ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

NICOLAS MARTEAU

Sur les équations aux différences en une variable

Annales de l'institut Fourier, tome 50, n° 5 (2000), p. 1589-1615
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_5_1589_0>

© Annales de l'institut Fourier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
50, 5 (2000), 1589–1615

SUR LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES EN UNE VARIABLE

par Nicolas MARTEAU

Introduction.

Le problème traité dans cet article trouve son origine dans l'étude des fonctions arithmétiques. On peut citer, entre autres exemples, le théorème suivant, dû à S. Fukasawa et A.O. Gel'fond : il existe un réel $\alpha > 0$ tel que toute fonction entière f satisfaisant

$$f(\mathbb{Z}[i]) \subseteq \mathbb{Z}[i] \text{et} \limsup_{r\to\infty} \frac{\log |f|_r}{r^2} < \alpha,$$

est un polynôme. La recherche de la meilleure constante α possible sera l'objet de recherche de la part de A.O. Gel'fond, L. Gruman et D. Masser (qui montre $\alpha \leqslant \pi/(2e)$). Enfin, F. Gramain montre en 1981 dans [Gr1] que $\pi/(2e)$ est la meilleure valeur possible. Pour cela, il a besoin d'un lemme où l'on voit apparaître des fonctions satisfaisant un système de deux *équations aux différences*

$$\text{(S)} \qquad \sum_{j=0}^{j=J} a_j(z) f(z + j\alpha) = \sum_{k=0}^{k=K} b_k(z) f(z + k\beta) = 0,$$

où α et β sont deux nombres complexes formant une $\mathbb{R}$−base de $\mathbb{C}$ (i.e. $\alpha/\beta \notin \mathbb{R}$) et les a_j et b_k sont des polynômes (on parle alors de *pas*

Mots-clés : Équations aux différences finies – Élimination.
Classification math : 39A10.

récurrents pour la fonction f), en effet, un système du type (S) permet de majorer la croissance de la fonction arithmétique f. Lors d'un colloque, D. Masser posera la question suivante : est-ce que toute solution entière d'un système du type (S) est nécessairement un polynôme exponentiel ? La réponse à cette question est négative puisqu'on connaît un contre-exemple, dû à F. Gramain et J.-P. Bézivin, sous la forme de la fonction $z \mapsto (e^z - 1)/z$ qui satisfait pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $e^{\omega} z f(z) - (1 + e^{\omega})(z + \omega) f(z + \omega) + (z + 2\omega) f(z + 2\omega) = 0$. Toutefois, ces mêmes auteurs montreront dans [BG1] et [BG2], que toute solution entière de (S) est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme. Dans cette direction, J.-J. Loeb puis N. Brisebarre et L. Habsieger [Br] [BH] montrent un résultat analogue à celui de J.-P. Bézivin et F. Gramain avec la condition plus faible que α et β soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

On s'intéresse ici au problème plus général qui consiste à remplacer les pas des équations du système (S) par des $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_J$ et $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_K$ quelconques,

$$(\mathrm{S}') \qquad \sum_{j=0}^{j=J} a_j(z) f(z + \alpha_j) = \sum_{k=0}^{k=K} b_k(z) f(z + \beta_k) = 0,$$

et à étudier aussi le cas des solutions continues en une variable réelle. On démontre que la condition d'indépendance des deux $\mathbb{Q}$-sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par les α_j et les β_k est suffisante (et minimale compte tenu des techniques que l'on emploie) pour passer des équations à coefficients polynomiaux aux équations à coefficients constants. Via le théorème de Skolem-Malher-Lech ou la conjecture de Shapiro, cette même condition apparaît dans la résolution des systèmes d'équations aux différences à coefficients constants ; d'autres conditions de nature géométrique venant alors s'ajouter à celle-ci.

On montre les théorèmes suivants.

THÉORÈME. — *Soit f une fonction d'une variable réelle (resp. complexe), continue (resp. entière), solution de*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{j=J} a_j(x) f(x + j) = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=K} b_k(x) f(x + \beta_k) = 0, \end{cases}$$

où $a_0, a_J, b_0, b_1, \ldots, b_K$ sont des polynômes non nuls à coefficients complexes, et les β_k sont des nombres réels distincts (resp. des nombres complexes distincts) tels que l'intersection de $\mathbb{Z}$ avec le sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ (resp. de $(\mathbb{C}, +)$) engendré par les β_k soit réduite à $\{0\}$. Dans ces conditions, f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme.

THÉORÈME. — *Soit f une fonction entière solution de*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{j=J} a_j(z) f(z+\alpha_j) = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=K} b_k(z) f(z+\beta_k) = 0, \end{cases}$$

où chaque a_j et chaque b_k est un polynôme non nul. Par ailleurs, on suppose que les α_j et β_k satisfont la condition algébrique suivante, l'intersection des sous-groupes de $(\mathbb{C}, +)$ engendrés respectivement par les α_j et les β_k est réduite à $\{0\}$, et les conditions géométriques :

1) *la suite $\Re(\alpha_j)$ est strictement croissante,*

2) *la suite $\Im(\alpha_j)$ est strictement croissante,*

3) *la suite $\Re(\beta_k)$ est strictement croissante,*

4) *la suite $\Im(\beta_k)$ est strictement décroissante.*

Dans ces conditions, f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme.

Notations et résultats préliminaires

— Un *polynôme exponentiel* d'une variable réelle (resp. complexe) est une fonction à valeurs complexes de la forme

$$\sum_{n=1}^{n=N} c_n(x) e^{\omega_n x},$$

où x est une variable réelle (resp. complexe), les c_n appartiennent à $\mathbb{C}[x]$ et les ω_n sont des nombres complexes. Quand les c_n sont des fractions rationnelles, on parle de *fractions exponentielles* (ce sont des quotients de polynômes exponentiels par des polynômes).

Remarque. — Les polynômes exponentiels d'une variable réelle (resp. complexe) peuvent être caractérisés par la propriété suivante : ce sont les fonctions f continues (resp. entières) telles que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par l'ensemble des translatées $f(x+\omega), \omega \in \mathbb{R}$ (resp.$\omega \in \mathbb{C}$), est de dimension finie[1]. Je montre dans ma thèse le résultat suivant : si α et β sont deux nombres complexes $\mathbb{R}$-linéairement indépendants, alors le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions entières $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ solutions de

$$\begin{cases} F(z+\alpha) = A(z)F(z) \\ F(z+\beta) = B(z)F(z) \end{cases}$$

est de dimension finie (où A et B sont des matrices n, n dont les coefficients sont des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ *quelconques*). Ceci ne montre pas que les solutions sont des polynômes exponentiels mais permet de retrouver le résultat de J.-P. Bézivin et F. Gramain sur les systèmes d'équations à pas récurrents à coefficients constants[2] ainsi que certains résultats sur les équations aux différences à coefficients méromorphes-périodiques.

— Étant donné ω_n, $0 \leqslant n \leqslant N$, des nombres réels (resp. complexes), on note $< \omega_n >$ le sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ (resp. de $(\mathbb{C}, +)$) engendré par ces nombres.

— Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit $\mathbf{F}$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions continues (resp. holomorphes) de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit $\mathbf{A}$ comme étant l'ensemble des opérateurs R sur $\mathbf{F}$ de la forme

$$f \in \mathbf{F} \mapsto R(f) \in \mathbf{F}, \text{ où } R(f)(x) = \sum_{n=0}^{n=N} c_n f(x+\omega_n),$$

avec c_n dans $\mathbb{C}$ et ω_n dans $\mathbb{K}$. On appelle ces opérateurs les *opérateurs de translation.*

On notera $R = \sum_{n=0}^{n=N} c_n T^{\omega_n}$ un tel opérateur. Par la suite, les ω_n seront appelés *exposants* de R.

Munissons $\mathbf{A}$ d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre : l'addition et la multiplication par les scalaires sont définis naturellement par : $(R+S)(f) = R(f) + S(f)$ et $(\lambda R)(f) = \lambda R(f)$, la multiplication est donnée par : $(RS)(f) = R(S(f))$ (elle est commutative).

On démontre maintenant que l'écriture des éléments de $\mathbf{A}$ sous la forme

$$R = \sum_{n=0}^{n=N} c_n T^{\omega_n},$$

[1] Voir [Mar] pour un résultat plus général concernant les groupes de Lie.
[2] Voir [Mar], partie 3.

avec les c_n non nuls et les ω_n distincts deux à deux, est unique à l'ordre près des termes.

Ceci revient à montrer l'équivalence suivante (les δ_n sont supposés distincts) :

$$\forall f \in \mathbf{F},\ \left(\sum_{n=0}^{n=N} d_n T^{\delta_n}\right)(f) \equiv 0 \iff \forall i \in \{0,\dots,N\},\ d_i = 0.$$

Notons $S = \sum_{n=0}^{n=N} d_n T^{\delta_n}$ et supposons $S(f) \equiv 0$ pour tout $f \in \mathbf{F}$. Pour $0 \leqslant i \leqslant N$, posons

$$P_i(x) = \prod_{\substack{0 \leqslant n \leqslant N \\ n \neq i}} (x - \delta_n),$$

les P_i sont des polynômes et appartiennent donc à $\mathbf{F}$. On a

$$S(P_i)(0) = d_i \prod_{\substack{0 \leqslant n \leqslant N \\ n \neq i}} (\delta_i - \delta_n),$$

comme $S(P_i) \equiv 0$ et que les δ_n sont supposés distincts, cela implique $d_i = 0$, ce qui prouve notre assertion.

Une conséquence importante de l'unicité de l'écriture est que $\mathbf{A}$ est une algèbre intègre. En effet soient R et S deux éléments non nuls de $\mathbf{A}$ et soient ω_r et δ_s les exposants les plus grands pour l'ordre usuel (cas réel) ou pour l'ordre lexicographique (cas complexe) intervenant dans R et S respectivement. Il est alors clair que le produit RS fera intervenir un terme non nul d'exposant $\omega_r + \delta_s$ et est donc non nul par unicité de l'écriture.

— On note x l'opérateur sur $\mathbf{F}$ qui à la fonction f associe la fonction notée (xf), où $(xf)(u) = uf(u)$.

On notera $\mathbf{B}$, l'algèbre d'opérateurs engendrée par $\mathbf{A}$ et l'opérateur x. Contrairement à $\mathbf{A}$, cette algèbre n'est pas commutative.

Pour tout R dans $\mathbf{A}$, on pose (*relation de commutation*)

$$\text{(C)} \qquad \tau(R) = Rx - xR,$$

$\tau(R)$ est un élément de $\mathbf{A}$. Explicitement, si $R = \sum_{n=0}^{n=N} c_n T^{\omega_n}$ alors $\tau(R) = \sum_{n=0}^{n=N} c_n \omega_n T^{\omega_n}$. L'application τ est linéaire et est une dérivation de $\mathbf{A}$:

$$\tau(RS) = (RS)x - x(RS) = R(\tau(S) + xS) - (Rx - \tau(R))S = \tau(R)S + R\tau(S).$$

1. Les équations aux différences à coefficients constants.

Considérons une fonction f d'une variable réelle (resp. complexe), continue (resp. entière) à valeurs complexes, solution d'un système de deux équations aux différences à coefficients constants et à pas non récurrents :

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{j=J} a_j f(x+\alpha_j) = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=K} b_k f(x+\beta_k) = 0. \end{cases}$$

1. Dans le cas réel, on écrit le système (1) sous la forme

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \Big(\displaystyle\sum_{j=0}^{j=J} a_j \delta_{-\alpha_j}\Big) * f = 0 \\ \Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{k=K} b_k \delta_{-\beta_k}\Big) * f = 0, \end{cases}$$

où δ_μ désigne la distribution de Dirac au point μ et $*$ le produit de convolution. Notons $T_1 = \sum_{j=0}^{j=J} a_j\delta_{-\alpha_j}$ et $T_2 = \sum_{k=0}^{k=K} b_k\delta_{-\beta_k}$, $\hat{T}_1(z) = \sum_{j=0}^{j=J} a_j e^{2i\pi\alpha_j z}$ et $\hat{T}_2(z) = \sum_{k=0}^{k=K} b_k e^{2i\pi\beta_k z}$ les transformées de Fourier complexes des distributions à support compact T_1 et T_2 et enfin $\mathcal{Z}(\hat{T}_1)$ et $\mathcal{Z}(\hat{T}_2)$, les zéros de $\hat{T}_1$ et $\hat{T}_2$. Si on suppose f de classe $\mathcal{C}^\infty$, on sait, grâce au théorème de synthèse spectrale de Schwartz[3], que f est un polynôme exponentiel pourvu que $\mathcal{Z}(\hat{T}_1)$ et $\mathcal{Z}(\hat{T}_2)$ satisfassent (condition de finitude)

$$\text{(F)} \qquad \mathcal{Z}(\hat{T}_1) \cap \mathcal{Z}(\hat{T}_2) \text{ est fini.}$$

Pour obtenir les mêmes conclusions avec l'hypothèse plus faible : f continue, on utilise l'argument suivant. Soit f une solution continue de (1) et soient θ_ε des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact $[-\varepsilon,\varepsilon]$ approximant la distribution de Dirac au point 0. Les fonctions $f * \theta_\varepsilon$ sont $\mathcal{C}^\infty$ et aussi solutions de (1). Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des solutions $\mathcal{C}^\infty$ de (1). Si la condition (F) est satisfaite, E est de dimension finie et donc fermé pour la topologie de la convergence simple. Comme $f = \lim_{\varepsilon\to 0} f * \theta_\varepsilon$, on en déduit que f appartient à E et est donc un polynôme exponentiel.

---

[3] voir [Kh], pages 37 et 38, théorèmes 2.10 et 2.11.

2. Dans le cas complexe, on écrit le système (1) sous la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} \Big(\sum\limits_{j=0}^{j=J} a_j T^{\alpha_j}\Big)(f) = 0 \\ \Big(\sum\limits_{k=0}^{k=K} b_k T^{\beta_k}\Big)(f) = 0, \end{cases}$$

on utilise un théorème de Gel'fond[4] portant sur les opérateurs normaux[5].

THEÉORÈME (Gel'fond). — *Soit f une fonction entière solution de deux équations $L_1(f) = L_2(f) = 0$, où L_1 et L_2 sont des opérateurs normaux dont les fonctions caractéristiques respectives ϕ_1 et ϕ_2 n'ont qu'un nombre fini de zéros communs, alors f est un polynôme exponentiel.*

Dans le système (3) les opérateurs $L_1 = \sum_{j=0}^{j=J} a_j T^{\alpha_j}$ et $L_2 = \sum_{k=0}^{k=K} b_k T^{\beta_k}$ sont normaux puisque leurs fonctions caractéristiques sont les fonctions entières $\phi_1(z) = \sum_{j=0}^{j=J} a_j e^{\alpha_j z}$ et $\phi_2(z) = \sum_{k=0}^{k=K} b_k e^{\beta_k z}$. Ainsi une solution entière f de (1) est un polynôme exponentiel pourvu que les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 n'aient qu'un nombre fini de zéros communs.

Dans les deux cas, on est amené à montrer la finitude de l'ensemble des zéros communs des fonctions entières

$$g(z) = \sum_{j=0}^{j=J} a_j e^{\alpha_j z}$$
$$h(z) = \sum_{k=0}^{k=K} b_k e^{\beta_k z}.$$

1.1. Le cas d'une équation à pas récurrents.

On s'intéresse ici à deux équations d'une variable réelle ou complexe, l'une à pas récurrent égal à 1, l'autre à pas non récurrent. On a le résultat suivant.

4 voir [Gel], remarque page 367.

5 voir aussi [Br], remarque 1.11 page 16.

THÉORÈME 1.1. — *Soit f une fonction d'une variable réelle (resp. complexe), continue (resp. entière), solution du système*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{j=J} a_j f(x+j) = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=K} b_k f(x+\beta_k) = 0, \end{cases}$$

où $a_0, a_J, b_0, b_1, \ldots, b_K$ sont des nombres complexes non nuls et les β_k sont des nombres réels (resp. complexes) tels que $\beta_k - \beta_\ell \notin \mathbb{Q}$ si $k \neq \ell$. Dans ces conditions, f est un polynôme exponentiel.

D'après ce qui a été dit en introduction à la partie 1, il suffit de vérifier la finitude de l'ensemble des zéros communs des fonctions entières g et h

$$g(z) = \sum_{j=0}^{j=J} a_j e^{jz} = \sum_{j=0}^{j=J} a_j (e^z)^j = P(e^z)$$

$$h(z) = \sum_{k=0}^{k=K} b_k e^{\beta_k z},$$

où P est le polynôme défini par $P(u) = \sum_{j=0}^{j=J} a_j u^j$. Soit $u_0, \ldots, u_J$ les zéros de P (tous non nuls puisque $a_0 \neq 0$) et $\omega_0, \ldots, \omega_J$ des nombres complexes tels que $e^{\omega_j} = u_j$ pour $0 \leqslant j \leqslant J$. Un zéro de g s'écrit

$$\omega = \omega_j + 2im\pi$$

où $m \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant j \leqslant J$. S'il existait une infinité de zéros communs pour g et h on aurait alors

$$\sum_{k=0}^{k=K} b_k e^{\beta_k(\omega_j + 2im\pi)} = \sum_{k=0}^{k=K} b_k e^{\beta_k \omega_j} (e^{2i\beta_k \pi})^m = 0$$

pour un certain j et une infinité de valeurs de $m \in \mathbb{Z}$.

On utilise alors le théorème suivant[6], lié à l'analyse p-adique.

THÉORÈME (Skolem-Malher-Lech). — *Soient $v_1, \ldots, v_L, w_1, \ldots, w_L$, des nombres complexes non nuls. Si $\sum_{\ell=1}^{\ell=L} v_\ell w_\ell^n = 0$ pour une infinité de valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ alors, il existe un couple d'entiers ℓ et ℓ', avec $\ell \neq \ell'$, tel que $w_\ell / w_{\ell'}$ soit une racine complexe de l'unité.*

---

[6] voir [Lec], pages 417-421.

Ici, $\sum_{k=0}^{k=K} b_k e^{\beta_k \omega_j} (e^{2i\beta_k \pi})^m$ ne peut s'annuler pour une infinité de valeurs de m sinon on obtiendrait, par le théorème de Skolem-Malher-Lech, un couple (k, ℓ), $k \neq \ell$, tel que $e^{2i\pi\beta_k}/e^{2i\pi\beta_\ell}$ soit une racine complexe de l'unité, ce qui est contraire à l'hypothèse $\beta_k - \beta_\ell \notin \mathbb{Q}$ si $k \neq \ell$. □

1.2. Le cas complexe.

Ici on s'intéresse aux systèmes de deux équations à pas non récurrents, pour les fonctions entières.

PROPOSITION 1.2. — *Soit f une fonction entière solution du système*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{j=J} a_j f(z+\alpha_j) = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=K} b_k f(z+\beta_k) = 0, \end{cases}$$

où les a_j et b_k sont des nombres complexes non nuls, les α_k et β_j sont des nombres complexes distincts tels que (voir figure 1)

1) $\alpha_0 = \beta_0 = 0$,

2) $\forall j \in \{1, \dots, J\},\ 0 < \Re(\alpha_j),\ 0 < \Im(\alpha_j)$,

3) $\forall j \in \{0, \dots, J-1\},\ \Re(\alpha_j) < \Re(\alpha_J),\ \Im(\alpha_j) < \Im(\alpha_J)$,

4) $\forall k \in \{1, \dots, K\},\ 0 < \Re(\beta_k),\ 0 > \Im(\beta_k)$,

5) $\forall k \in \{0, \dots, K-1\},\ \Re(\beta_k) < \Re(\beta_K),\ \Im(\beta_k) > \Im(\beta_K)$.

Dans ces conditions, f est un polynôme exponentiel.

Démonstration. — Comme au paragraphe 1.1 on montre que les fonctions entières

$$g(z) = \sum_{j=0}^{j=J} a_j e^{\alpha_j z} \mathrm{et} h(z) = \sum_{k=0}^{k=K} b_k e^{\beta_k z},$$

n'ont qu'un nombre fini de zéros communs. Pour cela, on va montrer l'assertion plus forte :

$$\exists R > 0, \exists C > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant R \Longrightarrow |g(z)| + |h(z)| \geqslant C.$$

Grâce à l'hypothèse 2, choisissons $\varepsilon_1 > 0$ tel que pour $j = 1, \dots, J$,

$$\varepsilon_1 \leqslant \arg(\alpha_j) \leqslant \pi/2 - \varepsilon_1.$$

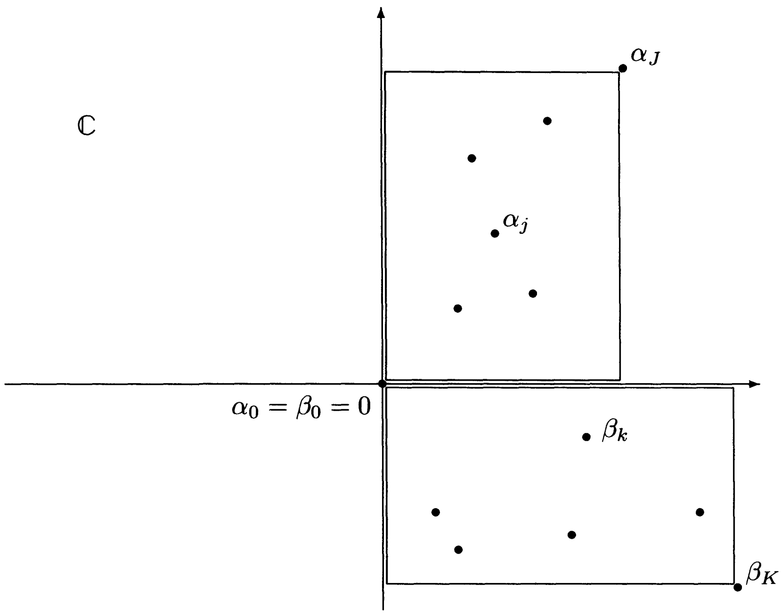

Figure 1

Soit z tel que $\pi/2 \leqslant \arg(z) \leqslant \pi$, alors

$$\pi/2 + \varepsilon_1 \leqslant \arg(\alpha_j z) \leqslant 3\pi/2 - \varepsilon_1,$$

la condition ci-dessus implique que pour $j \in \{1, \ldots, J\}, |e^{\alpha_j z}| = e^{\Re(\alpha_j z)}$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini, on en déduit que $|g(z)| \geqslant |a_0|/2$ dès que

$$\pi/2 \leqslant \arg(z) \leqslant \pi \text{ et } |z| \geqslant R_1,$$

donc

$$\exists R_1 > 0, \exists C_1 > 0, \ (|z| \geqslant R_1 \text{ et } \pi/2 \leqslant \arg(z) \leqslant \pi) \Rightarrow |g(z)| \geqslant C_1.$$

On a minoré $|g(z)|$, dans le quart supérieur gauche du plan complexe, on va maintenant minorer $|g(z)|$ dans le quart inférieur droit grâce à l'hypothèse 3. Pour cela, factorisons $e^{\alpha_J z}$ dans $g(z)$, on obtient : $g(z) = e^{\alpha_J z}(a_0 e^{-\alpha_J z} + \cdots + a_{J-1} e^{(\alpha_{J-1} - \alpha_J) z} + a_J)$, et remarquons qu'il existe $\varepsilon_2 > 0$, tel que

$$\text{pour } j = 0, \ldots, J-1; \ \pi + \varepsilon_2 \leqslant \arg(\alpha_j - \alpha_J) \leqslant 3\pi/2 - \varepsilon_2.$$

Soit z tel que $3\pi/2 \leqslant \arg(z) \leqslant 2\pi$, on a

$$\pi/2 + \varepsilon_2 \leqslant \arg((\alpha_j - \alpha_J)z) \leqslant 3\pi/2 - \varepsilon_2.$$

Dans ces conditions $\Re(\alpha_J z) \geqslant 0$, donc dans la factorisation de g on a $|e^{\alpha_J z}| \geqslant 1$ et $|a_0 e^{-\alpha_J z} + \cdots + a_{J-1} e^{(\alpha_{J-1}-\alpha_J)z} + a_J| \geqslant |a_J|/2$, dès que $|z|$ est assez grand, ainsi

$$\exists R_2 > 0, \exists C_2 > 0,\ (|z| \geqslant R_2 \text{ et } 3\pi/2 \leqslant \arg(z) \leqslant 2\pi) \Rightarrow |g(z)| \geqslant C_2.$$

De façon similaire pour h (on utilise les hypothèses 3 et 4), on prouve

$$\exists R_3 > 0, \exists C_3 > 0,\ (|z| \geqslant R_3 \text{ et } 0 \leqslant \arg(z) \leqslant \pi/2) \Rightarrow |h(z)| \geqslant C_3$$

$$\exists R_4 > 0, \exists C_4 > 0,\ (|z| \geqslant R_4 \text{ et } \pi \leqslant \arg(z) \leqslant 3\pi/2) \Rightarrow |h(z)| \geqslant C_4.$$

Soit $R = \max\{R_1; R_2; R_3; R_4\}$ et $C = \min\{C_1; C_2; C_3; C_4\}$, on a donc

$$\exists R > 0, \exists C > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant R \Longrightarrow |g(z)| + |h(z)| \geqslant C.$$

Ainsi g et h n'ont qu'un nombre fini de zéros communs et f est donc un polynôme exponentiel. □

1.3. Une remarque concernant une conjecture de Shapiro.

On a vu que l'on était amené, aussi bien dans le cas réel que complexe, à montrer la finitude de l'ensemble des zéros communs des fonctions entières

$$g(z) = \sum_{j=0}^{j=J} a_j e^{\alpha_j z},$$

$$h(z) = \sum_{k=0}^{k=K} b_k e^{\beta_k z}.$$

Une conjecture de Shapiro[7] affirme la chose suivante :

Conjecture. — *Soit E_0 l'anneau des fonctions entières de la forme $\sum_{n=0}^{n=N} c_n e^{\omega_n z}$, si g et h sont deux éléments de E_0 ayant un nombre infini de zéros communs, alors il existe ℓ dans E_0 qui n'est pas une unité et qui divise simultanément g et h.*

---

[7] [BrGa] page 243, 3.2.25 remarque 4, et aussi [TDN],[Ri1],[Ri2],[Ri3].

Considérons $\alpha_0, \ldots, \alpha_J$ et $\beta_0, \ldots, \beta_K$ tels que

$$(\mathrm{I}) \qquad < \alpha_j > \cap < \beta_k >= \{0\}.$$

On peut montrer que cette hypothèse implique que les fonctions entières $g(z) = \sum_{j=0}^{j=J} a_j e^{\alpha_j z}$ et $h(z) = \sum_{k=0}^{k=K} b_k e^{\beta_k z}$ n'ont pas de diviseur commun autre qu'une unité[8]. Il en résulterait, si la conjecture de Shapiro était avérée, que g et h n'ont qu'un nombre fini de zéros communs, et donc que toute solution f de

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{j=J} a_j f(x+\alpha_j) = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=K} b_k f(x+\beta_k) = 0, \end{cases}$$

est un polynôme exponentiel, d'après le théorème de synthèse spectrale dans le cas réel-continu et le théorème de Gel'fond dans le cas complexe-holomorphe, pourvu que la condition (I) soit remplie.

Tout ceci donnerait un large éventail de α_j et β_k pour lesquels on saurait résoudre les systèmes de deux équations aux différences à coefficients constants. Nous verrons au paragraphe 3.3, une conjecture sur les équations à coefficients polynomiaux que l'on peut déduire du cas à coefficients constants.

2. Le cas polynomial. La technique de réduction.

Dans le cas de deux équations à coefficients polynomiaux, une technique de réduction au cas à coefficients constants est exposée dans [BG1] et complétée dans [BG2]. Elle est ici reprise pour l'essentiel, mais simplifiée grâce au lemme 2.4; de plus, sous ce nouvel angle, elle s'adapte à des cas plus généraux que celui des équations avec pas récurrents.

Notation. — Dans toute la partie 2, on travaille indifféremment dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On désignera par $\leqslant$, l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ ou l'ordre lexicographique sur $\mathbb{C}$. On supposera $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{J-1} < \alpha_J$ et $0 < \beta_1 < \cdots < \beta_{K-1} < \beta_K$.

---

8 [BrGa] page 199, proposition 3.1.1.

Pour deux opérateurs dans **B**

$$R = \sum_{j=0}^{j=J} a_j(x) T^{\alpha_j}$$
$$S = \sum_{k=0}^{k=K} b_k(x) T^{\beta_k},$$

où les a_j et b_k sont des éléments de $\mathbb{C}[x]$, on note M et N les entiers suivants :

$$M = \max_{0 \leqslant j \leqslant J} \{ \text{ degré } (a_j)\} \text{ et } N = \max_{0 \leqslant k \leqslant K} \{ \text{ degré } (b_k)\}.$$

En utilisant la relation de commutation (C) de l'introduction, on écrit R et S sous la forme suivante :

$$R = \sum_{m=0}^{m=M} P_m x^m$$
$$S = \sum_{n=0}^{n=N} Q_n x^n,$$

où les P_m et les Q_n sont dans **A**, les exposants apparaissant dans les P_m (resp. dans les Q_n) sont des α_j (resp. des β_k). De plus P_M et Q_N sont non nuls. On a la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. — *Soient R et S deux éléments de* **B**,

$$R = \sum_{j=0}^{j=J} a_j(x) T^{\alpha_j} = \sum_{m=0}^{m=M} P_m x^m$$
$$S = \sum_{k=0}^{k=K} b_k(x) T^{\beta_k} = \sum_{n=0}^{n=N} Q_n x^n,$$

où les a_j et b_k sont des polynômes non nuls, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{J-1} < \alpha_J$ et $0 < \beta_1 < \cdots < \beta_{K-1} < \beta_K$. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal (à gauche) de **B** *engendré par R et S.*

Si a_0 et b_0 sont premiers entre eux et si les α_j et β_k satisfont la condition

$$(\mathrm{I}) \qquad < \alpha_j > \cap < \beta_k > = \{0\},$$

alors il existe deux entiers naturels r et s tels que P_M^r et Q_N^s soient dans $\mathcal{I}$.

La preuve de la proposition 2.1 se fait en plusieurs étapes, c'est l'objet des paragraphes 2.1, 2.2 et 2.3. Le cas où a_0 et b_0 ne sont pas premiers entre eux est traité au paragraphe 2.4.

2.1. La technique de réduction, introduction et lemmes.

Les lemmes 2.2 et 2.3 qui suivent sont démontrés dans [BG1][9], les auteurs y considèrent l'idéal annulateur de f au lieu d'un idéal $\mathcal{J}$ de $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{B}$, mais cela ne change rien à la démonstration, qui est de nature algébrique.

LEMME 2.2. — *Soit $\mathcal{J}$ un idéal à gauche de $\mathbf{B}$. Soient P un élément de $\mathbf{A}$ et L un entier naturel. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $Px^\ell \in \mathcal{J}, \text{pour} 0 \leqslant \ell \leqslant L$

ii) $\tau^\ell(P) \in \mathcal{J}$, *pour* $0 \leqslant \ell \leqslant L$.

LEMME 2.3. — *Soit $\mathcal{J}$ un idéal de $\mathbf{A}$. Soient P et Q deux éléments de $\mathbf{A}$. Si pour tout entier L et pour $0 \leqslant \ell \leqslant L$, $\tau^\ell(PQ^L) \in \mathcal{J}$, alors, pour tout entier k*

$$\tau^k(P)Q^{k(k+1)/2} \in \mathcal{J}.$$

LEMME 2.4. — *Soit $P = \sum_{n=0}^{n=N} c_n T^{\omega_n}$, un élément non nul de $\mathbf{A}$. Alors il existe des nombres complexes $d_0, \ldots, d_N$, tels que $\sum_{n=0}^{n=N} d_n \tau^n(P)$ soit une unité de $\mathbf{A}$.*

Démonstration. — On fait une récurrence sur N. Pour $N = 0$, P est une unité. Supposons l'assertion vraie au rang $N-1$. Soit $P = \sum_{n=0}^{n=N} c_n T^{\omega_n}$, on a alors

$$\tau(P) - \omega_N P = \sum_{n=0}^{n=N-1} c_n(\omega_n - \omega_N)T^{\omega_n}.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\tau(P) - \omega_N P$, on obtient le résultat recherché. □

On reprend maintenant les notations et les hypothèses de la proposition 2.1. Soient R et S deux éléments de $\mathbf{B}$,

$$R = \sum_{m=0}^{m=M} P_m x^m \tag{4}$$

[9] Page 798, lemmes 3.2 et 3.3.

$$S = \sum_{n=0}^{n=N} Q_n x^n. \tag{5}$$

On rappelle que $\mathcal{I}$ est l'idéal à gauche de $\mathbf{B}$ qu'ils engendrent. On va supposer pour la suite que M ou N n'est pas nul, sinon on a évidemment terminé en prenant $r = s = 1$.

On va obtenir de nouveaux éléments de $\mathcal{I}$ par multiplication à gauche de (4) par $x, x^2, \dots, x^{N-1+L}$ et de (5) par $x, x^2, \dots, x^{M-1}$, où L est un entier naturel quelconque.

On obtient ainsi une famille de $M+N+L$ éléments de $\mathcal{I}$. La relation de commutation (relation (C) dans l'introduction) permet de mettre les $N+L$ premiers éléments de cette famille sous la forme

$$\sum_{m=0}^{m=M+i} P_m^{(i)} x^m, \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant N-1+L,$$

où les $P_m^{(i)}$ appartiennent à $\mathbf{A}$. Pour $i=0$, on a $P_m^{(0)} = P_m$ pour $0 \leqslant m \leqslant M$.

Enfin, on a la relation de récurrence

$$P_m^{(i+1)} = P_{m-1}^{(i)} - \tau(P_m^{(i)}) \text{ et } P_0^{(i+1)} = -\tau(P_0^{(i)}).$$

De même, les M derniers éléments de cette famille s'écrivent

$$\sum_{n=0}^{n=N+j} Q_n^{(j)} x^n, \text{ pour } 0 \leqslant j \leqslant M-1,$$

où les $Q_n^{(j)}$ appartiennent à $\mathbf{A}$. Pour $j=0$, on a $Q_n^{(0)} = Q_n$ pour $0 \leqslant n \leqslant N$. Et on a la relation de récurrence

$$Q_n^{(j+1)} = Q_{n-1}^{(j)} - \tau(Q_n^{(j)}) \text{ et } Q_0^{(j+1)} = -\tau(Q_0^{(j)}).$$

Il est important de remarquer que les exposants apparaissant dans les $P_m^{(i)}$ (resp. dans les $Q_n^{(j)}$) sont des α_j (resp. des β_k).

Soit A la matrice formée à partir des $P_m^{(i)}$ et $Q_n^{(j)}$.

Explicitement, A est la matrice

$$\begin{pmatrix}
P_M & \cdots & & & & & & & & & & & \\
0 & P_M & \cdots & & & & & & & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & P_M & \cdots & & & & & & & & \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & P_M & \cdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & P_M & \cdots & & & & & & \\
\vdots & & & & \vdots & 0 & P_M & \cdots & & & & & \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & & & \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & \ddots & P_M & P_{M-1}-\tau(P_M) & \cdots & & -\tau(P_0) \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & P_M & P_{M-1} & \cdots & P_0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & Q_N & \cdots & & & & & & \\
\vdots & & & & \vdots & 0 & Q_N & \cdots & & & & & \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & & & \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & \ddots & Q_N & Q_{N-1}-\tau(Q_N) & \cdots & & -\tau(Q_0) \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & Q_N & Q_{N-1} & \cdots & Q_0
\end{pmatrix}$$

En faisant le produit matriciel de A par le vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} x^{M+N+L-1} \\ \vdots \\ x^{M+N} \\ x^{M+N-1} \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{pmatrix},$$

on obtient ainsi les $M+N+L$ éléments de $\mathcal{I}$ mentionnés précédemment[10].

2.2. Le cas triangulaire.

On suppose ici $N=0$ (les b_k sont des constantes) et $M \geqslant 1$. C'est-à-dire que l'on a

$$R = \sum_{m=0}^{m=M} P_m x^m$$
$$S = Q_0 \in \mathbf{A}.$$

10 Pour plus de détails sur A, on pourra se reporter à [BG1].

Dans ce cas, la matrice A se trouve considérablement simplifiée, multiplions-la (à gauche) par sa comatrice, on trouve

$$\det(A)x^\ell \in \mathcal{I}, \text{ pour } 0 \leqslant \ell \leqslant M+L-1.$$

Mais $\det(A) = P_M^L Q_0^M$, on déduit du lemme 2.2 que $\tau^\ell(P_M^L Q_0^M) \in \mathcal{I}$, pour $0 \leqslant \ell \leqslant L$ et pour tout $L \in \mathbb{N}$. Le lemme 2.3 donne alors, pour tout entier ℓ

$$\tau^\ell(Q_0^M) P_M^{\ell(\ell+1)/2} \in \mathcal{I}. \tag{6}$$

Comme Q_0 n'est pas nul, il en est de même pour Q_0^M. Soit $I+1$ le nombre de termes de Q_0^M, par le lemme 2.4, il existe des nombres complexes $d_0, \dots, d_I$ tels que

$$\sum_{i=0}^{i=I} d_i \tau^i(Q_0^M) = u,$$

soit une unité de $\mathbf{A}$. On a alors par (6)

$$\sum_{i=0}^{i=I} d_i \tau^i(Q_0^M) P_M^{I(I+1)/2} \in \mathcal{I},$$

car on reste dans l'algèbre $\mathbf{A}$ qui est commutative. Ceci donne

$$u P_M^{I(I+1)/2} \in \mathcal{I},$$

après multiplication par u^{-1}, on obtient le résultat souhaité : un opérateur de translation de la forme P_M^r ($r = \frac{1}{2}I(I+1)$) dans $\mathcal{I}$. $\square$

2.3. Le cas général avec résultant non nul.

Ici, on suppose M et N non nuls, et on reprend les notations des paragraphes 2.1 et 2.2. La matrice A définie à la fin du paragraphe 2.1 vérifie alors $\det(A) = P_M^L \det(B)$, où

$$B = \begin{pmatrix} P_M & \dots & & & & & & \\ 0 & P_M & \dots & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\ \vdots & & \ddots & P_M & P_{M-1} - \tau(P_M) & \dots & & -\tau(P_0) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & P_M & P_{M-1} & \dots & P_0 \\ Q_N & \dots & & & & & & \\ 0 & Q_N & \dots & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\ \vdots & & \ddots & Q_N & Q_{N-1} - \tau(Q_N) & \dots & & -\tau(Q_0) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & Q_N & Q_{N-1} & \dots & Q_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} N \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} M \end{matrix}$$

B est appelé le *résultant* du système (4) et (5). On a le lemme

LEMME 2.5. — *Si a_0 et b_0 sont premiers entre eux, alors* $\det(B)$ *est non nul.*

On fait ici deux remarques préliminaires.

1. On va tout d'abord appeler *évaluation en zéro* d'un élément $R \in \mathbf{A}$, et noter $R(0)$, le terme en T^0 de R, par exemple $(2T^0 + 3T^1)(0) = 2$. Pour tout $R, S \in \mathbf{A}, \lambda \in \mathbb{C}$, on a $\tau(R)(0) = 0$, $(R+S)(0) = R(0) + S(0)$ et $(\lambda R)(0) = \lambda R(0)$.

Appelons $\mathbf{A}'$ la sous-algèbre de $\mathbf{A}$ engendrée par les $T^{\alpha_0}, \ldots, T^{\alpha_J}$, $T^{\beta_0}, \ldots, T^{\beta_K}$. Explicitement, un élément de $\mathbf{A}'$ s'écrit $\sum c_n T^{\mu_n}$, où μ_n est une combinaison linéaire à coefficients entiers naturels des α_j et β_k.

Montrons que pour R et S appartenant à $\mathbf{A}'$, on a

$$(RS)(0) = R(0)S(0).$$

En effet, écrivons $R = R(0) + \sum c_n T^{\mu_n}$ et $S = S(0) + \sum c'_n T^{\mu'_n}$ (où les μ_n et μ'_n sont strictement plus grands que 0), on a alors $RS = R(0)S(0) + \sum c''_m T^{\mu''_m}$, où $\mu''_m > 0$. Ce qui prouve notre assertion.

On peut résumer cela en disant que $\mathbf{A}' \to \mathbb{C}$, $R \mapsto R(0)$ est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres.

Une conséquence de l'existence de ce morphisme est que pour $R_{i,j} \in \mathbf{A}'$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, on a

$$\big(\det(R_{i,j})\big)(0) = \det\big(R_{i,j}(0)\big). \qquad \square$$

2. Remarquons ensuite, grâce à un calcul, que

$$a_0(x) = \sum_{m=0}^{m=M} P_m(0) x^m$$
$$b_0(x) = \sum_{n=0}^{n=N} Q_n(0) x^n.$$

Explicitons le calcul pour la première relation

$$\sum_{j=0}^{j=J} a_j(x) T^{\alpha_j} = \sum_{m=0}^{m=M} P_m x^m = P_0(0) + P_1(0)x + \cdots + P_M(0)x^M + \sum_{j=1}^{j=J} T^{\alpha_j} c_j(x),$$

comme $T^{\alpha_j}c_j(x) = c_j(x+\alpha_j)T^{\alpha_j}$, l'unicité de l'écriture permet de conclure que $a_0(x) = \sum_{m=0}^{m=M} P_m(0)x^m$ et $a_j(x) = c_j(x+\alpha_j)$, pour $j \geqslant 1$. $\square$

Démonstration (Lemme 2.5). — Appelons M' le degré de a_0 et N' le degré de b_0.

On va d'abord montrer que l'évaluation en zéro du déterminant de la matrice C formée des $M+N'$ *dernières lignes et colonnes de* B est non nulle. On utilise pour cela la remarque 1 ci-dessus, $\det(C)(0)$ est égal à

$$\begin{array}{|cccccccccc|l}
0 & \dots & 0 & P_{M'}(0) & \dots & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & 0 & P_{M'}(0) & \dots & & & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \Big\} N' \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & P_{M'}(0) & P_{M'-1}(0) & \dots & P_0(0) & \\
Q_{N'}(0) & \dots & & & & & & & & & \\
\vdots & \ddots & & & & & & & & & \Big\} M-M' \\
0 & \dots & Q_{N'}(0) & \dots & & & & & & & \\
0 & \dots & 0 & Q_{N'}(0) & \dots & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & 0 & Q_{N'}(0) & \dots & & & & & \Big\} M' \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & Q_{N'}(0) & Q_{N'-1}(0) & \dots & Q_0(0) &
\end{array}$$

En utilisant la remarque 2, on voit que ceci est égal à : $Q_{N'}^{M-M'}(0)\mathcal{R}(a_0,b_0)$, où $\mathcal{R}(a_0,b_0)$ est le résultant de Sylvester des polynômes a_0 et b_0 . Il s'agit donc d'un nombre complexe non nul que l'on va appeler ν pour la suite,

$$\nu = \det C(0) \neq 0.$$

Notons $B_{i,j}$ les coefficients de la matrice B. *Il est important de remarquer que* $B_{i,j}(0) = 0$ *pour* $i \geqslant N+1$ *et* $1 \leqslant j \leqslant N-N'$.

Si $N = N'$ alors $C = B$ et on a directement $\det(B)(0) = \nu$, et donc $\det(B)$ est non nul. Sinon on développe $\det(B)$ suivant la première colonne et on cherche un terme de $\det(B)$ ayant un exposant dans $< \alpha_j >$. On a

$$\det(B) = B_{1,1}\Psi_1 \pm B_{N+1,1}\Psi_2 = P_M\Psi_1 \pm Q_N\Psi_2,$$

où Ψ_1 et Ψ_2 sont les déterminants obtenus en éliminant de B la première colonne et la première ligne pour l'un, et la première colonne et la $N+1^{\text{ème}}$ ligne pour l'autre.

Un éventuel terme de $\det(B)$ ayant son exposant dans $< \alpha_j >$ ne peut se trouver dans $Q_N\Psi_2$ pour les raisons suivantes. On a $Q_N(0) = 0$, donc $Q_N = c_1T^{\beta_1} + \cdots + c_KT^{\beta_K}$, ainsi $Q_M\Psi_2$ ne contient que des termes ayant des exposants de la forme

$$\beta_\ell + \sum_{0\leqslant j\leqslant J} m_j\alpha_j + \sum_{0\leqslant k\leqslant K} m'_k\beta_k, \text{ où } 1 \leqslant \ell \leqslant K,\ m_j \in \mathbb{N},\ m'_k \in \mathbb{N},$$

or, un tel exposant ne peut être dans $< \alpha_j >$ sinon on aurait

$$\beta_\ell + \sum_{0\leqslant j\leqslant J} m_j\alpha_j + \sum_{0\leqslant k\leqslant K} m'_k\beta_k = \sum_{0\leqslant j\leqslant J} m''_j\alpha_j,\ m''_j \in \mathbb{Z},$$

ce qui implique $\sum_{0\leqslant j\leqslant J}(m''_j - m_j)\alpha_j = \sum_{0\leqslant k\leqslant K}(m'_k + \delta_{k,\ell})\beta_k$ (ici, δ est le symbole de Kronecker), or, comme $< \alpha_j > \cap < \beta_k >= \{0\}$, cela donne $\sum_{0\leqslant k\leqslant K}(m'_k + \delta_{k,\ell})\beta_k = 0$, ce qui contredit le fait que $\beta_k > 0$ si $k > 0$ (car $\ell \geqslant 1$ et $m'_k \in \mathbb{N}$).

On en tire cette première conclusion : les termes de $\det(B)$ ayant leurs exposants dans $< \alpha_j >$ sont exclusivement contenus dans $P_M\Psi_1$.

On procède ainsi de proche en proche, en développant suivant les colonnes, pour voir que les éventuels termes de $\det(B)$ ayant leurs exposants dans $< \alpha_j >$ se trouvent dans le produit de $P_M^{N-N'}$ par le déterminant de C.

Explicitons P_M,

$$P_M = d_\ell T^{\alpha_\ell} + d_{\ell+1}T^{\alpha_{\ell+1}} + \cdots + d_JT^{\alpha_J}, \text{ avec } d_\ell \neq 0,$$

alors

$$P_M^{N-N'} = d_\ell^{N-N'}T^{(N-N')\alpha_\ell} + c_1T^{\xi_1} + \cdots + c_pT^{\xi_p},$$
$$\text{où } (N - N')\alpha_\ell < \xi_i, \text{pour} 1 \leqslant i \leqslant p.$$

Par ailleurs

$$\det(C) = \nu T^0 + \nu_1T^{\mu_1} + \cdots + \nu_qT^{\mu_q}, \text{ où } \mu_j > 0, \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant q.$$

On trouve donc

$$P_M^{N-N'}\det(C) = \nu d_\ell^{N-N'}T^{(N-N')\alpha_\ell} + \cdots$$

où les termes qui suivent ont des exposants différents de $(N - N')\alpha_\ell$. Ainsi, $\det(B)$ contient un seul terme d'exposant $(N - N')\alpha_\ell$ à savoir le terme $\nu d_\ell^{N-N'}T^{(N-N')\alpha_\ell}$. On en déduit que $\det(B)$ n'est pas nul. Ce qui achève la preuve du lemme 2.5. □

On peut maintenant montrer la proposition 2.1.

Démonstration (Proposition 2.1). — On a remarqué au début du paragraphe 2.3 que $\det(A) = P_M^L \det(B)$, comme $\det(B)$ est non nul d'après le lemme 2.5, on déduit par une démonstration identique au cas triangulaire (où on remplace simplement Q_0^M par $\det(B)$) qu'il existe un entier naturel r tel que $P_M^r \in \mathcal{I}$. En échangeant le rôle des P_m et des Q_n, on montre qu'il existe aussi un entier naturel s tel que $Q_N^s \in \mathcal{I}$. □

2.4. Le cas général.

Ici, on reprend ce qui a été dit précédemment, mais on ne suppose plus a_0 et b_0 premiers entre eux (le résultant pouvant dans ce cas être nul). La méthode consiste en une adaptation de l'exposé de J.-P. Bézivin et F. Gramain figurant dans [BG2]. Ici, on ne travaille plus avec deux suites arithmétiques $0, \alpha, 2\alpha, \ldots, J\alpha$ et $0, \beta, 2\beta, \ldots, K\beta$ mais $0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_J$ et $0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$; toutefois, un examen minutieux des preuves des auteurs précités montre que la condition véritablement cruciale est l'unicité de l'écriture des nombres $n\alpha + m\beta$, $n, m \in \mathbb{N}$, qui résulte du fait que α et β sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. L'idée consiste alors à construire deux suites $(\tilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{\beta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : pour $0 \leqslant n \leqslant J$, on pose $\tilde{\alpha}_n = \alpha_n$. Puis, on considère l'ensemble D des éléments de la forme

$$\sum_{j=0}^{j=J} n_j \alpha_j, \text{ avec } n_j \in \mathbb{N}.$$

Soit $D' = D \setminus \{\alpha_0, \ldots, \alpha_J\}$, cet ensemble D' est infini dénombrable. Soit ψ une bijection de $\mathbb{N}$ sur D'. Les éléments de la suite $(\tilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis, pour $n > J$, par

$$\tilde{\alpha}_n = \psi(n - J - 1).$$

Cette suite $(\tilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a tous ses éléments *distincts* et comprend l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers naturels des $\alpha_0, \ldots, \alpha_J$. On a l'inclusion, valable pour $1 \leqslant j \leqslant J$,

$$\{\alpha_j + \tilde{\alpha}_n |\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{\tilde{\alpha}_n |\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}. \tag{7}$$

On construit une suite $(\tilde{\beta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de façon similaire. La condition $(I) < \alpha_j > \cap < \beta_k >= \{0\}$ implique

$$\tilde{\alpha}_m - \tilde{\alpha}_{m'} = \tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n'} \Longrightarrow m = m' \mathrm{et} n = n'. \tag{8}$$

Dans [BG2], la condition (8) intervient dans le lemme 3.1 page 469, la condition (7) est utilisée page 472, lignes 3 et 4. Le reste de la preuve se déroule de la même manière que dans [BG2], on a donc la

Proposition 2.6. — *Soient R et S deux éléments de* $\mathbf{B}$ *et $\mathcal{I}$ l'idéal à gauche qu'ils engendrent,*

$$R = \sum_{j=0}^{j=J} a_j(x) T^{\alpha_j} = \sum_{m=0}^{m=M} P_m x^m$$
$$S = \sum_{k=0}^{k=K} b_k(x) T^{\beta_k} = \sum_{n=0}^{n=N} Q_n x^n.$$

Si les α_k et β_j satisfont $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ et

$$< \alpha_j > \cap < \beta_k >= \{0\}, \tag{I}$$

alors il existe des polynômes non nuls $H, \tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_J, \tilde{b}_0, \ldots, \tilde{b}_K$ de $\mathbb{C}[x]$, tels que $\tilde{a}_0$ et $\tilde{b}_0$ soient premiers entre eux et

$$\Big(\sum_{j=0}^{j=J} \tilde{a}_j(x) T^{\alpha_j}\Big) H \in \mathcal{I}$$
$$\Big(\sum_{k=0}^{k=K} \tilde{b}_k(x) T^{\beta_k}\Big) H \in \mathcal{I}.$$

Corollaire. — Si de plus les α_j et β_k sont ordonnés de telle sorte que $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_J$ et $0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_K$ alors, en notant

$$\tilde{R} = \sum_{j=0}^{j=J} \tilde{a}_j(x) T^{\alpha_j} = \sum_{m=0}^{m=M'} \tilde{P}_m x^m$$
$$\tilde{S} = \sum_{k=0}^{k=K} \tilde{b}_k(x) T^{\beta_k} = \sum_{n=0}^{n=N'} \tilde{Q}_n x^n,$$

il existe deux entiers r et s tels que $\tilde{P}^r_{M'} H$ et $\tilde{Q}^s_{N'} H$ soient dans $\mathcal{I}$. De plus, les exposants apparaissant dans $\tilde{P}_{M'}$ (resp. dans $\tilde{Q}_{N'}$) sont des α_j (resp. des β_k).

Démonstration. — Le corollaire est une conséquence des propositions 2.6 et 2.1. □

3. Les équations aux différences à coefficients polynomiaux.

3.1. Le cas d'une équation à pas récurrents.

Dans ce paragraphe, on se place dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ordre $\leqslant$ qui y est défini est l'ordre usuel ou l'ordre lexicographique, suivant les cas.

THÉORÈME 3.1. — *Soit f une fonction d'une variable réelle (resp. complexe), continue (resp. entière), solution de*

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{j=J} a_j(x)f(x+j) = 0 \\ \sum_{k=0}^{k=K} b_k(x)f(x+\beta_k) = 0, \end{cases}$$

où $a_0, a_J, b_0, b_1, \ldots, b_K$ sont des polynômes non nuls à coefficients complexes, et les β_k sont des nombres réels (resp. complexes) satisfaisant $\beta_0 = 0 < \beta_1 < \cdots < \beta_K$ et

$$\text{(I)} \qquad < \beta_k > \cap\, \mathbb{Z} = \{0\},$$

alors f est une fraction exponentielle.

Démonstration. — Si a_0 et b_0 sont premiers entre eux, on applique la proposition 2.1. En notant

$$R = \sum_{j=0}^{j=J} a_j(x)T^j = \sum_{m=0}^{m=M} P_m x^m$$
$$S = \sum_{k=0}^{k=K} b_k(x)T^{\beta_k} = \sum_{n=0}^{n=N} Q_n x^n.$$

On obtient, $P_M^r f = 0$ et $Q_N^s f = 0$, avec

$$P_M^r = a'_0T^0 + a'_1T^1 + \cdots + a'_{K'}T^{K'}$$
$$Q_N^s = b'_0T^{\xi_0} + b'_1T^{\xi_1} + \cdots + b'_LT^{\xi_L},$$

où pour $0 \leqslant \ell \leqslant L$, ξ_ℓ est de la forme $\sum_{k=0}^{k=K} m_{\ell,k}\beta_k$, $m_{\ell,k} \in \mathbb{N}$, les ξ_ℓ étant distincts.

Vérifions que l'on se trouve dans les conditions d'application du théorème 1.1. Si $\xi_{\ell_1} - \xi_{\ell_2} \in \mathbb{Q}$, alors $\sum_{k=0}^{k=K} m_{\ell_1,k}\beta_k - \sum_{k=0}^{k=K} m_{\ell_2,k}\beta_k = p/q$ et donc $\sum_{k=0}^{k=K} q(m_{\ell_1,k} - m_{\ell_2,k})\beta_k = p \in \mathbb{Z}$. La condition $< \beta_k > \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ implique $p = 0$ puis $\xi_{\ell_1} = \xi_{\ell_2}$. On conclut par le théorème 1.1 : f est un polynôme exponentiel.

Si a_0 et b_0 ne sont pas premiers entre eux, on applique le corollaire de la proposition 2.6 qui permet de trouver un polynôme H tel que $\tilde{P}^r_{M'}Hf = 0$ et $\tilde{Q}^s_{N'}Hf = 0$. L'étude du cas précédent montre que Hf est un polynôme exponentiel et donc f est une fraction exponentielle. □

3.2. Le cas complexe.

Dans ce paragraphe on considère les solutions entières de système de deux équations à pas non récurrents.

THÉORÈME 3.2. — *Soit f une fonction entière solution de*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{j=J} a_j(z)f(z+\alpha_j) = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=K} b_k(z)f(z+\beta_k) = 0, \end{cases}$$

où chaque a_j et chaque b_k est un polynôme non nul. Par ailleurs, on suppose que les α_j et β_k satisfont (voir figure 2)

1) $\alpha_0 = \beta_0 = 0$,

2) $< \alpha_j > \cap < \beta_k >= \{0\}$,

3) *la suite $\Re(\alpha_j)$ est strictement croissante,*

4) *la suite $\Im(\alpha_j)$ est strictement croissante,*

5) *la suite $\Re(\beta_k)$ est strictement croissante,*

6) *la suite $\Im(\beta_k)$ est strictement décroissante.*

Dans ces conditions, f est une fraction exponentielle.

Démonstration. — Si a_0 et b_0 sont premiers entre eux. On pose

$$R = \sum_{j=0}^{j=J} a_j(z)T^{\alpha_j} = \sum_{m=0}^{m=M} P_m z^m$$

$$S = \sum_{k=0}^{k=K} b_k(z)T^{\beta_k} = \sum_{n=0}^{n=N} Q_n z^n.$$

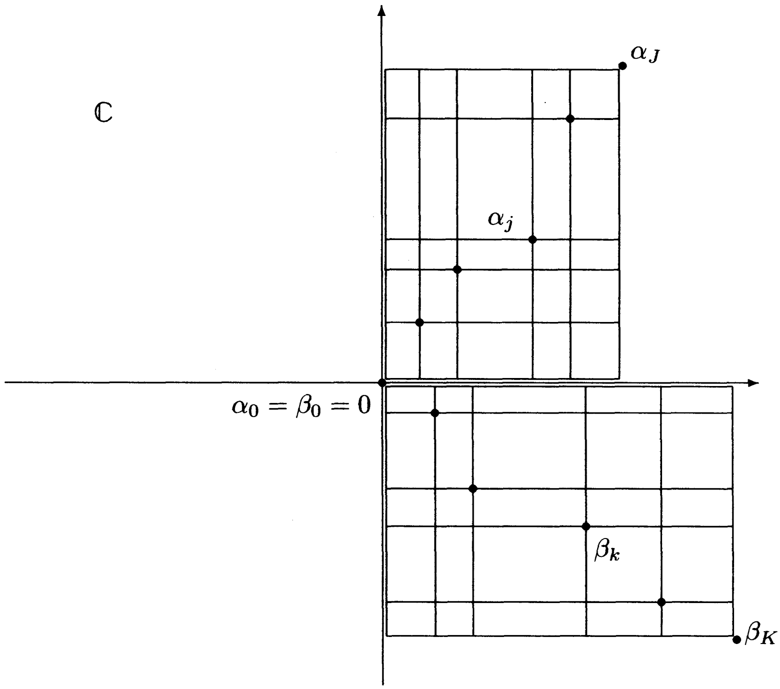

Figure 2

On se trouve dans les conditions d'application de la proposition 2.1. On a donc $P_M^r f = 0$ et $Q_N^s f = 0$. Notons

$$P_M = c_i T^{\alpha_i} + \cdots + c_I T^{\alpha_I},\ c_i \neq 0,\ c_I \neq 0$$
$$Q_N = d_\ell T^{\beta_\ell} + \cdots + d_L T^{\beta_L},\ d_\ell \neq 0,\ d_L \neq 0,$$

on obtient

$$P_M^r = c_i^r T^{r\alpha_i} + c_1' T^{\xi_1} + \cdots + c_p' T^{\xi_p} + c_I^r T^{r\alpha_I} \tag{9}$$
$$Q_N^s = d_\ell^s T^{s\beta_\ell} + d_1' T^{\zeta_1} + \cdots + d_q' T^{\zeta_q} + d_L^s T^{s\beta_L}. \tag{10}$$

Après multiplication par $T^{-r\alpha_i}$ dans (9) et par $T^{-s\beta_\ell}$ dans (10), on se trouve dans les conditions d'application de la proposition 1.2 et on peut donc conclure que f est un polynôme exponentiel.

Si a_0 et b_0 ne sont pas premiers entre eux. L'idée est la même qu'au paragraphe 3.1, grâce au corollaire de la proposition 2.6 on trouve un polynôme H tel que Hf soit un polynôme exponentiel et donc f est une fraction exponentielle. □

3.3. Sur la conjecture de Shapiro.

Considérons $\alpha_0, \ldots, \alpha_J$ et $\beta_0, \ldots, \beta_K$ des nombres réels ou complexes ordonnés de telle sorte que $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_J$ et $0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_K$ et satisfaisant

$$(\mathrm{I}) \qquad < \alpha_j > \cap < \beta_k > = \{0\}.$$

Soit f une fonction d'une variable réelle (resp. complexe), continue (resp. entière) solution du système (non trivial)

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{j=J} a_j(x) f(x+\alpha_j) = 0 \\ \sum_{k=0}^{k=K} b_k(x) f(x+\beta_k) = 0, \end{cases}$$

alors, en utilisant le corollaire de la proposition 2.6, on obtient un polynôme H tel que Hf soit solution d'un système de deux équations non nulles à coefficients constants

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{j=J'} a'_j (Hf)(x+\alpha'_j) = 0 \\ \sum_{k=0}^{k=K'} b'_k (Hf)(x+\beta'_k) = 0, \end{cases}$$

où les $\alpha'_j \in < \alpha_j >$ et les $\beta'_k \in < \beta_k >$, ainsi $< \alpha'_j > \subseteq < \alpha_j >$ et $< \beta'_k > \subseteq < \beta_k >$ et donc $< \alpha'_j > \cap < \beta'_k > = \{0\}$.

Ainsi on est ramené à la remarque du paragraphe 1.3. On en tire la conjecture suivante, liée à celle de Shapiro.

CONJECTURE. — *Si $< \alpha_j > \cap < \beta_k > = \{0\}$ alors toute solution continue (cas réel) ou entière (cas complexe) d'un système de deux équations non nulles*

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{j=J} a_j(x) f(x+\alpha_j) = 0 \\ \sum_{k=0}^{k=K} b_k(x) f(x+\beta_k) = 0, \end{cases}$$

est une fraction exponentielle.

BIBLIOGRAPHIE

[BG1] J.-P. BÉZIVIN, F. GRAMAIN, Solutions entières d'un système d'équations aux différences, Ann. Institut Fourier Grenoble, 43-3 (1993), 791-814.

[BG2] J.-P. BÉZIVIN, F. GRAMAIN, Solutions entières d'un système d'équations aux différences II, Ann. Institut Fourier, Grenoble, 46-2 (1996), 465-491.

[BH] N. BRISEBARRE, L. HABSIEGER, Sur les fonctions entières à double pas récurrents, Ann. Institut Fourier, Grenoble, 49-2 (1999), 653-671.

[Br] N. BRISEBARRE, Thèse de doctorat, "Une étude de deux problèmes diophantiens", n° d'ordre 1903, 25/09/98, Université de Bordeaux I.

[BrGa] R. BERENSTEIN, R. GAY, Complex analysis and special topics in harmonic analysis, Springer-Verlag, 1995.

[Gel] A.O. GUELFOND, Calcul des différences finies, Dunod, Paris, 1963.

[Gr1] F. GRAMAIN, Sur le théorème de Fukasawa-Gel'fond, Inv. Math., 63 (1981), 495-506.

[Gr2] F. GRAMAIN, Fonctions entières d'une ou plusieurs variables complexes prenant des valeurs entières sur une progression géométrique, Lect. Notes, 1415, Cinquante ans de polynômes, 1988, Springer-Verlag, pages 123-137.

[Kh] G.M. KHENKIN, Several complex variables V, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 54, Springer-verlag, 1993.

[Lec] C. LECH, A note on recurring series, Ark. Math., 2 (1953), 417-421.

[Loeb] J.-J. LOEB, Sur certaines équations aux différences associées à des groupes, Prépublication, 1997.

[Mar] N. MARTEAU, Thèse de doctorat, "Equations aux différences et fonctions représentatives", n° d'ordre 368, 26/02/99, Université d'Angers.

[Ri1] J.F. RITT, A factorisation theory for functions $\sum_{j=1}^{j=n} a_j e^{\alpha_j z}$, Trans. Amer. Math. Soc., 29 (1927), 584-596.

[Ri2] J.F. RITT, Algebraic combination of exponentials, Trans. Amer. Math. Soc., 31 (1929), 654-679.

[Ri3] J.F. RITT, On the zeros of exponentials polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., 31 (1929), 680-686.

[TDN] Travaux de Tijedman-Van Der Poorten, Séminaire de Théorie des nombres, Bordeaux.

Manuscrit reçu le 27 septembre 1999,
accepté le 17 janvier 2000.

Nicolas MARTEAU,
Université d'Angers
Département de Mathématiques
2, boulevard Lavoisier
49045 Angers (France).