ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CAROLINE GRUSON

Sur l'idéal du cône autocommutant des super algèbres de Lie basiques classiques et étranges

Annales de l'institut Fourier, tome 50, nº 3 (2000), p. 807-831

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_3_807_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
50, 3 (2000), 807–831

SUR L'IDÉAL DU CÔNE AUTOCOMMUTANT DES SUPER ALGÈBRES DE LIE BASIQUES CLASSIQUES ET ÉTRANGES

par Caroline GRUSON

Tables des matières

Mots-clés : Super algèbres de Lie – Centre de l'algèbre enveloppante – Désingularisation – Schémas réduits.
Classification math : 20G05 – 14L30.

Introduction.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ une super algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{C}$. On pose :

$$C(A) = \{X \in \mathfrak{g}_1, [X, X] = 0\}.$$

C'est un cône, qu'on appelle le cône autocommutant de $\mathfrak{g}$. On note $C(A)_{\mathrm{red}}$ le cône réduit. On note A le sous-schéma de $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)$ de cône projetant $C(A)$. On note A_{red} la sous-variété de $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)$ définie par les équations $[X, X] = 0$ (NB : dans ce qui suit, l'appellation variété est réservée à des objets réduits).

On appelle cette variété A_{red} autocommutante car c'est la partie diagonale impaire de la variété commutante de $\mathfrak{g}$, i.e. C_{red} où

$$C = \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, [x, y] = 0\}.$$

Je m'intéresse ici à la question de savoir si A_{red} est intersection de quadriques, i.e. si $A = A_{\mathrm{red}}$.

La motivation initiale de cette étude est la suivante : lorsque l'on écrit le complexe de Koszul d'une super algèbre de Lie à valeurs dans un module de dimension finie, celui-ci est de longueur infinie. On peut voir que le cône $C(A)$ porte les informations relatives à la différentielle partielle qui provient du crochet purement impair de $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ à valeurs dans $\mathfrak{g}_0$ ([Gr2]). Or la cohomologie d'une super algèbre de Lie à valeurs dans un module de dimension finie n'est pas connue, même dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une super algèbre de Lie simple à partie paire réductive (pour la classification de ces super algèbres de Lie, on peut consulter [Ka], qui contient également beaucoup d'informations sur leurs représentations).

Dans cet article, je démontre que pour $\mathfrak{g}$ l'une des super algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$, $\mathfrak{sl}(m, n)$, $\mathfrak{osp}(m, 2n)$, $P(n)$, $Q(n)$, $G(3)$, $F(4)$ et $D(2, 1, \alpha)$, le cône autocommutant est réduit et donc $A = A_{\mathrm{red}}$.

Étant donné que la démonstration du résultat dépend de la classification et nécessite une étude détaillée de la décomposition en modules simples de l'anneau de la variété autocommutante, les notations sont assez difficiles à manier et j'ai choisi de ne traiter en détail ici que certains cas.

Les conventions de notations utilisées sont les mêmes que celle de [FuHa], le merveilleux livre de William Fulton et Joe Harris, sans lequel je n'aurais jamais eu le courage de me lancer dans ces calculs.

Le plan de cet article est le suivant : le premier paragraphe donne le schéma commun des démonstrations et contient des précisions bibliographiques sur les résultats antérieurement connus sur l'idéal du cône autocommutant. Les trois derniers paragraphes sont consacrés à l'étude des différents cas.

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à Thierry Levasseur pour la constante attention qu'il a portée à l'évolution de ce travail. Je remercie Michel Brion et Michel Duflo pour des discussions constructives.

1. Schéma de démonstration.

Gardons les notations de l'introduction. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ l'une des super algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(m,n)$, $\mathfrak{sl}(m,n)$, $\mathfrak{osp}(m,2n)$, $P(n)$, $Q(n)$, $G(3)$, $F(4)$ ou $D(2,1,\alpha)$. On veut démontrer que dans chacun de ces cas, le cône $C(A)$ est réduit.

Dans un premier temps, on désingularise le cône $C(A)_{\text{red}}$: on construit une variété non singulière X et un morphisme propre birationnel de X dans $C(A)_{\text{red}}$. Dans chacun des cas considérés, X est un fibré vectoriel au-dessus d'une variété de drapeaux G_0/P_0, où G_0 est un groupe algébrique réductif d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ et P_0 est un sous-groupe parabolique de G_0. On note $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural. On remarque que $H^0(\mathcal{O}_X)$ est un quotient de $S(\mathfrak{g}_1^*)$.

Cette désingularisation est déja connue dans la plupart des cas : pour $\mathfrak{gl}(n,m)$, il s'agit de classifier les orbites des éléments (u,v) de $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n)$ tels que $u \circ v = 0$ et $v \circ u = 0$, sous l'action de $GL_m \times GL_n$: ceci est fait par Kempken dans [Kem]. Dans le cas orthosymplectique, il s'agit de classifier certaines orbites de $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^{2n}$ sous l'action de $O(m) \times Sp(2n)$, qui font partie de celles étudiées par Kraft et Procesi dans [KrPr2]. Par ailleurs, Panyushev, dans [Pa], étudie une méthode systématique de désingularisation des adhérences d'orbites d'éléments de degré 1 dans une algèbre de Lie munie d'une $\mathbb{Z}$-graduation courte. Cette désingularisation a alors un aspect identique à celle de la variété autocommutante et coïncide avec elle dans certains cas ($\mathfrak{gl}(m,n)$).

Le résultat suivant de Kempf ([Ke]) permet alors de décrire la structure de $\mathfrak{g}_0$-module de $H^0(\mathcal{O}_X)$.

THÉORÈME DE KEMPF. — *Soit W une représentation d'un groupe réductif G et soit $U \subset W$ un sous-espace stable sous l'action d'un sous-groupe parabolique P de G. Supposons que la représentation de P dans U est complètement réductible. Alors $GU \subset W$ est sous-variété fermée qui est normale et de Cohen-Macaulay. De plus, si le morphisme canonique*

$$G *^P U \to GU \subset W$$

(où $G *^P U$ désigne le quotient de $G \times U$ par l'action de P) est birationnel, alors GU est à singularités rationnelles.

Kempf déduit ce théorème de la forme suivante du théorème de Borel-Weil-Bott :

THÉORÈME ([Ke], theorem 1). — *Soit $T \subset P \subset G$ un tore maximal de G. Soit L un sous-groupe de Levi de P contenant T. On décompose $S^k(U)$ sous l'action de L pour tout entier $k \geqslant 0$. On obtient*

$$S^k(U) = \bigoplus_{i \in I} V_{\lambda_i}(L)$$

où $V_{\lambda_i}(L)$ désigne le L-module de plus haut poids λ_i : λ_i est un poids de T dominant pour L.

On extrait ensuite des λ_i les poids G-dominants et on obtient

$$H^0(\mathcal{O}_{G*^PU}(k)) = \bigoplus_{i \in I, \lambda_i \ G-\text{dominant}} V_{\lambda_i}(G)$$

où $\mathcal{O}_{G*^PU}(k)$ désigne le faisceau structural de $G *^P U$ tensorisé par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(k)$.

Le théorème prouve en particulier que les composantes irréductibles du cône autocommutant sont toujours normales à singularités rationnelles. Dans le cours du texte, on étudiera la question de savoir si le cône est de Cohen-Macaulay dans les cas où il n'est pas irréductible.

Une fois la description de $H^0(\mathcal{O}_X)$ comme $\mathfrak{g}_0$-module établie, on sépare les $\mathfrak{g}_0$-plus hauts poids intervenant dans $H^0(\mathcal{O}_X)$ des autres $\mathfrak{g}_0$-plus hauts poids de $S(\mathfrak{g}_1^*)$ à l'aide d'opérateurs différentiels d'ordre suffisamment petit (opérateurs de Casimir) :

On introduit une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{a}$, qui opère sur $\mathfrak{g}_1$. Les opérateurs du centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a}$ déterminent une décomposition en blocs de facteurs $\mathfrak{a}$-invariants de chacun des $S^n(\mathfrak{g}_1^*)$ pour n fixé, qui commute avec la projection $S(\mathfrak{g}_1^*) \to H^0(\mathcal{O}_X)$. On notera I le noyau de cette projection. On sépare ensuite à l'intérieur de chaque bloc les poids de $H^0(\mathcal{O}_X)$ des autres poids de $S(\mathfrak{g}_1^*)$ à l'aide d'opérateurs adaptés :

Il existe $\Omega_{\mathfrak{g}_0}$ (resp. $\Omega'_{\mathfrak{a}}$) dans le centre de l'algèbre enveloppante $Z(\mathfrak{g}_0)$ (resp. $Z(\mathfrak{a})$) tel que si λ est un $\mathfrak{g}_0$-plus haut poids de $H^0(\mathcal{O}_X)$,

$$\Omega_{\mathfrak{g}_0}(\lambda) + \Omega'_{\mathfrak{a}}(\lambda) = 0$$

et si μ est un poids intervenant dans le bloc considéré de $S(\mathfrak{g}_1^*)$ sans intervenir dans $H^0(\mathcal{O}_X)$,

$$\Omega_{\mathfrak{g}_0}(\mu) + \Omega'_{\mathfrak{a}}(\mu) \neq 0$$

(ici, $\Omega_{\mathfrak{g}_0}(\lambda)$ désigne la valeur du caractère infinitésimal de λ (relativement à $\mathfrak{g}_0$) évalué en $\Omega_{\mathfrak{g}_0}$, de même $\Omega'_{\mathfrak{a}}(\lambda)$).

Pour terminer la démonstration, on utilise un argument utilisé par Kostant (voir [Ga]) pour démontrer que les orbites des vecteurs de plus haut poids pour une algèbre de Lie semi-simple sont intersection de quadriques :

LEMME DE KOSTANT. — *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit k un entier. Soit D un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant k$, homogène de degré 0, opérant sur l'algèbre symétrique $S(V)$. On note* $\operatorname{Im} D_j$ *l'image de D restreint à $S^j(V)$. Alors on a :*

$$\operatorname{Im} D_{k+1} \subset \sum_{1\leqslant i\leqslant k+1} S^i(V).\operatorname{Im} D_{k+1-i}.$$

Démonstration (Voir [Gr1] p. 50). — L'argument consiste essentiellement à remarquer que si D est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant k$, homogène de degré 0 agissant dans $S(V)$ et si $v \in S(V)$, on a :

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} v^i D(v^{k+1-i}) = 0.$$

□

Soit m un entier, notons I_m la composante homogène de degré m de l'idéal I. On raisonne par récurrence sur m. Soit $P \in I_{m+1}$, supposons que P est dans un $\mathfrak{g}_0$-facteur irréductible de plus haut poids λ, on pose $D = \Omega_{\mathfrak{g}_0} + \Omega'_{\mathfrak{a}}$, alors $D.P \in \sum_{1\leqslant i\leqslant k+1} S^i(\mathfrak{g}_1^*).\operatorname{Im} D_{m+1-i}$. Or $\operatorname{Im} D_{m+1-i} \subset I_{m+1-i}$ grâce aux hypothèses. Donc

$$D.P = (\Omega_{\mathfrak{g}_0}(\lambda) + \Omega'_{\mathfrak{a}}(\lambda)).P \neq 0,$$

donc P est dans la partie de I engendrée par $I_1, \ldots, I_m$.

2. Le cas orthosymplectique.

Soient $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(m, 2n)$, on a $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{o}(m) \times \mathfrak{sp}(2n)$. Si l'on note V (resp. W) la représentation standard de $\mathfrak{o}(m)$ (resp. $\mathfrak{sp}(2n)$), on a $\mathfrak{g}_1 = V^* \otimes W = \mathrm{Hom}(V, W)$.

Soit $u \in \mathfrak{g}_1$, notons i (resp. j) l'isomorphisme de V dans V^* (resp. W dans W^*) déduit de la forme quadratique sur V (resp. alternée sur W). Alors $i^{-1} \otimes j$ va de $V^* \otimes W$ dans $V \otimes W^*$. On pose $u^* = (i^{-1} \otimes j) \circ u$. Le cône autocommutant de $\mathfrak{g}$ est alors

$$C(A) = \{u \in \mathfrak{g}_1, u \circ u^* = 0,\ u^* \circ u = 0\}.$$

On pose $G_0 = SO(m) \times Sp(2n)$.

Théorème 1.— *L'idéal de $S(\mathfrak{g}_1^*)$ engendré par les équations $[X, X] = 0$ définissant $C(A)$ est égal à son nilradical.*

2.1. Désingularisation de A_{red} pour $\mathfrak{osp}(2p+1, 2n)$.

Soit p un entier positif, on pose $2p + 1 = m$. Remarquons que le cône $C(A)_{\mathrm{red}}$ est réunion d'un nombre fini de G_0-orbites paramétrées par le rang r de $u \in C(A)_{\mathrm{red}}$ (on a $r \leqslant \mathrm{Inf}\,(p, n)$). Décrivons la G_0-orbite correspondant à un entier r. Soit u un élément de $C(A)_{\mathrm{red}}$ de rang r. Alors $\mathrm{Ker}\,(u)$ est un sous-espace vectoriel de V de codimension r, qui contient son orthogonal $\mathrm{Im}\,(u^*)$ car $u \circ u^* = 0$. Notons $P_1(r)$ le sous-groupe parabolique de $SO(m)$ qui stabilise un sous-espace isotrope de dimension r, D_1, de V et $E_1(r)$ le sous-fibré tautologique de rang r du fibré trivial de fibre V^* sur $SO(m)/P_1(r)$. De la même manière, $\mathrm{Im}\,(u)$ est un sous-espace vectoriel de W de dimension r qui est totalement isotrope car $u^* \circ u = 0$. Notons $P_2(r)$ le sous-groupe parabolique de $Sp(2n)$ qui stabilise un sous-espace isotrope de dimension r, D_2, de W et $E_2(r)$ le sous-fibré tautologique de rang r du fibré trivial de fibre W sur $Sp(2n)/P_2(r)$.

La G_0-orbite considérée est alors le fibré de base $G_0/(P_1(r) \times P_2(r))$ dont la fibre est constituée des éléments inversibles dans $\mathrm{Hom}(E_1(r)^*, E_2(r)) = E_1(r) \otimes E_2(r)$.

On pose maintenant $r_0 = \mathrm{Inf}(p, n)$, $P_1 = P_1(r_0)$, $P_2 = P_2(r_0)$, $E_1 = E_1(r_0)$ et $E_2 = E_2(r_0)$. L'orbite correspondante est dense dans $C(A)_{\mathrm{red}}$. On la note D.

Soit

$$X = \mathbb{P}_{G_0/(P_1\times P_2)}(E_1 \otimes E_2) = (SO(2p+1) \times Sp(2n)) *^{P_1\times P_2} \mathbb{P}(D_1 \otimes D_2),$$

le fibré projectif sur $G_0/(P_1 \times P_2)$ déduit du fibré $E_1 \otimes E_2$. On définit un morphisme φ de variétés algébriques de X dans A_{red} (ou de $E_1 \otimes E_2$ dans $C(A)_{\mathrm{red}}$) en associant à un élément de $E_1 \otimes E_2$ le même élément vu comme appartenant à $V^* \otimes W = \mathfrak{g}_1$.

La variété X est munie d'un fibré inversible quotient tautologique de $E_1^* \otimes E_2^*$, $\mathcal{O}_X(1)$. Celui-ci est lui-même un quotient du fibré trivial sur X de fibre $\mathfrak{g}_1^*$. Le morphisme φ est tel que $\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(1)) = \mathcal{O}_X(1)$.

L'orbite D est ouverte dans $C(A)_{\mathrm{red}}$ et φ induit un isomorphisme de $\varphi^{-1}(D)$ sur D. Comme X est une variété complète, φ est une application propre. De plus φ est surjective. Comme X est lisse, le morphisme $\varphi : X \to A_{\mathrm{red}}$ est une désingularisation de A_{red}.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ du paragraphe 1 est dans ce cas $\mathfrak{a} = \mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(W^*)$

2.2. Le cas de $\mathfrak{osp}(2n+1, 2n)$.

2.2.1. Le $\mathfrak{g}_0$-module $H^0(\mathcal{O}_X(k))$.

On garde les notations précédentes avec $m = 2n + 1$.

Afin de décrire ce module, nous avons besoin d'introduire quelques notations supplémentaires.

Soit $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{k}$) une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{o}(2n+1)$ (resp. $\mathfrak{sp}(2n)$). Alors $\mathfrak{h} \times \mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. Soit $\mathfrak{b}_1$ (resp $\mathfrak{b}_2$) une sous-algèbre de Borel contenant $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{k}$) de $\mathfrak{o}(2n+1)$ (resp. $\mathfrak{sp}(2n)$). Rappelons que le réseau des poids radiciels de $\mathfrak{o}(2n + 1)$ est isomorphe au réseau des poids de $\mathfrak{sp}(2n)$.

Ceci nous permet d'écrire les poids fondamentaux de $\mathfrak{o}(2n+1)$ (resp. $\mathfrak{sp}(2n)$) :

$\varpi_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\varpi_{n-1}(1, \ldots, 1, 0)$, $\varpi_n = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ (resp. $\eta_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\eta_n = (1, \ldots, 1)$). Notons ρ_1 (resp. ρ_2) la demi-somme des racines positives de $\mathfrak{o}(2n + 1)$ (resp. $\mathfrak{sp}(2n)$), on a $\rho_1 = \varpi_1 + \ldots + \varpi_n$, $\rho_2 = \eta_1 + \ldots + \eta_n$ dans l'identification précédente.

Fulton et Harris, dans [FuHa], introduisent la notation suivante : si $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0)$ est une partition de longueur k inférieure ou égale à n, $\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)$ désigne la représentation simple de $\mathfrak{o}(2n+1)$ de plus haut poids $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. De même, $\mathbb{S}_{<\lambda>}(W)$ désigne la représentation simple de $\mathfrak{sp}(2n)$ de plus haut poids $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Remarquons que $\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)$ (resp. $\mathbb{S}_{<\lambda>}(W)$) est un $\mathfrak{o}(2n+1)$ (resp. $\mathfrak{sp}(2n)$)-sous-module de multiplicité 1 du foncteur de Schur $S_\lambda(V)$ (resp. $S_\lambda(W)$). Un poids dominant pour $\mathfrak{g}_0$ est repéré par un $2n$-uplet, $((\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n))$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (resp. $(\mu_1, \dots, \mu_n)$) est une partition de longueur inférieure ou égale à n.

On veut calculer la décomposition en G_0-modules simples de l'espace des sections $H^0(\mathcal{O}_X(k))$ (rappelons que $\mathcal{O}_X(k)$ est la puissance tensorielle k-ième du fibré tautologique $\mathcal{O}_X(1)$).

Nous voulons appliquer [Ke] theorem 1. Le sous-groupe de Levi considéré est $L = SL(D_1) \times SL(D_2) \times \mathbb{C}$. La décomposition de $S^k(D_1 \otimes D_2)$ sous l'action de L est donc

$$\bigoplus_{\lambda=(\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n \geqslant 0), \sum_i \lambda_i = k} S_\lambda(D_1) \otimes S_\lambda(D_2).$$

On obtient alors sans difficulté :

Proposition 1. — *Soit k un entier positif, on a*

$$H^0(\mathcal{O}_X(k)) = \bigoplus_{\lambda=(\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n \geqslant 0), \sum_i \lambda_i = k} \mathbb{S}_{[\lambda]}(V) \otimes \mathbb{S}_{<\lambda>}(W^*)$$

comme $\mathfrak{g}_0$-module, de plus l'application canonique de $\mathfrak{g}_0$-modules $S^k(\mathfrak{g}_1^*) \to H^0(\mathcal{O}_X(k))$ identifie $\mathbb{S}_{[\lambda]}(V) \otimes \mathbb{S}_{<\lambda>}(W^*)$ au sous-$\mathfrak{g}_0$-module de plus haut poids du $\mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(W^*)$-module $S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W^*)$, pour chaque partition λ apparaissant dans la somme directe.

Remarquons d'autre part que l'on a

$$S^k(\mathfrak{g}_1^*) = S^k(V \otimes W^*)$$
$$S^k(\mathfrak{g}_1^*) = \bigoplus_{\lambda=(\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_{2n} \geqslant 0), \sum_i \lambda_i = k} S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W^*)$$

comme $\mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(W)$-modules.

2.2.2. Eléments de Casimir.

Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie réductive, on notera $Z(\mathfrak{a})$ le centre de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}$.

Soit Ω un élément de $Z(\mathfrak{a})$. On suppose choisies une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{a}$ et une base du système de racines. Si λ est le plus haut poids d'un $\mathfrak{a}$-module simple V de dimension finie, on notera $\Omega(\lambda)$, ou $\Omega(V)$, la valeur du caractère infinitésimal de V évalué en Ω.

L'élément de Casimir de $Z(\mathfrak{a})$, $C_{\mathfrak{a}}$, est construit de la façon suivante : on fixe une forme bilinéaire non dégénérée $\mathfrak{a}$-invariante sur $\mathfrak{a}$ que l'on note $(,)$. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $\mathfrak{a}$, $(e^1, \dots, e^k)$ la base duale de $\mathfrak{a}$, alors on a

$$C_{\mathfrak{a}} = \sum_{i=1}^{k} e_i e^i.$$

C'est un élément d'ordre 2 dans $Z(\mathfrak{a})$ et $C_{\mathfrak{a}}(\lambda)$ est un polynôme de degré 2 en λ. On dispose donc des éléments de Casimir $C_{\mathfrak{o}(2n+1)}$ et $C_{\mathfrak{sp}(2n)}$.

Le groupe $GL(V) \times GL(W^*)$ agissant de manière semi-simple sur $S(V \otimes W^*)$, on écrit la décomposition en sous-modules simples. On a

$$S(V \otimes W^*) = \bigoplus_{\lambda} S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W^*),$$

où λ parcourt l'ensemble des partitions d'un entier variable k en au plus $2n$ parts. D'après le lemme de Schur, tout élément de $Z(\mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(W^*))$ agit sur chaque composante simple par un scalaire. On a de plus $Z(\mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(W^*)) \simeq Z(\mathfrak{gl}(V)) \otimes_{\mathbb{C}} Z(\mathfrak{gl}(W^*))$. On a les identifications suivantes : $Z(\mathfrak{gl}(V)) = \mathbb{C}[C_{1,\mathfrak{gl}(V)}, \dots, C_{2n+1,\mathfrak{gl}(V)}]$ où $C_{i,\mathfrak{gl}(V)}$ est homogène de degré i, $Z(\mathfrak{gl}(W^*)) = \mathbb{C}[C_{1,\mathfrak{gl}(W^*)}, \dots, C_{2n,\mathfrak{gl}(W^*)}]$ où $C_{i,\mathfrak{gl}(W^*)}$ est homogène de degré i.

On notera ρ_1' (resp. ρ_2') la demi-somme des racines positives de $\mathfrak{gl}(V)$ (resp. $\mathfrak{gl}(W^*)$), on a donc : $\rho_1' = (n, n-1, \dots, -n)$, $\rho_2' = (n - \frac{1}{2}, n - \frac{3}{2}, \dots, -n + \frac{1}{2})$.

On normalise les $C_{i,\mathfrak{gl}(V)}$ (resp $C_{i,\mathfrak{gl}(W^*)}$) de telle sorte que $C_{i,\mathfrak{gl}(V)}(\lambda) = \sigma_i(\lambda + \rho_1')$ (resp. $C_{i,\mathfrak{gl}(W^*)}(\mu) = \sigma_i(\mu + \rho_2')$), où $\sigma_i(\lambda + \rho_1')$ (resp. $\sigma_i(\mu + \rho_2')$) désigne la i-ème fonction symétrique fondamentale de la partition $\lambda + \rho_1'$ (resp. $\mu + \rho_2'$). (On a $\sigma_i(a_1, \dots a_{2n+1}) = \sum_{j_1 < \dots < j_i} a_{j_1} \dots a_{j_i}$.)

Avec ces normalisations, $C_{i,\mathfrak{gl}(V)} \otimes 1$ (resp. $1 \otimes C_{j,\mathfrak{gl}(W^*)}$) agit sur $S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W^*)$ par le scalaire $\sigma_i(\lambda + \rho_1')$ (resp. $\sigma_j(\lambda + \rho_2')$). On utilisera une autre normalisation de l'opérateur de Casimir de degré 2 de $\mathfrak{gl}(V)$ (resp. $\mathfrak{gl}(W)$) que l'on notera $C_{\mathfrak{gl}(V)}$ (resp. $C_{\mathfrak{gl}(W)}$), pour laquelle $C_{\mathfrak{gl}(V)} \otimes 1$ (resp. $1 \otimes C_{\mathfrak{gl}(W)}$) agit sur $S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W^*)$ par le scalaire $(\lambda, \lambda + 2\rho_1')$ (resp. $(\lambda, \lambda + 2\rho_2')$). Je présente mes excuses pour la complexité des notations...

2.2.3. Démonstration du théorème 1.

Nous voulons démontrer que l'idéal de $S(\mathfrak{g}_1^*)$ définissant $C(A)$ est égal à son nilradical.

Rappelons que l'on a noté X la désingularisation de A_{red} construite au premier paragraphe.

Soit k un entier positif. La proposition 1 décrit la surjection $S^k(V \otimes W^*) \to H^0(\mathcal{O}_X(k))$, et si l'on note I_k la partie homogène de degré k des fonctions polynomiales nulles sur X, I_k est le noyau de cette surjection. Remarquons que I_2 est l'espace des coefficients de $u^* \circ u = 0$ et $u \circ u^* = 0$, comme on le voit en décomposant $S^2(\mathfrak{g}_1^*)$ en $\mathfrak{g}_0$-modules simples. Cette remarque vaut pour tous les cas considérés dans cet article.

L'idéal $\oplus_k I_k$ de $S(\mathfrak{g}_1^*)$ est par construction le nilradical de l'idéal définissant le cône $C(A)$. Nous allons démontrer que $\oplus_k I_k$ est engendré par I_2. Ceci prouvera le théorème.

Il s'agit de démontrer que $I_{k+1} = \mathfrak{g}_1^*.I_k$ par récurrence sur $k \geqslant 2$.

Considérons un facteur $\mathbb{S}_{[\alpha]}(V) \otimes \mathbb{S}_{<\beta>}(W^*)$ dans I_k. On va montrer le lemme suivant :

Lemme 1.— *Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Il existe un opérateur différentiel d'ordre strictement inférieur à k et $\mathfrak{g}_0$-invariant qui s'annule sur $H^0(\mathcal{O}_X(k))$ et qui est non nul sur $\mathbb{S}_{[\alpha]}(V) \otimes \mathbb{S}_{<\beta>}(W^*)$.*

Démonstration.— Soit μ la partition de l'entier k telle que $\mathbb{S}_{[\alpha]}(V) \otimes \mathbb{S}_{<\beta>}(W^*)$ soit contenu dans le $\mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(W^*)$-module $S_\mu(V) \otimes S_\mu(W^*)$ (avec les notations du paragraphe 2.2.2).

Supposons dans un premier temps que μ est une partition de longueur plus petite que n. Supposons aussi que $\alpha \neq \mu$. Considérons l'opérateur différentiel $\mathfrak{g}_0$-invariant suivant :

$$(C_{\mathfrak{gl}(V)} - C_{\mathfrak{o}(2n+1)} - k) \otimes 1.$$

Cet opérateur est nul sur $H^0(\mathcal{O}_X(k))$, comme on le vérifie en l'évaluant en une partition λ de k de longueur plus petite que n. Par ailleurs, la valeur de cet opérateur en (le plus haut poids de) $\mathbb{S}_{[\alpha]}(V) \otimes \mathbb{S}_{<\beta>}(W^*)$ est égale à $C_{\mathfrak{gl}(V)}(\mu) - C_{\mathfrak{o}(2n+1)}(\alpha) - k$, donc à $C_{\mathfrak{o}(2n+1)}(\mu) - C_{\mathfrak{o}(2n+1)}(\alpha)$ (car $C_{\mathfrak{gl}(V)}(\mu) - C_{\mathfrak{o}(2n+1)}(\mu) - k = 0$). Or $\mu - \alpha$ est combinaison linéaire à coefficients positifs de racines positives de $\mathfrak{o}(2n+1)$, donc α et μ sont séparés par l'opérateur de Casimir de $\mathfrak{o}(2n+1)$ ([Ga]).

Si $\alpha = \mu$, alors $\beta \neq \mu$ puisque $\mathbb{S}_{[\alpha]}(V) \otimes \mathbb{S}_{<\beta>}(W^*) \subset I_k$. On fait le raisonnement précédent avec l'opérateur $\mathfrak{g}_0$-invariant $1 \otimes (C_{\mathfrak{gl}(W^*)} - C_{\mathfrak{sp}(2n)} + k)$, et on a le résultat voulu.

Supposons maintenant que μ est une partition de longueur strictement supérieure à n. Nous allons appliquer le lemme suivant :

LEMME 2. — *Soient $p \geqslant q$ deux entiers positifs. Soit μ une partition de longueur q. Alors il existe un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant q$ dans $Z(\mathfrak{gl}_p)$, non nul en μ, qui s'annule sur tous les $S_\lambda(\mathbb{C}^p)$ pour λ partition de longueur strictement inférieure à q et est non nul sur $S_\mu(\mathbb{C}^p)$.*

Démonstration. — Soit Y une indéterminée. On considère le polynôme

$$P(Y) = Y^p - C_{1,\mathfrak{gl}_p} Y^{p-1} + \ldots + (-1)^p C_{p,\mathfrak{gl}_p}$$

à coefficients dans $Z(\mathfrak{gl}_p)$. On effectue la division euclidienne de $P(Y)$ par le polynôme $(Y-1)\ldots(Y-(p-q+1))$. On note

$$R(Y) = r_p + r_{p-1} Y + \ldots + r_q Y^{p-q}$$

le reste de cette division, r_i étant un opérateur différentiel de $Z(\mathfrak{gl}_p)$, d'ordre $\leqslant i$ (car son ordre est inférieur ou égal à celui de $C_{i,\mathfrak{gl}_p}$).

Montrons que r_q vérifie la propriété voulue. Soit λ une partition de longueur strictement inférieure à q. Si l'on note ρ la demi-somme des racines positives de $\mathfrak{gl}_q$, et si l'on évalue le caractère infinitésimal de λ en chacun des $C_{i,\mathfrak{gl}_p}$, on obtient un polynôme $P(Y)(\lambda)$, à coefficients entiers, dont les coefficients sont les fonctions symétriques fondamentales de $\lambda + \rho$. D'après les relations entre coefficients et racines, on a

$$P(Y)(\lambda) = \prod_{i=1}^{p} (Y - (\lambda_i + p - i + 1))$$

où $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_p)$, certains des λ_j pouvant être nuls. Le polynôme que l'on note de façon analogue $R(Y)(\lambda)$ est nul. Par contre, $R(Y)(\mu)$ est non nul en $p-q+1$ et nul en $1, \ldots, p-q$. Comme $R(Y)(\mu)$ est de degré exactement $p-q$ (il a $p-q$ racines), on a $r_q(\mu) \neq 0$. $\square$

Supposons d'abord que la longueur de μ est strictement inférieure à k. D'après le lemme qui précède, si j est la longueur de μ, il existe un élément de $Z(\mathfrak{gl}(W^*))$ d'ordre inférieur ou égal à j, non nul sur $\mathbb{S}_{[\alpha]}(V) \otimes \mathbb{S}_{<\beta>}(W^*)$ et nul sur $H^0(\mathcal{O}_X(k))$ car les partitions intervenant dans celui-ci sont de longueur inférieure ou égale à n.

Il reste à examiner le cas où μ est de longueur k, i.e. $\mu = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (avec k fois 1). On a nécessairement $k \leqslant 2n$. On a alors $S_\mu(V) = \Lambda^k(V)$ et $S_\mu(W^*) = \Lambda^k(W^*)$. On sait que $\Lambda^k(V)$ est un $\mathfrak{o}(2n+1)$-module simple, isomorphe à $\Lambda^{2n+1-k}(V)$. Comme α doit être de longueur plus petite que n, on a forcément $\alpha = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ avec $2n+1-k$ fois 1 ([FuHa], 19-5).

Par ailleurs, $\Lambda^k(W^*) = \Lambda^{2n-k}(W)$ et $\beta = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ avec l fois 1, avec $2n-k-l$ pair et positif ou nul ([FuHa], 17-3).

L'opérateur différentiel $\mathfrak{g}_0$-invariant $(C_{\mathfrak{gl}(V)} - C_{\mathfrak{o}(2n+1)} - k) \otimes 1$ évalué en α est égal à $k(2n+1) - k \neq 0$.

On déduit le théorème du lemme 1 par le lemme de Kostant.

Remarque. — Le théorème de Kempf implique que le cône $C(A)$ est à singularités rationnelles. En particulier, l'anneau gradué des fonctions sur $C(A)$ est de Cohen-Macaulay.

2.3. Cas de $\mathfrak{osp}(2p+1, 2n)$.

Pour le cas de $\mathfrak{osp}(2p+1, 2n)$, $p \neq n$, on pose $r = \operatorname{Inf}(p, n)$. On introduit à nouveau les foncteurs de Schur et on suit le même plan de démonstration, en utilisant dans la première et la troisième étape les mêmes opérateurs différentiels. Nous ne répétons pas cette démonstration ici, car la seule difficulté supplémentaire est celle de la notation des partitions. On obtient ainsi que la variété autocommutante de $\mathfrak{osp}(2p+1, 2n)$ est intersection de quadriques et normale à singularités rationnelles.

2.4. Cas de $\mathfrak{osp}(2p, 2n)$.

L'algèbre de Lie du paragraphe 1 est $\mathfrak{a} = \mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(W^*)$. La variété autocommutante de $\mathfrak{osp}(2p, 2n)$ n'est pas irréductible pour $p \leqslant n$. La désingularisée X de la variété autocommutante est définie exactement comme dans 2.1, sauf pour le cas où $r_0 = \inf(p, n)$ est égal à p : Elle a alors deux composantes irréductibles correspondant aux deux composantes connexes de la grassmannienne des p-plans isotropes de $\mathbb{C}^{2p}$ (muni de sa forme quadratique). Pour décrire X, on fixe un sous-espace isotrope de dimension p, D_1' (resp. D_1'') de chaque composante connexe et on note P_1' (resp. P_1'') le sous-groupe parabolique de $SO(2p)$ qui stabilise D_1'

(resp. D_1''). Alors X est l'union disjointe de X' et X'' où

$$X' = (SO(2p) \times Sp(2n)) *^{P_1' \times P_2} \mathbb{P}(D_1' \otimes D_2),$$
$$X = (SO(2p) \times Sp(2n)) *^{P_1'' \times P_2} \mathbb{P}(D_1'' \otimes D_2).$$

En appliquant le théorème de Kempf, on obtient que les composantes irréductibles sont normales à singularités rationnelles, mais le cône autocommutant lui-même n'est pas de Cohen-Macaulay car les deux composantes irréductibles de celui-ci s'intersectent en codimension supérieure ou égale à 2 ([Ha], exercice III, 3.5) appliqué à l'anneau local du cône autocommutant en un point générique de l'intersection des composantes). En effet, la dimension de la grassmannienne isotrope des r-plans de $\mathbb{C}^{2p}$ (resp. $\mathbb{C}^{2n}$) muni d'une forme quadratique (resp. alternée) est $r(2p-r) - \frac{r(r+1)}{2}$ (resp. $r(2n-r) - \frac{r(r-1)}{2}$) donc la dimension du cône des applications linéaires de rang inférieur ou égal à r de $\mathbb{C}^{2p}$ dans $\mathbb{C}^{2n}$ telles que $\mathrm{Im}\,(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u^*)$ sont isotropes est $r(2p-r) - \frac{r(r+1)}{2} + r(2n-r) - \frac{r(r-1)}{2} + r^2$, soit $2r(p+n-r)$. La dimension du cône autocommutant est donc $2pn$ (on fait $r = p$ dans la formule précédente) et l'intersection des deux composantes est de dimension $2(p-1)(n+1)$ (obtenue en faisant $r = p-1$), donc la codimension est $2(n-p+1) \geqslant 2$.

Si $p > n$, le cône autocommutant est irréductible, on lui applique le résultat de Kempf pour dire qu'il est normal à singularités rationnelles.

La démonstration du théorème 1 dans le cas $\mathfrak{osp}(2p, 2n)$ est identique à celle du cas $\mathfrak{osp}(2n+1, 2n)$, avec les mêmes opérateurs différentiels, je ne la répète pas.

3. Le cas de $\mathfrak{gl}(m, n)$.

Soient $m \leqslant n$ deux entiers positifs, nous allons décrire en détail ce qui se passe pour $\mathfrak{gl}(n, n)$ et indiquer en remarque les modifications à effectuer pour le cas général. Soit $V = V_0 \oplus V_1$ un super espace vectoriel de dimension $n + \varepsilon n$. On pose $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{gl}(n, n)$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(n) \times \mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{gl}(V_0) \times \mathfrak{gl}(V_1)$ et $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{Hom}\,(V_0, V_1) \oplus \mathrm{Hom}\,(V_1, V_0)$.

On choisit une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}_0$ contenant $\mathfrak{h}$, on identifie le plus haut poids d'un $\mathfrak{g}_0$-module de dimension finie avec une suite décroissante d'entiers (éventuellement négatifs $(\lambda = (\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n), \mu = (\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n))$ et (suivant [FuHa]) le module correspondant est égal au produit tensoriel des foncteurs de Schur $S_\lambda(V_0) \otimes S_\mu(V_1)$.

3.1. Désingularisation du cône autocommutant.

Nous allons décrire ce cône dans le cas général de $\mathfrak{gl}(m,n)$, avec les notations évidentes. On a : $C(A) = \{(u,v) \in \mathfrak{g}_1, u \circ v = 0 \text{ et } v \circ u = 0\}$.

Soit r un entier compris entre 0 et m. On définit X_r comme étant la donnée d'un sous-espace vectoriel K_0 de V_0 de rang r, d'un sous-espace vectoriel K_1 de V_1 de rang $n-r$, d'une application linéaire de V_0/K_0 dans K_1, u, et d'une application linéaire de V_1/K_1 dans K_0, v. C'est une variété algébrique irréductible et lisse de dimension mn.

Soit P_0 (resp. P_1) le sous-groupe parabolique de $GL(V_0)$ (resp. $GL(V_1)$) tel que $GL(V_0)/P_0$ (resp. $GL(V_1)/P_1$) soit la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de rang r (resp. $n-r$) de V_0 (resp. de V_1). On note $Gr_0 = GL(V_0)/P_0$ (resp. $Gr_1 = GL(V_1)/P_1$). On a les suites exactes tautologiques suivantes :

$$0 \to K_0 \to V_0 \otimes \mathcal{O}_{Gr_0} \to Q_0 \to 0$$
$$0 \to K_1 \to V_1 \otimes \mathcal{O}_{Gr_1} \to Q_1 \to 0.$$

Se donner u (resp. v) c'est se donner un point du fibré $\mathrm{Hom}\,(Q_0, K_1)$ (resp. $\mathrm{Hom}\,(Q_1, K_0)$) au-dessus de $Gr_0 \times Gr_1$.

Si maintenant on considère cette application u (resp. v) comme un élément de $\mathrm{Hom}\,(V_0, V_1)$ (resp. $\mathrm{Hom}\,(V_1, V_0)$), $u \circ v = 0$ et $v \circ u = 0$ et donc $(u,v) \in C(A)$. On a donc, pour tout $0 \leqslant r \leqslant m$, une application φ_r de X_r dans $C(A)_{\mathrm{red}}$, qui est morphisme de variétés algébriques (en effet, on peut voir X_r comme un fermé de Zariski de $Gr_0 \times Gr_1 \times \mathfrak{g}_1$ et φ_r comme la projection sur $C(A)_{\mathrm{red}} \subset \mathfrak{g}_1$). De plus, φ_r est un morphisme propre car φ_r est une projection et $Gr_0 \times Gr_1$ est compact. Enfin, la collection des morphismes φ_r lorsque r varie est un morphisme $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ de l'union disjointe $X_0 \sqcup \ldots \sqcup X_m$ sur $C(A)_{\mathrm{red}}$: on considère l'ouvert de $C(A)_{\mathrm{red}}$ constitué des couples (u,v) tels que $\mathrm{Im}\,(v) = \mathrm{Ker}\,(u)$, celui-ci est Zariski-dense. Soit r le rang de v (alors le rang de u est $n-r$), l'élément de X_r constitué de $\mathrm{Ker}\,(u)$, $\mathrm{Im}\,(u)$, u et v est l'unique point de X_r dont l'image par φ_r soit (u,v). Le morphisme φ est donc une désingularisation de $C(A)_{\mathrm{red}}$. On pose $X = \sqcup_{0 \leqslant r \leqslant m} X_r$, remarquons que X n'est pas irréductible, contrairement à ce qui se passe dans le cas $\mathfrak{osp}(2n+1, 2n)$.

3.2. Anneau du cône autocommutant.

Nous nous replaçons dans le cas particulier $m = n$, nous indiquerons en remarque les modifications à effectuer pour obtenir le cas général. Commençons par décrire l'anneau de X_r, R_r, pour $0 \leqslant r \leqslant n$. On peut voir X_r comme le fibré vectoriel sur $Gr_0 \times Gr_1$ associé au faisceau localement libre $K_0^* \otimes_{\mathbb{C}} Q_1 \oplus K_1^* \otimes_{\mathbb{C}} Q_0$. Les germes de fonctions sur X_r coïncident donc avec les germes de sections du faisceau d'algèbres $\mathrm{Sym}\,(K_0^* \otimes Q_1 \oplus K_1^* \otimes Q_0)$ sur $\mathcal{O}_{Gr_0 \times Gr_1}$. Les sections globales de ce faisceau coïncident donc avec l'anneau des fonctions régulières sur X_r.

D'après [Ke] theorem 1, on a :

PROPOSITION 2.— *Pour tout $r > 0$, on désigne par R_r l'anneau de X_r. Alors la composante de degré k de R_r, $(R_r)_k$ est :*

$$(R_r)_k = \bigoplus_{\nu=\nu_1 \geqslant \ldots \geqslant \nu_{n-r} \geqslant 0 \geqslant \nu_{n-r+1} \geqslant \ldots \geqslant \nu_n, \sum_i |\nu_i| = k} S_\nu(V_0) \otimes S_\nu(V_1^*).$$

Remarque.— Pour le cas de $\mathfrak{gl}(m,n)$, $m < n$, on a, pour tout r tel que $0 \leqslant r \leqslant m$:

$$(R_r)_k = \bigoplus_{\nu=\nu_1 \geqslant \ldots \geqslant \nu_{m-r} \geqslant 0 \geqslant \nu_{m-r+1} \geqslant \ldots \geqslant \nu_m, \sum_i |\nu_i| = k} S_\nu(V_0) \otimes S_{\nu'}(V_1^*),$$

où ν' est l'unique suite de n éléments de $\mathbb{Z}$ qui est décroissante avec les mêmes termes que ν et prolongée où il le faut par des 0.

THÉORÈME 2.— *L'anneau du cône $C(A)_{\mathrm{red}}$ est de Cohen-Macaulay.*

Démonstration.— On rappelle qu'un anneau gradué $\mathcal{R} = \oplus_{k \geqslant 0} \mathcal{R}_k$, de type fini sur $\mathbb{C}$, tel que $\mathcal{R}_0 = \mathbb{C}$ est dit de Cohen-Macaulay si sa dimension de Krull d est égale à sa «profondeur», c'est-à-dire la longueur maximale d'une suite régulière d'éléments homogènes de degrés strictement positifs. Dans le cas où $\mathcal{R}$ est quotient gradué d'un anneau de polynômes $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, cela revient à dire que la longueur minimale d'une résolution par des modules libres du $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$-module $\mathcal{R}$ est exactement $n - d$.

Notons $\mathcal{R}$ l'anneau de $C(A)_{\mathrm{red}}$.

Reprenons les notations du paragraphe 3.1, soit r un entier positif et considérons la variété de drapeaux incomplète suivante : soient K_0 un sous-espace vectoriel de rang r de V_0, K_0' un sous-espace vectoriel de rang $r + 1$ de V_0 contenant K_0. Soient K_1 un sous-espace vectoriel de rang $n - r$ de V_1,

K_1' un sous-espace vectoriel de rang $n-r-1$ de V_1 contenu dans K_1. On note D_0 (resp. D_1) la variété des drapeaux incomplète $0 \subset K_0 \subset K_0' \subset V_0$ (resp. $0 \subset K_1' \subset K_1 \subset V_1$).

Considérons l'algèbre symétrique sur $D_0 \times D_1$ de $\mathrm{Hom}(V_0/K_0', K_1') \oplus \mathrm{Hom}(V_1/K_1, K_0)$. Notons Y_r son spectre ([Ha], chap. II, exercice 5.17). Il existe deux morphismes, l'un de Y_r dans X_r, f_r, et l'autre de Y_r dans X_{r+1}, g_{r+1}, f_r (resp. g_r) correspondant à l'application linéaire de $V_1/K_1 \otimes K_0^* \oplus V_0/K_0 \otimes K_1^*$ dans $V_1/K_1 \otimes K_0^* \oplus V_0/K_0' \otimes K_1'^*$ (resp. $V_1/K_1' \otimes K_0'^* \oplus V_0/K_0' \otimes K_1'^*$ dans $V_1/K_1 \otimes K_0^* \oplus V_0/K_0' \otimes K_1'^*$).

Notons F_i (resp. G_i) le morphisme d'anneaux déduit des f_i (resp g_i). On note F (resp. G) la collection des F_i (resp. G_i) avec la convention $F_n = 0$ et $G_0 = 0$. On obtient ainsi une application $F - G$. Nous allons montrer le lemme suivant :

LEMME 3. — *On a la suite exacte de $S(\mathfrak{g}_1^*)$-modules :*

$$0 \to \mathcal{R} \to \Pi_{r=0}^{n} R_r \xrightarrow{F-G} \Pi_{r=0}^{n-1} H^0(\mathcal{O}_{Y_r}) \to 0.$$

Démonstration (du lemme). — Décrivons d'abord $H^0(\mathcal{O}_{Y_r})$: Y_r est le spectre de l'anneau

$$S(V_0/K_0' \otimes K_1'^* \oplus V_1/K_1 \otimes K_0^*).$$

Or on a :

$$S^k(V_0/K_0' \otimes K_1'^* \oplus V_1/K_1 \otimes K_0^*) = \bigoplus_{\lambda=(\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{n-r}), \mu=(\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_r), \sum \lambda_i + \sum \mu_j = k} S_\lambda(V_0/K_0') \otimes_{\mathcal{O}_{D_0}} S_\mu(K_0^*) \otimes_{\mathbb{C}} S_\lambda(K_1'^*) \otimes_{\mathcal{O}_{D_1}} S_\mu(V_1/K_1).$$

Comme dans le cas de R_r, on passe alors aux sections globales et on obtient finalement :

$$H^0(S^k(V_0/K_0' \otimes K'^*_1 \oplus V_1/K_1 \otimes K_0^*)) = \bigoplus_{\nu=(\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{n-r-1} \geqslant 0 \geqslant -\mu_r \geqslant \ldots \geqslant -\mu_1), \sum \lambda_i \sum \mu_j = k} S_\nu(V_0) \otimes S_\nu(V_1^*)$$

(la partition ν est exactement de longueur n, en comptant le terme 0, qui avait été arbitrairement rajouté dans le cas de R_r).

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_1^* & \longrightarrow & V_0/K_0 \otimes K_1^* \oplus V_1/K_1 \otimes K_0^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_0/K'_0 \otimes K'^*_1 \oplus V_1/K'_1 \otimes K'^*_0 & \longrightarrow & V_0/K'_0 \otimes K'^*_1 \oplus V_1/K_1 \otimes K_0^*, \end{array}$$

les flèches correspondant aux projections et inclusions canoniques. On a le même diagramme commutatif en passant aux algèbres symétriques et aux sections globales, et on trouve :

$$\begin{array}{ccc} S(\mathfrak{g}_1^*) & \longrightarrow & R_r \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_{r+1} & \underset{G_{r+1}}{\longrightarrow} & H^0(\mathcal{O}_{Y_r}). \end{array}$$

Toutes les flèches de ce diagramme sont surjectives : les deux applications composées de $S(\mathfrak{g}_1^*)$ dans $H^0(\mathcal{O}_{Y_r})$ sont des projections sur des facteurs simples (comme $\mathfrak{g}_0$-modules) deux-à-deux non isomorphes, donc surjectives. Les applications de $S(\mathfrak{g}_1^*)$ dans R_r et R_{r+1} sont surjectives pour la même raison.

Les morphismes F et G sont donc surjectifs. L'application $F - G$ est surjective car : soit $x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \Pi_{r=0}^{n-1} H^0(\mathcal{O}_{Y_r})$, on relève x_0 en $y_0 \in R_1$ tel que $G(y_1) = -x_0$. Soit $y_2 \in R_2$ tel que $G_2(y_2) = -x_1 + F_1(y_1)$, et ainsi de suite jusqu'à $y_n \in R_n$ tel que $G_n(y_n) = -x_{n-1} + F_{n-1}(y_{n-1})$. On a $(F - G)(0, y_1, \dots, y_n) = (x_0, \dots, x_n)$.

L'anneau $\mathcal{R}$ est un quotient de $S(\mathfrak{g}_1^*)$, qui est un sous-anneau de $\Pi_{r=0}^n R_r$ car $\sqcup_r X_r$ est une désingularisation de $C(A)$. De plus, comme le diagramme ci-dessus est commutatif, $F - G$ est nulle sur $S(\mathfrak{g}_1^*)$ et donc sur $\mathcal{R}$.

Pour terminer la preuve du lemme, il reste à prouver l'exactitude en $\Pi_{r=0}^n R_r$. On remarque que tout facteur irréductible S qui intervient dans $\Pi_{r=0}^n R_r$ avec multiplicité m (il s'agit d'une partition contenant $m-1$ zéros) apparaît avec multiplicité $m - 1$ dans $\Pi_{r=0}^{n-1} H^0(\mathcal{O}_{Y_r})$.

Le module S apparaît dans certains des R_r, par exemple dans R_{r_0}. Or $S(\mathfrak{g}_1^*)$ s'envoie surjectivement sur chaque R_r, donc sur R_{r_0}. Donc il existe un facteur irréductible S' de $S(\mathfrak{g}_1^*)$ sur lequel la restriction de la surjection de $S(\mathfrak{g}_1^*)$ sur R_{r_0} est un isomorphisme sur S. Or l'idéal définissant $\mathcal{R}$ dans $S(\mathfrak{g}_1^*)$ est plus petit que celui qui définit R_{r_0}. Donc S intervient dans $\mathcal{R}$. □

Pour démontrer le théorème 2, on remarque que les anneaux gradués $\Pi_{r=0}^{n-1} H^0(\mathcal{O}_{Y_r})$ et $\Pi_{r=0}^{n} R_r$ sont de Cohen-Macaulay car les variétés qu'ils définissent sont normales à singularités rationnelles par le théorème de Kempf. En outre, les dimensions de Krull de ces anneaux sont respectivement $n^2 - 1$ et n^2.

De plus, $\Pi_{r=0}^{n} R_r$ est un $S(\mathfrak{g}_1^*)$-module de dimension projective n^2 (car $S(\mathfrak{g}_1^*)$ est de dimension de Krull $2n^2$). De même, $\Pi_{r=0}^{n-1} H^0(\mathcal{O}_{Y_r})$ est de dimension projective $n^2 + 1$ sur $S(\mathfrak{g}_1^*)$. Donc la dimension projective de $\mathcal{R}$ sur $S(\mathfrak{g}_1^*)$ est égale à $inf(n^2, n^2 + 1) = n^2$. Donc la profondeur de $\mathcal{R}$ est égale à $2n^2 - n^2$ (codimension de $\mathcal{R}$ dans $S(\mathfrak{g}_1^*)$), donc à sa dimension de Krull. $\square$

THÉORÈME 3.— *L'idéal de $S(\mathfrak{g}_1^*)$ définissant $C(A)$ est égal à son nilradical.*

Ce théorème est démontré dans [St]. La méthode proposée ici est différente.

L'un des théorèmes de la section 4 de [Br] aurait pu montrer que la variété autocommutante est intersection de quadriques, mais ce résultat n'est pas vrai dans la généralité où il est énoncé, et la variété autocommutante de $\mathfrak{gl}(m,n)$ est malheureusement dans les mauvais cas (voir [Pa]).

Démonstration.— Nous garderons les conventions de notations du paragraphe 2.2.2 pour les éléments de Casimir. L'algèbre de Lie du paragraphe 1 est $\mathfrak{a} = \mathfrak{gl}(V_0) \times \mathfrak{gl}(V_0^*)$.

La démonstration suit exactement le même plan que celle du théorème 1. Nous nous bornerons donc à décrire ce qui change. Les algèbres de Lie intervenant dans le cas présent sont : $\mathfrak{gl}(V_0)$, $\mathfrak{gl}(V_1)$, $\mathfrak{gl}(V_0) \times \mathfrak{gl}(V_0^*)$, $\mathfrak{gl}(V_1) \times \mathfrak{gl}(V_1^*)$ et $\mathfrak{gl}(V_0 \oplus V_0^*)$. Soit k un entier positif, on notera encore I_k la partie homogène de degré k des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}_1$ nulles sur la désingularisée X de A_{red}. Il s'agit de démontrer que si $k \geqslant 2$, $I_{k+1} = \mathfrak{g}_1 I_k$, ce qui donne le résultat par récurrence sur k.

On applique la proposition 2. On considère un facteur $S_\alpha(V_0) \otimes S_\beta(V_1)$ du $\mathfrak{g}_0$-module I_k et on note (λ, μ) le couple de partitions tel que ce facteur soit un sous $\mathfrak{g}_0$-module du $\mathfrak{gl}(V_0) \times \mathfrak{gl}(V_0^*) \times \mathfrak{gl}(V_1) \times \mathfrak{gl}(V_1^*)$-module $S_\lambda(V_0) \otimes S_\mu(V_0^*) \otimes S_\mu(V_1) \otimes S_\lambda(V_1^*)$, où α et β désignent des suites décroissantes de n éléments de $\mathbb{Z}$.

On suppose dans un premier temps que la somme des longueurs de λ et μ est plus petite que n. On utilise alors l'opérateur différentiel $\mathfrak{g}_0$-invariant suivant :

$$K = [C_{2,\mathfrak{gl}(V_0)\times\mathfrak{gl}(V_0^*)} - C_{2,\mathfrak{gl}(V_0)} + 2C_{1,\mathfrak{gl}(V_0)\times\mathfrak{gl}(V_0^*)} - C_{1,\mathfrak{gl}(V_0)}] \otimes 1$$

ou bien l'analogue en remplaçant V_0 par V_1 si nécessaire, pour séparer les poids. Ici, $C_{1,\mathfrak{gl}(V_0)\times\mathfrak{gl}(V_0^*)}$ est l'unique élément de degré 1 de $Z(\mathfrak{gl}(V_0) \times \mathfrak{gl}(V_0^*))$ qui agit par l'identité à la fois sur V_0 et sur V_0^*. Un autre élément de degré 1 de $Z(\mathfrak{gl}(V_0) \times \mathfrak{gl}(V_0^*))$ est utilisé plus loin, celui qui agit par l'identité sur V_0 et par multiplication par (-1) sur V_0^*.

Si $S_\alpha(V_0) \otimes S_\beta(V_1)$ est un sous $\mathfrak{g}_0$-module de $S_\lambda(V_0) \otimes S_\mu(V_0^*) \otimes S_\mu(V_1) \otimes S_\lambda(V_1^*)$, on écrit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (resp. $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$), α^+ (resp. β^+) la partition correspondante à la partie positive de α (resp. de β), on a $(\alpha_i)^+ = (\alpha^+)_i$, α^- (resp. β^-) la partition correspondante à la partie positive de $-\alpha$ (resp. de $-\beta$), on a $(\alpha_n + 1 - i)^- = (\alpha^-)_i$. Comme $S_\alpha(V_0) \otimes S_\beta(V_1) \subset I_k$, on a $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = \sum_{i=1}^n |\beta_i| = k$. Le centre de $\mathfrak{gl}(V_0) \times \mathfrak{gl}(V_0^*)$ agit sur chaque $\mathfrak{gl}(V_0)$-composante avec le même scalaire, $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = \sum_{i=1}^n \lambda_i - \sum_{i=1}^n \mu_i$ puisque $S_\alpha(V_0)$ est un $\mathfrak{gl}(V_0)$-facteur de $S_\lambda(V_0) \otimes S_\mu(V_0^*)$. De même, comme $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = k$, on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \mu_i = k$. On a donc $\sum_{i=1}^n (\alpha^+)_i = \sum_{i=0}^n \lambda_i$ et $\sum_{i=1}^n (\alpha^-)_i = \sum_{i=0}^n \mu_i$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
C_{2,\mathfrak{gl}(V_0)\times\mathfrak{gl}(V_0^*)}(S_\alpha(V_0)) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(\lambda_i + n - 1 - 2i), \\
C_{2,\mathfrak{gl}(V_0)}(S_\alpha(V_0)) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i(\alpha_i + n - 1 - 2i), \\
C_{1,\mathfrak{gl}(V_0)\times\mathfrak{gl}(V_0^*)}(S_\alpha(V_0)) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \mu_i, \\
C_{1,\mathfrak{gl}(V_0)}(S_\alpha(V_0)) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i.
\end{aligned}$$

La quantité cherchée est donc :

$$\begin{aligned}
K(S_\alpha(V_0)) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^2 - \mu_i^2 + (\lambda_i + \mu_i)(n - 1 - 2i)) \\
- \sum_{i=1}^n (\alpha_i^2 + \alpha_i(n - 1 - 2i)) + 2\Big(\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) - \sum_{i=1}^n \alpha_i\Big).
\end{aligned}$$

Soit γ la suite décroissante d'entiers $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_n$ d'éléments de $\mathbb{Z}$ telle que $\gamma^+ = \lambda$ et $\gamma^- = \mu$ (ceci existe car la somme des longueurs de λ et μ est inférieure à n). On a $\lambda_i = (\gamma^+)_i$ et $\mu_i = (\gamma^-)_{n+1-i}$.

On obtient alors, après calcul,

$$K(S_\alpha(V_0)) = (\gamma+\rho, \gamma+\rho) - (\alpha+\rho, \alpha+\rho)$$

où ρ désigne la demi-somme des racines positives de $\mathfrak{sl}(V_0)$. De plus, $\gamma - \alpha$ est combinaison linéaire à coefficients positifs des racines simples de $\mathfrak{sl}(V_0)$ car $(S_\alpha(V_0))$ est un facteur de $S_{\gamma^+}(V_0) \otimes (S_{\gamma^-}(V_0^*))$. D'où le résultat.

Si maintenant la somme des longueurs de λ et μ est strictement supérieure à n, on utilise le lemme 2 qui permet, comme dans le cas de $\mathfrak{osp}(2n+1, 2n)$, de séparer $S_\alpha(V_0) \otimes S_\beta(V_1) \subset I_k$ de $H^0(\mathcal{O}_X(k))$, sauf quand les longueurs de λ et de μ sont maximales, i.e. $\lambda_1 = \mu_1 = 1$. Notons a (resp. b) le nombre de 1 dans la partition λ (resp. μ), on a $a < n$ (resp. $b < n$) et $a + b > n$.

On a $S_\lambda(V_0) = \Lambda^a(V_0)$ et $S_\mu(V_0^*) = \Lambda^b(V_0^*) = \Lambda^{n-b}(V_0) \otimes \Lambda^n(V_0^*)$. D'après la règle de Littlewood-Richardson ([FuHa], p. 455), on a $\Lambda^a(V_0) \otimes \Lambda^b(V_0^*) = \oplus S_\alpha(V_0)$ où α est de la forme $\alpha = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, -1, \ldots, -1)$ avec c fois 1 et $c + b - a$ fois (-1) où c est un élément de $\mathbb{N}$ tel que $a - b \leqslant c \leqslant \frac{n+a-b}{2}$.

On reprend l'opérateur différentiel K, sa valeur en $S_\alpha(V_0)$ est

$$K(S_\alpha(V_0)) = 2(c^2 - c(n+a-b) + a(n-b+2)).$$

Le discriminant de ce polynôme en c est $(n-a-b)^2 - a^2 - b^2 - 8a$, qui est toujours strictement négatif dans le domaine $a < n$, $b < n$, $a + b > n$, comme on le vérifie en résolvant l'équation $(n-a-b)^2 - a^2 - b^2 - 8a = 0$ en a et en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à cette fonction continue de a.

Donc $K(S_\alpha(V_0))$ ne peut pas s'annuler.

On en déduit le théorème par le lemme de Kostant.

Remarque. — Les résultats présentés pour $\mathfrak{gl}(n, n)$ se généralisent sans autre difficulté que celle des notations au cas de $\mathfrak{gl}(m, n)$, supposons $p < n$, les suites décroissantes d'entiers utilisées dans les démonstrations doivent être modifiées comme dans la remarque qui suit la proposition 2. Le cône autocommutant de $sl(m, n)$ étant identique à celui de $\mathfrak{gl}(m, n)$, les résultats se transposent au cas de $sl(m, n)$.

4. Les familles exceptionnelles et étranges.

4.1. Les super algèbres de Lie exceptionnelles.

Nous nous reportons à [Gr2] (paragraphe 5.1, p. 545) pour la description du crochet de Lie pour les super algèbres de Lie $F(4)$, $G(3)$ et $D(2,1,\lambda)$. On vérifie dans chaque cas que le cône autocommutant privé de son sommet 0 se réduit à une unique G_0-orbite, ce qui permet d'appliquer le théorème de Kostant sur l'orbite d'un vecteur de plus haut poids pour une algèbre de Lie semi-simple ([Ga], [LaTo]).

4.2. La famille $P(n)$.

Soit n un entier $\geqslant 3$. On pose $P(n-1) = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ avec $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(n)$ et $\mathfrak{g}_1 = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V^*)$, où V désigne la représentation standard de $\mathfrak{g}_0$. Un élément de $P(n-1)$ est une matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix}$, $A \in \mathfrak{gl}(n)$, $B \in \mathrm{Hom}(V^*, V)$, symétrique, $C \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$, alternée et le crochet est induit par celui de $\mathfrak{gl}(n,n)$. Le cône autocommutant a donc pour équations $BC = 0$ et $CB = 0$.

Soit r un entier tel que $n-r$ soit pair, compris entre 0 et n. Notons P_r le sous-groupe parabolique de $\mathfrak{gl}(n)$ qui stabilise l'espace vectoriel engendré par les r premiers vecteurs de la base fixée de V.

Pour tout r, on considère la grassmannienne G/P_r munie de la suite exacte tautologique :

$$0 \to K_r \to V \otimes \mathcal{O}_{G/P_r} \to Q_r \to 0.$$

On note X_r le fibré vectoriel de base G/P_r associé au module localement libre $\Lambda^2(Q_r^*) \oplus S^2(K_r)$. La réunion disjointe des X_r, X, est une désingularisation de $C(A)_{\mathrm{red}}$. Pour tout r, notons φ_r le morphisme de X_r dans $\mathfrak{g}_1$ qui se déduit des inclusions $S^2(K_r) \subset S^2(V)$ et $\Lambda^2(Q_r^*) \subset \Lambda^2(V^*)$. L'image de φ_r est contenue dans $C(A)_{\mathrm{red}}$. On note $\varphi : X \to C(A)_{\mathrm{red}}$ le morphisme se déduisant de la collection de φ_r. De plus, chacun des φ_r induit un isomorphisme d'un ouvert non vide de X_r, le lieu des couples dans $\Lambda^2(Q_r^*) \oplus S^2(K_r)$ dont chaque composante est de rang maximum, sur l'ouvert de $C(A)$ constitué des couples (B,C) dans $\mathfrak{g}_1$ tel que le rang de B (resp. de C) est $n-r$ (resp. r). Donc $\varphi : X \to C(A)_{\mathrm{red}}$ est une désingularisation du cône autocommutant.

Décrivons maintenant $H^0(\mathcal{O}_{X_r})$.

On a

$$H^0(S^2(K_r^*) \oplus \Lambda^2(Q_r)) = H^0(\oplus_{p=0}^k S^p(S^2(K_r^*)) \otimes_{\mathcal{O}_{G/P_r}} S^{k-p}(\Lambda^2(Q_r))).$$

On utilise alors [Ma], I.5 example 10, pour obtenir :

$$S^p(S^2(K_r^*)) = \bigoplus_{\lambda=(\lambda_1\geqslant\ldots\geqslant\lambda_r),\sum\lambda_i=2p,\lambda_i\ pair} S_\lambda(K_r^*)$$
$$S^{k-p}(\Lambda^2(Q_r)) = \bigoplus_{\mu=(\mu_1\geqslant\ldots\geqslant\mu_{n-r}),\sum\mu_i=2(n-p),\mu_i'\ pair} S_\mu(Q_r)$$

où μ_i' désigne le i-ième terme de la partition conjuguée μ' de μ ([FuHa], p. 45).

Passons aux sections globales, on a

$$H^0(S^2(K_r^*) \oplus \Lambda^2(Q_r)) = \bigoplus_\nu S_\nu(V)$$

où $\nu = (\nu_1 \geqslant \ldots \geqslant \nu_n)$ est une suite décroissante d'entiers non nécessairement positifs tels que $\sum_i |\nu_i| = 2k$, $\nu_1, \ldots, \nu_r$ sont positifs et pairs, $-\nu_n, \ldots, -\nu_{n-r}$ forment une partition dont la conjuguée est paire.

Remarque. — On peut appliquer le théorème de Kempf pour dire que chacune des composantes irréductibles X_r est une variété normale à singularités rationnelles.

On a $\dim(X_r) = r(n-r) + \frac{r(r+1)}{2} + \frac{(n-r)(n-r+1)}{2} = r + \frac{n(n-1)}{2}$. Comme $C(A)_{\mathrm{red}}$ est connexe, et comme ses différentes composantes irréductibles ont la même dimension que les X_r, $C(A)_{\mathrm{red}}$ ne peut pas être de Cohen-Macaulay.

Enfin, $C(A)_{\mathrm{red}}$ est intersection de quadriques : nous adoptons la même démarche que dans le cas de $\mathfrak{gl}(n,n)$. On fait agir les centres des algèbres enveloppantes de $\mathfrak{gl}(V)$, $\mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(V^*)$, de la même manière que dans le paragraphe 3.2, avec les mêmes opérateurs différentiels. Ceci donne le résultat voulu.

4.3. La famille $Q(n)$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On pose $Q(n-1) = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ avec $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(n)$ et $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}(n)$. On note V la représentation standard de $\mathfrak{gl}(n)$. La super algèbre de Lie ainsi construite n'est pas simple car elle a un centre. On indexe les représentations irréductibles de $\mathfrak{gl}(n)$ par des suites décroissantes d'entiers non nécessairement positifs.

Le cône autocommutant est défini par les équations $u^2 = 0$, $u \in \mathfrak{sl}(n)$.

On désingularise ce cône de la manière suivante : soit P le sous-groupe parabolique de $\mathfrak{gl}(n)$ qui stabilise le sous-espace vectoriel de rang $r = E(\frac{n}{2})$ de V engendré par les r premiers vecteurs de la base fixée. On considère la grassmannienne G/P munie de la suite exacte tautologique :

$$0 \to K \to V \otimes \mathcal{O}_{G/P} \to Q \to 0,$$

K étant le sous-fibré tautologique de rang r du fibré trivial de fibre V.

La désingularisée X est le fibré de base G/P de fibre $\mathrm{Hom}(Q, K)$. Il s'agit du spectre de la $\mathcal{O}_{G/P}$-algèbre $\mathrm{Sym}(Q \otimes_{\mathcal{O}_{G/P}} K^*)$. Le morphisme φ de X dans $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}_1^*))$ est défini par l'application $\mathcal{O}_{G/P}$-linéaire canonique surjective

$$\mathfrak{g}_1^* \otimes \mathcal{O}_{G/P} = V \otimes_{\mathbb{C}} V^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{G/P} \to Q \otimes_{\mathcal{O}_{G/P}} K^*.$$

L'image ensembliste de ce morphisme est le cône $C(A)$ car si on se donne un point x de G/P, un élément de $\mathrm{Hom}(Q_x, K_x)$ définit un élément de $\mathrm{End}(V)$ qui est de carré nul. On vérifie aisément que ce morphisme est un isomorphisme sur un ouvert dense de $C(A)_{\mathrm{red}}$, les éléments u de rang exactement r.

Le morphisme $\varphi : X \to C(A)_{\mathrm{red}}$ est donc une désingularisation du cône autocommutant.

Décrivons maintenant $H^0(\mathcal{O}_X)$. Comme dans le cas de $\mathfrak{gl}(n,n)$, on a

$$H^0(S^k(Q \otimes_{\mathcal{O}_{G/P}} K^*)) = \bigoplus\nolimits_{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r \leqslant 0), \sum \lambda_i = k} H^0(S_\lambda(Q)) \otimes H^0(S_\lambda K^*))$$

et donc

$$H^0(S^k(Q \otimes_{\mathcal{O}_{G/P}} K^*)) = \bigoplus\nolimits_\mu S_\mu(V),$$

où μ parcourt l'ensemble des suites de n entiers de $\mathbb{Z}$ qui sont décroissantes et symétriques ($\mu_i = -\mu_{n+1-i}$) : si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r \leqslant 0), \sum \lambda_i = k$, la suite μ correspondante est caractérisée par $\mu_i = \lambda_i$ si $i \leqslant r$. De plus, si n est impair, on a $\mu_{r+1} = 0$.

Remarque. — On peut, comme dans le cas de $\mathfrak{osp}(2n+1, 2n)$, appliquer le théorème de Kempf pour affirmer que le cône $C(A)_{\mathrm{red}}$ est normal à singularités rationnelles. Ce résultat est par ailleurs bien connu puisque cet objet est une adhérence d'orbite nilpotente de la représentation adjointe de $\mathfrak{sl}(n)$, voir [KrPr1].

Montrons maintenant que la variété autocommutante est intersection de quadriques.

Nous adoptons la même démarche que dans le cas de $\mathfrak{gl}(n,n)$. On fait agir les centres des algèbres enveloppantes de $\mathfrak{gl}(V)$, $\mathfrak{gl}(V)\times\mathfrak{gl}(V^*)$, de la même manière que dans le paragraphe 3.2, avec les mêmes opérateurs différentiels. Ceci donne le résultat voulu.

BIBLIOGRAPHIE

[Bo] R. Bott, Homogeneous vector bundles, Annals of Math., 66 (1957), 203-248.

[Bou] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chap. IV, V et VI, Hermann, 1968.

[Br] M. Brion, Représentations exceptionnelles des groupes semi-simples, Annales de l'ENS, 4eme série, tome 18 (1985), 345-387.

[Fu-Ha] W. Fulton and J. Harris, Representation theory, A first course, GTM 129, Springer Verlag (1991).

[Ga] D. Garfinkle, A new construction of the Joseph ideal, Ph.D. thesis, M.I.T. Cambridge (1982).

[Gri-Ha] Ph. Griffiths and J. Harris, Principles of algebraic geometry, Wiley interscience, 1978.

[Gr1] C. Gruson, Sur les relations de Plücker dans le cas d'une super algèbre de Lie basique classique complexe, Journal of Geometry and Physics, 14 (1994), 43-64.

[Gr2] C. Gruson, Finitude de l'homologie de certains modules de dimension finie sur une super algèbre de Lie, Annales de l'Institut Fourier, 47-2 (1997), 531-553.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic geometry, GTM 52, Springer Verlag (1977).

[Ka] V.G. Kac, Lie superalgebras, Advances in Math., 26 (1977), 8-96.

[Kem] G. Kempken, Ein Darstellung der Kochers $\tilde{A}_k$, Bonner Mathematishe Schriften, 137 (1982), 1-159.

[Ke] G. Kempf, On the collapsing of homogeneous bundles, Invent. Math., 37 (1976), 229-239.

[Kr] H. Kraft, Geometrische Methoden in der Invariantentheorie, Aspekte der Math. D1, Vieweg-Verlag (1984).

[KrPr1] H. Kraft and C. Procesi, Closures of conjugacy classes of matrices are normal, Inv. Math., 53 (1979), 227-247

[KrPr2] H. Kraft and C. Procesi, On the geometry of conjugacy classes in classical groups, Comment. Math. Helvet., 57 (1982), 539-602.

[LaTo] G. Lancaster and J. Towber, Representation functors and flag algebras for the classical groups I, J. of algebra 59, (1979), 16-38.

[Ma] I.G. MACDONALD, Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford Math. Monographs (1979).

[Pa] D. PANYUSHEV, Parabolic subgroups with abelian unipotent radical as a testing site for invariant theory, Max Planck Institute preprint series 1998, n. 21.

[St] E. STRICKLAND On the conormal bundle of the determinantal variety, J. Algebra, 75 (1982), 523-537.

Manuscrit reçu le 22 septembre 1999,
accepté le 19 novembre 1999.

Caroline GRUSON,
Université Paris 7
Institut de Mathématiques
U.M.R. 7586 du CNRS
Théorie des Représentations et applications
Couloir 45-55
5ème étage, case 7012
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05 (France)

&

Université de Lille I
U.F.R. de Mathématiques
Domaine universitaire scientifique
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France).
Caroline.Gruson@agat.univ-lille1.fr