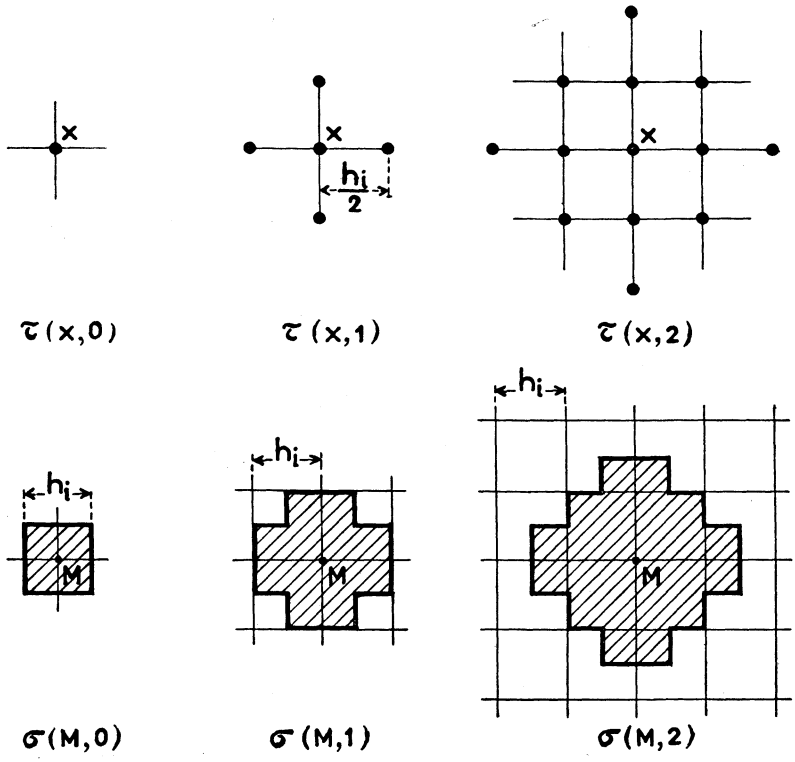
Mais à partir de (3.5) par la translation $z - y$ il vient

(3.7) z et $z + \frac{1}{2} h_j$ ne sont pas dans un même pavé

ce qui est en contradiction avec (3.6).

DÉFINITION 3.3. — *On désigne par* $\sigma(\mathrm{M}, r)$, *où* $r =$ *nombre entier* $\geqslant 0$, *et où* $\mathrm{M} \in \mathrm{R}_h$ *l'ensemble des points* $\tau(x, s)$ *où* $0 \leqslant s \leqslant r$ *et où* x *est un point quelconque de* (C, M).

Nous représenterons dans les schémas suivants les ensembles $\tau(x, 0)$, $\tau(x, 1)$, $\tau(x, 2)$ et les ensembles $\sigma(\mathrm{M}, 0)$, $\sigma(\mathrm{M}, 1)$, $\sigma(\mathrm{M}, 2)$.



DÉFINITION 3.4. — *On désigne par* R_h^m *l'ensemble des nœuds* M *de* R_h *tels que* $\sigma(M, m)$ *coupe* Ω.

Soit maintenant une suite u, à valeurs complexes, définie sur R_h^m et construisons la fonction étagée $\tilde{u}$ par :

$$(3.8) \qquad \begin{cases} \tilde{u}(x) = u(M) \quad \text{pour tout } x \in (C, M) \\ \text{pour tout } M \in R_h^m. \end{cases}$$

Montrons que (presque) pour tout $x \in \Omega$, $\nabla^p \tilde{u}(x)$ a un sens, $|p| \leqslant m$. Il suffit de vérifier pour cela que

$$(3.9) \qquad \sigma^p x \subset \cup (C, M), \ M \in R_h^m, \ |p| \leqslant m.$$

Nous ne considérons que les points x qui sont à l'intérieur des pavés. Soit y un point quelconque de $\sigma^p x$, on a alors $x \in \sigma^p y$ et par conséquent, si $y \in (C, P)$, $\sigma(P, m)$ coupe Ω et $P \in R_h^m$ d'où (3.9). Nous pouvons donc poser la

DÉFINITION 3.5. — *On désigne par* $H^m(\Omega, R_h)$ *l'espace des* $(\ldots, u^p, \ldots)$, $|p| \leqslant m$, *où les* u^p *sont les restrictions à* Ω *des* $\nabla_p \tilde{u}$, $\tilde{u}$ *étant définie par* (3.8).

THÉORÈME 3.1. — *Muni de* $(u, v) = \Sigma(u^p, v^p)_{L^2(\Omega)}$ *l'espace* $H^m(\Omega, R_h)$ *est un espace de Hilbert.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que l'égalité $\Sigma \|u^p\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$ entraîne $u^p = 0$, $|p| \leqslant m$. Supposons que

$$(3.10) \qquad \Sigma \|u^p\|^2_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Nous allons montrer que :

(3.11)

$$\begin{cases} \tilde{u}(y) = 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in \tau(x, r-1) \quad \text{entraîne} \quad \tilde{u}(y) = 0 \\ \text{pour tout} \quad y \in \tau(x, r), \ x \in \Omega, \ r \in \{0, 1, \ldots, m\} \end{cases}$$

Nous supposons donc que $\tilde{u}(y) = 0$ pour tout $y \in \tau(x, r-1)$ ou puisque u est une fonction étagée que

(3.12)

$\tilde{u}(y)$ est nulle sur la réunion des pavés qui coupent $\tau(x, r-1)$.

Soit $p = (\ldots, p_i, \ldots)$ tel que $|p| = r$. Soit $x \in \Omega$, l'égalité

(3.10) entraîne $\nabla^p \tilde{u}(x) = 0$, mais nous savons que $\nabla^p \tilde{u}(x)$ est une combinaison linéaire des $\tilde{u}(y)$, $y \delta^p x$, on a donc

$$(3.13) \qquad \nabla^p \tilde{u}(x) = \Sigma \lambda(y) \ \tilde{u}(y) = 0 \quad y \in \delta^p x$$

(les coefficients $\lambda(y)$ ne dépendent pas de $\tilde{u}$).

Si maintenant, on tient compte de (3.12), (3.13) et de la proposition 3.1, il vient $\tilde{u}(y) = 0$ pour tout $y \in \delta^p x$, pour tout p tel que $|p| = r$ et par conséquent

$$\tilde{u}(y) = 0, \qquad \forall y \in \tau(x, r), \qquad x \in \Omega. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

La vérification de $\tilde{u}(y) = 0$ pour tout $y \in \tau(x, 0)$, $x \in \Omega$ est triviale. Pour terminer la démonstration du théorème il suffit d'ajouter ceci : Soit M un point de R_h^n, il existe alors p, x, y, tels que :

$$y \in (C, M),$$
$$y \in \delta^p x, \qquad x \in \Omega, \qquad |p| \leqslant r$$

et puisque on vient de montrer que $\tilde{u}(y) = 0$, on a

$$\tilde{u}(M) = \tilde{u}(y) = 0.$$

4. Normes dans $L^2(\Gamma)$ des traces des fonctions de $H^1(\Omega, R_h)$.

On sait que pour tout ε positif donné d'avance et pour tout $u \in H^1(\Omega)$ on a :

$$||\gamma u||^2_{L^2(\Gamma)} \leqslant \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} ||D_i u||^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon) . ||u||^2_{L^2(\Omega)},$$

$C(\varepsilon) > 0$, $C(\varepsilon)$ indèpendant de u, γu est la trace de u sur Γ (cf. [5]). Nous allons établir une inégalité analogue par les éléments de $H^1(\Omega, R_h)$.

4.1. — Soit M un point quelconque de R^n. Nous considérons une suite u, à valeurs dans C, définie sur

$$M + ph_i, \ p = 0, 1, \ldots, N$$

N étant un nombre entier positif donné, et nous posons

$$u(p) = u(M + ph_i),$$
$$\tilde{\nabla}_i u(p) = \tilde{\nabla} u|p| = \frac{u(p+1) - u(p)}{h_i}.$$

Soit la fonction θ

$$\theta(p) = 1 - \frac{p}{N}$$

Pour toute fonction u, on a

$$(4.1) \qquad |u(0)|^2 = -h_i \cdot \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{\nabla}(u.\bar{u}.\theta)$$

puisque θ vaut 1 pour $p = 0$ et 0 pour $p = N$. On vérifie la formule de dérivation suivante

$$(4.2) \quad (u.v.w.)(p) = u(p+1)\, v(p+1)\, \tilde{\nabla} w(p) + u(p+1)\,(\tilde{\nabla} v(p))\, w(p) + (\tilde{\nabla} u(p))\, v(p)\, w(p)$$

et par suite, il vient dans (4.1)

$$\left\{ |u(0)|^2 = -h_i \sum_{p=0}^{N-1} \left[u(p+1)\bar{u}(p+1)\left(-\frac{1}{Nh_i}\right) + u(p+1)\,(\overline{\nabla u}(p)).(p) + (\tilde{\nabla} u(p)).\bar{u}(p).\theta(p) \right] \right.$$

et puisque $0 \leqslant \theta(p) \leqslant 1$ pour $p = 0, 1, \ldots, N-1$ on a

$$|u(0)|^2 \leqslant h_i \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{Nh_i} |u(p+1)|^2 + h_i \sum_{p=0}^{N-1} |u(p+1)|\,|\tilde{\nabla}\bar{u}(p)| + h_i \sum_{p=0}^{N-1} |u(p)|\,|\tilde{\nabla} u(p)|.$$

En utilisant l'inégalité

$$(\Sigma ab) \leqslant (\Sigma a^2)^{1/2}.(\Sigma b^2)^{1/2}$$

et en majorant (par modification de l'intervalle de sommation) il vient

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} |u(0)|^2 \leqslant h_i . \displaystyle\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{Nh_i} |u(p)|^2 \\ \qquad\qquad + 2h_i \left(\displaystyle\sum_{p=0}^{N} |u(p)|^2 \right)^{1/2} \left(\displaystyle\sum_{p=0}^{N-1} |\tilde{\nabla} u(p)|^2 \right)^{1/2} \\ \text{où } u(p) = u(M + ph_i). \end{array} \right.$$

4.2. — Nous allons introduire maintenant la notion de famille (Σ, R_h) pré-régulière. On donne un ouvert Ω dans R^n de frontière Γ et on désigne par Σ une partie de Γ. On donne un réseau R_h de maille $h = (\ldots, h_i, \ldots)$.

Définition 4.1. — *Un point* M *de* R_h *est dit point frontalier de* Σ *si le pavé* (C, M) *coupe* Σ.

Notations. — On pose pour simplifier :

$$\Omega M = \Omega \cap (C, M),$$
$$\Sigma M = \Sigma \cap (C, M).$$

Définition 4.2. — A. *La famille* (Σ, R_h) est *pré-régulière si pour tout point* M *frontalier de* Σ *il existe au moins un*

$$i \in \{1, \ldots, n\}$$

tel que :

1) h_i mes. $\Sigma M \leqslant C$ mes. ΩM.

2) *Un des deux ensembles suivants est contenu dans* Ω :

$$\Sigma M + \rho h_i, \qquad 0 < \rho h_i < l,$$
$$\Sigma M - \rho h_i, \qquad 0 < \rho h_i < l.$$

3) *Les constantes positives* l *et* C *sont indépendantes de* M.

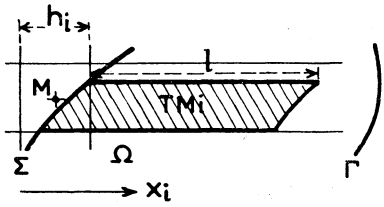
B. 1) *Le nombre* i *est appelé indice de régularité de* M,

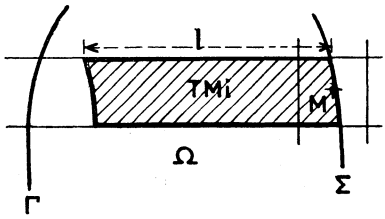
2) *Si* $\Sigma M + \rho h_i \subset \Omega$ *le point* M *est dit* i*-gauche,*
si $\Sigma M - \rho h_i \subset \Omega$ *le point* M *est dit* i*-droite.*

3) *Celui des deux ensembles précédents qui est contenu dans* Ω *est appelé tube* TMi.

Notons ceci : un point M peut avoir plusieurs indices de régularité.

Les schémas suivants représentent les tubes TMi associés à des points i-gauche et i-droite.





4.3. — On donne un élément $u = (u_0, u^1, \ldots, u^n) \in H^1(\Omega, R_h)$ voir la définition de $H^1(\Omega, R_h)$ dans le numéro précédent. On sait qu'il existe une fonction étagée $\tilde{u}$ et que

(4.4) u_0 et u^i sont les restrictions à Ω de $\tilde{u}$ et $\nabla_i \tilde{u}$

On fait l'hypothèse suivante :

(4.5) la famille (Σ, R_h) est pré-régulière.

Nous allons établir le

THÉORÈME 4.1. — *Sous l'hypothèse* (4.5) *on a :*

$$\|\gamma u_0\|^2_{L^2(\Sigma)} \leqslant C_0 . \|u_0\|_{L^2(\Omega)} . \sum_{i=1}^{n} \|u^i\|_{L^2(\Omega)} + C_1 \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

pour tout $u = (u_0; u^1, \ldots, u^n) \in H^1(\Omega; R_h)$; *les constantes positives* C_0 *et* C_1 *sont indépendantes de* u *et de* h, Σ *est une partie de* Γ.

Démonstration. — Soit M un point frontalier de Σ et supposons que M soit un point i-gauche. On définit alors le nombre entier N par :

$$(N + 1)h_i \leqslant l \leqslant (N + 2)h_i$$

et par conséquent pour h_i petit $\left(\text{par exemple } h_i < \frac{l}{4}\right)$ on a

$$\frac{1}{Nh_i} < \frac{l}{2}. \tag{4.6}$$

On obtient sans difficultés les résultats suivants :

$$\begin{cases} \Omega M + ph_i \subset \Omega & p = 0, 1, \ldots, N \\ \Omega M + \left(p + \frac{1}{2}\right)h_i \subset \Omega & p = 0, \ldots, N - 1 \end{cases} \tag{4.7}$$

et

(4.8)

$$\begin{cases} u_0(x) = \tilde{u}(M + ph_i) & \text{pour tout } x \in \Omega M + ph_i \\ u^i(x) = \tilde{\nabla}\tilde{u}(M + ph_i) & \text{pour tout } x \in \Omega M + \left(p + \frac{1}{2}\right)p_i \end{cases}$$

En combinant (4.3), (4.6), (4.7) et (4.8) il vient :

$$(4.9)\quad \begin{cases} |u(\mathrm{M})|^2 \mathrm{mes}.\Omega\mathrm{M} \leqslant h_i \dfrac{2}{l} \displaystyle\int_{\mathrm{TM}i} |u_0(x)|^2\, dx \\ + 2h_i \Big(\displaystyle\int_{\mathrm{TM}i} |u_0(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} . \Big(\displaystyle\int_{\mathrm{TM}i} |u^i(x)|^2\, dx\Big)^{1/2}. \end{cases}$$

On a maintenant

$$\int_{\Sigma\mathrm{M}} |u_0(x)|^2\, d\sigma = |\tilde{u}(\mathrm{M})|^2 \text{ mes } \Gamma\mathrm{M}$$

et puisque la famille (Σ, R_h) est régulière on a :

$$(4.10)\qquad \int_{\Sigma\mathrm{M}} |u_0(x)|^2\, d\sigma \leqslant \mathrm{C}|\tilde{u}(\mathrm{M})|^2 \cdot \frac{\text{mes } \Omega\mathrm{M}}{h_i}.$$

En combinant (4.9) et (4.10) il vient :

$$(4.11)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Sigma\mathrm{M}} |u_0(x)|^2\, d\sigma \leqslant \frac{2\mathrm{C}}{l} \int_{\mathrm{TM}i} |u_0(x)|^2\, dx \\ + 2\mathrm{C}\Big(\displaystyle\int_{\mathrm{TM}i} |u_0(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} . \Big(\displaystyle\int_{\mathrm{TM}i} |u^i(x)|^2\, dx\Big)^{1/2}. \end{cases}$$

Pour obtenir une majoration de $\int_\Sigma |u_0(x)|^2\, d\sigma$ il suffit de faire une sommation en M des inégalités (4.11). Si de plus on tient compte du fait que tout point $x \in \Omega$ est contenu au plus dans $2n$ tubes (2 par direction) il vient l'inégalité :

$$\int_\Sigma |u_0(x)|^2\, d\sigma \leqslant \frac{4\mathrm{C}n}{l} ||u_0||^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} 4\mathrm{C}n ||u_0||_{\mathrm{L}^2(\Omega)} ||u^i||_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

que nous pouvons écrire sous la forme

$$(4.12)\quad \begin{cases} ||\gamma u_0||^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leqslant \mathrm{C}_0 ||u_0||_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{n} ||u^i||_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \mathrm{C}_1 ||u_0||^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\ \text{les constantes positives } \mathrm{C}_0 \text{ et } \mathrm{C}_1 \text{ sont indépendantes} \\ \quad \text{de } u \text{ et de } h. \end{cases}$$

A partir du théorème précédent, on obtient le :

THÉORÈME 4.2. — *Sous l'hypothèse* (4.5), *pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné d'avance on a :*

$$(4.13)\qquad ||u_0||^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} ||u^i||^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \mathrm{C}(\varepsilon) ||u_0||^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

pour tout $u = (u_0;\ u^1,\ \ldots,\ u^n) \in H^1(\Omega,\ R_h)$; $C(\varepsilon) > 0$, $C(\varepsilon)$ *ne dépend ni de* h *ni de* u.

On démontrerait le théorème, sans difficulté, en utilisant (4.12) et l'inégalité :

$$2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2.$$

5. Convergence des traces des fonctions étagées.

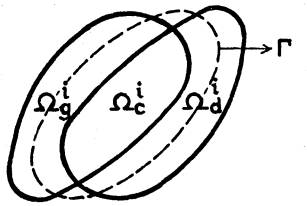
On donne un ouvert Ω borné dans R^n de frontière régulière Γ et un réseau R_h de maille $h = (\ldots,\ h_i,\ \ldots)$.

Notations. — Nous allons introduire des sous-ensembles de R^n

$$\Omega_c^i = \left(\Omega + \frac{1}{2} h_i\right) \cap \left(\Omega - \frac{1}{2} h_i\right)$$

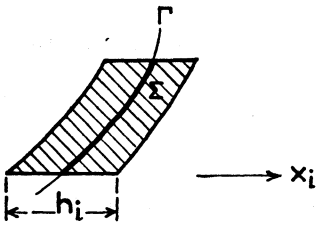
$$\Omega_g^i = \left(\Omega - \frac{1}{2} h_i\right) - \Omega_c^i$$

$$\Omega_d^i = \left(\Omega + \frac{1}{2} h_i\right) - \Omega_c^i.$$



On donne maintenant une partie Σ de Γ et on pose

$$\Sigma_h^i = \Sigma + \rho \frac{1}{2} h_i, \qquad -1 < \rho < +1.$$



Si M est un point frontalier, on sait que $\Sigma M = \Sigma \cap (C, M)$, et on pose

$$\Sigma M_h^i = \Sigma M + \rho \frac{1}{2} h_i, \qquad -1 < \rho < +1.$$

Espace $H(D_i, \Omega)$. — C'est l'espace des $u \in L^2(\Omega)$ tels que $D_i u \in L^2(\Omega)$. On montre que muni de la norme

$$(||D_i u||^2_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$$

c'est un espace de Hilbert voir [11].

5.1. — On suppose que la partie Σ de Γ est telle que :

$$\Sigma_h^i \subset \Omega_d^i. \tag{5.1}$$

On donne les fonctions u_h vérifiant

$$\left\{ u_h \text{ est définie sur } \Omega \cup \left(\Omega + \frac{1}{2} h_i\right) \cup \left(\Omega - \frac{1}{2} h_i\right) \text{ et a valeurs dans } C \right\} \tag{5.2}$$

et on construit à partir de u_h les fonctions u_0^h et u_h^i.

(5.3) u_0^h et u_h^i sont les restrictions à Ω de u_h et de $\nabla_i u_h$.

On suppose que :

(5.4) $||u_h^i||^2_{L^2(\Omega)} + ||u_0^h||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C \quad C = \text{constante} > 0$

(5.5) γu_0^h converge dans $L^2(\Sigma)$ faible vers un élément $\bar{u}$ de $L^2(\Sigma)$.

(5.6) u_h est indépendant de x_i sur Σ_h^i.

Nous allons démonter le

THÉORÈME 5.1. — *Sous les hypothèses* (5.4), (5.5), (5.6) *il existe une sous-suite* u_k *extraite de* u_h *et un élément* $u^* \in H(D_1, \Omega)$ *tels que* :

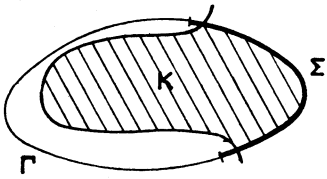
$$\begin{cases} \lim u_0^k = u^* & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \lim u_k^i = D_i u^* & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{cases} \tag{5.7}$$

$$\begin{cases} u = \bar{u} \\ \text{ou encore} \\ \lim u_0^k = u^* & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{cases} \tag{5.8}$$

Démonstration. — On obtient (5.7) à partir de (5.3) et de (5.4) par un raisonnement identique à celui du théorème 2.1.

Soit maintenant une fonction Ψ telle que

$$(5.9)\quad \begin{cases} \Psi \text{ est indéfiniment différentiable sur } \bar{\Omega} \\ \Psi(x) = 0 \text{ pour tout } x \text{ appartenant à un voisinage} \\ \quad \text{de } \Gamma - \Sigma. \end{cases}$$



Le support de Ψ sera désigné par K, compte tenu de (5.3) on peut écrire

$$\int_\Omega u_h^i \Psi \, dx = \frac{1}{h_i} \int_\Omega \left(u_h\left(x + \frac{1}{2} h_i\right) - u\left(x - \frac{1}{2} h_i\right)\right) \cdot \Psi(x) \, dx$$

d'où

$$\int_\Omega u_h^i \Psi \, dx = \frac{1}{h_i} \int_{\Omega + \frac{1}{2} h_i} u_h(x) \Psi\left(x - \frac{1}{2} h_i\right) dx$$
$$- \frac{1}{h_i} \int_{\Omega - \frac{1}{2} h_i} u_h(x) \Psi\left(x + \frac{1}{2} h_i\right) dx$$

et en utilisant (5.9) il vient

$$(5.10)\quad \int_\Omega u_h^i \Psi \, dx = - \int_{\Omega_c} u_h(x) \nabla_i \Psi(x) \, dx$$
$$+ \frac{1}{h_i} \int_{\Sigma_h^i} u_h(x) \Psi\left(x - \frac{1}{2} h_i\right) dx.$$

Si maintenant on passe à la limite dans (5.10), en utilisant (5.7) il vient

$$\lim \frac{1}{h_i} \int_{\Sigma_h^i} u_h(x) \Psi\left(x - \frac{1}{2} h_i\right) dx = \int_\Omega \mathrm{D}_i u^* \Psi \, dx + \int_\Omega u^* \mathrm{D}_i \Psi \, dx$$

et par conséquent

$$(5.11)\quad \lim \frac{1}{h_i} \int_{\Sigma_h^i} u_h(x) \Psi\left(x - \frac{1}{2} h_i\right) dx = \int_\Sigma \gamma u^* \gamma \Psi \, dx_i'$$

où $dx_i' = dx_i \ldots dx_{i-1} . dx_{i+1} \ldots dx_n$.

A tout point $x = (\ldots, x^i, \ldots) \in \Sigma_h^i$ on associe le point $\overline{x} = (\ldots, \overline{x}_i, \ldots) \in \Sigma$ déduit de x par une translation parallèle au $i^{\text{ème}}$ *axe*, c'est-à-dire que

$$\overline{x}_j = x_j \quad \text{pour tout} \quad j \neq i, \ \overline{x} \in \Sigma.$$

On sait (voir (5.6)) que :

$$(5.12) \qquad u_h(x) = u_h(\overline{x}) \quad \text{pour tout } x \in \Sigma_h^i, \ \overline{x} \in \Sigma$$

Par une intégration en dx_i, on a :

$$(5.13) \qquad \frac{1}{h_i} \int_{\Sigma_h^i} u_h(x) \Psi\left(x - \frac{1}{2} h_i\right) dx = \int_\Sigma u_h(\overline{x}) \Psi_h(\overline{x}) \, dx_i'$$

où

$$(5.14) \qquad \Psi_h(\overline{x}) = \frac{1}{h_i} \int_{\overline{x}_i - \frac{1}{2} h_i}^{\overline{x}_i + \frac{1}{2} h_i} \Psi\left(x - \frac{1}{2} h_i\right) dx_i \quad x \in \Sigma.$$

Puisque $\Psi(x)$ est indéfiniment différentiable sur $\overline{\Omega}$ on a :

$$\lim \Psi_h = \gamma \Psi \quad \text{dans } L^2(\Sigma) \text{ fort.}$$

En passant à la limite dans (5.13) compte tenu de (5.5) et de (5.14) il vient :

$$\lim \frac{1}{h_i} \int_{\Sigma_h^i} u_h(x) \Psi\left(x - \frac{1}{2} h_i\right) dx = \int_\Sigma \overline{u} \gamma \Psi \, dx_1'$$

ce qui donne avec (5.11)

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Sigma \overline{u} \gamma \Psi \, dx_1' = \int_\Sigma u^* \gamma \Psi \, dx_1' \\ \text{pour tout } \Psi \text{ vérifiant (5.9)} \end{cases}$$

d'où le résultat (5.8) que nous cherchions à établir.

Notons ceci : on aurait pu remplacer l'hypothèse

$$\Sigma_h^i \subset \Omega_d^i \ \text{ par } \ \Sigma_h^i \subset \Omega_g^i.$$

5.2. — *Conséquence* I : Soit Γ_1 une partie de Γ. Soit

$$u_h = (u_0^h; \ldots, u_h^i, \ldots) \in H^1(\Omega, R_h)$$

telle que

$$(5.15) \qquad \|u_h\|_{H^1(\Omega, R_h)} \leqslant C, \quad C = \text{constante} > 0$$

(5.16)

$$\gamma u_0^h(x) = \gamma u_h^i(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_1, \ i = l, \ldots, n.$$

On recouvre Γ_1 par des parties Σ_t de Γ que vérifient $(\Sigma_t)_h^i \subset \Omega_g^i$

ou $(\Sigma_t)^i_h \subset \Omega^i_d$ (l'indice i dépendant de t). Il est clair que les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées et qu'en particulier γu^h_0 converge vers 0 sur Γ_1. En combinant les théorèmes (2.1) et (5.1) on obtient le :

THÉORÈME 5.2. — *Sous les hypothèses* (5.15) *et* (5.16) *il existe une sous-suite u_k extraite de u_h et un élément $u^* \in H^1(\Omega)$ tels que :*

$$\begin{aligned} \lim u^k_0 &= u^* \\ \lim u^i_k &= D_i u^* \quad i = l, \ldots, n \\ \gamma u^* &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_1. \end{aligned}$$

5.3. — *Conséquence II :*

On donne une partie Γ_1 de Γ et on pose la

DÉFINITION 5.1. — *La famille* (Γ_1, R_h) *est dite régulière s'il existe un recouvrement fini de Γ_1 par des parties Σ_t de Γ qui possèdent les propriétés suivantes :*

1) *Toutes les familles* (Σ_t, R_h) *sont pré-régulières.*

2) *Pour chaque Σ_t il existe un $i = i(t) \in \{1, \ldots, n\}$ appelé indice de régularité de Σ_t tel que :*

j) Ce nombre i soit un indice de régularité commun à tous les points frontaliers de Σ_t.

jj) Ces points frontaliers sont tous du même type : de plus s'ils sont du type i-gauche (Resp. i-droite) on a :

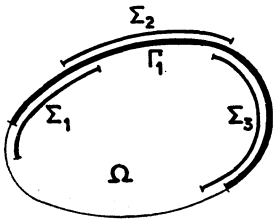
$$(\Sigma_t)^i_h \subset \Omega^i_g \quad \text{Resp.} \quad ((\Sigma_t)^i_h \subset \Omega^i_d).$$

Exemple. — Dans le schéma ci-dessous, la famille (Γ_1, R_h) est régulière si :

$$\begin{cases} h_1 . \text{mes } \Gamma \cap (C, M) \leqslant C . \text{mes } \Omega \cap (C, M) \\ \text{pour tout point M frontalier de } \Sigma_1 \text{ ou de } \Sigma_3 \end{cases}$$

et si

$$\begin{cases} h_2 . \text{mes } \Gamma \cap (C, M) \leqslant C . \text{mes } \Omega \cap (C, M) \\ \text{pour tout point M frontalier de } \Sigma_2. \end{cases}$$



Notons ceci : Une partie Σ_t peut avoir plusieurs indices de régularité. Deux parties Σ_{t_1} et Σ_{t_2} n'ont pas nécessairement un même indice de régularité. Soit maintenant un élément $u_h = (u_0^h, \ldots, u_h^i, \ldots) \in H^1(\Omega, R_h)$. On sait qu'il existe une fonction étagée $\tilde{u}_h$ telle que :

(5.17) u_0^h et u_h^i sont les restrictions à Ω de $\tilde{u}_h$ et de $\nabla_i \tilde{u}_h$

On suppose que :

(5.18) $$||u_h||_{H^1(\Omega, R_h)} \leqslant C_1 \quad C_1 = \text{constante} > 0$$

et que

(5.19) la famille (Γ_1, R_h) est régulière.

Nous allons établir le

THÉORÈME 5.3. — *Sous les hypothèses* 5.18 *et* 5.19 *il existe une sous-suite u_k extraite de u_h et un élément $u^* \in H^1(\Omega)$ tels que :*

(5.20) $$\begin{cases} \lim\ u_0^h = u^* & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \lim\ u_h^i = D_i u^* & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{cases}$$

(5.21) $$\lim \gamma u_0^h = \gamma u^* \quad \text{dans } L^2(\Gamma_1) \text{ faible}$$

Démonstration. — Les relations (5.20) sont des conséquences immédiates de (5.18) et du théorème 2.1. D'autre part, puisque $||u_h||_{H^1(\Omega, R_h)}$ est borné, d'après le théorème 4.1. Il en est de même pour $||u_0^h||_{L^2(\Gamma_1)}$ et par conséquent on peut extraire une sous-suite notée γu_0^k qui converge faiblement dans $L^2(\Gamma_1)$ vers un élément $\bar{u} \in L^2(\Gamma_1)$

(5.22) $$\lim \gamma u_0^k = \bar{u} \quad \text{dans } L^2(\Gamma_1) \text{ faible.}$$

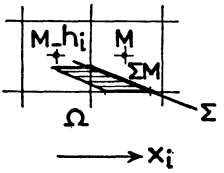
Nous allons montrer que $\bar{u} = \gamma u^*$.

Soit Σ une partie du recouvrement de Γ_1 et supposons que i soit un indice de régularité de Σ et que $\Sigma_h^i \subset \Omega_d^i$. A partir de $\tilde{u}_h$ (voir (5.17)) on construit les fonctions v_h par

$$v_h(x) = u_h(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega - \Omega \cap \Sigma_h^i$$
$$v_h(x) = u_h(M - h_i) \quad \text{pour tout } x \in (\Sigma M)_h^i,$$

M étant un point frontalier quelconque de Σ.

Ainsi dans la partie hachurée $v_h(x)$ vaut $\tilde{u}_h(\mathrm{M} - h_i)$.



On vérifie sans difficultés que

$$||v_h^i||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_0^h||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c_1$$

(où v_h^i et v_0^h) désignent les restrictions à Ω de $\nabla_i v_h$ et de v_h) et que v_0^h et v_h^i convergent vers u^* et $D_i u^*$ dans $L^2(\Omega)$ faible. Admettons un instant la relation :

$$\lim ||\gamma v_0^h - \gamma u_0^h||_{L^2(\Sigma)} = 0. \tag{5.23}$$

A partir de cette relation et de (5.22) on obtient

$$\lim \gamma v_0^k = \bar{u} \quad \text{dans } L^2(\Sigma) \text{ faible} \tag{5.24}$$

On peut donc appliquer le théorème 5.1 à la fonction v_h et par conséquent

$$\lim \gamma v_0^k = \gamma u^* \quad \text{dans } L^2(\Sigma) \text{ faible}$$

d'où compte tenu de (5.24)

$$\bar{u}(x) = \gamma u^*(x) \quad \text{p.p. sur } \Sigma.$$

En recommençant le même raisonnement pour toutes les parties Σ_t du recouvrement de Γ_1 on obtient (5.8).

Vérification de la relation (5.24).

Par construction de v_h, voir le dessin précédent, on a

$$\begin{cases} v_0^h(x) - u_0^h(x) = u_h(\mathrm{M} - h_i) - u_h(\mathrm{M}) \\ \text{pour tout } x \in \Sigma\mathrm{M} \end{cases}$$

par conséquent :

$$|v_0^h(x) - u_0^h(x)|^2 = h_2^i \left| \frac{u_h(\mathrm{M}) - u_h(\mathrm{M} - h_i)}{h_i} \right|^2$$

et on a :

$$(5.25)\quad \int_{\Sigma M} |\varphi_0^h(x) - u_0^h(x)|^2 d\sigma \leqslant h_i^2 \left| \frac{u_h(M) - u_h(M - h_i)}{h_i} \right|^2 \text{mes}.\,\Sigma M.$$

Or, la famille (Σ, R_h) étant régulière on sait que

$$(5.26)\qquad h_i \text{ mes } \Sigma M \leqslant C \text{ mes } \Omega M$$

et comme sur $\Omega M - \frac{1}{2} h_i$, $\nabla_i u_h(x)$ est égal à $\dfrac{u_h(M) - u_h(M - h_i)}{h_i}$ en combinant (5.25) et (5.26) il vient

$$\int_{\Sigma M} |\varphi_0^h(x) - u_0^h(x)|^2 \, d\sigma \leqslant C.h_i \int_{\Omega M - \frac{1}{2} h_i} |\nabla_i u_h|^2 \, dx$$

par une sommation en M et par majoration portant sur le domaine des intégrales du second membre on obtient

$$\int_{\Sigma} |\varphi_0^h(x) - u_0^h(x)|^2 \, d\sigma \leqslant C.h_i \int_{\Omega} |\nabla_i u_h(x)|^2 \, dx$$

et comme l'intégrale du 2e membre est bornée la relation (5.24) est vérifiée.

6. Une classe de fonctions étagées.

On donne un ouvert Ω borné dans R^n, et un réseau R_h de maille $h = (h_i, \ldots, h_n)$ *exceptionnellement* dans ce numéro et dans le suivant nous poserons

$$\nabla_i u = \frac{u(x + h_i) - u(x)}{h_i}.$$

Nous désignons par R_h^i l'ensemble des points M de R_h tels que les trois pavés $(0, M + \theta h_i)$, $\theta = -1, 0, +1$, soient contenus dans Ω; i est un nombre *donné* dans $\{1, \ldots, n\}$. Désignons par V_h^i l'espace des fonctions étagées définies sur Ω a valeurs dans C et qui vérifient

$$(6.1)\quad \begin{cases} u(x) \text{ est constant sur tout pavé } (0, M),\ M \in R_h^i \\ u(x) = 0 \text{ aux autres points } x \in \Omega. \end{cases}$$

En prolongeant u par 0 à l'extérieur de Ω [4] on peut ainsi définir $\nabla_i u(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Nous allons démontrer la

PROPOSITION 6.1. — *Muni de la norme* $\|\nabla_i u\|^2_{L^2(\Omega)}$ *l'espace* V^i_h *est un espace de Hilbert, et de plus*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C . \|\nabla_i u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in V^i_h \tag{6.2}$$

(la constante positive C est indépendante de h).

Démonstration. — Soit $M \in R_h$ tel que :

$$(C, M - h_i) \quad \text{et} \quad (C, M + (p+1)h_i) \quad \text{coupent } \Omega$$
$$(C, M + qh_i) \subset \Omega \quad q = 0, 1, \ldots, p.$$

Puisque par hypothèse $u(M) = 0$, on a :

$$u(M + qh_i) = h_i \sum_{r=0}^{q-1} \nabla_i u(M + rh_i) \quad q = 1, \ldots, p-1$$

d'où

$$|u(M + qh_i)|^2 \leqslant q . h_i^2 \sum_{r=0}^{q-1} |\nabla_i u(M + rh_i)|^2$$

et

$$\sum_{q=1}^{p-1} |u(M + qh_i)|^2 \leqslant (p-1)^2 h_i^2 \sum_{r=0}^{q-1} |\nabla_i u(M + rh_i)|^2 \tag{6.3}$$

on désigne par l « l'épaisseur » de Ω dans la direction x_i, donc $(p-1)^2 h_i^2 \leqslant l^2$; on pose

$$TM = \cup (C, M + qh_i) \cap \Omega, \; q = -1, 0, +1, \ldots, p+1;$$

l'égalité (6.3) s'écrit alors

$$\int_{TM} |u(x)|^2 \, dx \leqslant l^2 . \int_{TM} |\nabla_i u(x)|^2 \, dx$$

d'où (6.2) par sommation en M et d'où la proposition 6.2.

7. Définition d'un opérateur de prolongement $\mathcal{P}_h$.

On donne un ouvert Ω borné dans R^n et un réseau R_h de maille $h = (\ldots, h_i, \ldots)$. On donne *une suite* u définie sur *l'ensemble des sommets des pavés qui coupent* Ω et à valeurs dans C.

[4] Ce qui est naturel puisque u est nul dans un voisinage de la frontière de Ω.

Le prolongement partiel $\mathcal{P}_h^{\mathrm{M}}$.

Soit M un sommet du réseau, le pavé (0, M) coupant Ω. Pour simplifier les écritures nous supposerons que M est confondu avec l'origine des axes; pour tout

$$x = (\ldots, x_i, \ldots) \in (0, \mathrm{M})$$

on pose

$$(7.1) \quad \begin{cases} \mathcal{P}_h^{\mathrm{M}} u(x) = \nabla_i \ldots \nabla_n u(\mathrm{M}) . x_i \ldots x_n \\ \qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n} \nabla_i \ldots \nabla_{i-1} . \nabla_{i+1} \ldots \nabla_n u(\mathrm{M}) . \\ x_i \ldots x_{i-1} . x_{i+1} \ldots x_n + \cdots + u(\mathrm{M}) \end{cases}$$

On vérifie que (cf. [9]).

$$(7.2) \qquad \begin{cases} \mathcal{P}_h^{\mathrm{M}} u(\mathrm{N}) = u(\mathrm{N}) \\ \text{pour tout sommet N de } (0, \mathrm{M}). \end{cases}$$

Le prolongement $\mathcal{P}_h$.

On définit $\mathcal{P}_h u(x)$, $x \in \Omega$, par

$$\begin{cases} \mathcal{P}_h u(x) = \mathcal{P}_h^{\mathrm{M}}(x) \quad \text{pour tout } x \in (0, \mathrm{M}), \text{ pour tout M tel que} \\ (0, \mathrm{M}) \text{ coupe } \Omega. \end{cases}$$

En tenant compte de (7.2) et de linéarité de $\mathcal{P}_h u$ par rapport à x on vérifie que $\mathcal{P}_h u$ est une fonction continue sur Ω et que $\mathcal{P}_h u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.

CHAPITRE IV

APPROXIMATIONS EXTERNES
MÉTHODE VARIATIONNELLE DES DIFFÉRENCES FINIES

1. Introduction.

1.1. — Nous allons donner maintenant plusieurs exemples d'approximations externes (voir Définition 2.1, chap. I). Ces exemples seront présentés de la façon suivante :

i) Le problème exact. On donne le triplet

$$\{V, a(u, v), L(v)\}.$$

ii) Les problèmes approchés : on construit les triplets

$$V_h, a_h(u_h, v_h), L_h(v_h).$$

iii) Le théorème d'approximation.

Ce théorème d'approximation est toujours un cas particulier du théorème général de convergence forte (chap. I); aussi il nous suffira, dans chaque exemple, de nous ramener à ce dernier théorème. Il faudra donc introduire des espaces F et $\mathcal{V}$, des opérateurs r_h et p_h, et montrer que les hypothèses du théorème 3.2 du chapitre I sont vérifiées. Le plan suivi est :

Les espaces F, V, V_h, $\mathcal{V}$: on construit F et on montre que V est un sous-espace fermé de F, dans de nombreux exemples V_h sera aussi un sous-espace fermé de F. On définit $\mathcal{V}$, sous-espace dense dans V.

Les opérateurs p_h et r_h : Lorsque V_h est un sous-espace de F. On prendra pour p_h l'opérateur identité de V_h dans F. Dans le n° 2 où V_h n'est pas un sous-espace de F, on montrera

comment, avec un même espace V_h on peut obtenir plusieurs schémas d'approximation en construisant plusieurs p_h différents. On construit ensuite r_h et on vérifie que

$$(1.1) \qquad \lim \|p_h r_h \varphi - \varphi\|_F = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V}.$$

Vérification de l'hypothèse K 1.*i*).

On donne $u_h \in V_h$ avec $\|u_h\|_{V_h}$ bornée; on montre qu'il existe une sous-suite u_k et un élément $u^\times$ dans V tels que

$$(1.2) \qquad \lim p_k u_k = u^\times \quad \text{dans F faible.}$$

Pour établir (1.2) on aura besoin des théorèmes contenus dans le chapitre 3.

Les autres hypothèses : Dans tous les exemples étudiés, la vérification des autres hypothèses est élémentaire, aussi nous ne la ferons pas. Voici toutefois quelques indications valables pour tous les problèmes étudiés.

V *et* V_h — *ellipticité* (des formes $a(u, \varphi)$ et $a_h(u_h, \varphi_h)$ c'est une conséquence immédiate des hypothèses faites sur les coefficients $a_{ij}(x)$, $a_{pq}(x)$, ..., qui sont introduits dans la définition de $a(u, \varphi)$ et de $a_h(u_h, \varphi_h)$.

Hypothèses K 1.*ii*) *et* K 2.*ii*). On les vérifierait à partir de (1.1).

Hypothèses K 1.*iii*) *et* K 2.*iii*) : elles sont identiquement vérifiées de façon plus précise, on a pour tout $u_h \in V_h$

$$a_h(u_h, u_h) - a(p_h u_h, p_h u_h) = 0,$$
$$L_h(u_h, u_h) - L(p_h u_h, p_h u_h) = 0.$$

1.2. — *Notations. Références.*

Dans tous les exemples les éléments u de V sont des distributions; en général, on utilise aussi certaines dérivées $D_i u$, $D^p u$, ...

Aux éléments

$$u, \ D_i u, \ D^p u$$

du problème exact nous associons les éléments

$$u_0^h, \ u_h^i, \ u_h^p$$

du problème approché.

Pour toutes les questions relatives aux problèmes exacts cf. [11].

2. Problèmes de Neumann d'ordre 2.

2.1. — *Le problème exact:* On donne un ouvert Ω borné dans R^n de frontière régulière Γ. On prend $V = H^1(\Omega)$. Pour u, v dans V on pose

$$a(u, v) = \Sigma \int_\Omega a_{ij} D_i u . \overline{D_j v}\, dx + \int_\Omega a_0 . u\bar{v}\, dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f\bar{v}\, dx$$

où

$$(2.1) \qquad \begin{cases} a_{ij},\ a_0 \text{ sont données dans } L^\infty(\Omega) \\ f \text{ est donnée dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

De plus, on suppose que

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \operatorname{Re}\ \Sigma a_{ij}(x)\xi_1\bar{\xi}_j \geqslant \alpha\Sigma|\xi_i|^2 & \text{p.p. sur } \Omega \\ \operatorname{Re}\ a_0(x) \geqslant \alpha & \text{p.p. sur } \Omega \end{cases}$$

où $\xi_i \in C$ et $\alpha =$ constante positive.

Le problème (P). — Déterminer u dans $V(= H^1(\Omega))$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Nous allons donner 4 schémas d'approximation de la solution u du problème (P). Les constructions des problèmes approchés et les démonstrations des théorèmes de convergence sont du même type : Aussi nous n'allons expliciter qu'un seul schéma d'approximation.

2.2. — *Les problèmes approchés* (1er schéma).

On donne un réseau R_h de maille $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Nous définissons V_h^1 comme l'*espace* (algébrique pour l'instant) *des suites à valeur dans* C *et définies sur un sous-ensemble* $\mathcal{R}_h^1$ de R_h :

Dans ce 1er schéma nous prenons $\mathcal{R}_h^1 = R_h^1$ (voir définition de R_h^1 dans les « espaces $H^m(\Omega, R_h)$ » chapitre 3). On donne ensuite un opérateur p_h^1 de V_h^1 dans $(L^2(\Omega))^{n+1}$; Ainsi à toute suite u_h de V_h^1 est associée la suite $p_h^1 u_h$ de $(L^2(\Omega))^{n+1}$. On écrira $p_h^1 u_h$ sous la forme

$$p_h^1 u_h = (u_o^1; \ldots; u_h^i, \ldots) \quad i = 1, \ldots, n.$$

Construction de p_h^1 : Soit u_h dans V_h, on construit la fonction étagée $\tilde{u}_h$ par :

$$\begin{cases} \tilde{u}_h(x) = u_h(M) \quad \text{pour tout } x \in (C, M) \\ \text{pour tout } M \in \mathcal{R}_h^1 \ (= R_h^1). \end{cases}$$

Nous prenons pour u_o^h et u_h^i les restrictions à Ω des fonctions $\tilde{u}_h$ et $\nabla_i \tilde{u}_h$ (on sait que $\nabla_i \tilde{u}_h(x)$ a un sens p.p. dans Ω, voir espaces $H^m(\Omega, R_h)$ chap. 3).

On fait maintenant l'hypothèse suivante :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \text{la fonction } (\Sigma \|u_h^i\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_o^h\|^2_{L^2(\Omega)}) \text{ est une} \\ \quad \text{norme (hilbertienne) sur } V_h^1. \end{cases}$$

On prend $V_h = V_h^1$.

Pour u_h et v_h dans V_h, on pose

$$a_h(u_h, v_h) = \Sigma \int_\Omega a_{ij} u_h^i \bar{v}_h^j \, dx + \int_\Omega a_0 u_o^h \bar{v}_o^h \, dx$$

et

$$L_h(v_h) = \int_\Omega f . \bar{v}_o^h \, dx.$$

Les problèmes approchés (P_h). — Déterminer u_h dans V_h tel que

$$a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h$$

2.3. — Nous allons démontrer le

THÉORÈME 2.1. — *Sous les hypothèses* (2.2) *et* (2.3) *les problèmes* (P) *et* (P_h) *ont des solutions uniques* u *et* u_h; *de plus, on a dans* $L^2(\Omega)$ *fort*

$$\lim u_0^h = u$$
$$\lim u_h^i = D_i u \quad i = l, \ldots, n.$$

Avant de démontrer ce théorème notons ceci : l'espace $p_h V_h$ est confondu, dans ce 1er schéma, avec l'espace $H^1(\Omega, R_h)$ défini au chapitre 3, on sait que l'*hypothèse* (2.3) *est vérifiée dans ce cas.*

Démonstration. — Les espaces F, V, V_h, $\mathcal{V}$, nous prenons

$$F = (L^2(\Omega))^{n+1}$$

l'espace V peut être considéré comme le sous-espace des $(u_0, \ldots, u^i, \ldots)$ de F pour lesquels

$$u^i = D_i u_0 \quad i = l, \ldots, n.$$

Nous prenons

$$\mathcal{V} = \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Les opérateurs p_h et r_h.

Nous prenons $p_h = p_h^1$. Soit maintenant une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, nous lui associons la fonction $\pi\varphi$ (voir chap. 2.2) puis nous posons

$$r_h\varphi(M) = \varphi(M) \quad \text{pour tout } M \in R_h^1$$

il est clair que

$$\begin{cases} \lim p_h r_h \varphi = \varphi & \text{dans F fort} \\ \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}). \end{cases}$$

Vérification de l'hypothèse K 1,i : Supposons que

$$\Sigma \|u_h^i\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0^h\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_0.$$

Par construction de $p_h u_h = (u_0^h, \ldots, u_h^i, \ldots)$ il est clair qu'il existe un ouvert Ω_h qui approche Ω (voir définition 2.1, chap. 3) et tel que sur Ω_h on ait

$$u_h^i(x) = \nabla_i u_0^h(x).$$

Par conséquent d'après le théorème 2.1, chapitre 3 il existe une sous-suite u_k et un élément $u^\times$ dans $H^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{array}{ll} \lim u_0^k = u^\times & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \lim u_k^i = D_i u^\times & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{array}$$

donc l'hypothèse K 1,i est vérifiée.

2.4. — *Autres schémas d'approximation :*

Nous allons définir maintenant des espaces V_h^k, $k = 2, 3, 4$; Pour cela, commençons par définir des sous-ensembles $\mathcal{R}_h^k$, de R_h, $k = 2, 3, 4$: chacun de ces 3 sous-ensembles est confondu avec l'ensemble des sommets des pavés (0, M) qui rencontrent Ω(*i.e.* $(0, M) \cap \Omega \neq \emptyset$). L'espace V_h^k, est l'espace des suites définies sur $\mathcal{R}_h^k$ et à valeurs dans C : Ainsi les trois espaces V_h^k sont confondus (algébriquement). Nous allons définir mainte-

nant des opérateurs p_h^k de V_h^k dans $(L^2(\Omega))^{n+1}$. Ici encore, nous écrirons $p_h^k u_h$ sous la forme

$$p_h^k u_h = (u_0^h; \ldots, u_h^i, \ldots) \quad i = l, \ldots, n.$$

Nous allons donner la construction de u_0^h, u_h^i pour chaque schéma :

Cas des pavés intérieurs : $((0, M) \cap \Omega = (0, M))$.

On définit $u_0^h(x)$ et $u_h^i(x)$ exactement comme dans le 1er schéma.

Cas des pavés frontaliers : $((0, M) \cap \Gamma \neq \emptyset)$:

Second schéma (procédé par moyenne) on pose

$$u_0^h(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{N \in M_0} u_h(N),$$
$$u_h^i(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{N \in M_i} \frac{u_h(N + h_i) - u_h(N)}{h_i}$$

(rappelons que M_0 désigne l'ensemble des sommets de $(0, M)$ et que M_i désigne l'ensemble des points N tels que N et $N + h_i$ soient des sommets de $(0, M)$.

Troisième schéma (procédé par isobarycentre).

Soit G l'isobarycentre de $(0, M) \cap \Omega$. On pose

$$u_0^h(x) = \mathfrak{L}_h^M(G),$$
$$u_h^i(x) = D_i \mathfrak{L}_h^M(G).$$

On a défini $\mathfrak{L}_h^M(x)$ au chapitre 3 n° 5.

Quatrième schéma. — On pose

$$\begin{cases} u_0^h(x) = \mathfrak{L}_h^M(x) \\ u_h^i(x) = D_i \mathfrak{L}_h^M(x). \end{cases} \tag{2.4}$$

Résultats : Pour ces trois schémas, nous pourrions reprendre 2.2 et 2.3, en changeant V_h^1, $\mathcal{R}_h^1$, p_h^1 en V_h^k, $\mathcal{R}_h^k$, p_h^k. On obtiendrait, dans ces 3 approximations, le théorème 2.1. Il existe d'autres schémas, par exemple en définissant $u_0^h(x)$ et $u_h^i(x)$ par (2.4), que x soit dans un pavé intérieur ou frontalier (voir exemple 3.3 chap. 2).

Au sujet du 1er *schéma* cf. [12].

2.5. — *Problèmes non homogènes :*

On peut se ramener au cas des problèmes homogènes cf. [10]. Mais cela n'est pas nécessaire : conservons les données, notations et hypothèses du problème exact (n° 2.1) et du 1er schéma d'approximation (n° 2.2), en modifiant toutefois la forme linéaire $L(v)$:

$$L(v) = \int_\Omega f.\bar{v}\, dx + \int_\Gamma g\, \overline{\gamma v}\, d\sigma$$

où f est donnée dans $L^2(\Omega)$ et g est donnée dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ (on peut vérifier, comme dans l'exemple du n° 1.2, chapitre 1 que g est une « donnée aux limites »). Pour v_h dans V_h on pose

$$L_h(v_h) = \int_\Omega f\overline{v_0^h}\, dx + \int_\Gamma g.\overline{\gamma v_0^h}\, d\sigma. \tag{2.5}$$

Il est clair que l'introduction de l'intégrale $\int_\Gamma g.\overline{\gamma v}\, d\sigma$ ne change en rien la vérification des hypothèses (K 0) et (K 1); la seule difficulté nouvelle concerne la vérification de l'hypothèse K 2.i). On a :

$$\left|\int_\Omega f.v_0^h\, dx\right| \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}.\|v_0^h\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.6}$$

et

$$\left|\int_\Gamma g.\gamma v^h,\, d\sigma\right| \leqslant \|g\|_{L^2(\Gamma)}.\|\gamma v_0^h\|_{L^2(\Gamma)} \tag{2.7}$$

mais d'après le théorème 4.1, chapitre 3 il existe une constante C telle que

$$\|\gamma v_0^h\|^2_{L^2(\Gamma)} \leqslant C(\Sigma\|v_h^i\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0^h\|^2_{L^2(\Omega)}) \tag{2.8}$$

en combinant (2.5), (2.6), (2.7) et (2.8) il vient finalement

$$|L_h(v)| \leqslant C_2(\Sigma\|v_h^i\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0^h\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$$

et l'hypothèse K 2 est vérifiée. Le théorème 2.1 est donc encore valable.

3. Autres problèmes aux limites d'ordre 2.

3.1. — On prend encore $V = H^1(\Omega)$, mais pour u, v dans V on pose maintenant

$$a(u, v) = \Sigma\int_\Omega a_{ij}D_iu\overline{D_jv}\, dx + \int_\Omega a_0u\bar{v}\, dx + \int_\Gamma t_0\, \gamma u.\overline{\gamma v}\, d\sigma$$

où γu désigne la trace de u sur Γ, $d\sigma$ est « l'élément d'aire » sur Γ et où

$$(3.1)\qquad \begin{cases} a_{ij},\ a_0 \text{ sont données dans } L^\infty(\Omega) \\ t_0 \text{ est donnée dans } L^\infty(\Gamma). \end{cases}$$

Donc, la forme $a(u, v)$ contient maintenant une *intégrale de surface*. On suppose, encore, que

$$(3.2)\qquad \mathrm{Re}\Sigma a_{ij}(x)\xi_i\bar{\xi}_i \geqslant \alpha\Sigma|\xi_i|^2 \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

où $\xi_i \in C$, $\alpha =$ constante positive, et que

$$(3.3)\qquad \mathrm{Re}\quad a_0(x) \geqslant \beta \qquad \text{p.p. sur } \Omega$$

où $\beta =$ constante positive.

Pour v dans $H^1(\Omega)$, on pose

$$L(v) = \int_\Omega f.\bar{v}\, dx$$

où f est donnée dans $L^2(\Omega)$.

Problème exact (P) : Déterminer u dans $V(= H^1(\Omega))$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Montrons que la forme $a(u, v)$ est V-elliptique. Nous avons, puisque t_0 est bornée

$$\left|\int_\Gamma t_0\, |\gamma v|^2\, d\sigma\right| \leqslant k_1 \int_\Gamma |\gamma v|^2\, d\sigma \quad \text{pour tout } v \in V$$

(où $k_1 =$ constante positive). Mais tenant compte du

LEMME 3.1 (cf. [5]). — *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $C(\varepsilon) \geqslant 0$ *avec*

$$(3.4)\qquad \int_\Gamma |\gamma v|^2\, d\sigma \leqslant \varepsilon\Sigma||D_i v||^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon)||v||^2_{L^2(\Omega)}$$

il vient

$$(3.5)\qquad \left|\int_\Gamma t_0|\gamma v|^2\, d\sigma\right| \leqslant k_1\varepsilon\Sigma||D_i v||^2_{L^2(\Omega)} + k_1 C(\varepsilon).||v||^2_{L^2(\Omega)}.$$

A l'aide de (3.2), (3.3) et (3.5) on a (en supprimant l'indice $L^2(\Omega)$

$$\mathrm{Re}\, a(v, v) \geqslant \alpha\Sigma||D_i v||^2 + \beta||v||^2 - k_1\varepsilon\Sigma||D_i v||^2 - k_1 C(\varepsilon)||v||$$

ou encore

$$\mathrm{Re}\, a(v, v) \geqslant (\alpha - k_1\varepsilon).\Sigma||D_i v||^2 + (\beta - k_1.C(\varepsilon)).||v||^2$$

prenons, par exemple, $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2k_1}$, il vient

$$\operatorname{Re} a(v, v) \geqslant \frac{\alpha}{2} \cdot \Sigma \|D_i v\|^2 + \left(\beta - k_1 . C\left(\frac{\alpha}{2k_1}\right)\right) \cdot \|v\|^2.$$

Si

(3.6) β est assez grand

alors $\beta - k_1 . C\left(\dfrac{\alpha}{2k_1}\right)$ est positif et la forme sesquilinéaire $a(u, v)$ est V-elliptique (par conséquent le problème (P) a une solution unique).

3.2. — *Les problèmes approchés.* Nous ne donnerons qu'un seul schéma d'approximation (c'est en fait le 1er schéma du n° 2; l'exposé sera différent car nous n'avons plus en vue les schémas donnés en 2.4).

On donne un réseau R_h de maille $h = (h_1, \ldots, h_n)$ et on suppose que

(3.7) la famille (Γ, R_h) est régulière.

Espaces V_h : On prend pour V_h l'espace $H^1(\Omega, R_h)$ défini au chapitre 3. Les éléments u_h de V_h sont notés :

$$u_h = (u_0^h, \ldots, u_h^i, \ldots) \quad i = 1, \ldots, n$$

et on sait que :

$$\|u_h\|^2_{V_h} = \Sigma \|u_h^i\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0^h\|^2_{L(\Omega)}.$$

Pour u_h et v_h dans V_h on pose

$$a_h(u_h, v_h) = \Sigma \int_\Omega a_{ij} u_h^i \bar{v}_h^j \, dx + \int_\Omega a_0 u_0^h \bar{v}_0^h \, dx + \int_\Gamma t_0 u_0^h \bar{v}_0^h \, d\sigma$$

et

$$L_h(v_h) = \int_\Omega f \bar{v}_0^h \, dx.$$

Les problèmes approchés (P_h) : déterminer u_h dans V_h tel que

$$a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h.$$

3.3. — Nous allons démontrer le

THÉORÈME 3.1. — *Sous les hypothèses* (3.2), (3.3), (3.6) et (3.7) *les problèmes* (P) *et* (P_h) *admettent des solutions uniques*

u et u_h. De plus dans $L^2(\Omega)$ *fort:*

$$\lim u_0^h = u$$
$$\lim u_h^i = D_i u \quad i = l, \ldots, n.$$

Démonstration. — Nous conservons les éléments F, $\mathcal{V}$, p_h, r_h définis dans le n° précédent, nous ne vérifions que l'hypothèse de V_h-ellipticité et l'hypothèse (K1, i).

V_h-*ellipticité:* la famille (Γ, R_h) étant régulière, nous savons d'après le théorème 4.2, chapitre 3 que

$$(3.8) \qquad \begin{cases} \text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ il existe } C'(\varepsilon) \text{ avec} \\ \int_\Gamma |v_0^h|^2 \, d\sigma \leqslant \varepsilon . \Sigma \|v_h^i\|^2_{L^2(\Omega)} + C'(\varepsilon) \|v_0^h\|^2_{L^2(\Omega)} \end{cases}$$

où $C'(\varepsilon) > 0$, $C'(\varepsilon)$ ne dépend ni de h, ni de v_h.

Remarquons que (3.8) est semblable à (3.4) par suite la démonstration de la V_h-ellipticité est analogue à celle de la V-ellipticité (l'hypothèse (3.6) est encore utilisée pour établir la V_h-ellipticité).

Hypothèse K1.i: Supposons que

$$\Sigma \|u_h^i\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0^h\|^2_{L^2(\Omega)} < C$$

alors d'après le théorème 5.3 chapitre 3 il existe une sous-suite u_k et un élément u de $H^1(\Omega)$ tels que :

$$(3.9) \qquad \begin{cases} \lim u_0^k = u & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \lim u_k^i = D_i u & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible } i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

et

$$(3.10) \qquad \lim \gamma u_0^h = \gamma u \quad \text{dans } L^2(\Gamma) \text{ faible.}$$

Remarque 3.1. — La démonstration du théorème 2.1 (c'est le cas où $a(u, v)$ ne contient pas une intégrale de surface) fait appel essentiellement au théorème 2.1, chapitre 3, théorème dont la démonstration est aisée. Par contre, lorsque $a(u, v)$ contient une intégrale de surface il s'introduit deux difficultés :

— V_h-ellipticité,
— limites de traces de fonctions étagées

et nous sommes alors amenés à faire appel aux théorèmes 4.2 et 5.3 du chapitre 3.

4. Problèmes de transmissions.

4.1. — *Le problème exact.*

On donne deux ouverts Ω_1 et Ω_2, bornés dans R^n, et on suppose que les frontières (régulières) de ces ouverts ont *une partie commune* Σ.

Notations. — Pour éviter la « prolifération des indices », nous n'utiliserons pas les notations traditionnelles. Nous plaçons sur deux lignes des éléments qui jouent des rôles semblables :

$$\begin{array}{cccccccccc} \Omega_1 & u & \varphi & a_{ij} & a_0 & f & c & u_o^h & u_h^i & R_h \\ \Omega_2 & v & \psi & b_{ij} & b_0 & g & d & v_o^k & v_k^i & R_k \end{array}$$

Espace V. — On désigne par V le sous-espace des

$$(u, v) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$$

pour lesquels :

$$c(x)\gamma u(x) = d(x)\gamma v(x) \quad \text{p.p. sur } \Sigma$$

pour simplifier nous nous limiterons au cas où

$$\begin{aligned} c(x) &= c = \text{constante donnée,} \\ d(x) &= d = \text{constante donnée.} \end{aligned}$$

Pour (u, v), $(\varphi, \psi) \in V$ on pose

$$L(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_1} f\overline{\varphi}\, dx + \int_{\Omega_2} g.\overline{\psi}\, dx$$

et

$$\begin{aligned} a((u, v), (\varphi, \psi)) = \Sigma \int_{\Omega_1} a_{ij} D_i u D_j \overline{\varphi}\, dx + \int_{\Omega_1} a_0 u \overline{\varphi}\, dx \\ + \Sigma \int_{\Omega_2} b_{ij} D_i v D_j \overline{\psi}\, dx + \int_{\Omega_2} b_0 . v . \overline{\psi}\, dx \end{aligned}$$

où

a_{ij} et a_0 sont données dans $L^\infty(\Omega_1)$,
b_{ij} et b_0 sont données dans $L^\infty(\Omega_2)$,
f est donnée dans $L^2(\Omega_1)$,
g est donnée dans $L^2(\Omega_2)$.

On suppose que :

$$(4.0)\quad \begin{cases} \mathrm{Re}\Sigma a_{ij}(x).\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant \alpha.\Sigma|\xi_i|^2 & \text{p.p. sur } \Omega_1 \\ \mathrm{Re}\Sigma b_{ij}(x).\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant \alpha.\Sigma|\xi_i|^2 & \text{p.p. sur } \Omega_2 \\ \mathrm{Re}\ \ a_0(x) \geqslant \alpha & \text{p.p. sur } \Omega_1 \\ \mathrm{Re}\ \ b_0(x) \geqslant \alpha & \text{p.p. sur } \Omega_2 \end{cases}$$

où $\xi_i \in \mathrm{C}$ et $\alpha =$ constante positive.

Problème exact (P) : déterminer (u, v) dans V tel que

$$a((u, v), (\varphi, \psi)) = \mathrm{L}(\varphi, \psi) \quad \text{pour tout } (\varphi, \psi) \in \mathrm{V}$$

Nous allons exposer deux schémas d'approximation : dans l'un il s'agit d'une approximation *externe* (méthode des différences finies dans Ω_1 et dans Ω_2) ; par contre dans l'autre il s'agit d'une approximation *mixte* (méthode des différences finies dans Ω_1 et méthode de galerkin dans Ω_2).

4.2. — *Approximation externe.*

On donne deux réseaux R_h et R_k (associés respectivement à Ω_1 et Ω_2) de mailles $h = (\ldots, h_i, \ldots)$ et $k = (\ldots, k_i, \ldots)$ On suppose que h et k sont liés par

$$(4.1)\quad \begin{cases} ph_i = qk_i \quad i = 1, \ldots, n \\ p \text{ et } q \text{ sont deux nombres entiers positifs donnés.} \end{cases}$$

On pose

$$l_i = ph_i = qk_i$$

et

$$l = (\ldots, l_i, \ldots).$$

On suppose que

(4.2) Les familles (Ω_1, R_h) et (Ω_2, R_k) sont régulières.

Position relative des réseaux R_h *et* R_k.

On introduit le réseau R_l et on désigne par H, K, L les nœuds courants des réseaux R_h, R_k, R_l. On suppose que

$$(4.3)\quad \begin{cases} \text{tout (C, L) est la réunion de } p^n \ (\mathrm{C}, \mathrm{H})_h \\ \text{tout (C, L) est la réunion de } q^n \ (\mathrm{C}, \mathrm{K})_k. \end{cases}$$

Définition des espaces V_{hk} : Ces espaces jouent ici le rôle des espaces V_h de la théorie générale. L'espace V_{hk} est le sous-

espace des $(u_h, v_h) \in H^1(\Omega_1, R_h) \times H^1(\Omega_2, R_k)$ [5] tels que pour tout pavé $(C, L)_l$ qui a une intersection non vide avec Σ on ait :

$$c \cdot \int_{\Sigma L} u_0^h \, d\sigma = d \int_{\Sigma L} v_0^h \, d\sigma \tag{4.4}$$

où

$$\Sigma L = \Sigma \cap (C, L)_l.$$

Définition des formes : pour (u, v) et (φ, ψ) dans V_{hk} on pose

$$L_{hk}(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_1} f \cdot \varphi_0 \, dx + \int_{\Omega_2} g \cdot \psi_0 \, dx$$

et

$$a_{hk}((u, v), (\varphi, \psi)) = \Sigma \int_{\Omega_1} a_{ij} u^i \overline{\varphi}^j \, dx + \int_{\Omega_1} a_0 u_0 \overline{\varphi}_0 \, dx$$
$$+ \Sigma \int_{\Omega_2} b_{ij} v^i \overline{\psi}^j \, dx + \int_{\Omega_2} b_0 v_0 \overline{\psi}_0 \, dx.$$

Les problèmes approchés (P^1_{hk}) : déterminer (u_h, v_k) dans V_{hk} tel que $a_{hk}((u_h, v_k), (\varphi, \psi)) = L_{hk}(\varphi, \psi)$ pour tout $(\varphi, \psi) \in V_{hk}$.

4.3. — On va démontrer le

THÉORÈME 4.1. — *Sous les hypothèses* (4.0), (4.1), (4.2), (4.3) *les problèmes* (P) *et* (P^1_{hk}) *ont des solutions uniques* (u, v) *et* (u_h, v_k). *De plus, on a dans* $L^2(\Omega_1)$ *fort*

$$\lim u_0^h = u$$
$$\lim u_h^i = D_i u \quad i = 1, \ldots, n$$

et dans $L^2(\Omega_2)$ fort

$$\lim v_0^k = v$$
$$\lim v_k^i = D_i v \quad i = 1, \ldots, n.$$

Démonstration. — *Les espaces* F, V, V_{hk}, $\mathcal{V}$.
On prend $F = (L^2(\Omega_1))^{n+1} \times (L^2(\Omega_2))^{n+1}$.
Tout élément de F s'écrit :

$$(u_0; \ldots, u^i, \ldots; v_0; \ldots, v^i, \ldots) \quad i = 1, \ldots, n$$

tout élément (u, v) de V peut être identifié à l'élément

$$(u; \ldots, D_i u \ldots; v; \ldots, D_i v, \ldots)$$

[5] On sait que $u_h = (u_0^h, \ldots, u_h^i, \ldots)$; voir définition de $H^1(\Omega; R_h)$ dans le chap. 3.

de F, par suite on peut identifier V avec un sous-espace fermé de F. Par construction il en est de même de V_{hk}.
On pose

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{D}(\overline{\Omega}_1)$$
$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{D}(\overline{\Omega}_2)$$

et on prend

$$\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) \cap V.$$

Les opérateurs p_{hk} et r_{hk}.

On prend pour p_{hk} l'opérateur identité du sous-espace V_{hk} dans F.

Soit maintenant $(\varphi, \psi) \in \mathcal{V}$; A la fonction φ (Resp. ψ). Nous allons associer un élément

$$\varphi_h = (\varphi_0^h; \ldots, \varphi_h^i, \ldots) \in H^1(\Omega_1, R_h)$$

(Resp. $\psi_k = (\psi_0^k; \ldots, \psi_k^i, \ldots) \in H^1(\Omega_2; R_k)$).

On définit par prolongement la fonction $\pi\varphi$ (voir définition de π dans le chapitre 2) et, H étant un point de R_h^1, on pose :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_h(x) = \pi\varphi(H) \quad \text{pour tout } x \in (C, H_h) \\ \text{pour tout } (C, H)_h \text{ qui ne coupe pas } \Sigma. \end{cases}$$

Si $(C, H)_h$ coupe Σ suivant ΣH, on pose

$$\tilde{\varphi}_h(x) . \int_{\Sigma H} d\sigma = \int_{\Sigma H} \gamma\varphi . d\sigma. \tag{4.5}$$

On prend pour φ_0^h et pour φ_h^i les restrictions à Ω_1 des fonctions étagées $\tilde{\varphi}_h$ et $\nabla_i\tilde{\varphi}_h$. On définirait de même $\psi_k \in H^1(\Omega_2; R_k)$. Compte tenu de (4.5) et de l'égalité analogue pour $\tilde{\psi}_k$ on a :

$$C . \int_{\Sigma L} . \gamma\tilde{\varphi}_h \, d\sigma = d . \int_{\Sigma L} \gamma\psi_k \, d\sigma$$

ou encore

$$\begin{cases} C . \int_{\Sigma L} \gamma\varphi_0^h . d\sigma = d . \int_{\Sigma L} \gamma\psi_0^k \, d\sigma \\ \text{pour tout } \Sigma L = \Sigma \cap (C, L)_l \end{cases} \tag{4.6}$$

par suite $(\varphi_h, \psi_k) \in V_{hk}$ on pose

$$r_{hk}(\varphi, \psi) = (\varphi_h, \psi_k).$$

Vérification de l'hypothèse K 1.*i*).

Supposons que

$$||(u_h, v_h)||^2_{V_{hk}} \leqslant C.$$

On a donc

$$\Sigma\|u_h^i\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \|u_0^h\|^2_{L^2(\Omega_1)} \leqslant C$$

et

$$\Sigma\|v_k^i\|^2_{L^2(\Omega_2)} + \|v_0^k\|^2_{L^2(\Omega_2)} \leqslant C.$$

Alors d'après le théorème 5.2 du chapitre 3, il existe une sous-suite $u_0^{h'}$, $u_{h'}^i$, et un élément $u^\times$ de $H^1(\Omega_1)$ tels que

$$\begin{cases} \lim u_0^{h'} = u^\times & \text{dans } L^2(\Omega_1) \text{ faible} \\ \lim u_{h'}^i = D_i u^\times & \text{dans } L^2(\Omega_1) \text{ faible} \end{cases}$$

$$\lim \gamma u_0^{h'} = u^\times \quad \text{dans } L^2(\Sigma) \text{ faible.} \tag{4.7}$$

On obtiendrait un résultat analogue pour v_h.

Il est clair que l'espace des fonctions étagées sur les ΣL est dense dans $L^2(\Sigma)$: si θ est une telle fonction étagée on a

$$\int_\Sigma (c.\gamma u_0^h - d\gamma v_0^k).\theta\, d\sigma = \sum_L \int_{\Sigma L} (c.\gamma u_0^h - d\gamma v_0^k)\bar{\theta}\, d\sigma$$

et comme $\theta(x)$ est constante sur ΣL, on a en désignant cette constante par $\theta(L)$.

$$\int_\Sigma (c.\gamma u_0^h - d.\gamma v_0^k)\bar{\theta}\, d\sigma = \sum_L \bar{\theta}(L) \int_{\Sigma L} (c.\gamma u_0^h - d v_0^k)\, d\sigma$$

d'où compte tenu de (4.4)

$$\int_\Sigma (c.\gamma u_0^h - d.\gamma v_0^k)\bar{\theta}\, d\sigma = 0$$

pour toute θ étagée sur les ΣL,

et par passage à la limite, en utilisant (4.7) et l'égalité analogue pour v il vient

$$c.\gamma u^\times - d.\gamma v^\times = 0$$

et $(u^\times, v^\times) \in V$ C.Q.F.D.

4.4. — *Approximation mixte.*

On considère toujours le problème (P) exposé en 4.1 mais on ne *suppose plus que* Ω_2 *est borné.*

Définition des espaces V_{hk}.

On donne un réseau R_h (associé à Ω_1) de maille $h = (\ldots, h_i, \ldots)$ et on suppose que

(4.7) La famille (Σ, R_h) est régulière.

On donne une famille de sous-espaces V_k, fermés dans $H^1(\Omega_2)$, et satisfaisant à la propriété (de densité) suivante :

$$(4.8)\quad \begin{cases} \text{il existe une famille d'opérateurs linéaires } r_k \text{ de } \Omega_2 \\ \text{dans } V_k \text{ vérifiant} \\ \qquad \lim \|r_k v - v\|_{H(\Omega_2)} = 0 \quad \text{pour tout } v \in \Omega_2 \end{cases}$$

l'espace Ω_2 est un sous-espace donné, dense dans $H^1(\Omega_2)$. (En pratique on construira les espaces V_k à partir de $N(k)$ éléments linéairement indépendants de $H^1(\Omega_2)$; *Au sujet des espaces* V_k, *voir la méthode de Galerkin chapitre* 2.)

Nous désignerons maintenant par V_{hk} le sous-espace fermé des (u_h, v_k) de $H^1(\Omega_1; R_h) \times V_k$ pour lesquels

$$\begin{cases} \int_{\Sigma H} c.\gamma u_0^h \, d\sigma = \int_{\Sigma H} d.\gamma v_k \, d\sigma, \\ \text{où } \Sigma H = \Sigma \cap (C, H)_h. \end{cases}$$

Pour (u, v) et (φ, ψ) dans V_{hk} on pose

$$a_{hk}((u, v), (\varphi, \psi)) = \Sigma \int_{\Omega_1} a_{ij} u^i \overline{\varphi}^j \, dx + \int_{\Omega_1} a_0 u_0 \overline{\varphi}_0 \, dx$$
$$+ \Sigma \int_{\Omega_2} b_{ij} D_i v \overline{D_j \psi} \, dx + \int_{\Omega_2} b_0 v \overline{\psi} \, dx$$

et

$$L_{hk}(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_1} f.\overline{\varphi}_0 \, dx + \int_{\Omega_2} g.\overline{\psi} \, dx.$$

Les problèmes approchés (P^2_{hk}) : Déterminer (u_h, v_k) dans V_{hk} tel que

$$a_{hk}((u_h, v_k), (\varphi, \psi)) = L_{hk}(\varphi, \psi) \quad \text{pour tout } (\varphi, \psi) \in V_{hk}.$$

Nous avons le

THÉORÈME 4.2. — *Sous les hypothèses* (4.0), (4.7), (4.8) *les problèmes* (P) *et* (P^2_{hk}) *ont des solutions uniques* (u, v) (u_h, v_k); *De plus dans* $L^2(\Omega_1)$ *fort*

$$\lim u_0^h = u$$
$$\lim u_h^i = D_i u \quad i = l, \ldots, n$$

et dans $H^1(\Omega_2)$ *fort*

$$\lim v_k = v.$$

La démonstration de ce théorème est semblable à celle du théorème 4.1. Nous ne la ferons pas.

4.5. — *Conséquences du second schéma :*

On sait que tout problème aux limites dans un ouvert peut être considéré comme un problème de transmission : Il suffit pour cela de partager arbitrairement Ω en Ω_1 et Ω_2 (et de prendre $c = d$, voir espace V, n° 4.1). On pourra ainsi utiliser le second schéma d'approximation dans les exemples suivants :

Exemple 4.1. — Ω est un ouvert *non borné* : on partage alors Ω en Ω_1 et Ω_2, Ω_1 étant borné.

Exemple 4.2. — Ω est un ouvert borné. On peut partager Ω en Ω_1 et Ω_2, où Ω_2 est un ouvert de forme simple (pavé, sphère...).

5. Problèmes de type mélé d'ordre 2 m.

5.1. — *Le problème exact.*

On donne un ouvert Ω borné dans R^n de frontière Γ régulière. On désigne par Γ_1 une partie de Γ et par Γ_2 le reste de la frontière. On prend pour V l'espace des u de $H^m(\Omega)$ pour lesquels

$$\gamma u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \tag{5.1}$$

(on rappelle que

$$\gamma u = (\gamma_0 u, \ldots \gamma_{m-1} u) \text{ ou } \gamma_i u = \frac{\partial^i}{\partial n_i} u \quad i = 0, 1, \ldots, m-1,$$

n désignant la normale intérieure à Γ). Pour u et v dans V on pose

$$a(u, v) = \Sigma \int_\Omega a_{pq} D^q u . \overline{D^p v} \, dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f . \bar{v} \, dx$$

où

$$\begin{cases} \text{les } a_{pq} \text{ sont donnés dans } L^\infty(\Omega) \\ f \text{ est donnée dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

De plus, on fait l'hypothèse (de V-ellipticité)

$$\mathrm{Re} \Sigma a_{pq}(x) \xi_p \bar{\xi}_q \geqslant \alpha \Sigma |\xi_p|^2 \quad \text{p.p. sur } \Omega \tag{5.2}$$

où $\xi_p \in C$, $\alpha =$ constante positive.

Problème exact (P) : déterminer u dans V tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

5.2. — *Les problèmes approchés.*

On donne maintenant un réseau R_h de maille

$$h = (\ldots, h_i, \ldots) \text{ (6)}.$$

Pour u et v dans $H^m(\Omega, R_h)$ on pose

$$a_h(u, v) = \Sigma \int_\Omega a_{pq} u^p \bar{v}^q \, dx \tag{5.4}$$

et

$$L_h(v) = \int_\Omega f . \bar{v}_0 \, dx.$$

Les problèmes approchés (P_h) : déterminer u_h dans V_h tel que

$$a_h(u_h, v) = L_h(v) \quad \text{pour tout } v \in V_h.$$

5.3. — Nous allons démontrer le

THÉORÈME 5.1. — *Sous l'hypothèse* (5.2) *les problèmes* (P) *et* (P_h) *ont des solutions uniques* u *et* $u_h = (u_0^h; \ldots, u_h^p \ldots)$; *de plus, dans* $L^2(\Omega)$ *fort, on a* :

$$\lim u_0^h = u$$
$$\lim u_h^p = D^p u \quad 0 < p \leqslant m.$$

Démonstration. — *Espaces* F, V, V_h, $\mathcal{V}$: l'espace F est introduit naturellement lors de la définition de $H^m(\Omega, R_h)$: F est de la forme

$$F = (L^2(\Omega))^\nu$$

et on a défini V_h comme un sous-espace fermé de F. Tout élément u de V peut être identifié à l'élément de F

$$(u; \ldots, D^p u, \ldots)$$

donc on peut identifier V avec un sous-espace fermé de F. On prend pour $\mathcal{V}$ le sous-espace fermé des fonctions φ de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, nulles dans un voisinage de Γ_1.

Les opérateurs p_h *et* r_h :

Nous prenons pour p_h l'opérateur identité

$$p_h u_h = u_h \quad \text{pour tout } u_h \in V_h.$$

(6) On prend $V_h = \{ u_h | u_h \in H^m(\Omega, R_h), \gamma u_h^p = 0 \text{ sur } \Gamma_1, |p| \leqslant m \}$ (5.3) $\gamma u_h^p = 0$ sur Γ_1, $|p| \leqslant m$ pour tout $u_h \in V_h$.

Soit $v \in \mathcal{V}$, nous prolongeons v par πv et nous définissons la fonction étagée $\tilde{v}_h$ par

$$\tilde{v}_h(x) = \pi v(\mathrm{M}) \quad \text{pour tout } x \in (\mathrm{C}, \mathrm{M})_h,$$

pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{R}_h^m$ puisque v est nulle dans un voisinage de Γ_1 il en est de même, pour h « assez petit » des fonctions $\tilde{v}_h$ et $\nabla^p \tilde{v}_h 1 \leqslant |p| \leqslant m$; Si nous désignons alors par v_0^h et par v_h^p les restrictions à Ω des fonctions $\tilde{v}_h$ et $\nabla^p \tilde{v}_h$. Nous posons

$$r_h v = (v_0^h; \ldots, v_h^p, \ldots)$$

il est clair que

$$\lim \|r_h v - v\|_{\mathrm{F}} = 0 \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}.$$

Vérification de l'hypothèse K 1, *i.*

On donne une suite u_h et on suppose que

$$\|u_0^h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \Sigma \|u_h^p\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}. \tag{5.5}$$

Alors compte tenu de (5.3) et de (5.5) on peut appliquer le théorème 4.1, chapitre 3; Par conséquent, il existe une sous-suite u_k et un élément $u^\times$ de $\mathrm{H}^m(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} &\lim u_0^k = u^\times && \text{dans } \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ faible} \\ &\lim u_k^p = \mathrm{D}^p u^\times && \text{dans } \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ faible} \quad 0 < |p| \leqslant m \\ &\gamma_0 \mathrm{D}^p u^\times = 0 && \text{sur } \Gamma_1 \quad \text{pour } |p| \leqslant m - 1. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Avec (5.6) il vient

$$u^\times = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

et $u^\times \in \mathrm{V}$ (C.Q.F.D.).

Références. — Pour le cas du problème de Dirichlet ($\Gamma_1 = \Gamma$) cf. [14].

6. Problème d'élasticité.

6.1. — *Le problème exact:* On donne un ouvert Ω borné dans R^n de frontière régulière Γ. On prend pour V l'espace des $u = (\ldots, u_i, \ldots) \in (\mathrm{L}^2(\Omega))^n$ pour lesquels

$$u^{jk} \in \mathrm{L}^2(\Omega) \quad j, k = 1, \ldots, n$$

où

$$u^{jk} = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_j u_k + \mathrm{D}_k u_j). \tag{6.1}$$

On définit une norme (hilbertienne) dans V par

$$||u||_v^2 = \Sigma||u^{jk}||^2_{L^2(\Omega)} + \Sigma||u_i||^2_{L^2(\Omega)}$$

Pour u et v dans V on pose

$$a(u, v) = \sum_{j,k,l,m} \int_\Omega a_{jklm} u^{jk} . \bar{v}^{lm}\, dx + \lambda\Sigma \int_\Omega u_i . v_i .\, dx$$

et

$$L(v) = \Sigma \int_\Omega f_i . \bar{v}_i\, dx$$

où

$$\begin{cases} \text{les } a_{jklm} \text{ sont données dans } L^\infty(\Omega);\ \lambda > 0 \\ \text{les } f_i \text{ sont données dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

On fait l'hypothèse (de V-ellipticité) suivante :

$$\text{(6.2)} \qquad \mathrm{Re}\Sigma a_{jklm}(x)\xi_{jk} . \bar{\xi}_{lm} \geqslant \alpha\Sigma|\xi_{jk}|^2 \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

où $\xi_{jk} \in C$, $\alpha =$ constante positive.

Problème (P). — Déterminer $u = (\ldots, u_i, \ldots)$ dans V tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

6.2. — *Les problèmes approchés.*

On donne un réseau R_h de maille $h = (\ldots, h_i, \ldots)$.

Espace V_h : tout élément u_h de V_h est de la forme

$$u_h = (\ldots, u_i^h, \ldots) \quad i = 1, \ldots, n$$

où les u_i^h sont des fonctions étagées, constantes sur tout $(C, M) \cap \Omega$ $M \in R_h$. On désigne par u_h^{jk} la fonction définie sur Ω de la manière suivante : lorsque $\nabla_j u_k^h(x) + \nabla_k u_j^h(x)$ a un sens, on pose :

$$\text{(6.3)} \qquad u_h^{jk}(x) = \frac{1}{2}\,(\nabla_j u_k^h(x) + \nabla_k u_j^h(x)).$$

Dans le cas contraire, on pose : $u_h^{jk}(x) = 0$.

Il est clair qu'on peut définir une norme (hilbertienne) sur V_h par

$$||u_h||^2_{V_h} = \sum_{j,k=1}^{n} ||u_h^{jk}||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} ||u_i^h||^2_{L^2(\Omega)}$$

Pour u_h et v_h dans V_h on pose

$$a_h(u_h, v_h) = \Sigma \int_\Omega a_{jklm} u_h^{jk} \bar{v}_h^{lm}\, dx + \Sigma \int_\Omega u_i^h \bar{v}_i^h\, dx$$

et

$$L_h(v_h) = \Sigma \int_\Omega f_i \bar{v}_i^h \, dx$$

Les problèmes (P_h) : déterminer u_h dans V_h tel que

$$a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h.$$

6.3. — Nous allons démontrer le

THÉORÈME 6.1. — *Sous l'hypothèse* (6.2) *les problèmes* (P) *et* (P_h) *ont des solutions uniques*

$$u = (\ldots, u_i, \ldots) \quad \textit{et} \quad u_h = (\ldots, u_i^h, \ldots).$$

De plus, dans $L^2(\Omega)$ *fort, on a*

$$\begin{aligned} \lim u_i^h &= u_i \qquad i = 1, \ldots, n, \\ \lim u_h^{jk} &= u^{jk} \quad j, k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Démonstration. — *Les espaces* F, V, V_h, $\mathcal{V}$.

Tout élément $u = (\ldots, u^i, \ldots)$ de V peut être identifié à

$$(\ldots, u_i, \ldots; \ldots, u^{jk}, \ldots)$$

où les u^{jk} sont liés par (6.1). De même, tout élément $(\ldots, u_i^h, \ldots)$ de V_h peut être identifié à l'élément $(\ldots, u_i^h, \ldots; \ldots, u_h^{jk}, \ldots)$. Il est donc clair que les espaces V et V_h peuvent être identifiés à des sous-espaces fermés d'un espace F de la forme

$$F = (L^2(\Omega))^\nu, \qquad \nu \text{ convenable.}$$

Admettons un instant le

LEMME 6.1. — *Le sous-espace* $(\mathcal{D}(\overline{\Omega}))^n \cap V$ *est dense dans* V. *On prend alors*

$$\mathcal{V} = (\mathcal{D}(\overline{\Omega}))^n \cap V.$$

Les opérateurs p_h *et* r_h : puisque V_h est un sous-espace de F nous pouvons prendre pour p_h l'opérateur identité :

$$p_h u_h = u_h \quad \text{pour tout } u_h \in V_h.$$

Soit maintenant $v = (\ldots, v_i, \ldots) \in \mathcal{V}$; A la fonction v_i nous associons la fonction étagée $\tilde{v}_i^h$

$$\tilde{v}_i^h(x) = \pi v_i(M) \quad \text{pour tout } x \in (C, M),$$

pour tout $M \in R_h$ tel que (C, M) rencontre Ω. Si nous désignons par v_i^h les restrictions à Ω des fonctions v_i^h, nous posons

$$r_h v = (\ldots, v_i^h, \ldots).$$

On vérifie que

$$\lim \|v_i^h - v_i\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad i = l, \ldots, n$$

et que

$$\lim \|v_h^{jk} - v^{jk}\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad j, k = l, \ldots, n$$

où v^{jk} est défini par (6.1).

Vérification de l'hypothèse K 1,*i*.

On donne u_h dans V_h et on suppose que

$$\Sigma \|u_h^{jk}\|^2_{L^2(\Omega)} + \Sigma \|u_i^h\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C.$$

Il existe donc des sous-suites $u_{h'}^{jk}$ et $u_i^{h'}$ et des éléments de $L^2(\Omega)$, notés $\tilde{u}_i$ et $\tilde{u}_{jk}$ tels que, dans $L^2(\Omega)$ faible

$$\begin{aligned} \lim u_i^{h'} &= \tilde{u}_i \qquad i = l, \ldots, n, \\ \lim u_{h'}^{jk} &= \tilde{u}_{jk} \quad j, k = l, \ldots, n. \end{aligned}$$

Si maintenant on tient compte de la proposition 2,1, chapitre 3 et de (6.3) il vient

$$\tilde{u}_{jk} = \frac{1}{2}(\nabla_j \tilde{u}_k + \nabla_k \tilde{u}_j) \quad j, k = 1, \ldots, n$$

et par suite $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n)$ est dans V. (C.Q.F.D.).

Démonstration du lemme 6.1.

Soit $u = (\ldots, u_i, \ldots) \in V$. On vérifie que

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}(u^{il}) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_l}(u^{ik}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(u^{kl}).$$

— (Voir (6.1) pour la signification de $u^{il}, \ldots$).

Puisque les u_i, u^{il}, u^{ik}, u^{kl} sont dans $L^2(\Omega)$, nous avons pour $i = l, \ldots, n$

$$\begin{cases} u_i \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{(espace des distributions sur } \Omega) \\ \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_k . \partial x_l} \in H^{-1}(\Omega) \quad k, l = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

(Pour la définition des espaces $H^m(\Omega)$, $m < 0$, cf. Lions (2).)

L'ouvert Ω étant régulier, on sait que ces 2 relations entraînent

$$u_i \in H^1(\Omega), \qquad i = 1, \ldots, n$$

et par conséquent $(\mathcal{D}(\overline{\Omega}))^n \cap V$ est dense dans V.

7. Un autre problème aux limites.

7.1. — *Le problème exact.*

On donne un ouvert Ω borné dans R^n. On désigne par V l'adhérence dans l'espace produit $(H^1(\Omega))^n$ du sous-espace des fonctions $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ telles que

$$(7.1) \qquad \begin{cases} \psi_i \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ espace des fonctions indéfiniment différentiables réelles, à support compact dans } \Omega. \end{cases}$$

et

$$(7.2) \qquad \sum_{i=1}^{n} D_i\psi_i = 0 \quad (\text{ou divergence } \psi = 0).$$

Pour u et v dans V on pose

$$(u, v)_V = \sum_{i,j=1}^{n} (D_i u_j, D_i v_j)_{L^2(\Omega)}$$

et en posant $$||u||_V = (u, u)_V^{\frac{1}{2}}.$$

On définit une norme (hilbertienne) sur V; on donne maintenant les fonctions réelles $f_j \in L^2(\Omega)$, $j = 1, \ldots, n$ et on pose

$$a(u, v) = (u, v)_V,$$
$$L(v) = \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega f_j \bar{v}\, dx.$$

Le problème (P) : déterminer $u = (u_1, \ldots, u_n)$ dans V tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

7.2. — *Les problèmes approchés :*

On donne un réseau R_h de maille $h = (h_1, \ldots, h_n)$.

Notations. — On désigne par $R_h^\times$ l'ensemble des nœuds M de R_h tels que

$$(7.3) \qquad \begin{cases} (0, M + \theta h_i) \subset \Omega \\ \theta = -1, 0, +1, \qquad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

On désigne par Ω_h^1 la réunion des pavés d'origine M dans $R_h^\times$ Dans tout ce numéro *l'opérateur* ∇_i sera défini par

$$\nabla_i u(x) = \frac{1}{h_i} \cdot (u(x+h_i) - u(x))$$

(l'adoption de cet opérateur dissymétrique nous facilitera l'exposé !).

Désignons par V_h l'espace des fonctions $v_h = (v_1^h, \ldots, v_n^h)$ telles que

$$(7.4) \quad \begin{cases} \text{Les } v_i^h \text{ sont des fonctions réelles étagées (7) définies} \\ \quad \text{sur } \Omega \text{ et à support dans } \overline{\Omega}_h^1 \end{cases}$$

et que

$$(7.5) \qquad \sum_{i=1}^{n} \nabla_i v_i^h = 0 \ (8).$$

Pour u_h et v_h dans V_h on pose

$$(u_h, v_h)_{V_h} = \sum_{i,j=1}^{n} (\nabla_i u_j^h, \nabla_i v_j^h)_{L^2(\Omega)}$$

et

$$||u_h||_{V_h} = (u_h, u_h)^{1/2}.$$

Compte tenu de (7.4) et de la proposition 6.1, chapitre 3, $||u_h||_{V_h}$ est une norme (hilbertienne) sur l'espace V_h. On pose

$$a_h(u_h, v_h) = (u_h, v_h)_{V_h}$$
$$L_h(v_h) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i v_j^h \, dx$$

Les problèmes approchés (P_h) : déterminer $u_h = (u_i^h, \ldots, u_n^h)$ dans V_h tel que

$$a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h.$$

THÉORÈME 7.3. — *Les problèmes* (P) *et* (P_h) *ont des solutions uniques* $u = (\ldots, u_i, \ldots)$ *et* $u_h = (\ldots, u_i^h, \ldots)$; *De plus, nous avons dans* $L^2(\Omega)$ *fort* :

$$\lim \nabla_i u_j^h = D_i u_j \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

(7) Constantes sur chaque pavé d'*origine* un point du réseau.
(8) Lorsque $x \notin \Omega$ mais $x + h_i \in \Omega$ il est naturel de poser $\Delta_i u^h(x) = 0$.

DÉMONSTRATION. — *Espaces* F, V, V_h, $\mathcal{V}$.

On prend

$$F = (L^2(\Omega))^{n^2}$$

et on écrit tout élément u de F de la façon suivante

$$u = (\ldots, u^i_j, \ldots) \quad i = 1, \ldots, n \text{ et } j = 1, \ldots, n.$$

On peut identifier l'espace V avec un sous-espace fermé de F : en effet lorsque

i) il existe $(u_1, \ldots, u_n)$ $u_i \in H^l_0(\Omega)$, tel que

$$u^i_j = D_i u_j \quad i, j = l, \ldots, n.$$

ii) $\sum_{i=1}^{n} u^i_i = 0$

l'élément $(\ldots, u^i_j, \ldots)$ de F peut être identifié à l'élément $(u_1, \ldots, u_n)$ de V.

On identifierait de même V_h avec un sous-espace fermé de F.

On prend

$$\mathcal{V} = (\mathcal{D}(\Omega))^n \cap V.$$

On sait que $\mathcal{V}$ est dense dans V.

Les opérateurs p_h et r_h.

On prend pour p_h l'opérateur identité

$$p_h u_h = u_h \quad \text{pour tout } u_h \in V_h.$$

Désignons par FMih (ou par FMi s'il n'y a pas d'ambiguité) l'intersection du pavé $(0, M)_h$ ayant pour origine le point $M = (\ldots, m_i h_i, \ldots)$ avec le plan d'équation $x_i = m_i h_i$. Soit maintenant $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \mathcal{V}$. On pose

$$(7.6) \quad \begin{cases} \psi^h_i(x) = \tilde{\psi}^h_i(M) \quad \text{pour } x \in (0, M)_h \cap \Omega \\ \text{pour tous les pavés } (0, M) \text{ qui « coupent » } \Omega \end{cases}$$

où $\psi^h_i(M)$ est défini par

$$(7.8) \qquad \tilde{\psi}^h_i(M) = \frac{1}{h'_i} \int_{FMi} \psi_i(x'_i)\, dx'_i \text{ (9)}$$

avec
$$x'_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, m_i h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$
$$dx'_i = dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n,$$
$$h'_i = h_1 \ldots h_{i-1} . h_{i+1} \ldots h_n.$$

(9) Si une partie de FMi est extérieure à Ω, on prend $\psi_i(x'_i) = 0$ sur cette partie ce qui est naturel puisque ψ_i est nulle dans un voisinage de Γ.

Il est clair que pour h assez petit les supports des fonctions ψ_i^h sont contenus dans Ω_h^1; pour montrer que $(\ldots, \psi_i^h \ldots)$ est dans V_h il suffira donc de vérifier que :

$$\sum_{i=1}^{n} \nabla_i \psi_i^h = 0$$

ou encore, en tenant compte de (7.6)

$$(7.9) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \nabla_i \tilde{\psi}_i^h(M) = 0 \\ \text{pour tout M tel que (0, M) « coupe » } \Omega. \end{cases}$$

Puisque ψ est dans V on a :

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \psi_i = 0$$

et (en prolongeant, au besoin, les ψ_i par 0 hors de Ω)

$$\int_{(O,M)} \sum_{i=1}^{n} D_i \psi_i \, dx = 0.$$

Par une intégration en dx_i il vient :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{F(M+h_i)i} \psi_i \, dx_i' - \int_{FMi} \psi_i \, dx_i' \right) = 0.$$

Ce qui s'écrit, compte tenu de (7.8)

$$\sum_{i=1}^{n} (h_i' \tilde{\psi}_i^h (M + h_i) - h_i' \tilde{\psi}_i^h(M)) = 0$$

ou encore $\quad h_1, \ldots, h_n \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\tilde{\psi}_i^h(M + h_i) - \tilde{\psi}_i^h(M)}{h_i} = 0$

d'où l'égalité cherchée (7.9).

On vérifierait que

$$(7.10) \qquad \begin{cases} \lim D_i \psi_j^h = D_i \psi_j \quad i, j = 1, \ldots, n \\ \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort.} \end{cases}$$

Vérification de l'hypothèse K 1, i :

On suppose que $\|u_h\|_{V_h}$ est bornée, $u_h \in V_h$, c'est-à-dire :

$$(7.11) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \|\nabla_i u_j^h\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1$$

(C_1 = constante positive).

Puisque les fonctions u_j^h vérifient (7.4) et (7.11) on a, d'après la proposition 6.1, chapitre 3

$$(7.12) \qquad \|u_j^h\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1' \quad j = 1, \ldots, n$$

(C_1' = constante positive). A l'aide de (7.11) et de (7.12) on a

$$(7.13) \qquad \sum_{i=1}^{n} \|\nabla_i u_j^h\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_j^h\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1 + C_1' \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Les fonctions u_j^h vérifient donc (7.4) et (7.13). Par conséquent d'après le théorème 4.1, chapitre 3, il existe des sous-suites u_j^k, $\nabla_i u_j^k$ et des éléments $\tilde{u}_j$ de $H_0^1(\Omega)$ tels que (dans $L^2(\Omega)$ faible) :

$$(7.14) \qquad \begin{cases} \lim u_j^k = \tilde{u}_j & j = 1, \ldots, n, \\ \lim \nabla_i u_j^k = D_i \tilde{u}_j. \end{cases}$$

Montrons maintenant que $(\ldots, \tilde{u}_j, \ldots)$ est dans V ou encore que :

$$(7.15) \qquad \sum_{i=1}^{n} D_i \tilde{u}_i = 0.$$

Il est clair qu'à toute fonction réelle $v \in L^2(\Omega)$ on peut associer une fonction étagée v_k telle que

$$(7.16) \qquad \lim v_k = v \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

On a

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \nabla_i \tilde{u}_i^k . v_k \, dx = \sum_M \int_{(O, M) \cap \Omega} \sum_{i=1}^{n} \nabla_i \tilde{u}_i^k . v_k \, dx$$

et puisque v_k est constante sur $(0, M) \cap \Omega$ on obtient grâce à (7.5)

$$(7.17) \qquad \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \nabla_i \tilde{u}_i^k v_k \, dx = 0.$$

En passant à la limite dans (7.17) il vient avec (7.14) et (7.16)

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} D_i \tilde{u}_i . v \, dx = 0 \\ \text{pour toute } v \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

d'où la relation cherchée (7.15) et par suite l'hypothèse H*li* est vérifiée.

CHAPITRE V

LES PROBLÈMES APPROCHÉS

1. Propriétés des matrices des problèmes approchés.

1.1. — *Formes sesquilinéaires sur* C^N : $N =$ entier positif, C corps des complexes. Soit A une matrice (N, N)

$$A = ((a_{ij})),\ a_{ij} \in C,\ i, j = 1, \ldots, N.$$

Si $X = (X^1, \ldots, X^N)$ et $Y = (Y^1, \ldots, Y^N)$ sont des éléments de C^N. On pose

$$(1.1) \qquad (AX, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X^i Y^i$$

il est clair que (AX, Y) est une forme sesquilinéaire sur C^N; réciproquement, toute forme sesquilinéaire sur C^N peut être mise sous la forme (1.1). On sait d'autre part, que (AX, Y) est hermitienne si et seulement si

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}.$$

Définition 1.1. — *On dit qu'une forme hermitienne* (AX, Y) *est positive si*

$$(AX, X) \geqslant 0 \quad \textit{pour tout } X \in C^N.$$

Définition 1.2. — *Une forme hermitienne* (AX, Y) *est définie positive si la relation* $X \neq 0$ *entraîne* $(AX, X) > 0$.

Définition 1.3. — *Une forme sesquilinéaire* (AX, Y) *est dite elliptique si*

$$(1.2) \qquad |(AX, X)| \geqslant \alpha . ||X||^2 \quad \textit{pour tout } X \in C^N.$$

où $\alpha =$ *constante positive et où*

$$(1.3) \qquad ||X||^2 = \sum_{i=1}^{N} |X^i|^2.$$

DÉFINITION 1.3'. — *Une matrice est dite elliptique si la forme* (AX, Y) *est elliptique.*

PROPOSITION 1.1. — *Si la matrice* A *est elliptique alors*

$$|a_{ii}| \geqslant \alpha > 0 \quad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, N.$$

En effet, dans (1.2) il suffit de prendre $X^i = 1$ et $X^j = 0$ pour $j \neq i$.

PROPOSITION 1.2. — Toute forme hermitienne et elliptique est définie positive (à un changement de signe près !).

Tout d'abord la relation $X \neq 0$ entraîne

$$|(AX, X)| \geqslant \alpha ||X||^2 > 0$$

donc $(AX, X) \neq 0$. Montrons maintenant que (AX, X) garde un signe constant : soient X et Y dans C^N et supposons que

$$(1.4) \qquad \begin{cases} (AX, X) > 0, \\ (AY, Y) < 0. \end{cases}$$

On a, λ désignant un nombre réel

$$(A(\lambda X + Y), \lambda X + Y) = \lambda^2 (AX, X) + 2\lambda \mathrm{Re}(AX, Y) + (AY, Y)$$

en tenant compte de (1.4) il existe deux nombres réels distincts λ_1 et λ_2 tels que

$$(A(\lambda_i X + Y), (\lambda_i X + Y)) = 0 \quad i = 1, 2$$

et par suite

$$\lambda_i X + Y = 0 \quad i = 1, 2$$

d'où, puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$X = 0$$

ce qui est en contradiction avec (1.4). Par conséquent (AX, X) garde un signe constant *indépendant* de X.

1.2. — *Cas où* V_h *est un espace de dimension finie* $N(h)$. Il s'agit essentiellement de l'approximation par la méthode

de Galerkin (chap. 2) ou par la méthode variationnelle des *différences finies* (chap. 4).

Nous savons (chap. 1 n° 4) que le problème approché (P_h) est en fait un système de $N(h)$ équations linéaires à $N(h)$ inconnues.

$$(1.5) \qquad \sum_{i=1}^{N(h)} u_h^i a_h(e_h^i, e_h^j) = L_h(e_h^j) \quad j = 1, \ldots, N(h)$$

où $e_h^i, {}_i i = 1, \ldots, N(h)$ est une base de l'espace V_h et où les inconnues u_h sont les composantes de la solution « approchée » u_h

$$u_h = \Sigma u_h^i e_h^i.$$

DÉFINITION 1.4. — *La matrice*

$$A_h = ((a_h(e_h^i, e_h^j))) \quad i, j = 1, \ldots, N(h)$$

est dite matrice du problème approché.

DÉFINITION 1.5. — *Les équations* (1.5) *sont dites équations approchées.*

L'espace V_h étant de dimension finie $N(h)$, on peut le confondre avec $C^{N(h)}$; les deux normes $||u_h||_{V_h}$ et $||u_h|| = (\Sigma|u_h^i|^2)^{1/2}$ sont équivalentes : c'est-à-dire qu'on a

$$0 < k_1 \leqslant \frac{||u_h||_{V_h}}{||u_h||} \leqslant k_2 \quad ||u_h|| \neq 0$$

(les nombres k_1 et k_2 peuvent dépendre de h).

On a maintenant :

$$a_h(u_h, v_h) = (A_h u_h, v_h)$$

et compte tenu de l'hypothèse de V_h-ellipticité

$$|a_h(u_h, u_h)| \geqslant \alpha . ||u_h||_{V_h}^2 \quad \text{pour tout } u_h \in V_h, \ \alpha > 0$$

il vient

$$|(A_h u_h, u_h)| \geqslant \alpha . ||u_h||_{V_h}^2$$

et, encore

$$|(A_h u_h, u_h)| \geqslant \alpha k_1^2 ||u_h||^2 \quad \alpha k_1^2 > 0$$
$$\text{pour tout } u_h.$$

On a donc démontré

PROPOSITION 1.6. — *La matrice* A_h *du problème approché* (P_h) *est elliptique.*

D'autre part, dans tous nos schémas d'approximation si $a(u, v)$ est hermitienne, $a_h(u_h, v_h)$ l'est aussi d'où la

PROPOSITION 1.7. — *Si* $a(u, v)$ *est hermitienne et* V-*elliptique, alors la matrice* A_h *du problème approché* (P_h) *est hermitienne définie positive.*

2. Formation des équations approchées.

2.1. — *Formation globale.*

On connaît la base e_h^i, $i = 1, \ldots N(h)$ de V_h. Il suffit donc de calculer $a(e_h^i, e_h^j)$ et $L(e_h^j)$. Il en sera ainsi lorsque les fonctions e_h^i seront définies « globalement » dans Ω (et non par un raccordement de fonctions définies « localement » : voir exemples 3.1 et 3.2, chapitre 2).

2.2. — *Formation progressive.*

Nous étudions maintenant le cas où les e_h^i sont définies « localement » comme dans les exemples 3.1 et 3.2, de la méthode de Galerkin (chap. 2) ou comme dans la méthode variationnelle des différences finies. Nous allons exposer la méthode de formation progressive des équations approchées dans le cas des problèmes de Neumann d'ordre 2 (voir chap. 4, n° 2). Nous rappelons qu'on cherche u dans $H^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

où

$$a(u, v) = \Sigma \int_\Omega a_{ij} D_i u \overline{D_j v}\, dx + \int_\Omega a_0 u \bar{v}\, dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f \bar{v}\, dx.$$

On a défini un ensemble (fini) R_h^1 de points du réseau R_h; puis à toute suite u_h définie sur R_h^1 et à valeurs dans C on associe (linéairement) les fonctions u_h^i et u_0^h; le problème approché

est alors : déterminer la suite u_h telle que :

$$a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h \tag{2.1}$$

où

$$a_h(u_h, v_h) = \Sigma \int_\Omega a_{ij} u_h^i \bar{v}_h^j \, dx + \int_\Omega a_0 u_0^h \bar{v}_0^h \, dx$$

et

$$L_h(v_h) = \int_\Omega f \bar{v}_0^h \, dx$$

il est clair que (2.1) peut s'écrire, *en supprimant désormais l'indice h*

$$\begin{cases} \sum_{A,B} D(A, B) u(A) \, \bar{v}(B) = \sum_B R(B) \, \bar{v}(B) \\ \text{pour tout } v \in V_h \end{cases} \tag{2.2}$$

où $A, B \in R_h^1$ et où $D(A, B)$, $R(B)$ ne dépendent ni de u ni de v. L'équation (2.2) est équivalente au système des équations linéaires suivantes

$$\begin{cases} \sum_A D(A, B) \, u(A) = R(B), \qquad A \in R_h^1 \\ B \text{ étant un point quelconque de } R_h^1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Définition 2.1. — *L'équation*

$$\sum_A D(A, B) \, u(A) = R(B), \qquad A \in R_h^1$$

est dite, équation approchée associée au point B *de* R_h^1.

Puisque les fonctions u^i *et* u_0 *sont définies « localement » à partir de la suite u, il est naturel de faire intervenir les formes suivantes*

$$a_h^M(u, v) = \Sigma \int_{\Omega \cap (O, M)} a_{ij} u^i \bar{v}^j \, dx + \int_{\Omega \cap (O, M)} a_0 u_0 \bar{v}_0 \, dx$$

et

$$L_h^M(v) = \int_{\Omega \cap (O, M)} f \bar{v}_0 \, dx \text{ (10)}.$$

Il est clair que

$$\begin{cases} a_h(u, v) = \sum_M a_h^M(u, v) \\ L_h(v) = \sum_M L_h^M(v) \end{cases} \tag{2.4}$$

(où la sommation a lieu pour les points M tels que le pavé

(10) On aurait pu prendre un autre pavé lié à M au lieu de (0, M).

(0, M) « coupe » Ω *i.e* $(0, M) \cap \Omega = \emptyset$) et que $a_h^M(u, v)$ et $L_h^M(v)$ peuvent s'écrire

$$(2.5) \quad \begin{cases} a_h^M(u, v) = \sum_{A, B} D^M(A, B)\, u(A)\, \bar{v}(B), \quad A, B \in R_h^1 \\ L^M(v) = \sum_B R^M(B)\, \bar{v}(B), \quad B \in R_h^1 \end{cases}$$

On a donc le résultat suivant

$$(2.6) \quad \begin{cases} D(A, B) = \sum_M D^M(A, B) \\ R(B) \quad = \sum_M R^M(B) \end{cases}$$

(même ensemble de sommation que dans (2.4)).

Définition 2.2. — *Les éléments* $a_h^M(u, v)$, $L_h^M(v)$, $D^M(A, B)$ *sont appelés respectivement forme sesquilinéaire partielle, forme linéaire partielle et coefficient partiel.*

Au point de vue programmation: Désignons par D(A, B) et par R(B) *les mémoires* qui doivent contenir les *nombres* D(A, B) et R(B); grâce aux relations (2.6) on est conduit au procédé de *formation progressive* des équations approchées :

Avant le bouclage (la variable étant le pavé (0, M) ou le point M) on annule les mémoires D(A, B) et R(B).

Pendant le bouclage on ajoute au contenu de ces mémoires les nombres $D^M(A, B)$ et $R^M(B)$ définis par (2.5).

En *Fin* de bouclage (lorsque (0, M) a « couvert » Ω) dans les mémoires D(A, B) et R(B) il y a $\sum_M D^M(A, B)$ et $\sum_M R^M(B)$ c'est-à-dire les nombres D(A, B) et R(B).

3. Forme des équations approchées.

3.1. — Considérons le problème de Neumann suivant : étant un ouvert borné dans R^n de frontière régulière Γ, déterminer u dans $H^1(\Omega)$ tel que

$$(3.1) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_{ii} D_i u . \overline{D_i v}\, dx + \int_\Omega u . \bar{v}\, dx = \int_\Omega f . \bar{v}\, dx \\ \text{pour tout } v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

où

$$a_{ii}, a_0 \in L^\infty(\Omega), \qquad f \in L^2(\Omega)$$

et on suppose que

$$(3.2)\qquad \begin{cases} a_{ii}(x) \geqslant \alpha > 0 & \text{p.p. sur } \Omega \quad i = l, \ldots, n \\ a_0(x) \geqslant \alpha & \text{p.p. sur } \Omega \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un cas particulier où la forme sesquilinéaire $a(u, v)$ (le premier membre de (3.1)) est hermitienne. Nous allons étudier la forme des équations approchées pour les 4 types de problèmes approchés décrits dans le n° 2, chapitre 4.

3.2. — *Premier schéma d'approximation.*

On pose pour A, B $\in \mathcal{R}_h^1$ (voir la définition de $\mathcal{R}_h^1$ au chapitre 4 n° 2).

$$\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \Omega \cap (0, \mathrm{A}) \cap (\mathrm{C}, \mathrm{B}),$$
$$\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B}i) = \Omega \cap (0, \mathrm{A}) \cap (\mathrm{A}, \mathrm{B}i).$$

(Voir les définitions des pavés (0, M), (C, M), (A, Mi) dans le chapitre 3, n° 1.)

$$a(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \text{mes. } \Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B}),$$
$$a(\mathrm{A}, \mathrm{B}i) = \text{mes. } \Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B}i),$$
$$a_{ii}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \int_{\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B}i)} a_{ii}(x)\, dx,$$
$$a_0(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \int_{\Omega} (\mathrm{A}, \mathrm{B}) a_0\, dx.$$

Rappelons maintenant que M_0 désigne l'ensemble des sommets du pavé (0, M) et que M_i, $i = l, \ldots, n$, désigne l'ensemble des points M tels que N, $\mathrm{N} + h_i \in \mathrm{M}_0$.

On pose

$$a_h^{\mathrm{M}}(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega \cap (0, \mathrm{M})} a_{ii} u^i \bar{v}^i\, dx + \int_{\Omega \cap (0, \mathrm{M})} a_0 \,.\, u \,.\, {}_0\bar{v}_0\, dx$$

Rappelons que les fonctions étagées u_0, v_0 sont constantes sur tout (C, M) et que $u^i = \nabla_i u_0$, $v^i = \nabla_i v_0$; on vérifie alors que,

$$(3.3)\qquad \begin{cases} a_h^{\mathrm{M}}(u, v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_i} a_{ii}(\mathrm{M}, \mathrm{A}_i) \cdot \frac{u(\mathrm{A} + h_i) - u(\mathrm{A})}{h_i} \cdot \frac{\bar{v}(\mathrm{A} + h_i) - \bar{v}(\mathrm{A})}{h_i} \\ + \displaystyle\sum_{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_0} a_0(\mathrm{M}, \mathrm{A}) \,.\, u(\mathrm{A}) \,.\, \bar{v}(\mathrm{A}). \end{cases}$$

Compte tenu de (3.2) les coefficients $a_{ii}(\mathrm{M}, \mathrm{A}i)$, $a_0(\mathrm{M}, \mathrm{A})$

sont positifs; on voit alors, sur (3.3) que les coefficients partiels possèdent les 3 propriétés suivantes :

i) seuls les coefficients du type

$$D^M(A, A),\ D^M(A, A + h_i),\ D^M(A + h_i, A)$$

ne sont pas (automatiquement) nuls.

ii) les coefficients du type $D^M(A, A)$ (ou $D^M(A + h_i, A + h_i)$!) sont positifs.

iii) par contre, les coefficients du type $D^M(A, A + h_i)$ et $D^M(A + h_i, A)$ sont négatifs.

Les coefficients D(A, B) des équations approchées possèdent aussi ces propriétés (puisqu'on les obtient par sommation des coefficients partiels).

Cherchons maintenant la somme (par rapport à A) des coefficients $D^M(A, B)$: il suffit pour cela de faire dans (3.3)

$$u(A) = 1 \quad \text{pour tout } A \in M_0$$
$$v(B) = 1$$

et

$$v(P) = 0 \quad \text{si } P \neq B \quad \text{pour tout } A \in M_0.$$

On obtient

$$\sum_{A \in M_0} D^M(A, B) = a_0(M, B)$$

donc

$$\sum_{A \in M_0} D^M(A, B) > 0$$

et par suite

$$D^M(B, B) > \Sigma D^M(A, B), \qquad A \in M_0, \qquad A \neq B.$$

Par une sommation en M, il vient

$$D(B, B) > -\Sigma D(A, B), \qquad A \neq B.$$

par conséquent, la matrice A est à *diagonale dominante stricte.* En résumant les résultats du n° 3 et la proposition 1.7, il vient le

THÉORÈME 3.1. — *La matrice* A_h *du problème* (P_h) (1er *schéma d'approximation*) *possède les propriétés suivantes :*

1) *elle est hermitienne définie positive*;

2) *elle est à diagonale dominante stricte*;

3) *les coefficients non (automatiquement) nuls sont de la forme*

$$D(A, A), \quad D(A, A + h_i), \quad D(A + h_i, A) \quad i = 1, \ldots, n;$$

4) *les coefficients de la diagonale principale sont positifs, les autres sont négatifs ou nuls.*

D'après la propriété 3) énoncée dans ce théorème, dans une équation approchée, il y a plus $2n + 1$ coefficients non nuls.

3.3. — *Les* 3 *autres schémas d'approximation* (voir chap. 4, n° 24).

Considérons un pavé frontalier (0, M), (*i.e* $\Gamma \cap (0, M) \neq 0$). On vérifie que la forme sesquilinéaire partielle $a_h^M(u, v)$ peut s'écrire

$$a_h^M(u, v) = \sum_{A, B \in M_0} D^M(A, B)\, u(A) . \bar{v}(B)$$

où les coefficients $D^M(A, A)$ sont positifs et où en général

$$D^M(A, B) \neq 0 \qquad \text{si } A \neq B, \qquad A, B \in M_0.$$

Si A et B sont des sommets d'un même pavé, le coefficient D(A, B) est donc non nul en général : par conséquent, dans une équation approchée il y a au plus 3^n coefficients non nuls. Compte tenu de ces résultats et de la proposition 1.7, il vient le

THÉORÈME 3.2. — *La matrice* A_h *du problème* (P_h) (*schémas d'approximations* 2, 3 *et* 4) *possède les propriétés suivantes :*

1) *elle est hermitienne définie positive*;
2) *les coefficients non (automatiquement) nuls sont de la forme*; D(A, B) *où* A *et* B *sont des sommets d'un même pavé*;
3) *les coefficients* D(A, A) *de la diagonale principale sont positifs.*

Remarque 3.1. — On peut vérifier que A_h n'est pas à diagonale dominante et que les coefficients non situés sur la diagonale principale sont de signe quelconque.

Remarque 3.2. — Supposons que le système des équations linéaires approchées soit résolu par la méthode (itérative) de Relaxation (cf. [18]). Pour les matrices A_h décrites par le

théorème 3.1 la recherche du paramètre de relaxation optimum est aisée; par contre, pour les matrices A_h décrites par le théorème 3.2, nous ignorons comment définir le paramètre optimum éventuel.

4. Programmation.

4.1. — Considérons le problème de type mêlé décrit au chapitre 4, n° 5, c'est-à-dire le problème suivant : On donne un ouvert Ω borné dans R^n de frontière régulière Γ, on désigne par Γ_1 une partie de Γ et par V le sous-espace des $u \in H^m(\Omega)$ tels que

$$\gamma u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1.$$

On cherche u dans V tel que

$$\Sigma \int_\Omega a_{pq} D^p u D^q v \, dx = \int_\Omega \bar{f} . v \, dx \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Nous allons étudier la formation d'un programme sur la résolution approchée de ce problème par la méthode variationnelle des différences finies.

Ce programme est formé d'un programme principal qui assure la liaison entre plusieurs sous-programmes (assemblés séparément). Il y a :

4.2. — Les sous-programmes qui concernent les *données* du problème, à savoir :

1) les fonctions a_{pq} et f;

2) les représentations locales de Γ et de Γ_1. Par exemple si Ω est un cercle dans le plan et si Γ a pour équation $x^2 + y^2 = 1$, le programme principal fera appel aux fonctions

$$y_1 = + \sqrt{1 - x^2}, \qquad x_1 = + \sqrt{1 - y^2},$$
$$y_2 = - \sqrt{1 - x^2}, \qquad x_2 = - \sqrt{1 - y^2}.$$

4.3. — Les sous-programmes qui concernent l'*approximation*, à savoir :

1. Le sous-programme *position* ou (POSIT) : il étudie la position du pavé (0, M) par rapport à Ω : nous donnons à POSIT les coordonnées de M et il restitue les éléments nécessaires au calcul des coefficients partiels. On pourra associer

un POSIT à chaque type d'approximation; par exemple

POSIT 1 : donne les mesures de $(0, M) \cap \Omega$.
POSIT 2 : donne les coordonnées du barycentre de

$$(0, M) \cap \Omega \ldots$$

2. Le sous-programme de *formation* des équations (ou FORMA). On pourra utiliser la formation progressive des équations (voir n° 2) et associer un FORMA à chaque type d'approximation.

3. Le sous-programme *Accélération :* il s'agit de rechercher des paramètres d'accélération de la méthode itérative choisie.

4. Le sous-programme *Résolution* du système des équations linéaires approchées.

5. Le sous-programme *Sortie* des résultats.

Remarque 4.1. — (Sur la comparaison des différentes méthodes d'approximations pour un exemple donné). Il est nécessaire de connaître la solution exacte u. La solution approchée u_h (ou plus exactement $p_h u_h$, voir théorie générale chap. 1) étant calculée, on demandera alors au sous-programme sortie de calculer, par exemple, l'erreur relative dans $L^2(\Omega)$, (c'est-à-dire l'erreur relative en moyenne quadratique).

Remarque 4.2. — *Notre étude est limitée à la formation du système approché* (c'est à-dire à l'approximation). Pour la résolution de ce système par des méthodes itératives cf. [18].

5. Exemple 1 : (Un problème de Neumann à un milieu).

5.1. — Désignons par Ω le disque (de R^2) de centre l'origine et de rayon 1 et par Γ la frontière de Ω (11). Considérons le

Problème (P). — Déterminer u dans $H^1(\Omega)$ tel que :

(5.1)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega D_i u . \overline{D_i v}\, dx + \int_\Omega u . \bar{v}\, dx = \int_\Omega f . \bar{v}\, dx + \int_\Gamma g . \bar{v} d\sigma \text{ (12)} \\ \text{pour tout } v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

(11) On n'a nullement tenu compte des symétries du cercle.
(12) Voir chap. 4 n° 8 les remarques sur la forme linéaire $v \to \int_\Gamma g . \bar{v}\, d\sigma$.

f et g sont deux fonctions continues données, $d\sigma$ désigne l'élément d'aire sur Γ. Il est clair que ce problème admet une solution unique u et que u vérifie (dans le sens faible)

$$(5.2) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On a *commencé* par se donner u et *ensuite* on a calculé f et g à l'aide de (5.2). On a pris

$$u = x_1^3 + x_2^4.$$

5.2. — *Approximation:* On donne le réseau R_h de maille uniforme $h = 0{,}04$. Nous rappelons que u_h désigne une suite définie sur certains points du réseau. Puisque u est connu, on peut calculer l'erreur relative suivante :

$$\delta u = \left(\frac{\sum_M |u_h(M) - u(M)|^2}{\sum_M |u(M)|^2} \right)^{1/2}$$

le système linéaire est résolu par la méthode itérative de Gauss-Seidel; le nombre d'itérations est désigné par N.

5.3. — *Résultats:* Le nombre de points est : 2601.

Deuxième schéma (voir 2.4, chap. 4)

N	25	50	75	100
δu	0,254	0,074	0,029	0,019

Troisième schéma:

N	25	50	75	100
δu	0,253	0,067	0,019	0,006

6. Exemple 2: (Un problème de transmission ou un problème de Neumann à deux milieux).

6.1. — *Le problème exact.*

Désignons par Γ_1 (Resp. Γ_2) la circonférence (dans R^2) de centre l'origine et de rayon 1/2 (Resp. de rayon 1), par Ω_1 le disque de frontière Γ_1 et par Ω_2 la couronne de frontière Γ_1 et Γ_2. Désignons par V le sous-espace fermé des $u = (u_1, u_2)$ de $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ tels que

$$\gamma u_1 = \gamma u_2 \quad \text{sur } \Gamma_1.$$

Considérons le

Problème (P). — Déterminer u dans V tel que

$$(6.1) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_1} D_i u_1 \overline{D_i v_1}\, dx + \int_{\Omega_1} u_1 \bar{v}_1\, dx + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_2} 5 D_i u_2 . \overline{D_i v_2}\, dx \\ \quad + \int_{\Omega_2} u_2 \bar{v}_2\, dx = \int_{\Omega_1} f_1 \bar{v}_1 + xp \int_{\Omega_2} f_2 \bar{v}_2\, dx + \int_{\Gamma_2} g v_2\, d\sigma \\ \text{pour tout } v = (v_1, v_2) \in V \end{cases}$$

f_1, f_2 et g sont des fonctions continues données.

Le problème (P) a une solution unique u et on montre (en utilisant la formule de Green dans Ω_1 et dans Ω_2) que u est solution (dans un sens faible) du

Problème (P'). — Déterminer u_1 et u_2 tels que

$$(6.2) \quad \begin{cases} -\Delta u_1 + u_1 = f_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -5\Delta u_2 + u_2 = f_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

$$(6.3) \quad \begin{cases} \gamma u_1 = \gamma u_2 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n_1} = 5 \dfrac{\partial u_2}{\partial n_2} & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

$$(6.4) \quad \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = g \qquad \text{sur } \Gamma_2$$

où n_i, $i = 1, 2$ désigne la normale extérieure à la frontière de Ω_i. Ici aussi on a commencé par se donner la solution $u = (u_1, u_2)$ satisfaisant à (6.3), puis on a ensuite calculé f_1, f_2, g à l'aide de (6.2) et de (6.4).

On a pris

$$u_1(x_1, x_2) = (2x_1^2 + 3x_2^2)\left(5 - \frac{1}{x_1^2 + x_1^2}\right)$$
$$u_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2.$$

6.2. — *Approximation:* On prend un réseau R_h de maille uniforme $h = 0{,}05$. On désigne par R_h^i l'ensemble des sommets des pavés qui ont une intersection non vide $\Omega_{i,\, i=1,2}$. La solution du problème approché est formée de suites $u_{i,h}$ définies sur R_h^i, $i = 1, 2$. On pose

$$\delta u_i = \left[\frac{\sum\limits_{R_h^i} |u_{i,h}(M) - u_i(M)|^2}{\sum\limits_{R_h^i} |u_i(M)|^2}\right]^{1/2} \qquad i = 1{,}2.$$

Ici encore le système est résolu par la méthode de Gauss-Seidel.

6.3. — *Résultats:* Le problème (P) a été considéré comme un problème de Neumann (à 2 milieux). Nous avons utilisé le 3e *schéma* d'approximation (voir 2.4, chap. 4). Le nombre des itérations est encore désigné par N.

N	100	125	150	175	200
δu_1	0,207	0,135	0,087	0,056	0,036
δu_2	0,184	0,128	0,089	0,063	0,045

Essai réalisé sur IMB 704.

Nombre de points 1681.
Durée (approximative) de l'essai : 19′30″.
Durée de la formation du système : 2′12″.
Durée de la résolution : 5″ par itération.
Durée des calculs d'erreurs : 1′20″.

Remarque 6.1. — La décroissance régulière des erreurs relatives δu_i en fonction du nombre des itérations nous laisse supposer que le système linéaire n'est pas encore résolu après 200 itérations. Il faudrait donc soit faire plus d'itérations, soit prendre une méthode plus rapide; notre choix de la méthode de Gauss-Seidel s'explique par le fait que cette méthode est facile à programmer et que nous avons pour but, *non pas la rapidité de la résolution mais l'étude de l'approximation* (voir Remarque 3.2 au sujet de la méthode de Relaxation).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki, Espaces Vectoriels topologiques, livre V, Hermann, Paris.

[2] S. Campanato, Sui problema de Picone relativo all'équilibro di un corpo incastrato. *Ric. Mat.*, 6, 125-149 (1957).

[3] S. Campanato, Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali lineari del tipo dell'elasticita. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 13, 223-258 et 275-302 (1959).

[4] J. Cea, Sur l'approximation des problèmes aux limites, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, t. 254, p. 1729-1731 et 2919-2921 (1962) et t. 255, p. 442-444, (1962).

[5] J. Deny et J. L. Lions, Les espaces du type de Beppo Levi, *Ann. Inst. Fourier*, 5, 305-370 (1955).

[6] K. O. Friedrichs, A Finite difference scheme for the Neumann and the Dirichlet problem. Applied Mathematics Center, New York, 1962.

[7] E. Gagliardo, Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili, *Ric. Mat.*, 5, 169-205 (1956).

[8] D. Huet, Phénomènes de perturbation singulière, *Ann. Inst. Fourier*, 10, 1-96 (1960).

[9] O. A. Ladyzenskaya, La méthode des différences finies dans la théorie des équations aux dérivées partielles (en russe), *Ouspechi Mat. Nauk.*, 12, 123-148 (1957).

[10] J. L. Lions, Problèmes aux limites en théorie des distributions, *Acta. Math.*, 94, 13-153 (1955).

[11] J. L. Lions, Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Springer, Collection Jaune, (1961).

[12] J. L. Lions, Méthodes d'approximation numérique des problèmes aux limites de la physique mathématique. Cours Paris (1962).

[13] J. L. Lions, Sur l'approximation des solutions de certains problèmes aux limites, *Rendic. Sem. Mat. Padova* (1962).

[14] W. Littman, Résolution du problème de Dirichlet par la méthode des différences finies, *C.R. Acad. Sci.*, 247, 2270-2272 (1958).

[15] E. Magenes et G. Stampacchi, A. Problemi al contorno per le équizioni differenziali di tipo ellitico, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 12, 247-358 (1958).
[16] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, Paris.
[17] S. L. Sobolev, Applications de l'analyse fonctionnelle à la physique mathématique. Leningrad 1950.
[18] R. S. Varga, Matrix iterative analysis. Prentice Hall (1963).

(Thèse, Fac. Sciences, Paris, 1964).

Jean Céa,
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Reims (Marne).