

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GÉRALD TENENBAUM

## Sur un problème extrémal en arithmétique

*Annales de l'institut Fourier*, tome 50, n° 1 (2000), p. 317-319

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_2000\\_\\_50\\_1\\_317\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_1_317_0)

© Annales de l'institut Fourier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## CORRIGENDUM

### SUR UN PROBLÈME EXTRÊMAL EN ARITHMÉTIQUE

par **Gérald TENENBAUM**

Article paru dans le tome 37 (1987), fascicule 2, pp. 1-18

La preuve du lemme 3 est inexacte car la formule (18)\* ne découle pas de ce qui précède. On peut rectifier la démonstration du théorème 3 en remplaçant le lemme 3 par l'énoncé suivant.

LEMME 3'. — Soit  $c_1 > 0$ . Pour chaque  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , il existe un entier  $N_0(c_1, \varepsilon)$  tel que, pour tout entier  $N > N_0(c_1, \varepsilon)$  satisfaisant à

$$(16) \quad \omega(N) > x/(\log x)^{c_1+1-\varepsilon}$$

avec  $x := P^+(N)$ , et pour tout nombre réel  $\vartheta$  tel que

$$(0.1) \quad (\log x)^{c_1-\varepsilon/2} \leq |\vartheta| \leq \exp \{(\log x)^{3/2-\varepsilon}\},$$

on ait

$$(17) \quad \sum_{p|N} \|\vartheta \log p\|^2 > \frac{1}{67} \omega(N)^3 / \pi(x)^2.$$

Avant d'établir ce résultat, montrons comment il peut être utilisé pour prouver le théorème 3.

Page 17, on remplace la minoration de  $\varphi(N, \vartheta)$  pour  $\vartheta \in (I_4)$  par (toujours avec  $x := P^+(N)$ )

$$\varphi(N, \vartheta) \geq \sum_{p|N} \left\| \frac{\vartheta}{2\pi} \log p \right\|^2 \geq \frac{1}{67} \omega(N)^3 / \pi(x)^2.$$

---

\* Ici et dans toute la suite, les numéros d'équation simples renvoient à ceux de l'article original, ceux du présent corrigendum étant de la forme (0.n).

Cela implique

$|I_4| \leq 2 \exp \{ (\log x)^{3/2} - \frac{2}{201} \omega(N)^3 / \pi(x)^2 \} \ll \exp \{ -\frac{1}{101} \omega(N)^3 / \pi(x)^2 \}$ ,  
 puisque  $\omega(N)^3 / x^2 \gg x / (\log x)^{3c_1}$  d'après l'hypothèse (W1). De (26), on obtient alors l'estimation requise

$$I_4 = o\left(\frac{1}{S(N)}\right).$$

*Démonstration du lemme 3'.* — Soit  $S_N(\vartheta)$  la somme à minorer. On a, pour chaque entier  $K \geq 2$ ,

$$(0.2) \quad S_N(\vartheta) \geq \frac{1}{K^2} \{ \omega(N) - T_K(x, \vartheta) \}$$

avec

$$T_K(x, \vartheta) := \sum_{\substack{p \leq x \\ \|\vartheta \log p\| \leq 1/K}} 1.$$

On majore  $T_K(x, \vartheta)$  en notant que

$$1 \leq \left( \frac{\pi \sin \pi K y}{2K \sin \pi y} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4K} \sum_{|k| < K} \left( 1 - \frac{|k|}{K} \right) \cos(2\pi k y) \quad (\|y\| \leq 1/K).$$

Il suit

$$(0.3) \quad T_K(x, \vartheta) \leq \frac{\pi^2}{4} \left\{ \frac{\pi(x)}{K} + \sup_{1 \leq k < K} |\pi(x, 2\pi k \vartheta)| \right\}$$

où l'on a posé

$$\pi(x, \tau) := \sum_{p \leq x} p^{i\tau}.$$

Le lemme 2 fournit facilement par sommation d'Abel que

$$(0.4) \quad \pi(x, \tau) = \pi(x) \frac{x^{i\tau}}{1 + i\tau} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right\} + O(xe^{-(\log x)^{\varepsilon/2}})$$

uniformément pour  $x \geq 2$ ,  $|\tau| \leq e^{(\log x)^{3/2-\varepsilon}}$ . Choisissons

$$K := [\lambda \pi(x) / \omega(N)] + 1,$$

où  $\lambda$  est une constante numérique que nous préciserons plus loin. Comme  $\omega(N) \leq \pi(x)$ , on a

$$(0.5) \quad \lambda \pi(x) / \omega(N) < K \leq (\lambda + 1) \pi(x) / \omega(N) \ll (\log x)^{c_1 - \varepsilon}.$$

En reportant dans (0.3) et en tenant compte de la condition (0.1), on voit que

$$T_K(x, \vartheta) \leq \{1 + o(1)\} \frac{\pi^2}{4\lambda} \omega(N)$$

lorsque  $x \rightarrow \infty$ . En reportant dans (0.2), il suit

$$S_N(\vartheta) \geq \frac{\omega(N)^3}{(\lambda + 1)^2 \pi(x)^2} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{4\lambda} + o(1) \right\}.$$

On obtient le résultat indiqué en choisissant  $\lambda := \frac{3}{8}\pi^2$  et en remarquant que, pour cette valeur,

$$\frac{1}{(\lambda + 1)^2} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{4\lambda} \right\} = \frac{1}{3(\lambda + 1)^2} > \frac{1}{67}. \quad \square$$

Nous saisissons l'occasion pour mentionner également une coquille dans l'énoncé du théorème 4, où il faut lire  $d < z(1 + \exp\{-(\log k)^\beta\})$  à l'antépénultième ligne.

Gérald TENENBAUM,  
Institut Élie Cartan  
Université Henri Poincaré–Nancy 1  
BP 239  
54506 Vandœuvre Cedex (France).  
tenenb@ciril.fr