

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANÇOIS SALEIN

Variétés anti-de Sitter de dimension 3 exotiques

Annales de l'institut Fourier, tome 50, n° 1 (2000), p. 257-284

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_1_257_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_1_257_0)

© Annales de l'institut Fourier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VARIÉTÉS ANTI-DE SITTER DE DIMENSION 3 EXOTIQUES

par François SALEIN

1. Introduction.

Une structure pseudo-riemannienne sur une variété réelle M de dimension n est la donnée d'un champ de formes quadratiques non dégénérées dans le fibré tangent. Le cas riemannien correspond à une signature $(0, n)$, le cas *lorentzien* à une signature $(1, n - 1)$. Tout comme en géométrie riemannienne, on peut définir à partir d'une structure pseudo-riemannienne une connexion de Levi-Civita, des géodésiques, un tenseur de courbure...

Les variétés lorentziennes de courbure sectionnelle négative constante sont appelées *anti-de Sitter*. En dimension 3, elles sont localement isométriques, modulo une homothétie, à

$$P_0 = (\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{kill})$$

où kill est la forme de Killing du groupe de Lie $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (noté PSL_2). Cette forme est définie sur l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{sl}_2 = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

de PSL_2 où elle s'écrit :

$$\text{pour tous } X, Y \text{ éléments de } \mathfrak{sl}_2, \quad k(X, Y) = 4 \mathrm{tr}(XY).$$

La forme k s'étend au fibré tangent à PSL_2 en identifiant $\mathfrak{sl}_2$ à l'algèbre des champs de vecteurs invariants par multiplication à gauche. Comme sur $\mathfrak{sl}_2$

Mots-clés : Géométrie lorentzienne – Variétés localement homogènes – Groupes discontinus de transformations – Sous-groupes discrets de groupes de Lie.

Classification math. : 53C50 – 53C30 – 57S30 – 58H15 – 22E40.

la forme k est invariante par l'action adjointe de PSL_2 , la structure de P_0 est invariante par les multiplications à gauche et à droite par les éléments de PSL_2 et est géodésiquement complète (voir [He]). En fait, le groupe des isométries de P_0 comporte quatre composantes connexes et la composante connexe de l'identité est $G = \mathrm{PSL}_2 \times \mathrm{PSL}_2$ (voir [KR]). Le groupe G agit sur P_0 de la manière suivante. Pour (g, h) élément de G et m élément de $P_0 = (\mathrm{PSL}_2, \text{kill})$:

$$(g, h)(m) = gmh^{-1}.$$

Le premier exemple de variété anti-de Sitter compacte de dimension 3 s'obtient en quotientant P_0 , ou son revêtement universel $\tilde{P}_0 = (\mathrm{PSL}_2, \text{kill})$, par un de ses sous-groupes discrets cocompacts Γ agissant par multiplication à gauche. Le quotient obtenu est une variété lorentzienne homogène. É. Ghys et W.M. Goldman ont construit d'autres exemples en déformant ces structures homogènes (voir [Gh1], [Go1]). Ils ont montré que pour Γ sous-groupe cocompact de PSL_2 et ρ une représentation de Γ dans PSL_2 proche de la représentation constante, le groupe

$$\mathrm{Graph}(\rho) = \{(\gamma, \rho(\gamma)) ; \gamma \in \Gamma\}$$

agit lui-aussi proprement discontinûment, librement sur P_0 et donne un quotient compact. En fait, des quotients similaires permettent d'obtenir toutes les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3, modulo quotient et revêtement finis. En effet :

1) Toute variété anti-de Sitter compacte M de dimension 3 admet comme revêtement universel lorentzien $\tilde{P}_0$. La variété M est donc le quotient de $\tilde{P}_0$ par un sous-groupe de son groupe d'isométries agissant proprement discontinûment, librement et de façon cocompacte.

Ce résultat n'est pas trivial, car contrairement au cas riemannien où une variété compacte est complète, dans le cas lorentzien la complétude géodésique des variétés compactes n'est assurée que dans des cas très particuliers (voir [CR], [GL]).

Si M est une variété compacte lorentzienne à courbure sectionnelle constante, B. Klingler a montré qu'elle est géodésiquement complète en généralisant un résultat obtenu par Y. Carrière dans le cas où la courbure est nulle (voir [C], [KI]). Ces résultats permettent de construire toutes les variétés lorentziennes compactes de courbure nulle (voir [FG], [C], [GM], [GK]) et de prouver qu'il n'existe pas de variétés compactes de Sitter (voir [CM]), c'est-à-dire de courbure constante +1.

2) R.S. Kulkarni et F. Raymond ont démontré dans [KR] que toute variété anti-de Sitter compacte M de dimension 3 est un fibré de Seifert à base hyperbolique et peut être obtenue comme quotient d'un revêtement fini de P_0 . Ainsi, la variété M est un revêtement lorentzien fini d'un quotient de P_0 par un sous-groupe H de G agissant proprement discontinûment, librement et de façon cocompacte. Dans le même article [KR], il est montré que si H est sans torsion, il est isomorphe au groupe fondamental $\pi_1(S)$ d'une surface S fermée orientable de genre $g > 1$ et s'écrit (modulo inversion de facteurs) :

$$(\rho_0, \rho)(\pi_1(S)) = \{(\rho_0(\gamma), \rho(\gamma)); \gamma \in \pi_1(S)\},$$

où ρ_0 et ρ sont deux représentations de $\pi_1(S)$ dans PSL_2 , telles que ρ_0 soit fuchsienne, c'est-à-dire fidèle et discrète.

Si le groupe $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ agit proprement, librement sur P_0 et donne un quotient compact, la représentation ρ sera appelée (ρ_0) -admissible.

Comme tout sous-groupe linéaire finiment engendré contient un sous-groupe d'indice fini sans torsion, toute variété anti-de Sitter compacte de dimension 3 est, modulo quotient et revêtement finis, un quotient de P_0 par un sous-groupe $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ où ρ est ρ_0 -admissible.

La variété $P_0/(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ sera notée $M(\rho_0, \rho)$.

Elle est homéomorphe à un fibré en cercles au-dessus de S .

Les représentations admissibles dans des sous-groupes résolubles ont été étudiées dans [S1] et [S2]. Elles sont, tout comme les exemples de R.S. Kulkarni et F. Raymond [KR], de É. Ghys (voir [Gh1], [Gh3]) et W.M. Goldman [Go1], des déformations de la représentation constante. C'est-à-dire que les structures anti-de Sitter associées sont virtuellement (c'est-à-dire modulo revêtement et quotient finis) des déformations continues d'une structure homogène [S3].

Le but de cet article est d'exposer de nouveaux exemples de représentations admissibles qui engendrent des structures anti-de Sitter exotiques, c'est-à-dire qui ne sont pas virtuellement des déformations continues d'une structure homogène.

Remarquons que ce phénomène est particulier à la dimension 3 car en dimension supérieure les variétés compactes anti-de Sitter sont plus rigides (voir [Z]).

2. Principaux résultats.

2.1. Énoncé du théorème principal.

Soit S une surface fermée orientée de genre $g > 1$ et ρ_0 une représentation fuchsienne du groupe fondamental $\pi_1(S)$ de S dans PSL_2 . On note $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2)$ l'ensemble des représentations de $\pi_1(S)$ dans PSL_2 .

THÉOREME 2.1.1. — *L'ensemble des représentations ρ_0 -admissibles $\mathrm{Adm}(\rho_0)$ est un ouvert de l'ensemble des représentations non fuchiennes $\mathrm{Hom}^*(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2)$. Pour certaines représentations ρ_0 , l'ensemble $\mathrm{Adm}(\rho_0)$ est disconnexe. Il existe même des représentations ρ_0 pour lesquelles $\mathrm{Adm}(\rho_0)$ possède des éléments dans toutes les composantes connexes de $\mathrm{Hom}^*(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2)$ qui sont au nombre de $4g - 5$.*

Le fait que l'ensemble $\mathrm{Adm}(\rho_0)$ soit un ouvert a déjà été vu dans [S1]. En revanche, la non connexité est un phénomène nouveau et surprenant qui sera exposé dans la quatrième partie ainsi que le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.1.2 (contradiction de la proposition 7-5 de [KR]). — *Tout fibré en cercles F au-dessus d'une surface hyperbolique S_g de genre g ayant une classe d'Euler $o(F)$ telle que*

$$|o(F)| \in [1, \dots, 2g - 2[\cup]2g - 2, \dots, 4g - 3]$$

admet une structure anti-de Sitter qui ne possède pas de champ de Killing et qui n'est pas la déformation d'une structure homogène.

Les méthodes utilisées sont géométriques et utilisent principalement le lemme suivant :

LEMME 2.1.3 (un critère d'admissibilité). — *Soit ρ une représentation de $\pi_1(S)$ dans PSL_2 et f une application du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$ dans lui-même strictement-uniformément contractante et $\pi_1(S)$ -équivariante, c'est-à-dire telle que $f(\rho_0(\gamma)z) = \rho(\gamma)f(z)$ pour tout γ de $\pi_1(S)$ et tout z de $\mathbb{H}^2$. Alors ρ est ρ_0 -admissible.*

Ce résultat découle des critères de propreté d'action sur P_0 des sous-groupes de G . Ces critères sont exposés dans la troisième partie de cet article. Avec des méthodes similaires, le fait déjà observé par W.M. Goldman [Go1] que les représentations fuchiennes ne sont jamais admissibles sera redémontré.

2.2. Topologie de l'ensemble des représentations.

Le groupe $\pi_1(S)$ a pour présentation usuelle :

$$\pi_1(S) = \left\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \prod_{i=1, \dots, g} [\alpha_i, \beta_i] = 1 \right\rangle.$$

L'application de $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PSL}_2)$ dans PSL_2^{2g} qui à chaque représentation ρ associe sa valeur en les générateurs :

$$\rho \longmapsto (\rho(\alpha_1), \rho(\beta_1), \dots, \rho(\alpha_g), \rho(\beta_g))$$

identifie $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PSL}_2)$ au sous-ensemble analytique de PSL_2^{2g} composé des éléments

$$(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g) \text{ tels que } \prod_{i=1 \dots g} [a_i, b_i] = \text{Id}$$

(pour plus de détails voir [Go2]). La topologie que l'on considère sur $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PSL}_2)$ est la topologie de la convergence sur une partie génératrice.

À chaque représentation ρ de $\pi_1(S)$ dans PSL_2 , on associe un nombre appelé *nombre d'Euler* et noté $e(\rho)$ qui peut-être défini de plusieurs manières équivalentes :

1) Reprenons la présentation :

$$\pi_1(S) = \left\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \prod_{i=1, \dots, g} [\alpha_i, \beta_i] = 1 \right\rangle$$

et choisissons des éléments quelconques $\widetilde{\rho(\alpha_i)}, \widetilde{\rho(\beta_i)}$ de $\widetilde{\text{PSL}}_2$ qui relèvent $\rho(\alpha_i), \rho(\beta_i)$. Le produit des commutateurs

$$\prod_{i=1, \dots, g} [\widetilde{\rho(\alpha_i)}, \widetilde{\rho(\beta_i)}]$$

est alors un élément $o(\rho)$ de

$$\text{Ker}(\widetilde{\text{PSL}}_2 \rightarrow \text{PSL}_2) \cong \pi_1(\text{PSL}_2)$$

qui est indépendant des relevés choisis. Or, le groupe $\pi_1(\text{PSL}_2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. En effet, le groupe PSL_2 s'identifie au groupe des isométries positives du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$. Il agit simplement transitivement sur les repères orthonormés directs, donc est identifié au fibré de ces repères sur $\mathbb{H}^2$. L'orientation de $\mathbb{H}^2$ détermine une orientation de PSO_2 , la fibre au-dessus de i , qui se relève au sous-groupe $\widetilde{\text{PSO}}_2 \cong \mathbb{R}$ de $\widetilde{\text{PSL}}_2$. Le sous-groupe $\pi_1(\text{PSL}_2)$ de $\widetilde{\text{PSO}}_2$ est ainsi orienté et donc isomorphe à $\mathbb{Z}$. Ceci permet d'associer à $o(\rho)$ un nombre entier qui est $e(\rho)$.

2) Soit P_ρ le PSL_2 -fibré principal au-dessus de S obtenu en quotientant $\widetilde{S} \times \mathrm{PSL}_2$ par l'action diagonale de $\pi_1(S)$ définie comme suit :

$$\text{pour tout } \gamma \in \pi_1(S), \quad \gamma(\tilde{m}, g) = (\gamma\tilde{m}, \rho(\gamma)g).$$

L'obstruction à la trivialisaton de ce fibré est l'obstruction à relever P_ρ en un $\widetilde{\mathrm{PSL}_2}$ -fibré principal. Cette obstruction est une classe

$$o_2(\rho) \in H^2(S, \pi_1(\mathrm{PSL}_2)).$$

L'orientation de S détermine un isomorphisme

$$H^2(S, \pi_1(\mathrm{PSL}_2)) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{PSL}_2) \cong \mathbb{Z}$$

qui associe à $o_2(\rho)$ un nombre entier. Ce nombre entier est $e(\rho)$ (pour plus de détails, voir [Go2]).

3) Comme PSL_2 agit sur le bord du disque de Poincaré $\partial\mathbb{D}^2$, on associe au fibré principal P_ρ un fibré en cercles sur S dont la classe d'Euler est $e(\rho)$.

Milnor a montré que le nombre d'Euler $e(\rho)$ d'une représentation ρ vérifie

$$2 - 2g \leq e(\rho) \leq 2g - 2$$

où g est le genre de la surface S (voir [Mi]).

On remarque que si on bouge continûment dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2)$ la représentation ρ en une représentation ρ' , les constructions précédentes varient continûment et donc $e(\rho') = e(\rho)$. Ainsi, sur chaque composante connexe de $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2)$, le nombre d'Euler est constant. En fait, W.M. Goldman a montré dans [Go2] que les composantes connexes de $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2)$ sont exactement les préimages $e^{-1}(n)$ avec n entier relatif vérifiant

$$|n| \leq 2g - 2.$$

De plus, une représentation ρ a un nombre d'Euler extrémal (c'est-à-dire $|e(\rho)| = 2g - 2$) si et seulement si elle est fuchsienne, c'est-à-dire fidèle à image discrète.

Les composantes connexes extrémales ont une interprétation géométrique. À chaque représentation ρ_0 fuchsienne de nombre d'Euler $2 - 2g$ est associée une structure hyperbolique complète sur S donnée par $\rho_0(\pi_1(S)) \backslash \mathbb{H}^2$. Le quotient $\rho_0(\pi_1(S)) \backslash \mathrm{PSL}_2$ s'identifie alors au fibré

unitaire tangent de $\rho_0(\pi_1(S)) \backslash \mathbb{H}^2$. Réciproquement, à chaque structure hyperbolique complète sur S est associée une représentation d'holonomie $\rho_0 : \pi_1(S) \longrightarrow \mathrm{PSL}_2$ qui est fuchsienne et de nombre d'Euler $2 - 2g$ et qui est définie à conjugaison près par un élément de PSL_2 . Ainsi, le quotient de $e^{-1}(2 - 2g)$ par le groupe $\mathrm{Int}(\mathrm{PSL}_2)$ des automorphismes intérieurs de PSL_2 , est en bijection avec l'espace des structures hyperboliques sur S , c'est-à-dire avec l'espace de Teichmüller $T(S)$ de S . Si on change l'orientation de $\mathbb{H}^2$ en son opposée, le nombre $e(\rho)$ est changé en son opposé. Ainsi, $e^{-1}(2g - 2)/\mathrm{Int}(\mathrm{PSL}_2)$ est aussi en bijection avec $T(S)$.

Pour les composantes connexes non-extrémales, on a seulement le résultat suivant qui découle de la formule de Gauss-Bonnet appliquée à e vue comme une forme volume (voir [TR], [Ta] et [Go3]) :

LEMME 2.2.1. — *Si ρ est la représentation d'holonomie d'une structure hyperbolique sur S à n singularités coniques d'angle $2\pi k_i$ avec $k_i \in \mathbb{N}$, alors*

$$e(\rho) = 2 - 2g + \sum_{i=1}^n (k_i - 1).$$

Rappelons qu'une structure hyperbolique à singularités coniques d'angle θ_i en a_i sur S est donnée par une structure hyperbolique classique sur $S - \bigcup \{a_i\}$ telle qu'un voisinage d'un point a_i de S soit modelé sur le cône hyperbolique d'angle θ_i (voir [TR]). On remarque qu'une telle structure engendre une holonomie hol de $\pi_1(S - \bigcup \{a_i\})$ dans G qui envoie tout lacet autour de a_i sur la rotation hyperbolique d'angle θ_i . Ainsi, lorsque les angles θ_i sont des multiples de 2π , l'holonomie hol s'étend en une représentation de $\pi_1(S)$ dans PSL_2 .

Dans cet article, nous nous proposons donc de montrer la proposition suivante qui implique le théorème 2.1.1 :

PROPOSITION 2.2.2. — *Pour certaines représentations ρ_0 , il existe des représentations de $\mathrm{Adm}(\rho_0)$ de classe d'Euler non nulle. De plus, pour certaines de ces représentations ρ_0 , il existe des représentations admissibles de classe d'Euler quelconque non extrémale.*

3. Actions propres sur PSL_2 .

Dans la suite ρ et ρ_0 sont des éléments de $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2)$ avec ρ_0 fuchsienne.

3.1. Simplifications.

Le groupe $\mathrm{PGL}_2 \times \mathrm{PGL}_2$ agit continûment sur PGL_2 par multiplication à gauche et multiplication à droite par l'inverse. En conjuguant l'action de $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ sur PGL_2 par l'action d'un élément (g, h) de $\mathrm{PGL}_2 \times \mathrm{PGL}_2$, on obtient l'action de

$$(\mathrm{ad}(g) \circ \rho_0, \mathrm{ad}(h) \circ \rho)(\pi_1(S))$$

sur PGL_2 où $\mathrm{ad}(g)$ est la conjugaison par g . Cette nouvelle action se factorise en une action sur $P_0 = \mathrm{PSL}_2$ qui a les mêmes propriétés topologiques que celles de $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ sur P_0 . Ainsi, le groupe $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ agit proprement discontinûment, librement sur P_0 et donne un quotient compact si et seulement si $(\mathrm{ad}(g) \circ \rho_0, \mathrm{ad}(h) \circ \rho)(\pi_1(S))$ agit avec les mêmes propriétés sur P_0 . La condition d'admissibilité est donc invariante par la conjugaison des deux représentations par deux éléments g et h de PGL_2 .

En particulier, si g (resp. h) n'est pas un élément de PSL_2 , alors

$$e(\mathrm{ad}(g) \circ \rho_0) = -e(\rho_0) \quad (\text{resp. } e(\mathrm{ad}(h) \circ \rho) = -e(\rho)).$$

On remarque que cela revient à changer l'orientation de $\mathbb{H}^2$.

On se limitera donc à étudier les couples (ρ_0, ρ) de représentations de nombre d'Euler négatif modulo conjugaison par les éléments de $G = \mathrm{PSL}_2 \times \mathrm{PSL}_2$.

LEMME 3.1.1. — *Il suffit que l'action de $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ sur P_0 soit proprement discontinue pour que ρ soit ρ_0 -admissible.*

Preuve. — Le groupe $\pi_1(S)$ est sans torsion donc $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ est un sous-groupe discret sans torsion de G , la liberté de son action sur P_0 découle ainsi de la propriété. Si l'action de $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ est proprement discontinue, la variété quotient obtenue M_ρ admet comme revêtement universel $\tilde{P}_0 = \tilde{\mathrm{SL}}_2$ qui est topologiquement $\mathbb{R}^3$. Le groupe fondamental $\pi_1(M_\rho)$ est de présentation :

$$\left\langle \alpha_i, \beta_i, \text{ pour } i = 1, \dots, g, h \text{ tels que } \prod_{i=1}^g [\alpha_i, \beta_i] = h^{2-2g-e(\rho)} \text{ et } h \text{ central} \right\rangle$$

avec $e(\rho)$ le nombre d'Euler de la représentation ρ . Ce groupe est isomorphe au groupe fondamental du fibré en cercles F sur la surface S dont la classe d'obstruction est égale à $2 - 2g - e(\rho)$, il est donc de dimension cohomologique 3 (voir [Br]). Or, on a le résultat suivant (voir [Br]).

THÉORÈME 3.1.2. — *Soit Γ un groupe agissant proprement discontinûment et librement sur une variété X simplement connexe et contractile. Alors le quotient $\Gamma \backslash X$ est compact si et seulement si la dimension cohomologique de Γ est égale à la dimension de X .*

Ainsi, si l'action du groupe $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ sur P_0 est proprement discontinue, le quotient est compact et donc ρ est ρ_0 -admissible.

LEMME 3.1.3. — *Si ρ est ρ_0 -admissible, la variété $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S)) \backslash P_0$ est un fibré en cercles au-dessus de la surface S .*

Ce résultat découle de la description du groupe fondamental et d'un résultat classique de Waldhausen (voir [W]) sur la topologie des variétés de dimension 3.

3.2. Définitions et rappels.

Si g est un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, on note $[g]$ son image dans PSL_2 . On note $\mathrm{Exp}(x)$ la matrice diagonale 2×2 , de diagonale $(\exp(x), \exp(-x))$ ainsi que sa projection dans PSL_2 . On note respectivement K , A et N les sous-groupes respectifs de PSL_2 , $\mathrm{PSO}_2(\mathbb{R})$, le sous-groupe des matrices diagonales et le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures. Le normalisateur d'un groupe H dans un groupe H' est noté $N_{H'}(H)$, et le sous-groupe dérivé de H est noté $D(H)$.

Le groupe PSL_2 est le groupe des isométries positives du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$ muni de la distance $d_{\mathbb{H}^2}$ (resp. du disque de Poincaré $\mathbb{D}^2$ muni de $d_{\mathbb{D}^2}$) induite par la métrique

$$\langle X_z, X_z \rangle = \frac{1}{4y^2} \langle X_z, X_z \rangle_{\text{euclidien}}.$$

Il agit sur $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2 = \overline{\mathbb{H}^2}$ (resp. $\mathbb{D}^2 \cup S_1$) par homographies.

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right](z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Le groupe K est le stabilisateur de i (resp. 0), le groupe A est le stabilisateur de 0 (resp. $-i$) et ∞ (resp. i), N est le groupe des éléments de PSL_2 qui admettent ∞ (resp. 1) comme unique point fixe et AN est le stabilisateur de ∞ (resp. i). Tout élément non trivial g de PSL_2 est conjugué à un élément de K , A ou N , il est alors appelé respectivement elliptique, hyperbolique ou parabolique (voir par exemple [Ka]). De plus, tout sous-groupe commutatif de PSL_2 est conjugué à un sous-groupe de A , N ou K .

LEMME 3.2.1 (sous-groupes de PSL_2).

1) Soit H un sous-groupe résoluble de PSL_2 , alors :

(a) H est conjugué à un sous-groupe de K , AN ou $N_{\mathrm{PSL}_2}(A) = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est engendré par l'élément $g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Si H est discret non trivial, il est isomorphe respectivement à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$, ou à $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et est alors conjugué respectivement à un sous-groupe de K , A ou N , $N_{\mathrm{PSL}_2}(A)$.

2) Un sous-groupe non résoluble de PSL_2 est Zariski dense dans PSL_2 .

Ces résultats sont classiques et démontrés dans [Ka] et [KR].

DÉFINITION 3.2.2 (définition et propriétés de la fonction ℓ). — Pour tout élément g de PSL_2 on définit

$$\ell(g) = d_{\mathbb{H}^2}(i, g(i)).$$

Voici quelques propriétés de cette fonction :

1) on a $\ell(gh) \leq \ell(g) + \ell(h)$ et $\ell(g) = \ell(g^{-1})$;

2) si $g = k_1 \mathrm{Exp}(x/2)k_2$ avec k_1 et k_2 éléments de PSO_2 et $x \in \mathbb{R}$, alors $\ell(g) = |x|$;

3) si $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors

$$\ell(g) = 2 \ln(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2} + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2}) - 2 \ln(2),$$

$$\cosh\left(\frac{1}{2}\ell(g)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2}.$$

DÉFINITION 3.2.3 (définition et propriétés de la fonction t). — Pour tout élément g de PSL_2 on définit

$$t(g) = \inf_{z \in \mathbb{H}^2} d_{\mathbb{H}^2}(z, g(z)).$$

Voici quelques propriétés de la fonction t :

1) $t(g)$ est un invariant de conjugaison. Tout élément hyperbolique g est conjugué à $\mathrm{Exp}(\frac{1}{2}t(g))$, cet invariant est donc complet pour les éléments hyperboliques.

2) $t(g^n) = nt(g)$.

3) Si g est elliptique, parabolique ou trivial, alors $t(g) = 0$. Si g est hyperbolique, $t(g)$ est non nul et $t(g) = 2 \operatorname{argch}(\frac{1}{2} |\operatorname{tr}(g)|)$.

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ell(g^n) = t(g)$;

5) À chaque élément γ de $\pi_1(S)$ est associée une géodésique fermée sur la surface S munie de la structure hyperbolique induite par ρ_0 . Sa longueur est $t(\rho_0(\gamma))$.

3.3. Critère de propreté.

LEMME 3.3.1 (critère de propreté). — *Le sous-groupe $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ de G agit proprement discontinûment sur P_0 si et seulement si :*

$$\lim_{\ell(\rho_0(\gamma)) \rightarrow +\infty} |\ell(\rho_0(\gamma)) - \ell(\rho(\gamma))| = +\infty.$$

Ce critère est énoncé de façon plus générale par Y. Benoist (voir [Be1]) et par T. Kobayashi (voir [Ko]). La preuve dans le cas particulier de PSL_2 est simple et faite dans [S1].

3.4. Une condition nécessaire.

Si ρ est ρ_0 -admissible, en particulier l'action de $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ sur P_0 est libre. Or, un sous-groupe H de G agit librement sur P_0 si et seulement si pour tout élément non trivial (g, h) de H et tout point m de P_0 , $gmh^{-1} \neq m$, cette condition est équivalente au fait que g et h ne soient pas conjugués. Comme la représentation ρ_0 est fuchsienne, pour tout élément non trivial γ de $\pi_1(S)$, $\rho_0(\gamma)$ est hyperbolique et donc sa classe de conjugaison est déterminée par le nombre non nul $t(\rho_0(\gamma))$ d'après la définition 3.2.3. Ainsi, $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ agit librement sur PSL_2 si et seulement si $t(\rho(\gamma))/t(\rho_0(\gamma)) \neq 1$. Dans le cas où l'action est propre on a le lemme suivant :

LEMME 3.4.1 (une condition nécessaire). — *Pour qu'une représentation ρ soit ρ_0 -admissible il faut :*

- 1) soit que $\frac{t(\rho(\gamma))}{t(\rho_0(\gamma))} < 1$ pour tout γ élément non trivial de $\pi_1(S)$;
- 2) ou que $\frac{t(\rho(\gamma))}{t(\rho_0(\gamma))} > 1$ pour tout γ élément non trivial de $\pi_1(S)$.

Ainsi, si ρ n'est pas fuchsienne, la condition 1) est une condition nécessaire à la ρ_0 -admissibilité.

Preuve. — Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux éléments non triviaux γ_1 et γ_2 de $\pi_1(S)$, tels que

$$\frac{t(\rho(\gamma_1))}{t(\rho_0(\gamma_1))} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{t(\rho(\gamma_2))}{t(\rho_0(\gamma_2))} < 1.$$

Nous allons alors montrer à l'aide du lemme 3.3.1 que le sous-groupe engendré par $(\rho_0(\gamma_1), \rho(\gamma_1)) = (g_1, h_1)$ et $(\rho_0(\gamma_2), \rho(\gamma_2)) = (g_2, h_2)$ n'agit pas proprement discontinûment sur P_0 . Comme $t(h_1)/t(g_1) > 1$ et $t(h_2)/t(g_2) < 1$, $t(h_1)$ est non nul et donc h_1 est hyperbolique d'après la définition 3.2.3. Or la conjugaison par un élément de $G = \mathrm{PSL}_2 \times \mathrm{PSL}_2$ n'influe pas sur la propriété de l'action d'un sous-groupe de G sur P_0 et comme g_1 et g_2 sont hyperboliques, on peut conjuguer par un élément de $\mathrm{PSL}_2 \times \{\mathrm{Id}\}$ et supposer que

$$g_1 = \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}t(g_1)\right), \quad g_2 = p \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}t(g_2)\right)p^{-1} \quad \text{avec} \quad p = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Premier cas. — Les éléments g_1 et g_2 de PSL_2 sont dans un même sous-groupe résoluble de PSL_2 . Comme ρ_0 est une représentation discrète et fidèle, le sous-groupe $\rho_0(\pi_1(S))$ de PSL_2 est discret et sans torsion. Le groupe engendré par g_1 et g_2 est ainsi un sous-groupe discret résoluble sans torsion de PSL_2 et est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$ d'après le lemme 3.2.1. Comme de plus ρ_0 est un isomorphisme, il existe un élément γ de $\pi_1(S)$ et deux entiers n_1 et n_2 tels que $\gamma_1 = \gamma^{n_1}$ et $\gamma_2 = \gamma^{n_2}$. Ainsi, d'après la définition 3.2.3 :

$$\frac{t(h_1)}{t(g_1)} = \frac{t(\rho(\gamma^{n_1}))}{t(\rho_0(\gamma^{n_1}))} = \frac{t(\rho(\gamma))}{t(\rho_0(\gamma))} = \frac{t(h_2)}{t(g_2)},$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Deuxième cas. — Les éléments g_1, g_2 ne sont pas dans un même sous-groupe résoluble de PSL_2 et h_1, h_2 sont hyperboliques.

Dans ce cas, quitte à conjuguer par un élément de $\{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{PSL}_2$, on peut supposer que

$$h_1 = \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}t(h_1)\right), \quad h_2 = q \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}t(h_2)\right)q^{-1}.$$

Si h_1 et h_2 sont dans un même sous-groupe résoluble H de PSL_2 , quitte à changer γ_1 ou γ_2 en leur inverses, on peut faire la conjugaison précédente de manière à ce que H soit un sous-groupe de AN et que q soit une matrice triangulaire supérieure. Par calcul matriciel similaire à la preuve du lemme 3.4.2, on obtient lorsque n_1 et n_2 tendent vers $+\infty$:

$$\ell(h_1^{n_1} h_2^{n_2}) = n_1 t(h_1) + n_2 t(h_2) + O(1).$$

De manière plus générale, on a le lemme suivant.

LEMME 3.4.2. — *Si deux éléments hyperboliques*

$$g_1 = \text{Exp}\left(\frac{1}{2}t(g_1)\right) \quad \text{et} \quad g_2 = p \text{Exp}\left(\frac{1}{2}t(g_2)\right)p^{-1}$$

de PSL_2 ne sont pas dans un même groupe résoluble, alors lorsque $|n_1| + |n_2|$ tend vers $+\infty$,

$$\ell(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) = |n_1 t(g_1)| + |n_2 t(g_2)| + O(1).$$

Preuve du lemme 3.4.2. — Comme g_1 et g_2 ne sont pas dans un même groupe résoluble, leurs actions sur $\overline{\mathbb{H}}$ n'admettent pas de point fixe commun d'après le lemme 3.2.1. Alors, les coefficients de p ne s'annulent pas. En effet :

- si $a = 0$, p envoie ∞ sur 0 et donc g_1 et g_2 fixent ∞ ;
- si $b = 0$, p envoie 0 sur 0 et donc g_1 et g_2 fixent 0;
- si $c = 0$, p envoie ∞ sur ∞ et donc g_1 et g_2 fixent ∞ ;
- si $d = 0$, p envoie 0 sur ∞ et donc g_1 et g_2 fixent 0.

Or, en posant

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2}(n_1 t(g_1) + n_2 t(g_2)), & \mathcal{B} &= \frac{1}{2}(n_1 t(g_1) - n_2 t(g_2)), \\ \mathcal{C} &= \frac{1}{2}(n_2 t(g_2) - n_1 t(g_1)), & \mathcal{D} &= \frac{1}{2}(-n_1 t(g_1) - n_2 t(g_2)), \end{aligned}$$

on a :

$$g_1^{n_1} g_2^{n_2} = \left[\begin{pmatrix} a \exp(\mathcal{A}) & b \exp(\mathcal{B}) \\ c \exp(\mathcal{C}) & d \exp(\mathcal{D}) \end{pmatrix} \right] p^{-1}.$$

D'après les formules de la définition 3.2.2 on obtient,

$$\begin{aligned} 4 \cosh^2 \left(\frac{1}{2} \ell \left(\left[\begin{pmatrix} a \exp(\mathcal{A}) & b \exp(\mathcal{B}) \\ c \exp(\mathcal{C}) & d \exp(\mathcal{D}) \end{pmatrix} \right] \right) \right) \\ = a^2 e^{n_1 t(\gamma_1) + n_2 t(\gamma_2)} + b^2 e^{n_1 t(\gamma_1) - n_2 t(g_2)} \\ + c^2 e^{-n_1 t(g_1) + n_2 t(\gamma_2)} + d^2 e^{-n_1 t(g_1) - n_2 t(g_2)} + 2 \\ = e^{n_1 t(\gamma_1) + n_2 t(\gamma_2)} (a^2 + b^2 e^{-2n_2 t(g_2)} + c^2 e^{-2n_1 t(g_1)} \\ + d^2 e^{-2n_1 t(g_1) - 2n_2 t(g_2)} + 2 e^{-n_1 t(g_1) - n_2 t(g_2)}). \end{aligned}$$

D'après les propriétés énoncées dans la définition 3.2.2, on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \ell \left(\left[\begin{pmatrix} a \exp(\mathcal{A}) & b \exp(\mathcal{B}) \\ c \exp(\mathcal{C}) & d \exp(\mathcal{D}) \end{pmatrix} \right] \right) - \ell(p) \\
 & \leq \ell(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) \leq \\
 & \ell \left(\left[\begin{pmatrix} a \exp(\mathcal{A}) & b \exp(\mathcal{B}) \\ c \exp(\mathcal{C}) & d \exp(\mathcal{D}) \end{pmatrix} \right] \right) + \ell(p), \\
 & \ln(a^2 + b^2 e^{-2n_2 t(g_2)} + c^2 e^{-2n_1 t(g_1)} \\
 & \quad + d^2 e^{-2n_1 t(g_1) - 2n_2 t(g_2)} - 2 e^{-n_1 t(g_1) - n_2 t(g_2)}) - \ell(p) \\
 & \leq \ell(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) - n_1 t(g_1) - n_2 t(g_2) \leq \\
 & \ln(a^2 + b^2 e^{-2n_2 t(g_2)} + c^2 e^{-2n_1 t(g_1)} + d^2 e^{-2n_1 t(g_1) - 2n_2 t(g_2)} \\
 & \quad + 2 e^{-n_1 t(g_1) - n_2 t(g_2)}) + \ell(p).
 \end{aligned}$$

On conclut donc que lorsque n_1 et n_2 tendent vers $+\infty$,

$$\ell(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) - (n_1 t(g_1) + n_2 t(g_2)) = O(1).$$

Avec les mêmes techniques de calcul, on peut montrer que lorsque $|n_1| + |n_2|$ tend vers $+\infty$,

$$\ell(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) - (|n_1| t(g_1) + |n_2| t(g_2)) = O(1),$$

ce qui termine la preuve de ce lemme. $\square$

Ainsi, lorsque n_1 et n_2 tendent vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}
 \ell(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) - \ell(h_1^{n_1} h_2^{n_2}) &= |n_1 t(g_1)| + |n_2 t(g_2)| - n_1 t(h_1) - n_2 t(h_2) + O(1) \\
 &= n_1 (t(g_1) - t(h_1)) + n_2 (t(g_2) - t(h_2)) + O(1).
 \end{aligned}$$

Comme $t(g_1) - t(h_1)$ et $t(g_2) - t(h_2)$ sont de signes opposés, on peut choisir une infinité de couples (n_1, n_2) , donc une suite infinie de termes distincts de type $\gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2}$ dans $\pi_1(S)$, telle que

$$\ell(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) - \ell(h_1^{n_1} h_2^{n_2}) = \ell(\rho_0(\gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2})) - \ell(\rho(\gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2}))$$

reste uniformément borné. La représentation ρ_0 étant fidèle discrète, on peut extraire une sous-suite telle que $\rho_0(\gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2}) \rightarrow +\infty$, ce qui contredit le critère de propreté du lemme 3.3.1.

Si h_1 et h_2 ne sont pas dans un même sous-groupe résoluble de PSL_2 , d'après le lemme 3.4.2

$$\ell(h_1^{n_1} h_2^{n_2}) = |n_1 t(h_1)| + |n_2 t(h_2)| + O(1)$$

lorsque $|n_1| + |n_2|$ tend vers $+\infty$. Ainsi, lorsque n_1 et n_2 tendent vers $+\infty$,

$$\ell(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) - \ell(h_1^{n_1} h_2^{n_2}) = n_1(t(g_1) - t(h_1)) + n_2(t(g_2) - t(h_2)) + O(1).$$

De la même manière que précédemment, on peut choisir une infinité de couples (n_1, n_2) tels que $\ell(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) - \ell(h_1^{n_1} h_2^{n_2})$ reste uniformément borné ce qui contredit le critère de propreté du lemme 3.3.1.

Troisième cas. — Les éléments g_1, g_2 ne sont pas dans un même sous-groupe résoluble de PSL_2 , h_1 est hyperbolique et h_2 est non-hyperbolique.

Quitte à conjuguer par un élément de $\{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{PSL}_2$, on peut supposer que $h_1 = \mathrm{Exp}(\frac{1}{2}t(h_1))$. D'après les propriétés énoncées dans la définition 3.2.2 on obtient les inégalités suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} \ell(h_1^{n_1}) - \ell(h_2^{-n_2}) \leq \ell(h_1^{n_1} h_2^{n_2}) \leq \ell(h_1^{n_1}) + \ell(h_2^{n_2}), \\ \ell(h_1^{n_1}) - \ell(h_2^{n_2}) \leq \ell(h_1^{n_1} h_2^{n_2}) \leq \ell(h_1^{n_1}) + \ell(h_2^{n_2}). \end{cases}$$

Si h_2 est elliptique ou trivial, $\ell(h_2^n)$ est majoré uniformément pour tout n , on déduit donc de (1) que :

$$\ell(h_1^{n_1} h_2^{n_2}) = \ell(h_1^{n_1}) + O(1).$$

Ainsi, lorsque n_1 et n_2 tendent vers $+\infty$,

$$\ell(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) - \ell(h_1^{n_1} h_2^{n_2}) = n_1(t(g_1) - t(h_1)) + n_2 t(g_2) + O(1).$$

De la même manière que précédemment, on peut choisir une infinité de couples (n_1, n_2) tels que $\ell(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) - \ell(h_1^{n_1} h_2^{n_2})$ reste borné, ce qui contredit le lemme 3.3.1.

Si h_2 est parabolique, $h_2 = q \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q^{-1}$. D'après les propriétés énoncées dans la définition 3.2.2, on montre que $\ell(h_2^{n_2}) = 2 \ln(n_2) + O(1)$. En utilisant l'inégalité (1), lorsque n_1 et n_2 tendent vers $+\infty$, on obtient

$$n_1(t(g_1) - t(h_1)) + n_2 \left(t(g_2) - 2 \frac{\ln(n_2)}{n_2} \right) + O(1) \leq \ell(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) - \ell(h_1^{n_1} h_2^{n_2}),$$

$$\begin{aligned} \ell(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) - \ell(h_1^{n_1} h_2^{n_2}) &\leq n_1(t(\rho_0(\gamma_1)) - t(\rho(\gamma_1))) \\ &\quad + n_2 \left(t(\rho_0(\gamma_2)) + 2 \frac{\ln(n_2)}{n_2} \right) + O(1). \end{aligned}$$

On peut ainsi choisir une infinité de couples (n_1, n_2) tels que $\ell(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) - \ell(h_1^{n_1} h_2^{n_2})$ reste uniformément borné, ce qui contredit le lemme 3.3.1. $\square$

Remarque. — Les mêmes équivalents peuvent être obtenus d'une manière plus géométrique en utilisant la théorie des groupes de Schottky (voir [S3]). Ainsi, certains résultats obtenus dans cet article peuvent être étendus à d'autres cas plus généraux d'action de groupes $\text{Graph}(\Gamma_1, \rho)$ sur G avec G groupe de Lie simple de rang 1.

3.5. La contraction, une condition suffisante.

DÉFINITION 3.5.1 (la ρ_0 -contraction). — Si ρ_0 et ρ sont deux représentations de $\pi_1(S)$ dans PSL_2 avec ρ_0 fuchsienne, la représentation ρ est dite ρ_0 -contractante s'il existe $C \in [0, 1[$ tel que pour tout élément $\gamma \in \pi_1(S)$,

$$t(\rho(\gamma)) \leq Ct(\rho_0(\gamma)).$$

THÉORÈME 3.5.2 (la contraction entraîne l'admissibilité).

1) Si ρ est une représentation dans un sous-groupe résoluble de PSL_2 , la représentation ρ est ρ_0 -admissible si et seulement si ρ est ρ_0 -contractante.

2) Si ρ est une représentation non résoluble ρ_0 -contractante alors ρ est ρ_0 -admissible.

Preuve du théorème 3.5.2.

1. a) Soit ρ est une représentation dans un sous-groupe abélien H . Lorsque H est un sous-groupe elliptique la représentation ρ est toujours admissible. En effet, on peut construire sur PSL_2 une métrique riemannienne μ invariante par $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ qui agit alors de façon propre comme sous-groupe discret des isométries de μ .

Lorsque H est un sous-groupe parabolique modulo une conjugaison, la représentation ρ est de la forme $\gamma \mapsto \begin{bmatrix} 1 & u(\gamma) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, où u est un élément de $\text{Hom}(\pi_1(S), \mathbb{R})$. Or, en conjuguant ρ par $\text{Exp}(-\ell)$, le morphisme u est changé en $e^{-2\ell}u$. Ainsi, ρ est conjuguée à une représentation aussi proche que l'on veut de la représentation constante. Comme l'ensemble des représentations ρ_0 -admissibles est ouvert (voir [S1]) et contient la représentation constante, la représentation ρ est conjuguée à une représentation ρ_0 -admissible. Elle est donc ρ_0 -admissible.

Or, dans ces deux cas, $t(\rho(\gamma)) = 0$ pour tout élément γ de $\pi_1(S)$ d'après la définition 3.2.3. La ρ_0 -contraction est donc bien une condition nécessaire et suffisante à la ρ_0 -admissibilité pour H sous-groupe elliptique ou parabolique.

Si H est un sous-groupe hyperbolique, on peut supposer quitte à conjuguer que $\rho(\gamma) = \text{Exp}(\frac{1}{2}u(\gamma))$ où u est un élément de $H^1(S, \mathbb{R}) = \text{Hom}(\pi_1(S), \mathbb{R})$. Il a été montré dans [S1] que ρ est admissible si et seulement si $\|u\|_s < 1$ où $\|\cdot\|_s$ est la norme stable sur le $H^1(S, \mathbb{R})$. On rappelle que la norme stable est définie sur $H_1(S, \mathbb{R})$ comme suit : si $h \in H_1(S, \mathbb{Z})$,

$$\|h\|_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \inf \{t(\rho_0(\gamma_n)), \text{ où } \gamma_n \in \pi_1(S) \text{ représente } nh\}.$$

Ensuite, on étend cette définition par homogénéité aux points rationnels de $H_1(S, \mathbb{R})$, puis par uniforme continuité à tout $H_1(S, \mathbb{R})$. Sur $H^1(S, \mathbb{R})$, la norme stable est définie par dualité (voir [Ba]). D'après la définition de la norme stable, la condition $\|u\|_s < 1$ équivaut à la ρ_0 -contraction pour ρ qui équivaut donc à l'admissibilité.

1. b) Lorsque ρ est une représentation non abélienne dans un sous-groupe H résoluble de PSL_2 , H est conjugué à un sous-groupe de AN ou à un sous-groupe de $N_{\text{PSL}_2}(A)$ d'après le lemme 3.2.1. Comme la condition d'admissibilité est invariante par conjugaison, on peut supposer que $H \subset AN$ ou $H \subset N_{\text{PSL}_2}(A)$.

Le cas où $H \subset AN$ se traite de manière similaire au cas hyperbolique dans [S1] : on associe à ρ une représentation u de $\pi_1(S)$ dans $\mathbb{R}$ et une fonction f de $\pi_1(S)$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\rho(\gamma) = \left[\begin{pmatrix} \exp(\frac{1}{2}u(\gamma)) & f(\gamma) \\ 0 & \exp(-\frac{1}{2}u(\gamma)) \end{pmatrix} \right].$$

Si $u(\gamma) \neq 0$, l'élément $\rho(\gamma)$ est conjugué à $\text{Exp}(\frac{1}{2}u(\gamma))$ et $t(\rho(\gamma)) = |u(\gamma)|$. Ainsi, la condition $t(\rho(\gamma)) < t(\rho_0(\gamma))$ du lemme 3.4.1 impose que pour $\gamma \in \pi_1(S)$, $|u(\gamma)| < t(\rho_0(\gamma))$ et donc que u est dans la boule unité fermée de la norme stable de $H^1(S, \mathbb{R})$ (voir [S1], [Ba]). La condition d'admissibilité est ouverte (voir [S1]) donc u ne peut-être sur le bord de la boule unité de la norme stable. Ainsi, $\|u\|_s < 1$ et pour tout γ de $\pi_1(S)$, $|u(\gamma)| \leq \|u\|_s t(\rho_0(\gamma))$. La ρ_0 -contraction est donc une condition nécessaire à la ρ_0 -admissibilité.

Réciproquement, si ρ est ρ_0 -contractante, $\|u\|_s < 1$ et la représentation ρ' abélienne définie par $\rho'(\gamma) = \text{Exp}(\frac{1}{2}u(\gamma))$ est admissible d'après le 1 a). Il existe ainsi un voisinage V de ρ' dans $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PSL}_2)$ tel que toute représentation de V soit ρ_0 -admissible. Or, en conjuguant ρ par $\text{Exp}(x)$ pour x assez grand, la représentation obtenue est dans V et

est donc admissible. La ρ_0 -contraction est donc une condition suffisante à l'admissibilité.

Si $H \subset N_{\mathrm{PSL}_2}(A)$, soit ϕ l'isomorphisme entre $\mathbb{R} \rtimes \{1, -1\}$ et $N_{\mathrm{PSL}_2}(A)$ défini par

$$\phi(t, 1) = \mathrm{Exp}(t) \quad \text{et} \quad \phi(t, -1) = \mathrm{Exp}(t) \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

On précise que la loi de multiplication dans $\mathbb{R} \rtimes \{1, -1\}$ est la suivante :

$$(t_1, \epsilon_1)(t_2, \epsilon_2) = (t_1 + \epsilon_1 t_2, \epsilon_1 \epsilon_2).$$

Si p_2 est la projection suivant le deuxième facteur, le groupe $\Gamma_2 = \mathrm{Ker}(p_2 \circ \phi^{-1} \circ \rho)$ est un sous-groupe distingué de $\pi_1(S)$ d'indice 2. On lui associe une surface compacte S' revêtement de degré 2 de S telle que $\pi_1(S') = \Gamma_2$. La représentation $\rho_{0|\pi_1(S')}$ munit la surface S' d'une structure hyperbolique. Comme $\pi_1(S')$ est un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(S)$, le groupe $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S'))$ est un sous-groupe d'indice fini de $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$. Ainsi, $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ agit proprement sur PSL_2 si et seulement si $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S'))$ agit proprement sur PSL_2 . Donc ρ est ρ_0 -admissible si et seulement si $\rho_{|\pi_1(S')}$ est $\rho_{0|\pi_1(S')}$ -admissible. Or, par construction $\rho_{|\pi_1(S')}$ est une représentation abélienne hyperbolique. Cette représentation est donc $\rho_{0|\pi_1(S')}$ -admissible si et seulement si elle est $\rho_{0|\pi_1(S')}$ -contractante. De plus, pour tout élément γ de $\pi_1(S)$ qui n'est pas dans $\pi_1(S')$, $t(\rho(\gamma)) = 0$. Donc $\rho_{|\pi_1(S')}$ est $\rho_{0|\pi_1(S')}$ -contractante si et seulement si ρ est ρ_0 -contractante. Ainsi, ρ est ρ_0 -admissible si et seulement si la représentation ρ est ρ_0 -contractante.

2) Si ρ est une représentation non-résoluble, le groupe $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ est Zariski-dense dans $\mathrm{PSL}_2 \times \mathrm{PSL}_2$ d'après le lemme 3.2.1.

Si ρ est ρ_0 -contractante alors le cône asymptote à l'ensemble de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$:

$$T = \{(t(\rho_0(\gamma)), t(\rho(\gamma))) ; \gamma \in \pi_1(S)\}$$

se situe sous la droite $y = Cx$. Or, d'après un résultat de Y. Benoist sur les cônes asymptotes des sous-groupes Zariski-dense d'un groupe de Lie réel (voir [Be2]), ce cône est égal au cône asymptote à l'ensemble

$$L = \{(\ell(\rho_0(\gamma)), \ell(\rho(\gamma))) ; \gamma \in \pi_1(S)\}.$$

Ainsi,

$$\lim_{\ell(\rho_0(\gamma)) \rightarrow +\infty} \frac{\ell(\rho(\gamma))}{\ell(\rho_0(\gamma))} \leq C.$$

Donc,

$$\lim_{\ell(\rho_0(\gamma)) \rightarrow +\infty} \frac{\ell(\rho(\gamma)) - \ell(\rho_0(\gamma))}{\ell(\rho_0(\gamma))} \leq (C - 1) < 0$$

et donc, $\lim_{\ell(\rho_0(\gamma)) \rightarrow +\infty} \ell(\rho(\gamma)) - \ell(\rho_0(\gamma)) = -\infty$ ce qui montre que ρ est ρ_0 -admissible d'après le lemme 3.3.1. $\square$

Remarque 1. — La même égalité sur les cônes est montrée dans le cas particulier de $\mathrm{PSL}_2 \times \mathrm{PSL}_2$ dans [D1] et [D2] en supposant que les groupes $\rho(\pi_1(S))$ et $\rho_0(\pi_1(S))$ sont de Schottky.

Remarque 2. — On n'utilisera pas la condition de contraction et donc le résultat de Y. Benoist sur l'égalité des cônes pour montrer l'existence de représentations exotiques. Toutefois, il semble que la condition de contraction ici énoncée soit un bon critère potentiel pour être une condition nécessaire et suffisante d'admissibilité des représentations non résolubles.

4. Construction de représentations admissibles.

4.1. Cas fuchsien.

Le but de ce paragraphe est de donner une nouvelle preuve qu'il n'existe pas de représentation fuchsienne ρ_0 -admissible.

4.1.1. Par le critère de propreté. — Soient ρ_0 et ρ_1 deux représentations fuchiennes de $\pi_1(S)$. Supposons que $(\rho_0, \rho_1)(\pi_1(S))$ agisse proprement discontinûment sur PSL_2 , c'est-à-dire que ρ_1 soit ρ_0 -admissible et que ρ_0 soit ρ_1 -admissible. Ces deux représentations induisent alors sur S deux structures hyperboliques complètes (S, ρ_0) et (S, ρ_1) . À chaque élément γ de $\pi_1(S)$ correspond sur (S, ρ_i) une unique géodésique fermée de longueur minimale de même classe d'homotopie que γ . Cette géodésique est de longueur $t(\rho_i(\gamma))$. Si on applique le lemme 3.4.1, quitte à inverser ρ_0 et ρ_1 , on obtient que pour tout élément γ de $\pi_1(S)$:

$$t(\rho_1(\gamma)) < t(\rho_0(\gamma)).$$

On a donc sur S deux structures hyperboliques distinctes telles que, dans une même classe d'homotopie de courbes fermées simples, la longueur de la géodésique qui la représente soit toujours strictement plus petite avec (S, ρ_1) qu'avec (S, ρ_0) . Ainsi,

$$\sup_{\gamma \in \pi_1(S)} \left(\frac{\text{longueur}_{(S, \rho_1)}(\gamma)}{\text{longueur}_{(S, \rho_0)}(\gamma)} \right) \leq 1.$$

Or, d'après un résultat suivant dû à W. Thurston (voir [Th]), ceci est absurde.

LEMME 4.1.1 (Thurston). — *Pour deux structures hyperboliques distinctes (S, ρ_1) et (S, ρ_0) sur une même surface fermée S :*

$$\sup_{\gamma \in \pi_1(S)} \left(\frac{\text{longueur}_{(S, \rho_1)}(\gamma)}{\text{longueur}_{(S, \rho_0)}(\gamma)} \right) > 1. \quad \square$$

4.1.2. Par les tremblements de terre. — La non admissibilité des représentations fuchsienues peut être démontrée d'une autre manière en utilisant les tremblements de terre sur l'espace de Teichmüller $T(S)$ de S (voir [Ke]). En effet, si ρ_0 est une représentation fuchsienne de $\pi_1(S)$, elle détermine un point m_0 de $T(S)$. En effectuant un twist de Dehn le long d'une géodésique fermée γ de (S, ρ_0) , la métrique hyperbolique est changée mais la longueur de la géodésique γ reste constante. Or, l'ensemble des points de $T(S)$ obtenus par ce procédé à partir de m_0 est dense dans $T(S)$. Ainsi, dans tout voisinage d'un point m de $T(S)$, il existe un point dont la longueur d'une géodésique fermée est la même que celle de (S, ρ_0) . Ce qui signifie que dans tout voisinage V d'une représentation ρ_1 fuchsienne, il existe une représentation ρ et un élément γ de $\pi_1(S)$ tels que $t(\rho(\gamma)) = t(\rho_0(\gamma))$. En particulier, la représentation ρ n'est pas ρ_0 -admissible. Comme l'ensemble des représentations admissibles est ouvert (voir [S1]), la représentation ρ_1 ne peut-être ρ_0 -admissible. $\square$

4.2. Un critère d'admissibilité.

Preuve du lemme 2.1.3. — Comme f est strictement uniformément contractante, f est C -lipschitzienne avec $C \in [0, 1[$. Ainsi, pour tous z, w éléments de $\mathbb{H}^2$, $d_{\mathbb{H}^2}(f(z), f(w)) \leq C d_{\mathbb{H}^2}(z, w)$. Si on applique cette

inégalité à $z = i$ et $w = \rho_0(\gamma)i$, pour tout γ de $\pi_1(S)$, et que l'on utilise l'équivariance en i , on obtient la suite d'inégalités suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} d_{\mathbb{H}^2}(f(i), f(\rho_0(\gamma)i)) \leq C d_{\mathbb{H}^2}(i, \rho_0(\gamma)i), \\ d_{\mathbb{H}^2}(f(i), \rho(\gamma)f(i)) \leq C \ell(\rho_0(\gamma)), \\ d_{\mathbb{H}^2}(i, \rho(\gamma)i) - d_{\mathbb{H}^2}(\rho(\gamma)i, \rho(\gamma)f(i)) - d_{\mathbb{H}^2}(i, f(i)) \leq C \ell(\rho_0(\gamma)), \\ \ell(\rho(\gamma)) - 2d_{\mathbb{H}^2}(i, f(i)) \leq C \ell(\rho_0(i)), \\ \ell(\rho(\gamma)) \leq C \ell(\rho_0(\gamma)) + 2d_{\mathbb{H}^2}(i, f(i)), \\ \ell(\rho(\gamma)) - \ell(\rho_0(\gamma)) \leq (C-1)\ell(\rho_0(\gamma)) + 2d_{\mathbb{H}^2}(i, f(i)). \end{cases}$$

Ainsi, avec la dernière inégalité, on obtient

$$\lim_{\ell(\rho_0(\gamma)) \rightarrow +\infty} |\ell(\rho(\gamma)) - \ell(\rho_0(\gamma))| = +\infty.$$

Ce qui prouve que ρ est ρ_0 -admissible par le lemme 3.3.1. $\square$

Remarquons aussi que ρ est ρ_0 -contractante comme le prouvent les inégalités suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} \ell(\rho(\gamma)) \leq C \ell(\rho_0(\gamma)) + 2d_{\mathbb{H}^2}(i, f(i)), \\ \frac{1}{n} \ell(\rho(\gamma^n)) \leq \frac{1}{n} (C \ell(\rho_0(\gamma^n)) + 2d_{\mathbb{H}^2}(i, f(i))), \end{cases}$$

qui impliquent, en vertu de la définition 3.2.3,

$$t(\rho(\gamma)) \leq C t(\rho_0(\gamma)).$$

Remarques. — La $\pi_1(S)$ -équivariance n'a été utilisée dans cette démonstration uniquement au point i . On peut ainsi montrer le même résultat si l'équivariance de f n'est vraie qu'en un seul point.

Soit ρ une représentation dans un sous-groupe elliptique de PSL_2 . Ce sous-groupe est le stabilisateur d'un point z_0 de $\mathbb{H}^2$. En prenant pour f la fonction constante égale à z_0 , on retrouve que ρ est admissible.

4.3. Représentations admissibles de classe d'Euler paire.

La représentation fuchsienne ρ_0 munit S d'une structure complexe (S, ρ_0) . Soit S' une surface fermée de genre $g' \leq 2$ munie d'une structure complexe. Cette structure détermine donc une représentation fuchsienne $\rho' : \pi_1(S') \rightarrow \mathrm{PSL}_2$, définie à conjugaison près. Pour toute fonction continue $f : S \rightarrow S'$, on note f^* le morphisme induit de $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(S')$.

LEMME 4.4.1. — Si $f : (S, \rho_0) \rightarrow (S', \rho')$ est un revêtement holomorphe strictement ramifié de degré d , alors la représentation $\rho = \rho' \circ f^*$ de $\pi_1(S)$ est ρ_0 -admissible et a pour nombre d'Euler $d(2 - 2g')$.

Preuve. — On peut relever f en une fonction holomorphe $\tilde{f}$ de $\mathbb{H}^2$ dans lui-même, telle que pour tout z de $\mathbb{H}^2$ et tout γ de $\pi_1(S)$:

$$\tilde{f}(\rho_0(\gamma)z) = \rho' \circ f^*(\gamma)\tilde{f}(z).$$

Comme f est une application holomorphe entre deux surfaces hyperboliques, elle contracte la métrique de Poincaré. De plus, d'après le lemme de Schwarz, comme f n'est pas un revêtement et les deux variétés compactes, f est C -lipschitzienne, avec $C \in [0, 1[$. Ainsi, le relevé $\tilde{f}$ de f est C -lipschitzienne pour la métrique de Poincaré et est équivariante. La représentation $\rho = \rho' \circ f^*$ est donc admissible d'après le lemme 2.1.3.

Comme f est un revêtement ramifié de S' par S ayant un nombre fini de singularités m_i de degré k_i , f définit une structure hyperbolique d'holonomie ρ sur S ayant des singularités d'angle $2\pi k_i$ aux points m_i . D'après le lemme 2.2.1 on en déduit que

$$e(\rho) = 2 - 2g + \sum_i (k_i - 1).$$

En utilisant la formule de Riemann-Hurwitz appliquée au revêtement ramifié f , on obtient $e(\rho) = d(2 - 2g')$. $\square$

4.4. Construction géométrique de représentations.

Reprenons la présentation usuelle de $\pi_1(S)$:

$$\left\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \prod_{i=1, \dots, g} [\alpha_i, \beta_i] = 1 \right\rangle.$$

Si ρ_0 est une représentation fuchsienne de $\pi_1(S)$, on peut lui associer un polygone géodésiquement convexe P_0 de $\mathbb{D}^2$ à $4g$ sommets s_i ($i \in \mathbb{Z}/4g\mathbb{Z}$), où $\rho_0(\alpha_i)$ et $\rho_0(\beta_i)$ peuvent être définis géométriquement comme suit (voir figure 1) :

- $\rho_0(\alpha_i)$ est l'isométrie qui envoie s_{4i-1} sur s_{4i-2} et s_{4i} sur s_{4i-3} .
- $\rho_0(\beta_i)$ est l'isométrie qui envoie s_{4i-2} sur s_{4i+1} et s_{4i-1} sur s_{4i} .

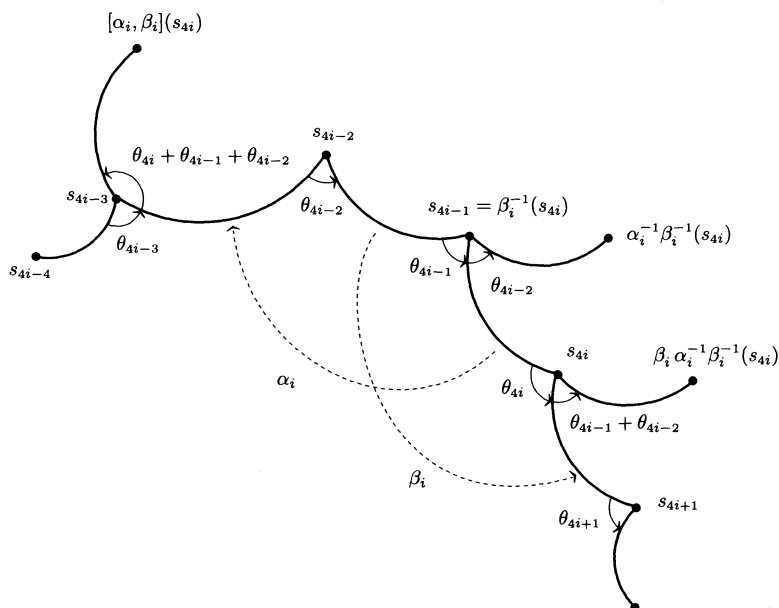


Figure 1. Visualisation du commutateur

De la même manière, si $[s_0, s_1] \cup [s_1, s_2] \cup \dots \cup [s_{4g-1}, s_0]$ est une ligne brisée géodésique dans $\mathbb{D}^2$ telle que pour tout $i \in \mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$:

- $d_{\mathbb{D}^2}(s_{4i}, s_{4i-1}) = d_{\mathbb{D}^2}(s_{4i-3}, s_{4i-2})$,
- $d_{\mathbb{D}^2}(s_{4i-2}, s_{4i-1}) = d_{\mathbb{D}^2}(s_{4i+1}, s_{4i})$.

On note alors :

- a_i (resp. b_i) l'élément de PSL_2 qui envoie s_{4i-1} sur s_{4i-2} et s_{4i} sur s_{4i-3} (resp. s_{4i-2} sur s_{4i+1} et s_{4i-1} sur s_{4i}) et
- θ_i l'angle orienté entre $[s_i, s_{i-1}]$ et $[s_i, s_{i+1}]$.

LEMME 4.4.1 (construction géométrique d'une représentation de $\pi_1(S)$).

Si $\sum_{i=1, \dots, g} \theta_i = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors l'application qui envoie α_i sur a_i et β_i sur b_i se prolonge en une représentation de $\pi_1(S)$.

Preuve. — On vérifie aisément que le commutateur $[a_i, b_i]$ envoie s_{4i+1} sur s_{4i-3} . De plus, le point $[a_i, b_i](s_{4i})$ est situé sur la demi-géodésique issue de s_{4i-3} , faisant un angle $\theta_{4i} + \theta_{4i-1} + \theta_{4i-2} + \theta_{4i-3}$ avec $[s_{4i-3}, s_{4i-4}]$ et est

tel que $d_{\mathbb{D}^2}(s_{4i-3}, [a_i, b_i](s_{4i})) = d_{\mathbb{D}^2}(s_{4i}, s_{4i+1})$ (voir figure 1). Le produit des commutateurs

$$\prod_{i=0, \dots, g} [a_i, b_i]$$

est donc la rotation hyperbolique qui fixe s_1 et qui a pour angle

$$\sum_{i=1, \dots, g} \theta_i.$$

Si $\sum_{i=1, \dots, g} \theta_i = 2k\pi$, on a $\prod_{i=0, \dots, g} [a_i, b_i] = \text{Id}$ et donc l'application qui envoie α_i sur a_i et β_i sur b_i se prolonge en une représentation de $\pi_1(S)$.

LEMME 4.4.2 (calcul du nombre d'Euler). — *Si une ligne brisée vérifiant le lemme 4.4.1 est la frontière d'un polygône géodésiquement convexe dont les θ_i sont les mesures positives des angles intérieurs, alors le nombre d'Euler de la représentation associée est $1 - 2g + k$.*

Preuve. — Si on recolle le polygône suivant les isométries a_i et b_i , on obtient une surface hyperbolique d'holonomie ρ à une singularité d'angle $2\pi k$. D'après le lemme 2.2.1, la représentation ρ est donc de nombre d'Euler $1 - 2g + k$.

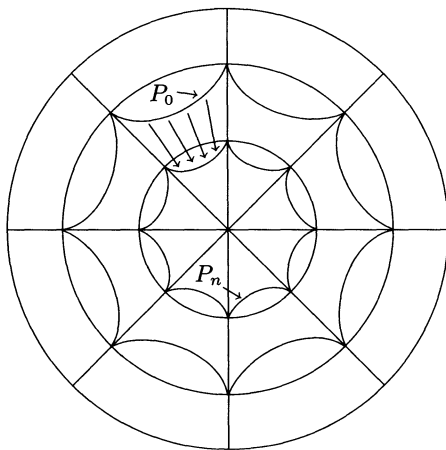


Figure 2. L'application f

4.5. Preuve du théorème 2.1.1.

Soit Pol_0 un polygône hyperbolique régulier à $4g$ côtés dont tous les angles intérieurs sont égaux à $2\pi/4g$, et soit ρ_0 la représentation fuchsienne de $\pi_1(S)$ associée.

Pour tout entier $n \in [0, 2g - 3]$, on peut contruire un polygône régulier Pol_n à $4g$ côtés dont tous les angles sont égaux à $2\pi(n+1)/4g$. Pour construire le polygône Pol_n dans le disque hyperbolique $\mathbb{D}^2$, il suffit de tracer un cercle de centre 0 et de rayon $\text{argch}(\cot(\pi(n+1)/4g) \cot(\pi/4g))$ et de séparer ce cercle en $4g$ secteurs angulaires égaux. Les intersections entre le cercle et les frontières des secteurs angulaires sont les sommets du polygône.

On remarque que si $n \leq 0$, Pol_n est strictement inclus dans Pol_0 et que la représentation ρ_n associée à Pol_n est de nombre d'Euler $2 - 2g + n$ d'après le lemme 4.4.2 (voir aussi [Go3]).

LEMME 4.5.1. — *Les représentations ρ_n sont ρ_0 -admissibles pour $n \in [1, \dots, 2g - 3]$. Ainsi, l'ensemble des représentations ρ_0 -admissibles a des éléments dans toutes les composantes connexes de $\text{Hom}^*(\pi_1(S), \text{PSL}_2)$.*

Preuve. — Nous allons montrer qu'il existe une application strictement contractante f de Pol_0 dans Pol_n qui peut se prolonger en une application vérifiant le lemme 2.1.3. Cette application se définit de la manière suivante. Soit D_θ une demi-droite d'angle polaire θ . On note $\lambda(\theta)$ le rapport entre les modules des points euclidiens entre les points de $D(\theta)$ sur ∂Pol_n et ∂Pol_0 . Si z est dans $\text{Pol}_0 \cap D_\theta$, on définit $f(z)$ par $f(z) = \lambda(\theta)z$.

L'application f peut se prolonger en une application $\tilde{f}$ strictement contractante de $\mathbb{D}^2$ dans $\mathbb{D}^2$ par équivariance. En conjuguant $\tilde{f}$ par l'isométrie qui va de $(\mathbb{D}^2, d_{\mathbb{D}^2})$ dans $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$, on obtient une application qui vérifie alors les conditions du lemme 2.1.3 et la représentation ρ_n est donc ρ_0 -admissible.

On obtient ainsi des représentations admissibles de nombre d'Euler quelconque entre $3 - 2g$ et -1 . Comme toute représentation résoluble admissible est de nombre d'Euler nul et d'après le chapitre 3-1, on obtient des représentations admissibles de nombre d'Euler quelconque entre $3 - 2g$ et $2g - 3$. $\square$

Conséquence, la preuve du corollaire 2.1.2. — D'après ce qui précède, pour tout $g > 1$ et tout $j \in [1, \dots, 2g - 2[\cup]2g - 2, \dots, 4g - 3]$, il existe

deux représentations ρ_0 et ρ_i de $\pi_1(S_g)$ dans PSL_2 telles que $e(\rho_0) = 2 - 2g$ et $e(\rho_j) = 2 - 2g + j$, telles que ρ_j est ρ_0 -admissible.

La variété $M = P_0/(\rho_0, \rho_j)(\pi(S))$ admet comme revêtement $\widetilde{\mathrm{PSL}}_2$ qui est topologiquement $\mathbb{R}^3$ et son groupe fondamental est alors de présentation :

$$\pi_1(M) = \langle \alpha_i, \beta_i, \text{ pour } i = 1 \cdots g, h \text{ tels que } \prod_{i=1}^g [\alpha_i, \beta_i] = h^{-j} \text{ et } h \text{ central} \rangle.$$

La variété M est donc un fibré en cercles de classe d'Euler j (voir [W]). Si on conjugue ρ_0 et ρ_j par des éléments de $\mathrm{PGL}_2 - \mathrm{PSL}_2$, on obtient toutes les classes d'Euler dans $[3 - 4g, \dots, 2 - 2g[\cup]2 - 2g, \dots, -1]$.

Un champ de Killing sur une variété lorentzienne M est un champ de vecteurs qui s'intègre en un flot isométrique. Sur P_0 les seuls flots isométriques sont ceux engendré par l'action des groupes à un paramètre de $G = \mathrm{PSL}_2 \times \mathrm{PSL}_2$. La variété quotient $M(\rho_0, \rho) = P_0/(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$ admet un champ de Killing non trivial si et seulement si il existe un groupe à un paramètre de G qui commute avec $(\rho_0, \rho)(\pi_1(S))$. Comme le groupe $\pi_1(S)$ n'est pas résoluble, la variété $M(\rho_0, \rho)$ admet un champ de Killing non trivial si et seulement si la représentation ρ est abélienne. De même, la variété M est homogène si et seulement si ρ_j est la représentation constante. Alors, la variété M s'identifie au fibré unitaire tangent de S qui est de caractéristique d'Euler $2g - 2$. Si $M = P_0/(\rho_0, \rho_j)(\pi_1(S))$ est une variété dont la structure est une déformation continue d'une déformation homogène, alors $eu(\rho_j) = 0$. Or, les représentations ρ_j définies ci-dessus ne sont pas dans la composante connexe de la représentation constante, ne sont donc pas abéliennes, ce qui prouve que la structure anti-de Sitter obtenue n'est pas la déformation d'une structure homogène et ne possède pas de champ de Killing. Ceci contredit la proposition 7.5 de [KR] qui affirmait qu'un fibré en cercles au-dessus de S_g de classe d'Euler ne divisant pas $2g - 2$ ne possède que des structures anti-de Sitter standard, c'est-à-dire des structures qui possèdent un champ de Killing de type temps. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [Ba] V. BANGERT, Minimal geodesics, *Erg. Theory and Dyn. Systems*, 10, n° 2 (1990), 263–286.
- [Be1] Y. BENOIST, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, *Ann. of Math.* (2), 144, n° 2 (1996), 315–347.
- [Be2] Y. BENOIST, Propriétés asymptotes des groupes linéaires, *Geom. Funct. Anal.*, 7, n° 1 (1997), 1–47.
- [Br] S. BROWN, *Cohomology of groups*, Springer, 1982.
- [C] Y. CARRIÈRE, Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines, *Invent. Math.*, 3, 95 (1989), 615–618.
- [CM] E. CALABI, L. MARKUS, Relativistic space forms, *Ann. of Math.*, 75 (1962), 63–76.
- [CR] Y. CARRIÈRE, L. ROZOY, Sur la complétude des métriques lorentziennes de T^2 et difféomorphismes du cercles, *Bol. Soc. Brazil Mat. (N.S.)*, 25, n° 3 (1994), 223–235.
- [D1] F. DAL'BO, Géométrie d'une famille de groupes agissant sur le produit de deux variétés d'Hadamard, *Sémin. Théor. Spectr. et Géom. de Grenoble*, 15 (1996–97), 85–98.
- [D2] F. DAL'BO, Remarques sur le spectre des longueurs d'une surface et comptages, *Prépub. Inst. Math. Rennes*, 98–33 (octobre 1998).
- [FG] D. FRIED, W.M. GOLDMAN, Three-dimensional affine crystallographic groups, *Adv. Math.*, 47 (1983), 1–49.
- [Gh1] É. GHYS, Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables, *Ann. Scient. École Norm. Sup.*, 4^e série, 20, n° 2 (1987), 251–270.
- [Gh2] É. GHYS, Rigidité différentiable des groupes fuchsien, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 (1993), 163–185.
- [Gh3] É. GHYS, Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $SL(2, \mathbb{C})$, *J. reine angew. Math.*, 468 (1995), 113–138.
- [Go1] W.M. GOLDMAN, Nonstandard Lorentz space forms, *J. Differential Geometry*, 21, n° 2 (1985), 301–308.
- [Go2] W.M. GOLDMAN, Topological components of spaces of representation, *Invent. Math.*, 93, n° 3 (1988), 557–607.
- [Go3] W.M. GOLDMAN, Moduli spaces, Preprint (1994).
- [GK] W.M. GOLDMAN, Y. KAMISHIMA, The fundamental group of a compact flat Lorentz space form is virtually polycyclic, *J. Diff. Geom.*, 19, n° 1 (1984), 233–240.
- [GL] M. GUEDIRI, J. LAFONTAINE, Sur la complétude des variétés pseudo-riemanniennes, *J. Geom. Phys.*, 15, n° 2 (1995), 150–158.
- [GM] F. GRUNEWALD, G. MARGULIS, Transitive and quasi-transitive actions of affine groups preserving a generalized Lorentz structure, *J. Geom. Phys.*, 5 (1988), 493–530.
- [He] S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, Inc., 1978.
- [Ka] S. KATOK, *Fuchsian Groups*, Chicago lectures in Mathematics University of Chicago Press, Chicago (1992).

- [Ke] S.P. KERCKHOFF, The Nielsen realisation problem, *Ann. of Math.*, 117 (1983), 235–265.
- [Kl] B. KLINGLER, Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante, *Math. Ann.*, 306, n° 2 (1996), 353–370.
- [Ko] T. KOBAYASHI, A necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of reductive type, *Duke Math. J.*, 67, n° 3 (1992), 653–664.
- [KR] R.S. KULKARNI, F. RAYMOND, 3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces., *J. Differential Geom.*, 21, n° 2 (1985), 231–268.
- [Mi] J.W. MILNOR, On the existence of a connection with curvature zero, *Comm. Math. Helv.*, 32 (1958), 215–223.
- [S1] F. SALEIN, Variétés anti-de Sitter de dimension 3 possédant un champ de Killing non trivial., *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1 Math.*, 24 (1997), 525–530.
- [S2] F. SALEIN, Variétés anti-de Sitter de dimension 3, *Sémin. de Théor. Spectr. et Géom. de Grenoble*, 15 (1996–97), 37–42.
- [S3] F. SALEIN, Variétés anti-de Sitter de dimension 3, Thèse de doctorat, ENS-Lyon, décembre 99.
- [Ta] S.P. TAN, Branched CP^1 -structures on surfaces with prescribed real holonomy, *Math. Ann.*, 300, n° 4 (1994), 649–667.
- [Th] W.P. THURSTON, Minimal stretch between hyperbolic surfaces, Preprint, Princeton, 1985.
- [TR] M. TROYANOV, Les surfaces euclidiennes à singularités coniques, *Enseign. Math.*, 32 (1986), 79–94.
- [W] R. WALDHAUSEN, Gruppen mit Zentrum and 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, *Topology*, 6 (1967), 505–517.
- [Z] A. ZEGHIB, On closed anti de Sitter spacetimes., *Math. Ann.*, 310, n° 4 (1998), 695–716.

Manuscrit reçu le 19 mars 1999,
accepté le 8 septembre 1999.

François SALEIN,
École Nationale Supérieure de Lyon
UMPA, UMR 5669
46 allée d'Italie
69364 Lyon cedex 07 (France).
fsalein@umpa.ens-lyon.fr