

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE DÈBES

JEAN-CLAUDE DOUAI

MICHEL EMSALEM

Familles de Hurwitz et cohomologie non abélienne

Annales de l'institut Fourier, tome 50, n° 1 (2000), p. 113-149

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_1_113_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_1_113_0)

© Annales de l'institut Fourier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FAMILLES DE HURWITZ ET COHOMOLOGIE NON ABÉLIENNE

par P. DÈBES, J.-C. DOUAI et M. EMSALEM

Introduction.

La cohomologie non abélienne, et plus précisément la théorie des gerbes de Grothendieck et Giraud, est utilisée dans [DeDo2] pour étudier certaines questions liées aux modèles d'un revêtement et leurs corps de définition. La note finale de cet article indiquait que la même approche permettait d'aborder une autre question classique de la théorie des revêtements algébriques. Cette seconde question est le thème de cet article : il s'agit de l'existence de familles de Hurwitz, — *i.e.*, de familles de revêtements d'un type donné de la sphère de Riemann —, au-dessus de l'espace de modules (ou espace de Hurwitz) des revêtements du type considéré. L'utilisation de la théorie des gerbes pour ce type de questions est suggérée dans un article de M. Fried [Fr], p. 58. Outre [DeDo2] et le présent article, cette idée est également reprise dans des travaux parallèles d'A. Chambert-Loir [Ch] et de S. Wewers [We].

L'article initial de M. Fried contient également les premiers résultats sur le sujet. Ils concernent le cas où les revêtements considérés n'ont pas d'automorphismes; l'espace de Hurwitz est alors un espace de modules fn , il existe une unique famille de Hurwitz, universelle en un certain sens. Ces résultats, démontrés dans le contexte de revêtements purs — *i.e.*, revêtements non nécessairement galoisiens donnés sans leurs

Mots-clés : Familles de Hurwitz – Cohomologie – Revêtements de courbes – Espaces de modules.

Classification math. : 14Dxx – 18G50 – 14D22 – 14H30.

automorphismes — s'étendent à celui de G -revêtements (voir [CoHa], [Em], [FrVo]) — *i.e.*, revêtements galoisiens donnés avec leurs automorphismes — ; l'absence d'automorphismes (de G -revêtements) se traduisant ici par $Z(G) = \{1\}$; $Z(G)$ désigne le centre du groupe G des revêtements. Dans le cas plus difficile où les objets considérés ont des automorphismes non triviaux, on dispose de quelques résultats, dûs à Coombes et Harbater, dans le contexte de G -revêtements [CoHa] ; il y a une obstruction à l'existence de familles, dans un $H^2(-, -)$ abélien. Le cas général est plus complexe encore pour les revêtements purs. C'est pour ce problème que Fried recommande l'usage de la théorie des gerbes ; traduit en termes cohomologiques, il conduit en effet à une situation non abélienne (au contraire des G -revêtements). Dans son article, Fried précise un peu ses indications dans le cas d'un corps de base algébriquement clos : l'obstruction à l'existence d'une famille au-dessus d'un espace de Hurwitz fait intervenir la 2-cohomologie de cet espace à valeurs dans le faisceau des centres des groupes d'automorphismes des revêtements en question. Nous développons ici ces idées. Notre approche va de plus nous permettre de traiter également la partie arithmétique du problème, *i.e.*, sur un corps de base non nécessairement algébriquement clos ; elle permet aussi un traitement uniforme du problème (*i.e.*, pour G -revêtements et revêtements purs ensemble).

De façon plus précise, étant donné une composante irréductible $\mathcal{H}$ d'un espace de Hurwitz, nous construisons une gerbe $\mathcal{G}$ sur le site étale $\mathcal{H}_{\text{ét}}$. Les sections au-dessus d'un ouvert étale U sont les familles de revêtements au-dessus de U . La classe $[\mathcal{G}]$ de cette gerbe est un élément d'un certain groupe $H^2(\mathcal{H}_{\text{ét}}, -)$ non-abélien, qui s'interprète comme l'obstruction à l'existence d'une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$. La construction précise de cette gerbe est donnée au §3 ; des constructions voisines sont données dans [Ch] et [We]. La théorie des gerbes [Gi] peut ensuite être utilisée et conduit à des applications concrètes.

Ainsi nous montrons que le corps des fonctions de $\mathcal{H}$ (sur $\overline{\mathbb{Q}}$) est l'intersection des corps de fonctions de tous les revêtements ramifiés de $\mathcal{H}$ sur lesquels il existe une famille de Hurwitz (th. 4.4). Ce résultat étend au cas des revêtements purs un énoncé de Coombes et Harbater [CoHa], prop. 1.5, établi dans le contexte de G -revêtements. Cette première application doit être vue comme un analogue du résultat selon lequel le corps des modules d'un revêtement *a priori* défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ est l'intersection des corps de nombres sur lesquels le revêtement est défini (voir [CoHa], prop. 2.7, pour des G -revêtements et [DeDo1], §3.4.1, pour le cas général). Il y a plus qu'une analogie. [DeDo2] a montré que l'obstruction à ce que

le corps des modules K d'un revêtement f en soit un corps de définition est également contrôlée par une gerbe, $\mathcal{G}(f)$. Il s'agit donc, comme pour la question de l'existence de familles au-dessus d'un espace de Hurwitz, d'étudier l'obstruction à l'existence d'une section globale à une gerbe. C'est dans cette perspective que nous commençons (§1) par des résultats généraux de réduction en cohomologie non abélienne. Nous les appliquons ensuite d'abord à la gerbe $\mathcal{G}(f)$ (§2), puis à la gerbe de Hurwitz $\mathcal{G}$ (§4). Le lien entre les deux problèmes est plus étroit encore : nous montrons (§4.5) que la gerbe $\mathcal{G}(f)$ est une spécialisation de la gerbe $\mathcal{G}$; ce fait est noté également dans [Ch], [DeDo2] et [We].

Il y a une alternative au recours à la théorie des gerbes. Elle consiste à utiliser les techniques de [DeDo1], à base de calculs explicites de 2-cocycles, pour réduire une obstruction cohomologique non-abélienne dans des groupes de cohomologie abélienne. On obtient que l'obstruction vit essentiellement dans le groupe $H^2(K, Z(G))$, pour la question de l'existence de modèles d'un revêtement sur son corps des modules [DeDo1], et dans le groupe $H^2(\pi_1(\mathcal{H}), Z(G))$, pour la question de l'existence de familles de Hurwitz (théorème 3.6). La première approche, utilisant la théorie des gerbes, est plus conceptuelle, la seconde est plus explicite et conduit à des résultats plus précis. Nous les donnons en parallèle au §3.

Les applications sont regroupées dans le §4. Les premières sont des critères pratiques d'existence de familles de Hurwitz (§4.1). L'un d'eux concerne l'existence d'une famille de Hurwitz au-dessus de toute courbe tracée sur $\mathcal{H}$ (corollaire 4.3). Ici encore, nous étendons au cas des revêtements purs un résultat de Coombes et Harbater démontré dans le cas de G -revêtements (voir [CoHa], prop. 1.4 (c)). On démontre ensuite le théorème 4.4 (mentionné plus haut). Nous obtenons aussi une borne pour le degré d'un revêtement de $\mathcal{H}$ sur lequel il existe une famille de Hurwitz (corollaire 4.6) ; ce résultat est établi sous certaines hypothèses, par exemple, dans le cas de revêtements purs et à points de branchement ordonnés sur un corps algébriquement clos. Si en plus les revêtements sont galoisiens, alors il existe une famille sur $\mathcal{H}$ lui-même (corollaire 4.5) ; ce résultat améliore un résultat de Fried qui suppose le groupe G de centre trivial (voir [Fr], prop. 3). Enfin nous obtenons sous certaines hypothèses un résultat d'existence générique de familles de Hurwitz (corollaire 4.8).

Nous utilisons librement le langage et les outils de la théorie des revêtements et de la théorie des gerbes. Nous renvoyons à [DeDo2] pour un exposé succinct sur ces théories et pour plus de détails à [DeDo1] (pour les revêtements) et [Gi] (pour les gerbes).

1. Théorèmes de réduction en cohomologie non abélienne.

Les questions étudiées dans cet article font intervenir la 2-cohomologie en groupes finis (non nécessairement abéliens) des espaces sur lesquels on travaille. Nous montrons ici comment la réduire au cas de groupes nilpotents (§1.1), puis abéliens (§1.2).

1.1. Réduction au cas nilpotent.

L'énoncé suivant s'inspire de la proposition 3.1 de [Sp]; voir aussi [Do], chap. VII, 2.2.5, p. 99.

PROPOSITION 1.1. — *Soient $\mathcal{B}$ un site et C un groupe fini constant sur le site $\mathcal{B}$.*

(a) *Supposons C non nilpotent. Soient $\mathcal{L}$ un $\mathcal{B}$ -lien localement représentable par C et $[\mathcal{G}] \in H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L})$ la classe d'une gerbe $\mathcal{G}$ de lien $\mathcal{L}$. Il existe un $\mathcal{B}$ -lien $\mathcal{L}_B$ localement représentable par un sous-groupe B strictement contenu dans C et un $\mathcal{B}$ -morphisme de liens $\mathcal{L}_B \rightarrow \mathcal{L}$ tels que $[\mathcal{G}]$ soit dans l'image de $H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L}_B)$ par la relation $H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L}_B) \twoheadrightarrow H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L})$ induite par ce morphisme.*

(b) *Supposons C groupe fini quelconque sur le site $\mathcal{B}$. Soient $\mathcal{L}$ un $\mathcal{B}$ -lien localement représentable par C et $[\mathcal{G}]$ une classe dans $H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L})$. Il existe un $\mathcal{B}$ -lien $\mathcal{L}_A$ localement représentable par un sous-groupe nilpotent A de C et un $\mathcal{B}$ -morphisme de liens $\mathcal{L}_A \rightarrow \mathcal{L}$ tels que $[\mathcal{G}]$ soit dans l'image de $H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L}_A)$ par la relation $H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L}_A) \twoheadrightarrow H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L})$ induite par ce morphisme.*

Preuve. — (a) Puisque C n'est pas nilpotent, nous pouvons choisir un nombre premier p tel que C admette un p -Sylow non normal. À partir de la gerbe $\mathcal{G}$, nous forgeons à la manière de Grothendieck la gerbe $\mathcal{G}'$ suivante :

pour tout ouvert U de $\mathcal{B}$,

- les U -objets de $\mathcal{G}'$ sont les couples (x, S) où x est un objet de $\mathcal{G}_U$ et S est un sous-faisceau en p -Sylow du faisceau en groupes $\underline{\text{Aut}}_U(x)$ des automorphismes de x ,
- les U -morphisms $(x, S) \rightarrow (x', S')$ sont les U -morphisms $a : x \rightarrow x'$ de $\mathcal{G}_U$ tels que le morphisme $a_* : \underline{\text{Aut}}_U(x) \rightarrow \underline{\text{Aut}}_U(x')$ induit par a envoie S dans S' .

Notons que, puisque le lien $\mathcal{L}$ de $\mathcal{G}$ est localement représentable par C , pour x objet de $\mathcal{G}_U$, le faisceau $\underline{\text{Aut}}_U(x)$ est localement isomorphe au (faisceau en) groupe constant C .

Pour voir qu'on définit bien une gerbe de cette façon, il faut vérifier les deux conditions qui font d'un champ une gerbe, à savoir : pour tout ouvert U non vide,

- 1) deux U -objets (x, S) et (y, T) sont toujours localement isomorphes,
- 2) il existe un raffinement ouvert $V \subset U$ au-dessus duquel il existe des V -objets.

Soient deux objets (x, S) et (y, T) ; localement, c'est-à-dire, après restriction éventuelle à un ouvert $V \subset U$, il existe un isomorphisme f de x sur y (car $\mathcal{G}$ est une gerbe). L'isomorphisme induit $f_* : \underline{\text{Aut}}_V(x) \rightarrow \underline{\text{Aut}}_V(y)$ n'envoie pas nécessairement S sur T . Cependant, comme les p -Sylovs sont conjugués, il envoie S sur un certain conjugué T^φ de T ($\varphi \in \underline{\text{Aut}}_V(y)$). L'isomorphisme $(\varphi^{-1}f)_* = (f_*)^{\varphi^{-1}}$ envoie alors S sur T . Cela prouve 1.

L'argument suivant prouve (2). Il existe un raffinement ouvert $W \subset U$ au-dessus duquel il existe des W -objets de $\mathcal{G}$ (car $\mathcal{G}$ est une gerbe). Soit x l'un d'eux. Si S est un p -Sylov de $\underline{\text{Aut}}_V(x)$, le couple (x, S) est un V -objet de $\mathcal{G}'$.

Le faisceau $\underline{\text{Aut}}_U(x, S)$ des U -automorphismes de l'objet (x, S) dans $\mathcal{G}'$ est isomorphe au normalisateur de S dans $\underline{\text{Aut}}_U(x)$, donc $\mathcal{G}'$ est localement lié par le normalisateur $B = \text{Nor}_C(S')$ de l'image S' de S dans $\text{Lien}(C)$ obtenue à partir de l'isomorphisme local de faisceaux $\underline{\text{Aut}}_U(x) \simeq C$. Notons $\mathcal{L}_B$ le lien de la gerbe $\mathcal{G}'$, lequel est localement représentable par B . Par choix de p le sous-groupe B est strictement contenu dans C . La gerbe $\mathcal{G}'$ induit une classe $[\mathcal{G}']$ dans $H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L}_B)$. Le morphisme de liens $\mathcal{L}_B \rightarrow \mathcal{L}_C$ défini par l'inclusion induit une relation $H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L}_B) \twoheadrightarrow H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L})$ dans laquelle les gerbes $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}$ se correspondent par le foncteur naturel $\mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ (qui envoie l'objet (x, S) sur l'objet x). La neutralité de $\mathcal{G}'$ entraîne donc celle de $\mathcal{G}$. Cela démontre (a).

(b) Le (a) permet sous la condition « C non nilpotent » de « réduire » toute classe $[\mathcal{G}] \in H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L})$ en une classe $[\mathcal{G}'] \in H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L}_B)$ avec B strictement contenu dans C . Considérons le cas où C est un groupe fini quelconque sur le site $\mathcal{B}$. Si C est nilpotent, alors (b) est vrai avec $A = C$. Si C n'est pas nilpotent, on peut appliquer (a) et continuer par induction jusqu'à ce que l'on tombe sur un groupe nilpotent A . $\square$

Exemple 1.2 (cf. [Do], chap. VII, 2.2.4, p. 98). — Soit p un nombre premier fixé et prenons pour C le groupe constant $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{F}_p)$. Le sous-groupe S des matrices triangulaires supérieures unipotentes (de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) est un p -Sylow de C . Le normalisateur $B = \mathrm{Nor}_C S$ est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, lequel est le produit semi-direct ST de S par le tore T déployé de rang 1 constitué des matrices diagonales. Le (a) de la proposition 1.1 s'applique : toute classe d'une gerbe $\mathcal{G}$ localement liée par C peut être réduite (au sens de la conclusion de (a)) en la classe d'une gerbe $\mathcal{G}'$ localement liée par B . La classe $[\mathcal{G}'] \in H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L}_B)$ se décompose alors à son tour en une p -classe à valeurs dans un lien localement représentable par S (qui se dévisse elle-même en p -classes abéliennes) et une classe abélienne d'ordre premier à p .

Le même type d'argument s'applique plus généralement à tout groupe fini C admettant un (B, N) -pair déployé de caractéristique p (voir [Cu], §3.1). Dans l'exemple précédent, le couple (B, N) où $N = \mathrm{Nor}_C T$ constitue un (B, N) pair déployé de caractéristique p et de rang 1 du groupe $C = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{F}_p)$. De même, si G est un groupe de Chevalley, le groupe $C = G(\mathbb{F}_p)$ admet un (B, N) -pair déployé de caractéristique p . On sait en général que B est le produit semi-direct $B = ST$ d'un p -Sylow S de C tel que $\mathrm{Nor}_C S = B$ et d'un groupe abélien T d'ordre premier à p vérifiant $T = B \cap N$, où $N = \mathrm{Nor}_C T$.

1.2. Du cas nilpotent au cas abélien.

La proposition 1.1 permet de réduire toute classe $[\mathcal{G}] \in H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L})$ en une classe $[\mathcal{G}'] \in H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L}_A)$ avec A nilpotent. On peut alors réduire à son tour la classe $[\mathcal{G}']$ en procédant par induction sur la longueur des séries centrales descendantes de A , compte tenu des faits suivants :

1) Soit $1 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 1$ une suite exacte de groupes sur $\mathcal{B}$, avec $A'' = A/A'$ abélien. Soit $\mathcal{G}$ une $\mathcal{B}$ -gerbe de lien $\mathcal{L}$ localement représentable par A . Soit $\pi : A \rightarrow A''$ la surjection de la suite exacte et $\pi_* \mathcal{L}$ l'image de $\mathcal{L}$ par π . Les liens se comportent bien par rapport aux épimorphismes. En particulier $\pi_* \mathcal{L}$ est un lien représentable par un groupe abélien qui est une $\mathcal{B}$ -forme A''_1 de A'' . Par la remarque 2.5 de [Gi], chap. VI, §2, puisque $\pi_* \mathcal{L}$ est abélien, la relation $H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L}) \twoheadrightarrow H^2(\mathcal{B}, \pi_* \mathcal{L})$ est fonctionnelle. La classe $[\mathcal{G}] \in H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L})$ admet donc une image dans $H^2(\mathcal{B}, \pi_* \mathcal{L})$.

2) Si cette image est nulle dans $H^2(\mathcal{B}, \pi_* \mathcal{L})$, il existe un lien $\mathcal{L}_{A'}$ localement représentable par A' et un $\mathcal{B}$ -morphisme $\mathcal{L}_{A'} \rightarrow \mathcal{L}_A$ tel que $[\mathcal{G}]$ soit l'image d'une classe $[\mathcal{G}']$ dans $H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L}_{A'})$ par la relation

$H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L}_{A'}) \rightarrow H^2(\mathcal{B}, \mathcal{L})$. La gerbe $\mathcal{G}'$ est en fait $\mathcal{L}_{A'}$ -équivalente à la gerbe des relèvements dans $\mathcal{G}$ de la section triviale de la gerbe des toseurs $\text{Tors}(A'_1)$ (cf. [Gi], chap. IV, cor. 2.5.5.5. (ii)).

À l'aide de 1) et 2), on peut donc réduire la 2-cohomologie à valeurs dans un groupe nilpotent au cas abélien. Par définition, si $\mathcal{B}$ est de dimension cohomologique ≤ 1 , alors la 2-cohomologie de $\mathcal{B}$ à valeurs dans un groupe abélien est triviale. Combiné avec la proposition 1.1, cela fournit le résultat suivant. Le corollaire 1.4, venant après, en est un cas particulier.

COROLLAIRE 1.3. — *Si la dimension cohomologique de $\mathcal{B}$ est ≤ 1 , alors toute $\mathcal{B}$ -gerbe localement liée par un groupe fini C est neutre.*

COROLLAIRE 1.4. — *Si S est une courbe affine irréductible définie sur un corps algébriquement clos, alors toute $S_{\text{ét}}$ -gerbe localement liée par un groupe fini C est neutre.*

On sait en effet que $S_{\text{ét}}$ est de dimension cohomologique ≤ 1 [SGA1], fasc. 2, exposé IX, cor. 5.7. Voir aussi [Do], chap. V, prop. 4.2, pour l'analogie dans le cas des groupes réductifs.

2. Revêtements et cohomologie non abélienne.

Nous redonnons ici la définition de la gerbe $\mathcal{G}(f)$ des modèles d'un $[G]$ -revêtement $f : X \rightarrow B$, qui a été introduite dans [DeDo2]. Le but est de préparer la définition de la gerbe de Hurwitz $\mathcal{G}$ dont l'étude constitue le thème central de ce travail. On peut penser à la gerbe de Hurwitz $\mathcal{G}$ comme une version globale, au-dessus de l'espace de Hurwitz, de la gerbe $\mathcal{G}(f)$. Le lien entre les deux gerbes sera précisé dans le §4.5 : on montrera que $\mathcal{G}(f)$ est une spécialisation de la gerbe $\mathcal{G}$. Nous renvoyons à [DeDo2] et à [DeDo1] pour plus de détails sur les définitions et les notations introduites ci-dessous.

Rappelons cependant les points suivants. Nous appelons :

- *G -revêtement* un revêtement galoisien donné avec un isomorphisme entre son groupe d'automorphismes et un groupe fixé;
- *revêtement pur* un revêtement non nécessairement galoisien (donné sans l'action de ses automorphismes).
- Nous utilisons l'expression « $[G]$ -revêtement » pour « revêtement pur » (resp. « G -revêtement »).

L'espace-base B est une variété projective régulière géométriquement irréductible et définie sur un corps K ; on note B^* la variété B privée du lieu ramifié. Étant donné un corps $k \supset K$ et un point $x \in B^*(k_s)$, le k -groupe fondamental de B^* de point-base x est noté $\pi_1(B_k^*, x)$; le « k » en indice indique qu'on étend les scalaires à k .

Soit $\phi_{K_s} : \pi_1(B_{K_s}^*, x) \rightarrow G \subset N$ la représentation de $\pi_1(B_{K_s}^*, x)$ associée à un $[G]$ -revêtement donné $f : X \rightarrow B$ défini *a priori* sur la clôture séparable K_s de K . Ici G désigne le groupe du revêtement; de façon précise, si $K(X)/K(B)$ est l'extension de corps de fonctions correspondant au revêtement $f : X \rightarrow B$, G est le groupe des automorphismes de la clôture galoisienne de l'extension $K(X)/K(B)$ (lequel est anti-isomorphe au groupe des automorphismes de la clôture galoisienne du revêtement $f : X \rightarrow B$); en caractéristique 0, G est aussi le groupe de monodromie du revêtement. Le groupe N désigne

$$N = \begin{cases} G & \text{dans le cas des } G\text{-revêtements,} \\ \text{Nor}_{S_d} G & \text{dans le cas des revêtements purs} \end{cases}$$

où d est le degré du revêtement f , le plongement $G \subset S_d$ est donné par l'action de G sur une fibre non ramifiée du revêtement (à conjugaison près par un élément de S_d) et $\text{Nor}_{S_d} G$ désigne le normalisateur de G dans S_d . Introduisons aussi le groupe

$$C = \text{Cen}_N G = \begin{cases} Z(G) & \text{dans le cas des } G\text{-revêtements,} \\ \text{Cen}_{S_d} G & \text{dans le cas des revêtements purs} \end{cases}$$

où $Z(G)$ est le centre de G et $\text{Cen}_{S_d} G$ désigne le centralisateur de G dans S_d .

On suppose désormais que K est le corps des modules du G -revêtement f (relativement à l'extension K_s/K) [DeDo1], §2.7. La gerbe $\mathcal{G}(f)$ associée à f est la catégorie fibrée sur le site étale $\text{Spec}(K)_{\text{ét}}$ définie comme suit : pour chaque ouvert $U = (\text{Spec}(E) \rightarrow \text{Spec}(K))$ de $\text{Spec}(K)_{\text{ét}}$, où E/K est une extension galoisienne finie,

- les U -objets de $\mathcal{G}(f)$ sont les E -modèles de f , c'est-à-dire, les représentations

$$\phi_E : \pi_1(B_E^*, x) \longrightarrow N$$

qui induisent sur $\pi_1(B_{K_s}^*, x)$ un conjugué $\varphi \phi_{K_s} \varphi^{-1}$ de ϕ_{K_s} par un élément $\varphi \in N$,

• les *U-morphismes* entre deux tels objets ϕ_E et ϕ'_E sont les éléments $\varphi \in N$ tels que

$$\phi'_E(x) = \varphi \phi_E(x) \varphi^{-1} \text{ pour tout } x \in \pi_1(B_E^*, x).$$

Les faits suivants sont montrés dans [DeDo2].

La catégorie fibrée $\mathcal{G} = \mathcal{G}(f)$ est effectivement une K -gerbe. Notons $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ son lien. La gerbe $\mathcal{G}(f)$ définit une classe $[\mathcal{G}]$ dans $H^2(\mathrm{Spec}(K)_{\text{ét}}, \mathcal{L})$; cette classe est neutre si et seulement si le $[G]$ -revêtement f est défini sur K . La gerbe $\mathcal{G}(f)$ doit donc être vue comme l'obstruction à ce que le corps des modules de f soit un corps de définition. De plus, la gerbe $\mathcal{G}(f)$ est localement liée par le faisceau constant C ; autrement dit, le lien $\mathcal{L}$ est localement représentable par C .

Les résultats du §1 peuvent être appliqués à la gerbe $\mathcal{G}(f)$. Ainsi le corollaire 1.3 donne :

PROPOSITION 2.1 (voir [DeDo1], cor. 3.3). — *Soit comme ci-dessus $f : X \rightarrow B$ un $[G]$ -revêtement défini sur K_s et de corps des modules K . Si K est de dimension cohomologique ≤ 1 alors la K -gerbe $\mathcal{G}(f)$ admet des sections sur K , c'est-à-dire, K est un corps de définition de f .*

Par exemple, un $[G]$ -revêtement de corps des modules contenu dans $\mathbb{Q}^{\text{ab}}$ (qui est de dimension cohomologique ≤ 1) est nécessairement défini sur $\mathbb{Q}^{\text{ab}}$. Une autre application est la suivante. On sait que tout corps de nombres peut s'écrire comme intersection de corps de dimension cohomologique ≤ 1 (voir la preuve de la proposition 2.7 de [CoHa]). On a donc que le corps des modules d'un $[G]$ -revêtement *a priori* défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ est égal à l'intersection de ses corps de définition. Ce résultat, démontré aussi dans [DeDo1], §3.4.1, étend au cas des $[G]$ -revêtements la proposition 2.7 de [CoHa] (démontrée dans le cas des G -revêtements).

3. Existence de familles de Hurwitz.

Cette partie aborde le problème central de l'article. Les définitions et résultats classiques relatifs aux espaces de modules et familles de revêtements sont donnés en §3.1. Le problème est énoncé en §3.1.6 puis traduit en §3.2 en termes de groupes fondamentaux. Deux points de vue sont utilisés pour le traiter : le point de vue des cocycles abéliens en §3.3, qui s'appuie sur un article précédent [DeDo1]; et le point de vue de la cohomologie non-abélienne (la théorie des gerbes) en §3.4.

3.1. Familles de Hurwitz.

3.1.1. Type de ramification, classes de Nielsen. — On s'intéresse aux familles de revêtements et à la question des modules pour la catégorie des revêtements de $\mathbb{P}^1$, sur un corps de caractéristique 0. Cette catégorie étant trop vaste, on fixe le *type de ramification* des revêtements (on dit aussi sa *classe de Nielsen*). Précisément, on fixe les invariants suivants :

- le groupe (de monodromie) G des revêtements considérés,
- le degré d et la représentation $G \subset S_d$ correspondant à l'action (de monodromie) de G sur une fibre non ramifiée,
- le nombre r des points de branchement,
- l'*inertie* $\mathbf{C} = \{C_1, \dots, C_r\}$, *i.e.*, la famille⁽¹⁾ des classes de conjugaison dans G des générateurs « distingués » des groupes d'inertie au-dessus des points de branchement.

On pose :

$$\mathrm{ni}_G(\mathbf{C}) = \{(g_1, \dots, g_r) \in G^r ; g_1 \cdots g_r = 1, \langle g_1, \dots, g_r \rangle = G, \\ g_i \in C_i \text{ (à l'ordre près)}\},$$

$$\mathrm{ni}_G(\mathbf{C})^{\mathrm{ab}} = \mathrm{ni}_G(\mathbf{C}) / \mathrm{Nor}_{S_d}(G)$$

(où le groupe $\mathrm{Nor}_{S_d}(G)$ agit par conjugaison, composante par composante⁽²⁾). Sans la mention « à l'ordre près », on obtient des sous-ensembles de $\mathrm{ni}_G(\mathbf{C})$ et $\mathrm{ni}_G(\mathbf{C})^{\mathrm{ab}}$, que l'on note $\mathrm{sni}_G(\mathbf{C})$ et $\mathrm{sni}_G(\mathbf{C})^{\mathrm{ab}}$. Pour les G -revêtements, nous aurons besoin aussi des ensembles $\mathrm{ni}_G(\mathbf{C})^{\mathrm{in}}$ et $\mathrm{sni}_G(\mathbf{C})^{\mathrm{in}}$ définis de façon similaire à $\mathrm{ni}_G(\mathbf{C})^{\mathrm{ab}}$ et $\mathrm{sni}_G(\mathbf{C})^{\mathrm{ab}}$, la différence étant qu'on quotientte cette fois par l'action de la conjugaison par des éléments de G . Les familles de revêtements — familles de Hurwitz — que nous considérerons sont relatives à ces données.

3.1.2. — Une famille de Hurwitz relativement au type $\mathrm{ni}_G(\mathbf{C})$ consiste en la donnée d'un triplet $(\mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{F})$ où

- $\mathcal{T}$ et $\mathcal{H}$ sont des variétés quasi-projectives sur un corps k de caractéristique 0,
- l'espace des paramètres $\mathcal{H}$ est irréductible et régulier,

⁽¹⁾ Certaines des classes C_i peuvent être répétées; il faut voir $\mathbf{C}$ comme un r -uplet modulo S_r .

⁽²⁾ *Stricto sensu*, ce n'est pas le normalisateur $\mathrm{Nor}_{S_d}(G)$ qui agit mais le sous-groupe des éléments qui laissent globalement invariant l'ensemble $\{C_1, \dots, C_r\}$.

- $\mathcal{F} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathbb{P}^1$ est un k -morphisme plat, fini tel que, pour tout $h \in \mathcal{H}$, la fibre $\mathcal{F}_h : \mathcal{T}_h \rightarrow \mathbb{P}^1$ est un revêtement ramifié (pur) de monodromie $G \rightarrow S_d$ et d'inertie $\mathbf{C}$.

- l'application $\mathrm{pr}_1 \circ \mathcal{F} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{H}$ est un morphisme lisse, projectif et de fibre générique irréductible (où pr_1 désigne la première projection $\mathcal{H} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{H}$).

Nous utiliserons parfois la notation $\mathcal{F} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathbb{P}^1$, ou même plus simplement $\mathcal{F}$, plutôt que $(\mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{F})$, pour désigner une famille de Hurwitz.

Nous noterons $\mathcal{U}^r$ (resp. $\mathcal{U}_r$) l'ouvert de $(\mathbb{P}^1)^r$ constitué des r -uplets à coordonnées deux à deux distinctes (resp. le quotient du précédent par l'action de S_r). On désignera par $\mathcal{U}_{r+1}^\bullet$ le quotient de $\mathcal{U}^{r+1}$ par S_r agissant sur les r premières coordonnées.

À une famille de Hurwitz d'espace de paramètres $\mathcal{H}$ est associée une application $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}_r$ qui associe au paramètre h le diviseur des points de branchement du revêtement fibre $\mathcal{F}_h : \mathcal{T}_h \rightarrow \mathbb{P}^1$. L'application $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}_r$ est un morphisme défini sur k . Pour plus de détails, voir [DeFr], Lemma 1.5.

3.1.3. Variantes. — Les familles de Hurwitz à points de branchement ordonnés ont une donnée supplémentaire :

- un morphisme $\psi' : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}^r$ tel que pour tout $h \in \mathcal{H}$, le diviseur sous-jacent à $\psi'(h)$ soit le diviseur des points de branchement du revêtement fibre de la famille en h .

Étant donnée une famille de Hurwitz $(\mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{F})$, considérons l'image réciproque $\mathcal{T}^\bullet$ par $\mathcal{F}$ du produit fibré $\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet$ (relatif au morphisme structural $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}_r$ et à la projection $\mathcal{U}_{r+1}^\bullet \rightarrow \mathcal{U}_r$). C'est un ouvert de $\mathcal{T}$ qui apparaît comme un revêtement fini étale de $\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet$. Dans le cas des familles de Hurwitz à points de branchement ordonnés, le morphisme ψ est le composé de la surjection $\mathcal{U}^r \rightarrow \mathcal{U}_r$ avec ψ' . Alors $\mathcal{T}^\bullet$ est aussi l'image réciproque par $\mathcal{F}$ du produit fibré $\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}^r} \mathcal{U}^{r+1}$ (relatif au morphisme $\psi' : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}^r$ et à la première projection $\mathcal{U}^{r+1} \rightarrow \mathcal{U}^r$).

La donnée de la famille $(\mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{F})$ est équivalente à celle de $\mathcal{H}$ muni du morphisme structural ψ (resp. ψ') et du revêtement étale $\mathcal{T}^\bullet \rightarrow \mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet$ (resp. $\mathcal{T}^\bullet \rightarrow \mathcal{H} \times_{\mathcal{U}^r} \mathcal{U}^{r+1}$ dans le cas des points de branchement ordonnés). C'est sous cette forme que nous considérerons dans la suite les familles de Hurwitz.

Une famille de Hurwitz de G -revêtements (avec points de branchement ordonnés ou non) à données de ramification $\mathbf{C}$ est une famille de Hurwitz

au sens précédent telle que le revêtement $\mathcal{T}^\bullet \rightarrow \mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet$ soit lui-même un G -revêtement.

3.1.4. Espaces de Hurwitz. — Les résultats suivants sont essentiellement dûs à M. Fried, et à W. Fulton dans le contexte des espaces de modules de courbes; nous renvoyons à [Fu], [Fr], [BiFr], [DeFr], [Em], [FrVo], [We] pour plus de détails (voir aussi [De]). Il existe un espace de modules grossier, dit espace de Hurwitz et noté $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})^{\text{ab}}$, pour la catégorie des revêtements de $\mathbb{P}^1$ de monodromie $G \rightarrow S_d$ et d'inertie $\mathbf{C}$ définis sur un corps de caractéristique 0. De même pour la catégorie des revêtements de $\mathbb{P}^1$ de monodromie $G \rightarrow S_d$ et d'inertie $\mathbf{C}$ mais avec points de branchement ordonnés; dans ce cas, l'espace de Hurwitz est noté $\mathcal{H}'_G(\mathbf{C})^{\text{ab}}$. Via ψ (resp. via ψ'), l'espace de Hurwitz est un revêtement fini étale de $\mathcal{U}_r$ (resp. $\mathcal{U}^r$ dans le cas des points de branchement ordonnés) correspondant à l'action du groupe des tresses de Hurwitz $\pi_1(\mathcal{U}_r)$ (resp. $\pi_1(\mathcal{U}^r)$) sur $\text{ni}_G(\mathbf{C})^{\text{ab}}$ (resp. $\text{sni}_G(\mathbf{C})^{\text{ab}}$). Les composantes connexes correspondent aux orbites de ces actions.

On a des énoncés similaires dans le cas des G -revêtements, où les espaces de Hurwitz sont notés $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})^{\text{in}}$ et $\mathcal{H}'_G(\mathbf{C})^{\text{in}}$, suivant que les points de branchement sont ordonnés ou non. Ce sont des revêtements étales de $\mathcal{U}_r$ (resp. $\mathcal{U}^r$ dans le cas des points de branchement ordonnés) correspondant à l'action du groupe des tresses de Hurwitz $\pi_1(\mathcal{U}_r)$ (resp. $\pi_1(\mathcal{U}^r)$) sur $\text{ni}_G(\mathbf{C})^{\text{in}}$ (resp. $\text{sni}_G(\mathbf{C})^{\text{in}}$).

Pour fixer les idées et alléger les notations, nous traitons dans la suite le cas des familles de Hurwitz de revêtements purs sans ordre sur les points de branchement. Les autres cas se traitent de façon similaire, *mutatis mutandis*. Pour le suggérer, nous noterons simplement $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ l'espace de Hurwitz, c'est-à-dire, nous omettons l'exposant « ab » ou « in » et le « ' » éventuel. Nous rétablirons cependant ces notations quand le contexte l'exigera.

3.1.5. Propriétés universelles. — L'espace de Hurwitz $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ est défini sur une extension finie k de $\mathbb{Q}$ définie par des conditions de rationalité des classes $\mathbf{C}$ (cf. [FrVo], [Em]). Il vérifie les propriétés universelles suivantes.

(i) Pour tout corps algébriquement clos $\bar{K}$ contenant k , les points de l'espace de Hurwitz rationnels sur $\bar{K}$ sont en correspondance bijective avec les classes d'isomorphismes de revêtements de $\mathbb{P}^1$ définis sur $\bar{K}$ à donnée d'inertie $\mathbf{C}$.

(ii) À toute famille de Hurwitz $\mathcal{F}$ d'espace de paramètres $\mathcal{H}$ est associé un morphisme unique $\gamma_{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$, dit *morphisme structural* (tel que, pour tout $h \in \mathcal{H}(\bar{k})$, le point $\gamma_{\mathcal{F}}(h)$ représente la classe d'isomorphisme du revêtement-fibre en h de la famille $\mathcal{F}$).

(iii) Deux familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ d'espace de paramètres $\mathcal{H}$ sont isomorphes sur un certain revêtement étale $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ si et seulement si les morphismes associés $\gamma_{\mathcal{F}}$ et $\gamma_{\mathcal{F}'}$ sont égaux.

(iv) Les morphismes $\gamma_{\mathcal{F}}$ sont fonctoriels : si $\mathcal{F}_1 : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{H} \times \mathbb{P}^1$ est une famille de Hurwitz d'espace de paramètres $\mathcal{H}_1$ et $\varphi : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ est un morphisme de variétés, les morphismes associés aux familles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2 = \varphi^*(\mathcal{F}_1)$ sont liés par la relation $\gamma_{\mathcal{F}_2} = \gamma_{\mathcal{F}_1} \circ \varphi$.

(v) L'espace de Hurwitz muni des morphismes $\gamma_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F}$ parcourant les familles de Hurwitz de donnée $\mathbf{C}$, est un objet initial dans la catégorie des schémas vérifiant (ii), (iii) et (iv).

Remarque 3.1. — (a) La condition (i) est une conséquence des conditions (ii), (iii) et (iv) et de l'existence de familles de Hurwitz localement au sens étale (cf. prop. 3.10). En effet, à chaque objet de la catégorie défini sur $\bar{K}$ est associé par (ii) un unique point de l'espace de Hurwitz $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ rationnel sur $\bar{K}$ (on prend $\mathcal{H} = \text{Spec}(\bar{K})$). D'après (iii) l'application qui à un objet de la catégorie défini sur $\bar{K}$ associe ce point de l'espace de Hurwitz $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ rationnel sur $\bar{K}$ est injective. Montrons la surjectivité. Soit $h : \text{Spec}(\bar{K}) \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ un point fermé de l'espace de Hurwitz. D'après la proposition 3.10, il existe une famille $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ sur un revêtement étale de $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ de morphisme structural $\gamma_{\mathcal{F}_1} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$. Le point h se relève en un point $h_1 : \text{Spec}(\bar{K}) \rightarrow \mathcal{H}_1$ et la restriction de la famille à ce point fermé h_1 est un $[G]$ -revêtement de la catégorie défini sur $\bar{K}$. La propriété (iv) implique que le morphisme structural qui lui est associé est $\gamma_{\mathcal{F}_1} \circ h_1 = h$.

(b) Il résulte aussi de (ii), (iii), (iv) que l'action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ sur les points de l'espace de Hurwitz rationnels sur $\bar{k}$ est compatible avec l'action sur les classes d'isomorphisme de $[G]$ -revêtements associés. Soit en effet $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ et $h : \text{Spec}(\bar{k}) \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ un point fermé de l'espace de Hurwitz, correspondant à un $[G]$ -revêtement $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ au-dessus de $\text{Spec}(\bar{k})$. Le conjugué de ce $[G]$ -revêtement par σ est le « pull back » de ce $[G]$ -revêtement par le morphisme $\tilde{\sigma} : \text{Spec}(\bar{k}) \rightarrow \text{Spec}(\bar{k})$ associé à σ . La fonctorialité énoncée dans (iv) entraîne alors que le morphisme structural associé au conjugué du $[G]$ -revêtement par σ est $h \circ \tilde{\sigma} = h^{\sigma}$. Une conséquence notable est que le corps des modules du $[G]$ -revêtement associé à un point h

de l'espace des modules est le corps de rationalité de h (sur la composante irréductible de $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ qui le contient).

3.1.6. Familles au-dessus de l'espace de Hurwitz. — Les questions suivantes constituent le thème central de l'article.

Questions 3.2. — Existe-t-il une famille de Hurwitz au-dessus de l'espace $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$, *i.e.*, admettant $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ pour espace des paramètres? Quand une telle famille existe, est-elle universelle dans le sens qu'étant donnée une famille de Hurwitz $(\mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{F})$, $\mathcal{T}$ est l'image réciproque par $\gamma_{\mathcal{F}} \times \text{Id}$ de la famille au-dessus de $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ donnée au départ?

Ces questions ont une version purement géométrique où l'on remplace $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ par $(\mathcal{H}_G(\mathbf{C}))_{\bar{k}}$ où ce qui revient au même par $(\mathcal{H}_G(\mathbf{C}))_{\mathbf{C}}$. C'est le point de vue adopté par Fried dans [Fr] qui montre que des familles de Hurwitz existent localement pour la topologie complexe. Une condition évidemment nécessaire pour l'existence d'une famille universelle est que les revêtements considérés n'aient pas d'automorphisme non trivial, *i.e.*, que $\text{Cen}_{S_d}(G) = \{1\}$ pour des revêtements purs (resp. $Z(G) = 1$ pour des G -revêtements). Cette condition est également suffisante. En effet, si les $[G]$ -revêtements n'ont pas d'automorphisme non trivial, les familles locales se recollent pour fournir une famille au-dessus de toute composante connexe de $(\mathcal{H}_G(\mathbf{C}))_{\mathbf{C}}$ formant une famille universelle (voir [Fr], [CoHa], [FrVo], [Em]). Les mêmes arguments valent dans le cadre géométrique sur $\bar{k}$ au sens de la topologie étale : l'absence d'automorphisme non trivial est aussi une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ soit un espace des modules fin.

Nous allons traiter dans ce paragraphe de la question de l'existence de familles de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ (sur k), qui rassemble la question géométrique mentionnée plus haut et une question arithmétique de descente. Nous allons montrer que localement au sens de la topologie étale de telles familles existent et que l'obstruction à l'existence d'une telle famille sur $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ est gouvernée par une gerbe que nous allons construire.

Remarque 3.3. — L'obstruction n'est pas triviale en général, c'est-à-dire, il existe des espaces de Hurwitz au-dessus desquels il n'y a pas de famille de Hurwitz. Considérons la situation de l'exemple 2.6 de [CoHa]. Coombes et Harbater construisent un G -revêtement de corps des modules $\mathbb{Q}$ mais non défini sur $\mathbb{R}$; d'autre part l'espace de Hurwitz associé $\mathcal{H}'$ (avec points de branchement adjoints) est isomorphe sur $\mathbb{Q}$ à $\mathcal{U}^3$ (il s'agit d'une

situation où les hypothèses classiques de « rigidité » sont satisfaites). Dans cette situation, il ne peut exister de famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}'$.

En effet, de façon générale, si $\mathcal{H}$ est une composante irréductible d'un espace de Hurwitz définie sur un corps K , le corps des modules d'un revêtement correspondant à un point $h \in \mathcal{H}$ est le corps de définition $K(h)$ du point h sur $\mathcal{H}$ (Remarque 3.1 (b)). Si de plus il existe une famille de Hurwitz $\mathcal{F} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathbb{P}^1$ définie sur K , alors le revêtement a un modèle défini sur son corps des modules $K(h)$, à savoir le revêtement fibre $\mathcal{F}_h : \mathcal{T}_h \rightarrow \mathbb{P}^1$.

3.2. Position du problème.

3.2.1. Traduction du problème en termes de représentations du π_1 .

On regarde le problème au-dessus de chaque composante irréductible de l'espace de Hurwitz $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ (qui n'est pas lui-même nécessairement irréductible). Fixons donc une composante irréductible $\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ et notons k un corps de définition de $\mathcal{H}$. Soient $h_0 \in \mathcal{H}(\bar{k})$ un point géométrique au-dessus de $\mathbf{a} = \psi(h_0)$ et x un point géométrique dans $\mathbb{P}^1 - \mathbf{a}$. Notons $\gamma : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}$ un revêtement fini étale de $\mathcal{H}$ (éventuellement $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ et $\gamma = \text{Id}$) et h_1 un point géométrique de $\mathcal{H}_1$ dans la fibre de h_0 . Soit k_1 une extension finie de k sur laquelle $\mathcal{H}_1$ est définie. On considère la filtration suivante de variétés sur k_1 :

$$(\mathbb{P}^1 - \mathbf{a}, x) \longrightarrow (\mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (\mathbf{a}, x)) \longrightarrow (\mathcal{U}_r, \mathbf{a})$$

qui donne par image inverse par $\psi \circ \gamma$ la filtration suivante :

$$(\mathbb{P}^1 - \mathbf{a}, x) \longrightarrow (\mathcal{H}_1 \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_1, x)) \longrightarrow (\mathcal{H}_1, h_1)$$

et la suite exacte de groupes fondamentaux

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x) &\longrightarrow \pi_1((\mathcal{H}_1 \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet)_{k_1}, (h_1, x)) \\ &\longrightarrow \pi_1((\mathcal{H}_1)_{k_1}, h_1) \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Soit $\phi : \pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x) \rightarrow G \subset N$ la représentation de $\pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x)$ associée à la classe d'isomorphisme de $[G]$ -revêtements représentée par le point h_0 (où N et C sont les groupes définis dans le §2). La description des familles de Hurwitz en termes de représentations de groupes fondamentaux peut être résumée dans l'énoncé suivant (qui s'obtient par exemple en combinant [DeDo1], §2.1 & §2.4, et [DeFr], Lemma 1.5).

PROPOSITION 3.4.

(a) Les familles de Hurwitz $(\mathcal{T}_1, \mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1)$ de $[G-]$ revêtements d'espace de paramètres $\mathcal{H}_1$ correspondent aux homomorphismes de groupes (ou représentations)

$$\Phi : \pi_1((\mathcal{H}_1 \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet)_{k_1}, (h_1, x)) \longrightarrow N$$

qui prolongent l'homomorphisme ϕ .

(b) Deux familles de Hurwitz d'espace de paramètres $\mathcal{H}_1$ sont isomorphes si et seulement si les représentations correspondantes

$$\pi_1((\mathcal{H}_1 \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet)_{k_1}, (h_1, x)) \longrightarrow N$$

sont conjuguées par un élément $\varphi \in C$.

Nous allons maintenant construire :

- un morphisme $\bar{\varphi} : \pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_0, x)) \rightarrow N/C$ et
- un morphisme $\lambda : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N/CG$

qui joueront un rôle important dans la suite.

3.2.2. Construction de $\bar{\varphi}$. — Choisissons un pro-objet universel P dans la catégorie des revêtements étales de $\mathcal{H}$ pointés au-dessus de h_0 , i.e., une tour cohérente de revêtements finis étales de $\mathcal{H}$ pointés au-dessus de h_0 telle que tout revêtement fini étale de $\mathcal{H}$ soit isomorphe à un objet de la tour (voir [SGA 1], exp. V). Le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{H}, h_0)$ est anti-isomorphe au groupe des automorphismes de P . Choisissons un revêtement galoisien étale $\gamma : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}$ faisant partie du pro-objet universel P sur lequel existe une famille de Hurwitz $\mathcal{F}_1$ de morphisme structural $\gamma_{\mathcal{F}_1} = \gamma$ (cf. prop. 3.10 ci-dessous). Soit z un élément du groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_0, x))$ et y son image dans la projection $\pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_0, x)) \rightarrow \pi_1(\mathcal{H}, h_0)$. Ce dernier induit un automorphisme $\tilde{y}$ du revêtement galoisien $\gamma_{\mathcal{F}_1} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}$. Par image réciproque par $\tilde{y}$ on obtient la famille $\tilde{y}^* \mathcal{F}_1$ au-dessus de $\mathcal{H}_1$. Si

$$\Phi : \pi_1((\mathcal{H}_1 \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet)_{k_1}, (h_1, x)) \longrightarrow N$$

est la représentation associée à la famille $\mathcal{F}_1$, celle associée à $\tilde{y}^* \mathcal{F}_1$ est $\Phi \circ \text{int}_z$ (à conjugaison près par un élément de N), où int_z désigne la conjugaison par z . Le fait que $\gamma_{\mathcal{F}_1} \circ \tilde{y} = \gamma_{\mathcal{F}_1}$ allié à 3.1.5 (iv) montre que $\gamma_{\mathcal{F}_1} = \gamma_{\tilde{y}^* \mathcal{F}_1}$. Il résulte alors de 3.1.5 (iii) que les familles $\mathcal{F}_1$ et $\tilde{y}^* \mathcal{F}_1$ sont isomorphes

sur un revêtement étale $\mathcal{H}_2$ de $\mathcal{H}_1$ qu'on peut supposer galoisien sur $\mathcal{H}$. Il existe donc un élément $\varphi_z \in S_d$ tel que

$$(1) \quad \forall u \in \pi_1(\mathcal{H}_2 \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_2, x)), \quad \Phi(zuz^{-1}) = \varphi_z \Phi(u) \varphi_z^{-1}$$

où h_2 est un point géométrique de $\mathcal{H}_2$ au-dessus de h_1 . Si l'on se restreint à des éléments u de $\pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x)$, la formule précédente donne

$$(2) \quad \forall u \in \pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x), \quad \phi(zuz^{-1}) = \varphi_z \phi(u) \varphi_z^{-1}.$$

Ceci prouve que l'élément φ_z appartient à N . Il est défini modulo C . Il ne dépend pas de la famille locale choisie. En effet, deux familles sont isomorphes localement au sens étale (cf. prop. 3.12 plus bas), et donc les restrictions des représentations correspondantes Φ et Ψ à un sous-groupe ouvert assez petit de $\pi_1(\mathcal{H}_1 \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet)$ contenant $\pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x)$ diffèrent l'une de l'autre par conjugaison par un élément de C . Donc les éléments φ_z et ψ_z associés à Φ et Ψ sont égaux dans N/C . La correspondance $z \rightarrow \varphi_z$ induit donc un morphisme

$$\bar{\varphi} : \pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_0, x)) \longrightarrow N/C.$$

Notons que s'il existe une famille de Hurwitz sur $\mathcal{H}$, i.e., une représentation $\Phi : \pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}, (h_0, x)) \rightarrow N$ prolongeant ϕ , alors φ_z peut être pris égal à $\Phi(z)$ dans (1) et (2), d'où

$$(3) \quad \text{Tout morphisme } \Phi : \pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_0, x)) \longrightarrow N \text{ prolongeant } \phi \\ \text{induit } \bar{\varphi} \text{ modulo } C.$$

De façon similaire, pour $z \in \pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x)$, on peut prendre $\varphi_z = \phi(z)$ dans (2), d'où

$$(4) \quad \text{La restriction de } \bar{\varphi} \text{ à } \pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x) \text{ coïncide avec le morphisme} \\ \pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x) \longrightarrow G/Z(G) \text{ induit par } \phi \text{ modulo } C.$$

3.2.3. Le morphisme λ et la condition (λ /Lift). — Il existe un unique morphisme $\lambda : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N/CG$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_0, x)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \\ \bar{\varphi} \downarrow & & \downarrow \lambda \\ N/C & \longrightarrow & N/CG. \end{array}$$

Cela fait apparaître une première obstruction à l'existence d'une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$: la condition suivante doit être satisfaite :

(λ /Lift) *Le morphisme $\lambda : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N/CG$ possède au moins un relèvement $\Lambda : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N/G$.*

En effet, s'il existe une représentation $\Phi : \pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_0, x)) \rightarrow N$ prolongeant ϕ , elle induit un morphisme $\Lambda : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N/G$. Comme Φ induit $\bar{\varphi}$ modulo C (d'après (3)), le morphisme Λ induit nécessairement le morphisme λ modulo C .

3.2.4. Généralisation. — Dans ce qui précède, $\mathcal{H}$ désigne une composante connexe de l'espace de Hurwitz $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$. Pour enrichir les applications, il est utile d'étendre certains des énoncés précédents à la situation où $\mathcal{H}$ est une variété irréductible quelconque munie d'un morphisme algébrique $\chi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ (par exemple une courbe tracée sur $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$).

La proposition 3.4 s'étend sans difficulté à cette situation plus générale. En fait, que $\mathcal{H}$ soit une composante de l'espace de Hurwitz $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ n'est pas utilisé dans le §3.2.1 ; la seule modification à apporter concerne l'application ψ qui doit être remplacée par $\psi \circ \chi$.

En revanche, le §3.2.2 utilise les propriétés de l'espace de Hurwitz $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$. Cependant, la définition des morphismes

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} : \pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_0, x)) &\longrightarrow N/C, \\ \lambda : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) &\longmapsto N/CG\end{aligned}$$

s'étend naturellement à la situation plus générale considérée : il suffit de composer ceux définis en §3.2.2 et §3.2.3 avec les morphismes induits au niveau des π_1 par le morphisme $\chi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$. On vérifie alors que les conclusions 3), 4) ainsi que le §3.2.3 restent valables dans la situation plus générale.

3.3. Utilisation de [DeDo1].

Comme ci-dessus, $\mathcal{H}$ désigne une composante connexe de l'espace de Hurwitz $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$, ou plus généralement (cf. §3.2.4), une variété irréductible quelconque munie d'un morphisme algébrique $\chi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$. Nous donnons ici (§3.3) et dans le §3.4 une description cohomologique de l'obstruction à l'existence d'une famille de Hurwitz au-dessus de l'espace $\mathcal{H}$.

Il s'agit *a priori* d'une question de cohomologie non-abélienne. Cependant, en utilisant les techniques de [DeDo1], on peut réduire le problème et donner une description de l'obstruction en termes de 2-cocycles abéliens. C'est ce que nous faisons ici (§3.3). Dans le paragraphe suivant (§3.4) nous donnerons une autre description, équivalente, en termes de gerbes. Nous nous contentons ici et dans le §3.4 de décrire l'obstruction. Nous en tirons des conséquences concrètes au §4.

3.3.1. La première obstruction. — La condition (λ/Lift) du §3.2.3 est l'exacte analogue de la condition du même nom de [DeDo1]. On a les critères pratiques suivants [DeDo1], §3.1.

PROPOSITION 3.5. — *La condition (λ/Lift) est satisfaite dans chacun des cas suivants :*

- pour des G -revêtements : dans tous les cas.

- pour des revêtements purs :

- (a) si le groupe $\pi_1(\mathcal{H}, h_0)$ est un groupe profini projectif, ou

- (b) si CG/G a un complément dans N/G . Cela est vrai en particulier pour des revêtements galoisiens de groupe G tel que $\text{Inn}(G)$ a un complément dans $\text{Aut}(G)$, ou

- (c) si le groupe $C/Z(G)$ est de centre trivial et le groupe $\text{Inn}(C/Z(G))$ a un complément dans $\text{Aut}(C/Z(G))$ (e.g. $C = Z(G)$).

3.2.2. L'obstruction principale. — Supposons que la condition (λ/Lift) est satisfaite et fixons un relèvement $\Lambda : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N/C$ de λ . Le problème de l'existence d'une famille au-dessus de $\mathcal{H}$ est résumé par le diagramme de la figure 1 où les suites de flèches alignées sont exactes et où $\hookrightarrow$ (resp. $\twoheadrightarrow$) signifie que l'homomorphisme en question est injectif (resp. surjectif). La question est de construire un homomorphisme

$$\Phi : \pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_0, x)) \longrightarrow N,$$

qui prolonge ϕ , qui induise $\bar{\varphi}$ modulo C et qui induise Λ sur $\pi_1(\mathcal{H}, h_0)$ modulo G . Ce type de problème est étudié en toute généralité dans [DeDo1], §4. Il y a trois conditions à vérifier pour pouvoir en appliquer les résultats :

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x) & \hookrightarrow & \pi_1((\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^*), (h_0, x)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \\
 \downarrow \phi & \searrow & \downarrow \Phi & \searrow \varphi_1 & \downarrow \Lambda \\
 & G/Z(G) & \longrightarrow & N/C & \longrightarrow & N/CG \\
 \uparrow & \nearrow & \uparrow & \nearrow & \uparrow & \nearrow \\
 G & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N/G
 \end{array}$$

Figure 1

• L'hypothèse du §4.1.1 de [DeDo1] s'écrit ici « $C \subset \text{Cen}_N(G)$ » ; elle est vraie par définition de C .

• La condition (FMod) du §4.1.3 de [DeDo1] correspond ici à la condition (1) ci-dessus.

• La condition (rest/mod) du §4.1.3 de [DeDo1] correspond ici à la condition (4).

Les résultats de [DeDo1], §4 (en particulier le th. 4.3 et les prop. 4.4 et 4.5) fournissent alors les conclusions suivantes.

THÉORÈME 3.6. — *Supposons la condition (λ /Lift) satisfaite.*

(a) *Les relèvements $\Lambda : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N/G$ de λ sont exactement les applications de la forme $\Lambda = \tilde{\theta} \cdot \Lambda_0$ où $\tilde{\theta}$ est une 1-cochaîne arbitraire dans $Z^1(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), CG/G)$ et $\Lambda_0 : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N/G$ est un relèvement fixé de λ .*

De plus, à tout relèvement $\Lambda : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N/G$ de λ est associé un 2-cocycle Ω_Λ dans $H^2(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), Z(G))$ (pour une certaine action de $\pi_1(\mathcal{H}, h_0)$ sur $Z(G)$)⁽⁶⁾ ayant les propriétés suivantes :

(b) *L'existence d'une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$ qui induise le morphisme Λ sur $\pi_1(\mathcal{H}, h_0)$ est équivalente à l'annulation de Ω_Λ dans $H^2(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), Z(G))$.*

(c) *L'existence d'une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$ est équivalente à la condition*

$$\Omega_\Lambda^{-1} \in \delta^1(H^1(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), CG/G))$$

⁽⁶⁾ Ω_Λ et l'action de $\pi_1(\mathcal{H}, h_0)$ sur $Z(G)$ sont donnés explicitement dans [DeDo1].

où $\delta^1 : H^1(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), CG/G) \rightarrow H^2(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), Z(G))$ est l'opérateur cobord associé à la suite exacte (centrale)

$$1 \rightarrow Z(G) \longrightarrow C \longrightarrow CG/G \rightarrow 1.$$

Remarques 3.7.

a) Dans le contexte de G -revêtements, on a $N = G$; le morphisme λ est trivial et a exactement un relèvement $\pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N/G$. D'après le théorème 3.6, l'obstruction à l'existence d'une famille de Hurwitz est donc mesurée par un unique 2-cocycle $\Omega \in H^2(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), Z(G))$ (l'action est de plus ici l'action triviale). Cette classe d'obstruction généralise celle qui apparaît dans la démonstration de la proposition 1.4 (c) de [CoHa] (où est considérée la situation de G -revêtements à points de branchement ordonnés).

b) Dans son article [Fr], Fried donne quelques indications sur l'obstruction à l'existence d'une famille au-dessus d'un espace de Hurwitz $\mathcal{H}$, dans le cas d'un corps de base algébriquement clos. Comme ici, l'obstruction se passe en deux temps : il y a une obstruction préliminaire qui concerne l'existence d'un faisceau de groupes sur $\mathcal{H}$ (voir [Fr], p. 55, 4.12).

3.3.3. Le résultat sous la condition (Seq/Split). — [DeDo1] donne également une forme simplifiée de son *Main Theorem* dans le cas où la suite exacte $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow \Gamma$ de [DeDo1], i.e., ici, la suite

$$(5) \quad 1 \rightarrow \pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x) \longrightarrow \pi_1((\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet), (h_0, x)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow 1$$

est scindée. Comme dans [DeDo1], nous noterons (Seq/Split) cette condition. Cette version simplifiée prend ici la forme suivante.

THÉORÈME 3.8. — *Supposons que la condition (Seq/Split) est satisfaite et fixons une section $s : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_0, x))$. Alors l'existence d'une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$ est équivalente à l'existence d'au moins un relèvement $\varphi : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N$ du morphisme $\bar{\varphi} \circ s : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N/C$.*

Précisément, à tout relèvement φ de $\bar{\varphi} \circ s$ correspond une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$, à savoir, la famille associée à la représentation Φ (à valeurs dans N) du groupe

$$\pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_0, x)) = \pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x) \times^s \pi_1(\mathcal{H}, h_0)$$

qui est égale à ϕ sur $\pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x)$ et égale à φ sur $\pi_1(\mathcal{H}, h_0)$.

Un lemme de M. Fried [CoHa], Lemma 1.1, permet d'assurer que la condition (Seq/Split) est vraie notamment dans la situation de $[G]$ -revêtements avec points de branchement ordonnés et sur un corps algébriquement clos.

LEMME 3.9. — *Soit K un corps algébriquement clos et de caractéristique 0. Alors les épimorphismes*

$$\begin{aligned}\pi_1((\mathcal{H}'_G(\mathbf{C})^{\text{ab}} \times_{\mathcal{U}^r} \mathcal{U}^{r+1})_K, (h_0, x)) &\longrightarrow \pi_1((\mathcal{H}'_G(\mathbf{C})^{\text{ab}})_K, h_0), \\ \pi_1((\mathcal{H}'_G(\mathbf{C})^{\text{in}} \times_{\mathcal{U}^r} \mathcal{U}^{r+1})_K, (h_0, x)) &\longrightarrow \pi_1((\mathcal{H}'_G(\mathbf{C})^{\text{in}})_K, h_0)\end{aligned}$$

admettent une section.

Preuve. — Il suffit de donner la preuve dans le cas où $K = \mathbb{C}$. Dans ce cas il existe une section de l'épimorphisme $\pi_1(\mathcal{U}^{r+1} \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{U}^r \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$ (cf. [CoHa], Lemma 1.1). On obtient la section cherchée par *pull back* par les morphismes $(\mathcal{H}'_G(\mathbf{C})^{\text{ab}})_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{U}^r \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ et $(\mathcal{H}'_G(\mathbf{C})^{\text{in}})_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{U}^r \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. $\square$

3.4. La gerbe des familles de Hurwitz.

3.4.1. Préliminaires à la construction de la gerbe.

PROPOSITION 3.10. — *Les familles de Hurwitz existent localement pour la topologie étale.*

Il s'agit de montrer qu'étant donné un revêtement étale $\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H}$, il existe un revêtement fini étale $\mathcal{H}_1$ de $\tilde{\mathcal{H}}$ sur lequel existe une famille de Hurwitz, ou, autrement dit, une représentation

$$\Phi_1 : \pi_1(\mathcal{H}_1 \times_{\mathcal{U}^r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_0, x)) \longrightarrow N$$

prolongeant ϕ , soit encore un sous-groupe ouvert assez petit $\mathcal{U}$ de $\pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}^r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_0, x))$ contenant $\pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x)$ sur lequel est défini un « prolongement » de ϕ . Cela est vrai de façon générale : tout morphisme continu d'un groupe profini A dans un groupe fini G , où A est un sous-groupe fermé distingué d'un groupe profini B , s'étend à un sous-groupe ouvert distingué de B .

Remarques 3.11. — La proposition 3.10 permet de retrouver l'injectivité de l'application $\pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x) \rightarrow \pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}^r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (h_0, x))$. En effet, l'énoncé correspond à la presque-essentielle surjectivité du foncteur qui à

un revêtement de $\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet$ fait correspondre sa restriction à la fibre $(\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}$. D'après [SGA1; exposé V], cette dernière propriété est équivalente à l'injectivité désirée. (Il existe également des arguments topologiques pour établir cette injectivité; voir par exemple [Bir].)

PROPOSITION 3.12. — *Les familles de Hurwitz sont localement isomorphes (au sens de la topologie étale sur $\mathcal{H}$).*

Preuve. — Il s'agit de voir que, si deux familles $(\mathcal{T}_1, \mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1)$ et $(\mathcal{T}_2, \mathcal{H}_2, \mathcal{F}_2)$ d'espaces de paramètres $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ irréductibles munis de morphismes structuraux $\gamma_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ et $\gamma_2 : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ qui sont des revêtements étales de $\mathcal{H}$, coïncident au-dessus d'un point h_0 de $\mathcal{H}$, alors il existe un revêtement étale $\tilde{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sur lequel les images réciproques des deux familles sont isomorphes. Il n'y a pas de restriction à supposer les deux familles définies sur le même espace de paramètres S (on tire les deux familles sur une composante connexe du produit fibré $\mathcal{H}_1 \times_{\mathcal{H}_G(\mathbf{C})} \mathcal{H}_2$). Les deux familles de Hurwitz au-dessus de la variété S correspondent à deux morphismes $\Phi_i : \pi_1(S \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (s_0, x)) \rightarrow N$ ($i = 1, 2$) prolongeant ϕ ; s_0 désigne ici un point de S au-dessus de h_0 . Il leur est associé des morphismes $\gamma_i : S \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$, ($i = 1, 2$), qui sont à valeurs dans une même composante $\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$.

Il suffit de démontrer que les deux morphismes coïncident sur un sous-groupe ouvert contenant $A = \pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\bar{k}}, x)$. Posons

$$B = \pi_1(S \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}^\bullet, (s_0, x)) \quad \text{et} \quad \Gamma = B/A.$$

Les deux morphismes $\Phi_1 : B \rightarrow G$ et $\Phi_2 : B \rightarrow G$ coïncident sur A . Pour tout $u \in A$ et $v \in B$, on a

$$\phi(vuv^{-1}) = \Phi_1(v)\phi(u)\Phi_1(v)^{-1} = \Phi_2(v)\phi(u)\Phi_2(v)^{-1}.$$

Posons

$$\alpha(v) = \Phi_2(v)^{-1}\Phi_1(v).$$

C'est un élément du centralisateur $\text{Cen}_N(G)$. Les morphismes Φ_1 et Φ_2 induisent des morphismes $\bar{\Phi}_1$ et $\bar{\Phi}_2$ de Γ vers N/G . En remplaçant Γ par le noyau de ces morphismes (ce qui revient à remplacer S par un revêtement étale), on peut supposer que $\bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_2 = 1$ et que Φ_1 et Φ_2 sont à valeurs dans G . Alors α est à valeurs dans $G \cap \text{Cen}_N(G) = Z(G)$ et

$$\begin{aligned} \alpha(v)\alpha(v') &= \Phi_2(v)^{-1}\Phi_1(v)\Phi_2(v')^{-1}\Phi_1(v') \\ &= \Phi_2(v')^{-1}\Phi_2(v)^{-1}\Phi_1(v)\Phi_1(v') \\ &= \alpha(vv'). \end{aligned}$$

C'est donc un morphisme de B vers $Z(G)$. Il suffit de remplacer B par le noyau de ce morphisme pour avoir $\Phi_1 = \Phi_2$. $\square$

3.4.2. Définition de la gerbe. — Nous pouvons donner la définition de la gerbe de Hurwitz $\mathcal{G}$ que nous souhaitons considérer. Le site étale sur lequel on se place est l'espace $\mathcal{H}$ muni de la topologie étale; on le note $\mathcal{H}_{\text{ét}}$.

Pour chaque ouvert $U = (\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H})$ de $\mathcal{H}_{\text{ét}}$,

- les U -objets de $\mathcal{G}$ sont les représentations

$$\Phi_{\tilde{\mathcal{H}}} : \pi_1(\tilde{\mathcal{H}} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}, (\tilde{h}_0, x)) \longrightarrow N$$

prolongeant la représentation $\phi : \pi_1((\mathbb{P}^1 - \mathbf{a})_{\tilde{k}}, x) \rightarrow G$ ($\tilde{h}_0 \in \tilde{\mathcal{H}}$ est un point géométrique au-dessus de h_0);

- les U -morphisms entre deux tels objets $\Phi_{\tilde{\mathcal{H}}}$ et $\Phi'_{\tilde{\mathcal{H}}}$ sont les éléments $\varphi \in N$ tels que $\Phi'_{\tilde{\mathcal{H}}} = \varphi \Phi_{\tilde{\mathcal{H}}} \varphi^{-1}$.

On a ainsi défini une catégorie fibrée sur le site étale $\mathcal{H}_{\text{ét}}$. C'est un préchamp, comme sous-catégorie fibrée du préchamp $\text{Sch}/_{\mathcal{H}_{\text{ét}}}$ des schémas au-dessus de $\mathcal{H}_{\text{ét}}$. De plus toute donnée de descente de $\mathcal{H}'$ à $\mathcal{H}$ d'un objet au-dessus de $\mathcal{H}'$, où $\mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ est un morphisme fini étale et surjectif, est effective. C'est le théorème de descente fidèlement plate de Grothendieck [Gr1]. Il s'ensuit que $\mathcal{G}$ est un champ. D'après les propositions 3.10 et 3.12, ce champ vérifie les deux propriétés qui en font une gerbe (qui sont rappelées dans la preuve de la proposition 1.1).

Par construction, la gerbe $\mathcal{G}$ est neutre, *i.e.*, a une section au-dessus de $\mathcal{H}$, si et seulement si il existe une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$. Plus généralement, la gerbe $\mathcal{G}$ définit une classe $[\mathcal{G}]$ dans $H^2(\mathcal{H}_{\text{ét}}, \mathcal{L})$ où $\mathcal{L}$ est le lien de la gerbe $\mathcal{G}$. Cette classe peut être vue comme l'obstruction à l'existence de familles de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$.

Remarques 3.13.

(a) De manière équivalente, la gerbe $\mathcal{G}$ peut être définie comme la gerbe obtenue en associant à tout ouvert $U = (\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H})$ de $\mathcal{H}_{\text{ét}}$ le groupoïde des familles de Hurwitz d'espace de paramètres $\tilde{\mathcal{H}}$ (relativement au type $\text{ni}_G(\mathbf{C})$) et de morphisme structural le revêtement étale $U = (\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H})$.

(b) Localement un automorphisme d'une famille de Hurwitz est donné par un élément de C . Le lien $\mathcal{L}$ de la gerbe $\mathcal{G}$ est donc localement représentable par C .

(c) La gerbe $\mathcal{G}$ peut être munie de données de recollement. Ce point est contenu dans la discussion qui a mené à la définition de $\bar{\varphi}$ dans le §3.2.2. Considérons en effet le revêtement étale galoisien $\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}$ qu'on y introduit (cet espace $\mathcal{H}_2$ peut être choisi indépendant de $y \in \pi_1(\mathcal{H}, h_0)$ du fait de la finitude de G). Notons $\mathcal{F}_2$ la famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}_2$ obtenue par pull-back à partir de la famille notée $\mathcal{F}_1$ dans le §3.2.2. L'assertion 1) du §3.2.2 indique que, pour tout $y \in \pi_1(\mathcal{H}, h_0)$, il existe un isomorphisme entre les familles $\mathcal{F}_2$ et $\tilde{y}^*(\mathcal{F}_2)$ au-dessus de $\mathcal{H}_2$; notons χ_y l'un des ces isomorphismes. La donnée du revêtement étale $U = \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}$, du U -objet de la gerbe $\mathcal{G}$ induit par la famille de Hurwitz $\mathcal{F}_2$ et des isomorphismes χ_y , ($y \in \pi_1(\mathcal{H}, h_0)$), définit une donnée de recollement pour la gerbe $\mathcal{G}$.

(d) En termes de gerbes, le théorème 3.8 se reformule de la façon suivante. Si la condition (Seq/Split) est satisfaite (cf. §3.3.3) et si s désigne une section de la suite (5), la gerbe précédente $\mathcal{G}$ coïncide avec la gerbe des relèvements $\pi_1(\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}, \mathcal{U}_{r+1}}, (h_0, x)) \rightarrow N$ de l'homomorphisme $\bar{\varphi} \circ s : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N/C$. (Pour la notion de gerbe de relèvements, nous renvoyons à [Gi], chap. IV §2.5.4.1 et §2.5.8.1.)

3.4.3. Restrictions de la gerbe de Hurwitz. — Ce paragraphe a la même fonction pour le §3.4 que le §3.2.4 pour le §3.2, c'est-à-dire, d'étendre les énoncés précédents au cas où $\mathcal{H}$ est une variété irréductible quelconque munie d'un morphisme algébrique $\chi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ (et pas seulement une composante de l'espace de Hurwitz $\mathcal{H}_G(\mathbf{C})$). En particulier, il est utile de définir la gerbe de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$ dans ce cadre plus général.

Plus précisément, soit $\mathcal{H}$ un schéma irréductible muni d'un morphisme $\chi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$. On définit la *gerbe image réciproque* sur $\mathcal{H}$ de la gerbe de Hurwitz de la façon suivante. À tout ouvert étale $\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ est associé l'ouvert étale $\chi^*\tilde{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}$ et les objets sur ce dernier sont les «pull back» sur $\chi^*\tilde{\mathcal{H}}$ des familles de Hurwitz sur $\tilde{\mathcal{H}}$ (cf. [Gi], V, 1.4). Dans le cas où $\chi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ est un plongement, on appellera aussi cette gerbe *restriction* de la gerbe de Hurwitz à $\mathcal{H}$.

On vérifie que la gerbe image réciproque $\mathcal{G}$ définit une classe $[\mathcal{G}]$ dans $H^2(\mathcal{H}_{\text{ét}}, \chi^*\mathcal{L})$ où $\chi^*\mathcal{L}$ est l'image réciproque sur $\mathcal{H}_{\text{ét}}$ du lien $\mathcal{L}$ de la gerbe $\mathcal{G}$. Cette classe peut être vue comme l'obstruction à l'existence de familles de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$. Les conclusions de la remarque 3.13 restent valables également.

3.5. Relation entre les paragraphes 3.3 et 3.4.

Nous avons donné deux conditions nécessaires et suffisantes pour

l'existence d'une famille de Hurwitz au-dessus de l'espace $\mathcal{H}$:

- La première, donnée dans le §3.3, est que le cocycle

$$\Omega_\Lambda \in H^2(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), Z(G))$$

introduit dans le théorème 3.6, est dans l'image de l'opérateur cobord

$$\delta^1 : H^1(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), CG/G) \longrightarrow H^2(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), Z(G)).$$

Le cocycle Ω_Λ dépend du choix d'un relèvement $\Lambda : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N/G$ de l'application $\lambda : \pi_1(\mathcal{H}, h_0) \rightarrow N/CG$; en particulier, on suppose ici que la condition (λ/Lift) est satisfaite.

- La seconde, donnée dans le §3.4, est que la classe $[\mathcal{G}]$ de la gerbe $\mathcal{G}$ introduite en §3.4.2 est neutre dans $H^2(\mathcal{H}_{\text{ét}}, \mathcal{L})$, où $\mathcal{L}$ est le lien de la gerbe $\mathcal{G}$.

Expliquons brièvement ci-dessous comment sont reliées ces deux conditions et plus précisément comment se comparent le cocycle Ω_Λ et la classe $[\mathcal{G}]$. De façon plus générale, il s'agit d'expliquer comment la classe $[\mathcal{G}]$ peut être estimée en termes de cocycles abéliens. Les notations sont celles des paragraphes précédents.

On suppose que la condition (λ/Lift) est satisfaite ; c'est une condition nécessaire pour qu'il existe une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$ (et donc pour que la gerbe $\mathcal{G}$ puisse être neutre). Pour tout relèvement Λ de λ , considérons, à la manière de [DeDo2], §4.1, la gerbe $\mathcal{G}_\Lambda$ dont les objets sont ceux des objets de la gerbe $\mathcal{G}$ qui induisent Λ (les morphismes étant ceux de $\mathcal{G}$ qui respectent Λ).

Comme dans [DeDo2], on voit aisément que la gerbe $\mathcal{G}_\Lambda$ est localement liée par $C \cap G = Z(G)$; c'est-à-dire, son lien est localement représentable par $Z(G)$. Ce groupe étant abélien, le lien est même représentable par $Z(G)$ et l'ensemble $H^2(\mathcal{H}_{\text{ét}}, Z(G))$ ne comporte qu'une classe neutre (voir [DeDo2], §1.2.7).

De plus, la gerbe $\mathcal{G}_\Lambda$ peut être munie de données de recollement (remarque 3.13, (c)). D'après [Gi], chap. IV, cor. 3.5.3, cela indique que la classe $[\mathcal{G}_\Lambda]$ provient d'un élément $\check{\Omega}_\Lambda \in \check{H}^2(\mathcal{H}_{\text{ét}}, Z(G))$ par le plongement « cohomologie de Čech-cohomologie ordinaire »

$$\check{H}^2(\mathcal{H}_{\text{ét}}, Z(G)) \hookrightarrow H^2(\mathcal{H}_{\text{ét}}, Z(G)).$$

À son tour, le cocycle de Čech $\tilde{\Omega}_\Lambda$ correspond à un cocycle dans $H^2(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), Z(G))$ par l'application naturelle

$$H^2(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), Z(G)) \longrightarrow \check{H}^2(\mathcal{H}_{\text{ét}}, Z(G)).$$

Cela provient du fait qu'il existe un revêtement étale global de $\mathcal{H}$ (et pas seulement une famille couvrante) qui trivialisait la gerbe (cf. preuve de la proposition 3.10). Nous disons que ce dernier cocycle est le cocycle Ω_Λ du théorème 3.6. Pour vérifier ce point, on peut reprendre le §4.3 de [DeDo2] qui permet d'écrire la classe $[\mathcal{G}_\Lambda]$ comme différence de deux gerbes dans $H^2(\mathcal{H}_{\text{ét}}, Z(G))$. Cette interprétation correspond alors exactement à la forme explicite de Ω_Λ , qui est donnée dans [DeDo1], §4.1.4.

En conclusion, la gerbe $\mathcal{G}_\Lambda$ est neutre si et seulement si le cocycle Ω_Λ est trivial dans $H^2(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), Z(G))$. Quant à la gerbe $\mathcal{G}$, elle est neutre si et seulement si il existe un relèvement Λ de λ tel que la gerbe $\mathcal{G}_\Lambda$ est neutre. Le fait que cela correspond à la condition $\Omega_\Lambda^{-1} \in \delta^1(H^1(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), CG/G))$ du théorème 3.6 (c) résulte de la formule

$$\Omega_{\Lambda'} - \Omega_\Lambda = \delta^1(\theta)$$

où Λ, Λ' sont deux relèvements arbitraires de λ , où $\theta = \Lambda' \Lambda^{-1}$ et δ^1 est l'opérateur cobord du théorème 3.6 :

$$\delta^1 : H^1(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), CG/G) \longrightarrow H^2(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), Z(G)).$$

Cette formule s'obtient, soit comme conséquence de l'interprétation mentionnée ci-dessus des gerbes $\mathcal{G}_\Lambda$ (cf. [DeDo2], rem. 4.4 (b)), soit par un calcul direct à partir de la forme explicite des cocycles Ω_Λ (voir [DeDo1], prop. 4.5).

4. Applications.

Cette partie regroupe les applications. On commence par des critères d'existence de familles de Hurwitz (§4.1). Le §4.2 relie le corps des fonctions d'un espace de Hurwitz $\mathcal{H}$ aux familles existant au-dessus de $\mathcal{H}$. Le §4.3 donne de nouveaux résultats pratiques sous l'hypothèse simplificatrice (Seq/Split). Enfin on considère les restrictions de la gerbe de Hurwitz au point générique (§4.4), puis aux points fermés (§4.5) ; en particulier, le §4.5 fait le lien entre le §2 et le §3.

Nous conservons les notations précédentes. En particulier, $\mathcal{H}$ désigne une variété irréductible quelconque munie d'un morphisme algébrique $\chi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathbb{C})$.

4.1. Premiers critères d'existence de familles de Hurwitz.

COROLLAIRE 4.1. — *Sous la condition (λ/Lift) , si G est de centre trivial, il existe une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$.*

Cela découle immédiatement du théorème 3.6. Ce résultat est bien connu dans le cas de G -revêtements (pour lequel la condition (λ/Lift) est vide) mais semble nouveau dans la situation de revêtements purs pour laquelle les résultats connus jusque là faisaient intervenir le centralisateur $C = \text{Cen}_{S_d} G$. En combinant le corollaire 4.1 et la proposition 3.5 (b), on obtient qu'il existe toujours une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$ dans le contexte de revêtements purs galoisiens de groupe G de centre trivial et admettant un complément dans $\text{Aut}(G)$.

COROLLAIRE 4.2. — *Si le groupe $\pi_1(\mathcal{H}, h_0)$ est projectif, alors il existe une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$.*

Cet énoncé découle du théorème 3.6 et du fait que le groupe $H^2(\pi_1(\mathcal{H}, h_0), Z(G))$ est trivial si $\pi_1(\mathcal{H}, h_0)$ est projectif. Cela est le cas en particulier si l'espace $\mathcal{H}$ est de dimension cohomologique ≤ 1 . Sous cette hypothèse, la conclusion du corollaire 4.2 peut être vue en termes de gerbes : d'après le corollaire 1.3, la gerbe $\mathcal{G}$ des familles de Hurwitz est neutre. Un cas particulier de cette situation est donné dans l'énoncé suivant, qui étend aux $[G]$ -revêtements la proposition 1.4 (c) de [CoHa] (démontrée pour des G -revêtements).

COROLLAIRE 4.3. — *Soit S une courbe affine définie sur un corps algébriquement clos et munie d'un morphisme $u : S \rightarrow \mathcal{H}_{G, \mathbb{C}}$. Alors il existe une famille de Hurwitz $\mathcal{F}$ sur S de morphisme structural $\gamma_{\mathcal{F}} = u$.*

4.2. Corps des fonctions de l'espace de Hurwitz.

Le résultat suivant étend aux $[G]$ -revêtements la proposition 1.5 de [CoHa] (démontrée pour des G -revêtements).

THÉORÈME 4.4. — *On suppose ici que $\mathcal{H}$ est une composante connexe de l'espace des modules $\mathcal{H}_G(\mathbb{C})$. Alors le corps des fonctions de $\mathcal{H}$ est l'intersection des corps de fonctions des espaces de paramètres S irréductibles définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ au-dessus desquels il existe une famille de Hurwitz relativement au type $\text{ni}_G(\mathbb{C})$ et de morphisme structural $S \rightarrow \mathcal{H}$ dominant.*

Le même résultat est valable pour n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique 0 à la place de $\overline{\mathbb{Q}}$.

Preuve. — Nous adaptons à la situation des $[G-]$ revêtements la seconde démonstration de la proposition 1.5 de [CoHa] donnée par Coombes et Harbater (voir [CoHa], rem., p. 828).

L'application $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}_r$ est un revêtement étale (§3.1). Le corps des fonctions $\overline{\mathbb{Q}}(\mathcal{H})$ est donc une extension finie de l'extension transcendante pure $\overline{\mathbb{Q}}(\mathcal{U}_r) = \overline{\mathbb{Q}}(x_1, \dots, x_r)$. Soit Ω une clôture algébrique fixée de $\overline{\mathbb{Q}}(x_1, \dots, x_r)$. Pour $i = 1, \dots, r$, soient $F_i = \overline{\mathbb{Q}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r)$ et $\overline{F}_i$ la clôture algébrique de F_i dans Ω . Le corps $\overline{\mathbb{Q}}(\mathcal{H})$ est une extension de degré de transcendance 1 du corps F_i et donc est le corps des fonctions d'une F_i -courbe X_i . Soit F'_i une extension finie de F_i sur laquelle toutes les composantes absolument irréductibles de cette courbe sont définies. Notons $X_{i,j}$ ($j \in I_i$) ces composantes irréductibles, vues comme F'_i -courbes. Soit j un indice quelconque dans I_i . D'après le corollaire 4.3, il existe une famille de Hurwitz sur $(X_{i,j})_{\overline{F}_i}$. Soit F''_i une extension finie de F'_i sur laquelle cette famille est définie (pour tout $j \in I_i$). Le corps $F''_i(X_{i,j})$ est une extension finie de $F_i(X_i) = \overline{\mathbb{Q}}(\mathcal{H})$, à laquelle correspond un $\overline{\mathbb{Q}}$ -morphisme dominant $S_{i,j} \rightarrow \mathcal{H}$. Par construction, il existe une famille de Hurwitz sur un ouvert de Zariski non vide de $S_{i,j}$.

Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que $\overline{\mathbb{Q}}(\mathcal{H})$ est l'intersection dans Ω des images (par des $\overline{\mathbb{Q}}(x_1, \dots, x_r)$ -plongements) des corps $F''_i(X_{i,j})$, où $j \in I_i$ et $i = 1, \dots, r$. Posons $F = \overline{\mathbb{Q}}(x_1, \dots, x_r)$, $M = \overline{\mathbb{Q}}(\mathcal{H})$, $M_{i,j} = F''_i(X_{i,j}) = \overline{\mathbb{Q}}(S_{i,j})$ et notons $G_i = F''_i(x_i)$ le compositum dans Ω de F''_i et de F ($i = 1, \dots, r$ et $j \in I_i$). En utilisant la transitivité du produit tensoriel, nous obtenons, pour tout $i = 1, \dots, r$:

$$M \otimes_{F_i} F''_i \simeq M \otimes_F (F \otimes_{F_i} F''_i) \simeq M \otimes_F G_i,$$

les produits tensoriels ci-dessus étant vus comme des sous-espaces de $M \otimes_F \Omega \simeq \Omega^d$, où d désigne le degré de M sur F . Il s'ensuit que

$$\bigcap_{i=1}^r M \otimes_{F_i} F''_i = \bigcap_{i=1}^r M \otimes_F G_i = M \otimes_F \left(\bigcap_{i=1}^r G_i \right).$$

Dans l'extension G_i/F , le lieu de ramification est contenu dans des hyperplans parallèles à l'axe des x_i . Il s'ensuit que dans l'extension $\bigcap_{1 \leq i \leq r} G_i$ de F , le lieu de ramification est au plus de dimension 0. Le

théorème de pureté entraîne que $\bigcap_{1 \leq i \leq r} G_i = F$. Il vient donc

$$(*) \quad \bigcap_{i=1}^r M \otimes_{F_i} F_i'' = M \otimes_F F = M.$$

Par ailleurs nous avons

$$M \otimes_{F_i} F_i'' \simeq \prod_{j \in I_i} M_{i,j}.$$

Notons $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ l'isomorphisme de $M \otimes_F \Omega$ sur Ω^d . Sa restriction $M \otimes_F G_i \rightarrow \Omega^d$, que nous noterons encore φ par abus de notation, est de la forme $(\varphi_{i,j,t})_{j \in I_i, 1 \leq t \leq d}$, où $\varphi_{i,j,t}$ est un plongement $M_{i,j} \hookrightarrow \Omega$ prolongeant φ_t .

Nous allons montrer maintenant que

$$\varphi_1(M) = \bigcap_{i=1}^r \bigcap_{j \in I_i} \varphi_{i,j,1}(M_{i,j}),$$

ce qui conclura la preuve.

Soit $\beta \in \Omega$ appartenant au terme de droite. Pour tout $i = 1, \dots, r$ et $j \in I_i$, il existe un élément $\alpha_{i,j} \in M_{i,j}$ tel que $\beta = \varphi_{i,j,1}(\alpha_{i,j})$. Posons

$$\beta_t = \varphi_{i,j,t}(\alpha_{i,j}) \quad (t = 1, \dots, d).$$

Le d -uplet $(\beta_1, \dots, \beta_d)$ ainsi obtenu appartient, pour tout $i = 1, \dots, r$ et tout $j \in I_i$, à l'ensemble

$$\prod_{j \in I_i} \varphi_{i,j}(M_{i,j}) \simeq \varphi(M \otimes_{F_i} F_i'')$$

(où l'on a noté $\varphi_{i,j} = (\varphi_{i,j,t})_{1 \leq t \leq d}$) et donc, d'après (*), à l'image $\varphi(M)$ de M dans Ω^d . En particulier, il existe $\alpha \in M$ tel que $\beta = \beta_1 = \varphi_1(\alpha)$, $i = 1, \dots, r$ et $j \in I_i$. $\square$

4.3. Résultats sous la condition (Seq/Split).

COROLLAIRE 4.5.

(a) *Supposons la condition (Seq/Split) satisfaite. Si de plus l'épimorphisme $N \twoheadrightarrow N/C$ est scindé, alors il existe une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$.*

(b) En particulier, si le corps de base K est algébriquement clos, alors il existe une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$ dans chacune des deux situations suivantes :

- $\mathcal{H}$ paramètre des revêtements purs galoisiens à points de branchement ordonnés,
- $\mathcal{H}$ paramètre des G -revêtements de groupe abélien à points de branchement ordonnés.

Le (a) étend au cas des $[G]$ -revêtements la proposition 1.4 (b) de [CoHa] démontrée dans le contexte de G -revêtements. Le premier point du (b) est à comparer à un résultat de Fried [Fr], prop. 3, où G est supposé de centre trivial.

Preuve. — (a) La condition du théorème 3.8 assurant l'existence d'une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}$ est évidemment satisfaite si l'épimorphisme $N \rightarrow N/C$ a une section.

(b) Par le lemme 3.9, la condition (Seq/Split) est satisfaite sous les hypothèses considérées. Pour des revêtements galoisiens, le plongement $G \hookrightarrow S_d$ est donné par la représentation régulière de G . Pour cette représentation, l'épimorphisme $\text{Nor}_{S_d} G \rightarrow \text{Nor}_{S_d} G / \text{Cen}_{S_d} G$ est scindé (*e.g.* [DeDo1], prop. 3.1). D'où le premier point du (b). L'épimorphisme $N \rightarrow N/C$ est également scindé dans la situation du second point de (b), puisqu'on a alors $N = G$ et $C = Z(G) = G$. $\square$

COROLLAIRE 4.6. — *Sous la condition (Seq/Split), il existe un revêtement étale $\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H}$ sur lequel il existe une famille de Hurwitz et dont le degré d peut être borné comme suit :*

$$d \leq \frac{|G|}{|Z(G)|} \quad (\text{pour des } G\text{-revêtements}),$$

$$d \leq \frac{|\text{Nor}_{S_d} G|}{|\text{Cen}_{S_d} G|} \quad (\text{pour des revêtements purs}).$$

Preuve. — Fixons une section s de l'épimorphisme

$$\pi_1((\mathcal{H} \times_{\mathcal{U}_r} \mathcal{U}_{r+1}), (h_0, x)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{H}, h_0).$$

Fixons aussi un pro-objet universel P dans la catégorie des revêtements étales de $\mathcal{H}$ pointés au-dessus de h_0 (*cf.* §3.2.2). Soit $\mathcal{H}_d$ le sous-revêtement étale galoisien de P correspondant au sous-groupe distingué $\text{Ker}(\bar{\varphi} \circ s)$

de $\pi_1(\mathcal{H}, h_0)$. Nous allons appliquer le théorème 3.8 avec $\mathcal{H}$ pris égal à $\mathcal{H}_d$. La condition (Seq/Split), vraie sur $\mathcal{H}$, l'est *a fortiori* sur $\mathcal{H}_d$. Par construction, le morphisme $\bar{\varphi} \circ s$ est trivial sur $\pi_1(\mathcal{H}_d, h_0)$ et donc se relève en un morphisme $\pi_1(\mathcal{H}_d, h_0) \rightarrow N$. D'après le théorème 3.8, il existe une famille de Hurwitz au-dessus de $\mathcal{H}_d$. Par construction $\mathcal{H}_d$ est un revêtement étale de $\mathcal{H}$ de degré

$$d = |\pi_1(\mathcal{H}, h_0)/\text{Ker}(\bar{\varphi} \circ s)| = |(\bar{\varphi} \circ s)(\pi_1(\mathcal{H}, h_0))| \leq |N/C|. \quad \square$$

4.4. Restrictions de la gerbe de Hurwitz au point générique.

Les résultats de cette partie sont des conséquences de la propriété suivante.

THÉORÈME 4.7. — *Soient X une variété sur un corps algébriquement clos K de caractéristique 0 et C un groupe fini. Supposons que le sous-groupe de n -torsion du groupe de Brauer de X est trivial, soit $\text{Br}(X)_n = 0$, pour tout diviseur n de $|C|$. Alors toute gerbe sur $X_{\text{ét}}$ localement liée par C est neutralisée par restriction au point générique.*

Preuve. — On peut se ramener au cas d'un lien localement représentable par un groupe nilpotent (prop. 1.1), puis par dévissage, au cas d'un groupe abélien (§1.2) et même cyclique de la forme μ_n .

La suite exacte de Kummer $1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$ donne alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{n} & H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^2(X, \mu_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(K(X), \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{n} & H^1(K(X), \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^2(K(X), \mu_n) \\ \parallel & & \parallel & & \\ 0 & & 0 & & \end{array}$$

Les termes 0 en bas à gauche et au centre proviennent du théorème 90 de Hilbert. Quant à la surjectivité de la flèche $H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(X, \mu_n)$ en haut à droite, elle est conséquence des hypothèses : en effet, le terme suivant de la suite longue de cohomologie est $\text{Br}(X)_n$. Il résulte de ce diagramme que la flèche de spécialisation au point générique $H_{\text{ét}}^2(X, \mu_n) \rightarrow H^2(K(X), \mu_n)$ est nulle. $\square$

Appliqué à la gerbe de Hurwitz, le théorème 4.7 fournit le résultat suivant.

COROLLAIRE 4.8. — *Soit K un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et soit $\mathcal{H}$ une composante connexe de l'espace de Hurwitz. Si $\mathrm{Br}(\mathcal{H})_n = 0$ pour tout diviseur n de $|C|$ (où C est ici le groupe habituel dans ce contexte (défini au §2)), alors la gerbe de Hurwitz $\mathcal{G}$ est neutralisée par restriction au point générique de $\mathcal{H}_K$: il existe une famille de Hurwitz sur un ouvert de Zariski de $\mathcal{H}_K$.*

On peut noter que l'existence générique de familles au-dessus de $\mathcal{H}$ est équivalente au fait que le revêtement correspondant au point générique de $\mathcal{H}$ est défini sur son corps des modules (relativement à l'extension $\overline{K(\mathcal{H})}/K(\mathcal{H})$). Un premier point est que le corps des modules en question vaut $K(\mathcal{H})$. Cela résulte du §3.2.2 appliqué au cas où k est le corps des fonctions de $\mathcal{H}$ (voir en particulier les conditions (1) et (2)) ; on peut aussi adapter au point générique l'argument de la remarque 3.1 (b) (où les points considérés sont des points fermés). D'autre part, dire que génériquement il y a une famille au-dessus de $\mathcal{H}$ est équivalent à dire que le revêtement générique est défini sur $K(\mathcal{H})$.

Remarque 4.9. — Dans le théorème 4.7 et le corollaire 4.8, on aimerait remplacer l'hypothèse sur $\mathrm{Br}(X)_n$ par une hypothèse sur un invariant cohomologique de $X(\mathbb{C})$ pour la topologie complexe, plus accessible que la topologie étale. Gardons les notations de la preuve du théorème 4.7. Si on suppose que $\mathrm{Br}(X(\mathbb{C}))_n = 0$, la suite de Kummer analytique fournit une suite longue de cohomologie analogue à la première ligne du diagramme de la preuve du théorème 4.7. On obtient

$$\frac{H^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{X(\mathbb{C})}^\times)}{nH^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{X(\mathbb{C})}^\times)} \simeq \frac{\mathrm{Pic}(X(\mathbb{C}))}{n\mathrm{Pic}(X(\mathbb{C}))} \simeq H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

On peut donc conclure que si on retire à $X(\mathbb{C})$ un certain nombre de diviseurs *analytiques*, *i.e.*, par restriction à un ouvert analytique, la classe de la gerbe, vue dans $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ devient neutre. Dans le contexte des gerbes de Hurwitz, cela conduit à des énoncés d'existence de familles analytiques de Hurwitz au-dessus d'un ouvert analytique de l'espace $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Pour revenir à une conclusion algébrique (au lieu d'analytique), on peut penser à tirer parti de l'isomorphisme $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq H_{\mathrm{ét}}^2(X, \mu_n)$ entre groupes de cohomologie complexe et étale, valable pour le faisceau de torsion

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mu_n$ (cf. [Mi], th. 3.12, p. 117). Mais il faudrait pour cela disposer pour la variété X en question de résultats de comparaison appropriés entre $\text{Pic}(X(\mathbb{C}))/n\text{Pic}(X(\mathbb{C}))$ (analytique) et $\text{Pic}(X)/n\text{Pic}(X)$ (algébrique).

En analytique, si X est affine (ce qui est le cas lorsque $X = \mathcal{H}$), il existe un isomorphisme entre $\text{Br}(X(\mathbb{C}))_n$ et $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_n$. L'hypothèse $\text{Br}(X(\mathbb{C}))_n = 0$ (pour tout n divisant $|C|$) faite dans cette remarque peut être remplacée par « $|C|$ et $|\text{Tor}(H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))|$ premiers entre eux ». En revanche, comme nous l'ont indiqué J.-L. Colliot-Thélène et D. Harari, l'analogue algébrique pose des problèmes : il n'est pas vrai en général que $\text{Br}(X)_n$ s'injecte dans $\text{Tor}(H^3(X, \mathbb{Z}))$.

Exemple 4.10. — Considérons la situation de $[G]$ -revêtements à points de branchement ordonnés. L'hypothèse faite dans la remarque 4.9 est satisfaite lorsque le morphisme $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} \rightarrow (\mathcal{U}^r)_{\mathbb{C}}$ est un isomorphisme. En effet, dans ce cas, le groupe $\text{Tor}(H^3(\mathcal{U}^r(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$ est trivial : cela découle de la suite exacte de localisation (cf. [Gr2], cor. 2.9), appliquée à l'espace $\mathcal{U}^r = (\mathbb{P}^1)^r - \Delta$, où Δ est l'union des hyperplans $\Delta_{i,j} = \{(x_1, \dots, x_r) \mid x_i = x_j\} \simeq (\mathbb{P}^1)^{r-1}$:

$$\begin{aligned} 0 = H^3((\mathbb{P}^1)^r(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) &\longrightarrow H^3(\mathcal{U}^r(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \\ &\longrightarrow H^4_{\Delta}((\mathbb{P}^1)^r(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq H^2(\Delta(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Pour $\mathcal{H} = \mathcal{H}'_G(\mathbb{C})^{\text{ab}}$ (revêtements purs), (resp. $\mathcal{H} = \mathcal{H}'_G(\mathbb{C})^{\text{in}}$ (G -revêtements)), l'hypothèse « $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} \rightarrow (\mathcal{U}^r)_{\mathbb{C}}$ est un isomorphisme » correspond à la condition classique de « rigidité », c'est-à-dire au fait que le cardinal de $\text{sn}_G(\mathbb{C})^{\text{ab}}$ (resp. $\text{sn}_G(\mathbb{C})^{\text{in}}$) vaille 1.

4.5. Restrictions aux points fermés de la gerbe de Hurwitz.

Une dernière application permet de faire le lien entre le §2 et le §3.

Soient $\mathcal{H}$ une composante irréductible définie sur k d'un espace de Hurwitz $\mathcal{H}_G(\mathbb{C})$ et h un point fermé de $\mathcal{H}$ de corps résiduel $K = k(h)$. Ce point correspond à une classe d'isomorphisme de $[G]$ -revêtements $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ sur $\bar{K}$ de corps des modules K . On obtient donc par image réciproque par le morphisme $\text{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{H}$ correspondant au point h de la gerbe de Hurwitz une gerbe sur $\text{Spec}(K)_{\text{ét}}$, qui est clairement une sous-catégorie de la gerbe $\mathcal{G}(f)$ des modèles du $[G]$ -revêtement $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Cette inclusion de gerbes est une équivalence de gerbes. Le point essentiel à vérifier est, qu'étant donné un modèle du $[G]$ -revêtement $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$

sur une certaine extension finie L de K , il existe une extension finie L' de L et une famille de Hurwitz $\mathcal{F}' : \mathcal{T}' \rightarrow S' \times \mathbb{P}^1$ sur un espace de paramètres S' de morphisme structural $\gamma : S' \rightarrow \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$, muni d'un point $h' : \text{Spec}(L') \rightarrow S'$ au-dessus du point $h : \text{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{H}$ tel que $h'^*\mathcal{T}' \simeq X_{L'}$. Cela résulte de la preuve de la proposition 3.10. Il est clair que si la gerbe de Hurwitz est neutre, la gerbe $\mathcal{G}(f)$ est également neutre. Cela traduit le fait que s'il existe une famille de Hurwitz sur $\mathcal{H}$, alors pour tout point fermé h de corps résiduel $k(h)$, le corps $k(h)$, qui est le corps des modules du $[G]$ -revêtement associé à h est un corps de définition; en particulier, si pour un certain point fermé h de $\mathcal{H}$, le corps des modules n'est pas un corps de définition, il n'existe pas de famille de Hurwitz sur $\mathcal{H}$ (cf. remarque 3.3).

De façon générale, on définit par image réciproque une flèche de spécialisation

$$\text{Sp}_h : H^2(\mathcal{H}_{\text{ét}}, \mathcal{L}) \longrightarrow H^2(k(h)_{\text{ét}}, \mathcal{L}(\mathcal{G}(f)))$$

où $k(h)$ est le corps résiduel en h , i.e., le corps des modules du $[G]$ -revêtement correspondant.

- Une question naturelle est de déterminer le noyau du morphisme $(\prod_{h \in \mathcal{H}} \text{Sp}_h)$.

- En particulier, existe-t-il une famille sur l'espace de Hurwitz si tous les revêtements correspondant aux points de $\mathcal{H}(\bar{k})$ sont définis sur leur corps des modules?

- Plus précisément, s'il n'existe pas de famille au-dessus de $\mathcal{H}$, quelle est la grosseur du sous-ensemble des points $h \in \mathcal{H}(\bar{k})$ correspondant à des $[G]$ -revêtements non définis sur leur corps des modules?

Remerciements. — Nous remercions J.-L. Colliot-Thélène de ses commentaires et notamment de nous avoir signalé un problème dans une première version du théorème 4.7.

BIBLIOGRAPHIE

- [BiFr] R. BIGGERS, M.D. FRIED, Moduli spaces of covers and the Hurwitz monodromy group, *J. reine angew. Math.*, 335 (1982), 87–121.
- [Bir] J.S. BIRMAN, Braids, links, and mapping class groups, *Annals of Math. Studies*, Princeton University Press, 82 (1975).
- [Ch] A. CHAMBERT-LOIR, Sur le corps de définition des revêtements, *manuscrit* (1996).
- [CoHa] K. COOMBES, D. HARBATER, Hurwitz families and arithmetic Galois groups, *Duke Math. J.*, 52 (1985), 821–839.
- [Cu] C.W. CURTIS, Groups with (B, N) -pairs, *Seminar of Algebraic groups and Related Finite Groups*, Lecture Note 131 (1970).
- [De] P. DÈBES, Arithmétique et espaces de modules de revêtements, in *Number Theory in Progress*, Proceedings of the Number Theory conference in Zakopane, K. Gyory, H. Iwaniec and J. Urbanowicz ed., Walter de Gruyter, 1999, 75–102.
- [DeDo1] P. DÈBES, J.-C. DOUAI, Algebraic covers : field of moduli versus field of definition, *Annales Sci. École Normale Supérieure*, 30 (1997), 303–338.
- [DeDo2] P. DÈBES, J.-C. DOUAI, Gerbes and Covers, *Comm. in Algebra*, 27/2 (1999), 577–594.
- [DeFr] P. DÈBES, M. FRIED, Arithmetic variation of fibers in algebraic families of curves. Part 1 : Criteria for existence of rational points, *J. reine angew. Math.*, 409 (1990), 106–137.
- [Do] J.-C. DOUAI, 2-Cohomologie galoisienne des groupes semi-simples, *thèse*, Université de Lille (1976).
- [Em] M. EMSALEM, Familles algébriques de revêtements de P^1 , *Bull. Soc. Math. France*, 123 (1995), 47–85.
- [Fr] M. FRIED, Fields of definition of function fields and Hurwitz families, *Groups as Galois groups*, *Comm. in Alg.*, 1 (1977), 17–82.
- [FrVo] M. FRIED, H. VÖLKLEIN, The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces, *Math. Ann.*, 290 (1991), 771–800.
- [Fu] W. FULTON, Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves, *Ann. Math.*, series 2, 90 (1969), 543–573.
- [Gi] J. GIRAUD, Cohomologie non abélienne, *Grundlehren Math. Wiss.* 179, Springer-Verlag (1971).
- [Gr1] A. GROTHENDIECK, Technique de descente et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. 1. Descente par morphisme fidèlement plats, *Séminaire Bourbaki*, déc. 1959, 190.
- [Gr2] A. GROTHENDIECK, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, *SGA 2*, *Advanced Studies in Pure Math.*, Masson et North Holland (1968).
- [Mi] J.S. MILNE, *Étale Cohomology*, Princeton University Press, 1980.
- [SGA1] A. GROTHENDIECK et al., Revêtements étales et groupe fondamental, *Séminaire de Géométrie algébrique 1960/61*, *Lecture Notes in Math.*, 224 (1971).

- [Sp] T.A. SPRINGER, Non abelian H^2 in Galois cohomology, in Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., 9 (1966), 164–182.
- [We] S. WEWERS, Construction of Hurwitz spaces, Thesis (1998).

Manuscrit reçu le 10 juillet 1998,
accepté le 27 juin 1999.

P. DÈBES & J.-C. DOUAI & M. EMSALEM,
Université Lille 1
Mathématiques
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France).
pde@gat.univ-lille1.fr
douai@gat.univ-lille1.fr
emsaalem@gat.univ-lille1.fr