Annales de l'institut Fourier

Mohammed Ably

Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur une courbe elliptique de type *CM*

Annales de l'institut Fourier, tome 50, nº 1 (2000), p. 1-33

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
50, 1 (2000), 1–33

FORMES LINÉAIRES DE LOGARITHMES DE POINTS ALGÉBRIQUES SUR UNE COURBE ELLIPTIQUE DE TYPE CM

par Mohammed ABLY

1. Introduction.

La méthode de A. Baker (cf. [B] et [BWü]) sur l'indépendance linéaire de logarithmes algébriques sur un corps de nombres est à la base de nombreux travaux voire d'une théorie dite théorie des formes linéaires de logarithmes.

Cette méthode a été développée par D. Masser [M1] pour l'indépendance linéaire de logarithmes de points algébriques sur des courbes elliptiques de type CM, par J. Coates et S. Lang [CL] pour les variétés abéliennes de type CM et ensuite par G. Wüstholz [Wü] qui a obtenu dans le cadre général des groupes algébriques commutatifs le résultat qualitatif suivant : soient G un groupe algébrique commutatif connexe défini sur le corps des nombres algébriques $\bar{\mathbf{Q}}$, $T_G(\mathbf{C})$ l'espace tangent à l'origine de $G(\mathbf{C})$, W un hyperplan défini sur $\bar{\mathbf{Q}}$ de $T_G(\mathbf{C})$ et u un point de $T_G(\mathbf{C})$ tel que son image, par l'application exponentielle de G, $\exp_G(u)$ appartienne à $G(\bar{\mathbf{Q}})$. Alors, si W ne contient aucun sous-espace de la forme $T_{G'}(\mathbf{C})$ avec G' un sous-groupe algébrique de G, u n'appartient pas à W.

En utilisant le lemme de zéro général de [P] et une combinaison originale des méthodes de Baker et de Gel'fond, P. Philippon et M. Waldschmidt

Mots-clés : Forme linéaire de logarithmes – Courbe elliptique – Approximation diophantienne.
Classification math. : 11J – 11G.

[PW1] ont amélioré et rendu effectif le résultat de G. Wüstholz; sous les hypothèses de celui-ci, ils obtiennent l'inégalité

$$\mathrm{dist}(u, W) \geq \exp(-c(\log B)^{\dim G+1})$$

où $\log B \geq 1$ est un majorant de la hauteur logarithmique de Weil d'une forme définissant W et c une constante effective indépendante de B.

Par la méthode de P. Philippon et M. Waldschmidt mais en modifiant l'hyperplan W et le point u ce qui revient à étudier le problème dans le cadre du groupe $\mathbf{G}_\mathbf{a}^2 \times G$, N. Hirata [Hi] a amélioré nettement le résultat précédent en démontrant l'estimation

$$\mathrm{dist}(u, W) \geq \exp(-c(\log B)(\log\log B)^{\dim G+1}).$$

Signalons que G. Diaz [Di] a traité le cas particulier d'un produit d'une courbe elliptique par un facteur $\mathbf{G}_\mathbf{a}$ et que S. David [Da] a obtenu récemment, en utilisant la méthode de N. Hirata, un résultat totalement explicite dans le cas où G est un produit de courbes elliptiques.

Dans ce texte nous démontrons dans le cas où G est une puissance d'une courbe elliptique de type CM que

$$\mathrm{dist}(u, W) \geq \exp(-c \log B).$$

Une telle minoration est optimale, à la constante c près, en B.

La méthode adoptée pour la démonstration de ce résultat est la méthode de N. Hirata, cependant nous modifions le point u, de façon à ce que dans la construction de la fonction auxiliaire habituelle dans ce type de problème, les paramètres L_{-1} et L_0 correspondant aux facteurs $\mathbf{G}_\mathbf{a}$ introduits n'aient pas le même statut. Ainsi l'un des paramètres disons L_{-1} étant amené à "porter" le poids des dérivations peut être choisi bien inférieur à L_0. Le second argument qui permet cette amélioration est l'utilisation dans cette construction des polynômes d'interpolation [cf. AM] sur l'anneau des endomorphismes de la courbe elliptique considérée.

Le plan de ce texte est le suivant : après l'introduction au §1, nous énonçons dans le §2 les résultats principaux, au §3 sont rassemblés les lemmes auxiliaires, au §4 on modifie l'hyperplan W et le point u, au §5 on choisit le sous-groupe privilégié et les paramètres tandis que le §6 est consacré à la partie essentielle de la démonstration de transcendance.

Je remercie vivement M. Waldschmidt pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail ainsi que E. Caudron pour sa lecture minutieuse et ses nombreuses remarques sur une première version de ce texte.

2. Notations et résultats.

Soit $\mathcal{E}$ une courbe elliptique, à multiplication complexe d'invariants g_2, g_3 algébriques. On note $\wp$ la fonction de Weierstrass associée,

$$\Lambda = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$$

le réseau des périodes de $\wp$, $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ $(\operatorname{Im}\tau > 0)$. $\mathcal{E}$ étant à multiplication complexe, τ est quadratique imaginaire et $\mathbf{Q}(\tau)$ est le corps des multiplications de $\mathcal{E}$. Notons $\mathbf{k} = \mathbf{Q}(\tau)$, $\mathcal{O}_{\mathbf{k}}$ l'anneau des entiers et $\mathbf{d}$ le discriminant de $\mathbf{k}$. On identifie l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{E}$ à un sous-anneau $\mathcal{O}$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{k}}$. Soit $T_{\mathcal{E}}(\mathbf{C})$ l'espace tangent de $\mathcal{E}(\mathbf{C})$ à l'origine, en identifiant $T_{\mathcal{E}}(\mathbf{C})$ à $\mathbf{C}$, l'application exponentielle de $\mathcal{E}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \exp_{\mathcal{E}}\ &: \mathbf{C} \to \mathbf{P}_2(\mathbf{C}) \\ & z \to \begin{cases} (1 : \wp(z) : \wp'(z)) & \text{si } z \notin \Lambda \\ (0 : 0 : 1) & \text{si } z \in \Lambda. \end{cases} \end{aligned}$$

On note h la hauteur logarithmique absolue de Weil, h est définie sur $\mathbf{P}^N(\overline{\mathbf{Q}})$ de la façon suivante : pour $P = (x_0 : \ldots : x_N) \in \mathbf{P}^N(K)$, où K est un corps de nombres de degré n sur $\mathbf{Q}$,

$$h(P) = \frac{1}{n} \sum_v n_v \log \max(|x_0|_v, \ldots, |x_N|_v)$$

où v décrit l'ensemble des places de K, normalisées de telle sorte qu'on ait la formule du produit : pour tout $x \in K$, $x \neq 0$, $\prod_v |x|_v^{n_v} = 1$; n_v étant le degré local en v.

Pour une famille de nombres algébriques $\alpha_i (1 \leq i \leq m)$ $\big($resp. une famille de polynômes $Q_i (1 \leq i \leq m)$ à coefficients algébriques $\big)$ on désigne par $h(\alpha_i, 1 \leq i \leq m)$ $\big($resp. $h(Q_i, 1 \leq i \leq m)\big)$ la hauteur du point projectif $(1 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_m)$ $\big($resp. la hauteur du point projectif dont les coordonnées sont constituées par tous les coefficients des polynômes Q_i auxquels on adjoint $1\big)$.

Soit K un corps de nombres contenant g_2, g_3 et τ, que l'on considère plongé dans $\mathbf{C}$, soient $u_1, \ldots, u_k$ des nombres complexes non nuls tels que ou bien $u_i \in \Lambda$ ou bien $\wp(u_i) \in K$ $(i = 1, \ldots, k)$, $\mathcal{L}'(\mathbf{z}) = \beta_0' z_0 + \ldots + \beta_k' z_k$ une forme linéaire non nulle de $\mathbf{C}^{k+1}$, à coefficients dans K. Notons D le degré de K sur $\mathbf{Q}$, $\mathbf{u}' = (1, u_1, \ldots, u_k)$ et $\gamma_i = \exp_{\mathcal{E}}(u_i)$.

THÉORÈME 2.1. — *Soient $B, V_1, \ldots, V_k, E$ des nombres réels $\geq e$, vérifiant*

$$\log B \geq \max_{1 \leq i \leq k} (h(\beta_i'), e) \tag{2.1}$$

$$\log V_i \geq \max\Big(h(\gamma_i), \frac{|u_i|^2}{D}, \frac{1}{D}\Big)\ (i=1,\ldots,k) \tag{2.2}$$

$$e \leq E \leq \min_{1\leq i\leq k}\Big(\frac{e(D\log V_i)^{1/2}}{|u_i|}\Big). \tag{2.3}$$

Alors, en notant $V = \max_{1\leq i\leq k} V_i$ *:*

– ou bien il existe un sous-groupe algébrique connexe de ${\mathbf{G_a}}^2 \times \mathcal{E}^k$ *dont l'espace tangent à l'origine est contenu dans* $\ker \mathcal{L}'$ *et contient* $\mathbf{u}'$ *;*

– ou bien, on a

$$\log|\mathcal{L}'(\mathbf{u}')| \geq -CD^{k+2}\log(BD\log V)\log(DE)\Big(\prod_{i=1}^{k}\log V_i\Big)(\log E)^{-k} \tag{2.4}$$

où C *est un nombre réel* > 0 *ne dépendant que de* k, ω_1, ω_2.

Remarque 1. — Si $\beta'_1, \ldots, \beta'_k$ sont tous nuls, alors $\beta'_0 \neq 0$ et la minoration (2.4) du théorème est immédiate d'après l'inégalité de Liouville.

Remarque 2. — Rappelons que si $\mathcal{L}'(\mathbf{u}') \neq 0$, la meilleure estimation antérieure en privilégiant la dépendance en B est

$$\log|\mathcal{L}'(\mathbf{u}')| \geq -c\log B\log\log B,$$

où $c = c\big(k, \omega_1, \omega_2, D, V_i, E\big)$.

Ce résultat est dû à P. Philippon et M. Waldschmidt (cf. [PW2], théorème 1.2). L'estimation (2.4) améliore donc essentiellement la dépendance en B; elle est optimale, à constante près, en B.

Remarque 3. — Le théorème 2.1 permet d'obtenir de nouvelles mesures de transcendance liées à des valeurs de fonction elliptique de type CM. Comme exemple, on en déduit le résultat suivant sur une mesure de transcendance d'un quotient de points algébriques de $\mathcal{E}$ (u est appelé point algébrique de $\mathcal{E}$ si u est un pôle de $\wp$ ou si $\wp(u)$ est algébrique).

Avec les notations précédentes, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.2. — *Soient* $\mathcal{E}$ *une courbe elliptique de type CM définie sur* $\bar{\mathbf{Q}}$, $u_1, u_2 \neq 0$ *des points algébriques de* $\mathcal{E}$ *tels que* $\frac{u_1}{u_2} \notin \mathbf{Q}(\tau)$. *Alors, il existe* $c = c(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2) > 0$ *tel que, pour tout polynôme non nul* P *de* $\mathbf{Z}[X]$ *de degré* $\leq D$ *et de hauteur* $h(P) \leq \log H$, *on ait*

$$\Big|P\Big(\frac{u_1}{u_2}\Big)\Big| \geq \exp\Big(-cD^3\frac{(\log H + D\log eD)}{\log eD}\Big).$$

3. Lemmes auxiliaires.

Polynômes d'interpolation.

Nous utiliserons pour la construction de la fonction auxiliaire les polynômes d'interpolation sur un ordre d'un corps quadratique imaginaire (cf. [AM]) en l'occurrence $\mathcal{O}_{\mathbf{k}}$. Ces polynômes sont définis de la manière suivante : pour un nombre réel $R \geq 1$ et ℓ un entier> 0,

$$\Delta_R^\ell(X) := \prod_{\substack{x\in\mathcal{O}_{\mathbf{k}}\setminus\{0\}\\ |x|\leq R}} \Big(\frac{X+x}{x}\Big)^\ell.$$

Le lemme suivant porte sur certaines estimations analytiques et arithmétiques vérifiées par ces polynômes.

LEMME 3.1.

i) *Soient R un nombre réel > 1, t, L deux entiers positifs, z un nombre complexe, on a*

$$\log\Big|\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dz^t}\Delta_R^L(z)\Big| \leq c_2LR^2\Big(1+\log\Big(\frac{|z|}{R}+1\Big)\Big),$$

où c_2 est un nombre réel > 0 ne dépendant que de $\mathbf{d}$.

ii)

$$h\Big(\frac{1}{\tau!}\frac{d^\tau}{dz^\tau}\Delta_\rho^l(y), 0\leq\tau\leq t,\quad 0\leq\ell\leq L,\quad \rho\leq R, y\in\mathcal{O}_{\mathbf{k}}\ ;|y|\leq S\Big)$$
$$\leq c_3LR^2\Big(1+\log\Big(\frac{1+t}{L}+1\Big)+\log\Big(\frac{S}{R}+1\Big)\Big),$$

où c_3 est un nombre réel > 0 ne dépendant que de $\mathbf{d}$.

iii) *Soient P un polynôme non nul à coefficients complexes de degré n, $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ $(n+1)$ nombres complexes deux à deux distincts alors les polynômes $P(z+\lambda_0), \ldots, P(z+\lambda_n)$ sont linéairement indépendants sur* $\mathbf{C}$.

iv) *Soient R un nombre réel > 1 et L un entier > 0, les polynômes 1, $\Delta_R^\ell(z+\lambda)$ $(\lambda\in\mathcal{O}_{\mathbf{k}}\ ;\ |\lambda| < R,\ \ell = 1, \ldots, L)$ sont linéairement indépendants sur* $\mathbf{C}$.

Preuve. — Les estimations i) et ii) se déduisent immédiatement du théorème 1.1 de [AM] et de la majoration

$$\deg \Delta_R^\ell \leq c_1\ell R^2,$$

où $c_1 = \frac{2(\pi+2)}{\sqrt{|\mathbf{d}|}}$ (cf. remarque 2.1 de [AM]).

Montrons iii). Supposons qu'il existe des nombres complexes a_{λ_i} tels que : $\sum_{i=0}^{n} a_{\lambda_i} P(z+\lambda_i) = 0$. Alors, on a : $\sum_{i=0}^{n} a_{\lambda_i} \big(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\lambda_i) z^j\big) = 0$ et par conséquent $\sum_{i=0}^{n} a_{\lambda_i} P^{(j)}(\lambda_i) = 0$ $(j = 0, \ldots, n)$. P étant non nul, on vérifie que la matrice $\big(P^{(j)}(\lambda_i)\big)_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le n}}$ est inversible, par suite les coefficients a_{λ_i} sont tous nuls.

Enfin la propriété iv) résulte d'une récurrence sur L et de la propriété iii).

Désignons par G le groupe algébrique (défini sur K) ${\mathbf{G_a}}^2 \times \mathcal{E}^k$ que l'on considère K-plongé dans $\mathbf{A}_1^2 \times \mathbf{P}_2^k$. En identifiant l'espace tangent à l'origine $T_G(\mathbf{C})$ de G à $\mathbf{C}^{k+2}$, on obtient un plongement analytique Φ représentant $\exp_G$ l'exponentielle de G,

$$\begin{aligned}\Phi\ :\ &\mathbf{C}^{k+2} \longrightarrow \mathbf{A}_1^2(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_2^k(\mathbf{C})\\ &(z_{-1}, z_0, \ldots, z_k) \longrightarrow \big(z_{-1}, z_0, \exp_{\mathcal{E}}(z_1), \ldots, \exp_{\mathcal{E}}(z_k)\big)\end{aligned}$$

où $\exp_{\mathcal{E}}(z) = \big(\sigma^3(z) : \sigma^3(z)\wp(z) : \sigma^3(z)\wp'(z)\big)$, σ étant la fonction sigma de Weierstrass.

Les fonctions coordonnées de $\exp_{\mathcal{E}}$ sont des fonctions entières d'ordre ≤ 2, plus précisément, il existe $c_4 = c_4(\omega_1, \omega_2) > 0$ tel que

$$\max\big(|\sigma^3(z)|, |\sigma^3(z)\wp(z)|, |\sigma^3(z)\wp'(z)|\big) \le e^{c_4|z|^2}. \tag{3.1}$$

D'autre part, il existe $c_5 = c_5(\omega_1, \omega_2) > 0$ tel que

$$\begin{aligned}&\text{pour tout}\ \ z \in \Lambda,\ \ |\sigma^3(z)| \ge e^{-c_5(|z|+1)^2}\ \ \text{et}\\ &\text{pour tout}\ \ z \notin \Lambda, |\sigma^3(z)\wp'(z)| \ge e^{-c_5(|z|+1)^2}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Ces inégalités classiques se déduisent par exemple de la proposition 3.1 de [Da].

Pour un uplet $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbf{Z}^k$, $0 \le n_i$, on note $|\mathbf{n}| = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Soient $L_{-1}, L_0'', L_1, \ldots, L_k$ des entiers ≥ 1 et L_0' un nombre réel ≥ 1. Nous allons considérer des polynômes P de $\mathbf{C}\ [\mathbf{A}_1^2 \times \mathbf{P}_2^k]$ de la forme

$$P(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{n}} p_{\mathbf{n}} X_{-1}^{n_{-1}} \Delta_{L_0'}^{n_0''}(X_0 + n_0')\mathbf{X}_1^{\mathbf{n}_1} \ldots \mathbf{X}_k^{\mathbf{n}_k}, \tag{3.3}$$

où la somme porte sur tous les uplets $\mathbf{n} = (n_{-1},\ n_0', n_0'', \mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k)$ tels que : $n_{-1} \in \mathbf{Z}$; $0 \le n_{-1} < L_{-1}$, $n_0' \in \mathcal{O}_{\mathbf{k}} \setminus \{0\}$; $|n_0'| \le L_0'$, $n_0'' \in \mathbf{Z}$; $0 < n_0'' \le L_0''$, $\mathbf{n}_j = \big((n_{j,i}),\ i = 1,2,3\big) \in \mathbf{Z}^3$, $0 \le n_{j,i}$; $|\mathbf{n}_j| = L_j$, $(j = 1, \ldots, k)$. On pose $L_0 = L_0'' \deg \Delta_{L_0'}$; et on dira qu'un tel polynôme est de degrés $\le (L_{-1}, L_0, L_1, \ldots, L_k)$.

Le lemme suivant donne une majoration des valeurs en un point des dérivées de la fonction $f = P \circ \Phi$. Notons $|\cdot|_1$ la norme euclidienne sur $\mathbf{C}^{k+2}$ et pour $\mathbf{x} = (x_{-1}, \dots, x_k) \in \mathbf{C}^{k+2}$, $D_{\mathbf{x}} f = \sum_{i=-1}^{k} x_i \frac{\partial f}{\partial z_i}$.

LEMME 3.2. — *Soient H un nombre réel $\geq e$, P un polynôme de $\mathbf{C}[\mathbf{A}_1^2 \times \mathbf{P}_2^k]$ de la forme (3.3), de degrés $\leq (L_{-1}, L_0, \dots, L_k)$ tel que $\max_{\mathbf{n}} |p_{\mathbf{n}}| \leq H$, m un entier ≥ 1, $\mathbf{x}_i = (x_{i,-1}, \dots, x_{i,k})$ $(1 \leq i \leq m)$ et $\mathbf{v} = (v_{-1}, \dots, v_k)$ des points de $\mathbf{C}^{k+2}$. Notons $\varepsilon = \max(1, |x_{i,j}|, 1 \leq i \leq m, -1 \leq j \leq k)$, pour $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbf{Z}^m$, $t_1, \dots, t_m \geq 0$, $D_{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}} = D_{\mathbf{x}_1}^{t_1} \circ \dots \circ D_{\mathbf{x}_m}^{t_m}$ et $f = P \circ \Phi$. Alors, pour $|\mathbf{t}| \leq T$, on a*

$$\log |D_{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}} f(\mathbf{v})| \leq T \log(k+2)\varepsilon T + L_{-1} \log(|v_{-1}| + 1) + c_6 L_0 \Big(1 + \log\Big(\frac{|v_0|}{L_0'} + 2\Big)\Big) + c_7 \sum_{i=1}^{k} L_i (|v_i| + 1)^2 + \log H.$$

Preuve. — On reprend la preuve du lemme 3.1 (cf. [PW1]; on a

$$|D_{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}} f(\mathbf{v})| \leq (k+2)^T \varepsilon^T \max_{|\mathbf{j}|=T} \Big\{ \Big(\frac{\partial}{\partial z_{-1}}\Big)^{j_{-1}} \circ \dots \circ \Big(\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)^{j_k} f(\mathbf{v}) \Big\}$$

et en posant $F(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z} + \mathbf{v})$, les inégalités de Cauchy entraînent la majoration

$$\Big| \Big(\frac{\partial}{\partial z_{-1}}\Big)^{j_{-1}} \circ \dots \circ \Big(\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)^{j_k} f(\mathbf{v}) \Big| \leq T! \sup_{|\mathbf{z}|_1 \leq 1} |F(\mathbf{z})|.$$

Ensuite, on utilise l'estimation i) du lemme 3.1 et l'inégalité (3.1) pour conclure.

L'objet du lemme suivant est une formule d'interpolation pour une fonction entière sur $\mathbf{C}$ prenant des “petites” valeurs en des points d'un réseau de $\mathbf{C}$ de type CM, en l'occurrence $\mathcal{O}$. Si f est une fonction entière sur $\mathbf{C}$ et $R > 0$, on note $|f|_R = \sup_{|z| \leq R} |f(z)|$.

LEMME 3.3. — *Soient f une fonction entière sur $\mathbf{C}$, T_1 un entier > 0, R, r, S_1 des nombres réels > 0 vérifiant $R > 3r$ et $r \geq S_1$. Alors*

$$|f|_r \leq |f|_R \Big(\frac{R}{3r}\Big)^{-c_8 T_1 S_1^2} + \Big(c_9 \frac{R}{S_1}\Big)^{c_9 T_1 S_1^2} \times \max \Big\{ \frac{f^{(\sigma)}(s)}{\sigma!}, \quad 0 \leq \sigma < T_1, \quad s \in \mathcal{O}(S_1) \Big\}$$

où c_8 et c_9 sont des nombres réels > 0 ne dépendant que de $\mathcal{O}$.

Preuve. — D'après le lemme d'interpolation polynomiale de D. Masser (cf. [M1], corollaire B), il existe un polynôme P de $\mathbf{C}[X]$ vérifiant

$P^{(\sigma)}(s) = f^{(\sigma)}(s)$ pour tout $s \in \mathcal{O}(S_1)$, $0 \leq \sigma < T_1$ et pour tout $r \geq S_1$

$$|P|_r \leq \Big(c_9 \frac{r}{S_1}\Big)^{c_9 T_1 S_1^2} \max\Big\{\frac{f^{(\sigma)}}{\sigma!}(s),\ 0 \leq \sigma < T_1,\ s \in \mathcal{O}(S_1)\Big\}.$$

Pour achever la preuve, on applique le lemme de Schwarz 7.13 de [W1] à la fonction $f - P$ qui s'annule ainsi que ses dérivées à l'ordre T_1 sur $\mathcal{O}(S_1)$ qui est de cardinal supérieur à $c_8 S_1^2$.

Nous utiliserons pour la construction de la fonction auxiliaire le lemme de Thue-Siegel (cf. Lemme 6.1 de [PW1]) suivant :

LEMME 3.4. — *Soit $(u_{i,j})_{1\leq i\leq \nu, 1\leq j\leq \mu}$ une matrice de nombres complexes, de rang $\leq \rho$. Soient δ, m, p des nombres réels positifs tels que*

$$(2\mu e^{\delta+m+p} + 1)^{2\rho} \leq e^{\nu\delta} \quad et \quad \max_{1\leq j\leq\mu} \sum_{i=1}^{\nu} |u_{i,j}| \leq e^m.$$

Alors, il existe $(a_1, \ldots, a_\nu) \in \mathbf{Z}^\nu$ tel que

$$0 < \max_{1\leq i\leq\nu} |a_i| \leq e^\delta \quad et \quad \max_{1\leq j\leq\mu} \Big|\sum_{i=1}^{\nu} a_i u_{i,j}\Big| \leq e^{-p}.$$

Dans les lemmes qui suivent $\mathcal{E}$ désigne une courbe elliptique d'invariants algébriques g_2, g_3, $\wp$ la fonction de Weierstrass et $\mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ ($\mathrm{Im}\,(\frac{w_2}{w_1}) > 0$) le réseau associés, $\tau = \mathrm{Im}(\frac{w_2}{w_1})$.

Formules de translations sur une courbe elliptique.

LEMME 3.5. — *Soient $\mathbf{L}$ un corps de nombres contenant g_2, g_3, $P_i(X,Y)$ $(1 \leq i \leq N)$ des polynômes de $\mathbf{L}[X,Y]$ de degrés majorés par L et u un nombre complexe tel que $\wp(u) \in \mathbf{L}$. Alors, il existe une famille de polynômes R_i $(1 \leq i \leq N)$ de $\mathbf{L}[X,Y]$ telle que*

$$P_i(\wp(z+u), \wp'(z+u)) = \frac{R_i\big(\wp(z), \wp'(z)\big)}{(\wp(z) - \wp(u))^{3L}}, \quad \deg R_i \leq 2L, \quad (i = 1, \ldots, N)$$

et

$$h\big(R_i, 1 \leq i \leq N\big) \leq h\big(P_i, 1 \leq i \leq N\big) + L(c_{10} + 2h\big(\wp(u), \wp'(u)\big).$$

De plus, on a

$$\big(\wp(z) - \wp(u)\big)^{3L} = Q\big(\wp(z), \wp'(z)\big),$$

où $Q(X,Y)$ *est un polynôme de* $\mathbf{L}[X,Y]$ *de degré* $\leq 2L$*, de hauteur* $h(Q) \leq L(c_{10}+2h(\wp(u),\wp'(u))$, c_{10} *étant un nombre réel* > 0 *ne dépendant que de* ω_1, ω_2.

Preuve. — Il suffit de reprendre la proposition 8.2 de [Da] en considérant une famille de polynômes $P_i, (1 \leq i \leq N)$ au lieu d'un seul.

Formule de dérivations sur une courbe elliptique.

LEMME 3.6. — *Soient* $\mathbf{L}$ *un corps de nombres contenant* g_2, g_3, $P_i(X,Y)(1 \leq i \leq N)$ *des polynômes de* $\mathbf{L}[X,Y]$ *de degrés majorés par* L *et* T *un nombre entier* ≥ 1*. Alors, pour tout couple d'entiers* (i,t), $1 \leq i \leq N$, $0 \leq t \leq T$*, il existe un polynôme* $A_{i,t}(X,Y)$ *de* $\mathbf{L}[X,Y]$ *tel que*

$$\frac{d^t}{dz^t} P_i\big(\wp(z),\wp'(z)\big) = A_{i,t}\big(\wp(z),\wp'(z)\big), \deg A_{i,t} \leq L+t.$$

De plus, la famille de polynômes $A_{i,t}$ *vérifie*

$$h\big(A_{i,t}, 1 \leq i \leq N, 0 \leq t \leq T\big) \leq h\big(P_i, 1 \leq i \leq N\big) + c_{11} T \log(L+T).$$

Sous les mêmes hypothèses, il existe une famille de polynômes $G_{i,t}(X,Y)$*de* $\mathbf{L}[X,Y]$ *telle que*

$$\frac{d^t}{dz^t} P_i\Big(\frac{1}{\wp'(z)}, \frac{\wp(z)}{\wp'(z)}\Big) = G_{i,t}\Big(\frac{1}{\wp'(z)}, \frac{\wp(z)}{\wp'(z)}\Big), \quad \deg G_{i,t} \leq L+t$$

et

$$h\big(G_{i,t}, 1 \leq i \leq N,\ 0 \leq t \leq T\big) \leq h\big(P_i, 1 \leq i \leq N\big) + c_{12} T \log(L+T),$$

où c_{11} *et* c_{12} *sont des nombres réels* > 0 *ne dépendant que de* ω_1, ω_2.

Preuve. — On reprend la preuve de la proposition 8.1 de [Da] en considérant une famille de polynômes au lieu d'un seul.

Formule de multiplication sur une courbe elliptique de type CM.

LEMME 3.7. — *On suppose que* $\mathcal{E}$ *est à multiplications complexes. Soient* $\mathcal{O}$ *l'anneau des endomorphismes de* $\mathcal{E}$ *et* $\mathbf{L} = \mathbf{Q}(g_2, g_3, \tau)$*. Alors, pour tout* $s \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ *tel que :* $|s| \leq S$*, il existe* $A_1(X)$*,* $A_2(X,Y)$ *et* $Q(X)$

des polynômes à coefficients entiers dans $\mathbf{L}$ *de degré* $\leq c_{13}S^2$ *et de hauteur* $\leq c_{14}S^2$ *tels que*

$$\wp(s\cdot z)=\frac{A_1(\wp(z))}{Q(\wp(z))}\quad et\quad \wp'(s\cdot z)=\frac{A_2(\wp(z),\wp'(z))}{Q(\wp(z))}$$

où c_{13} *et* c_{14} *sont des nombres réels* >0 *ne dépendant que de* ω_1,ω_2.

Preuve. — Cf. lemme 6.3 de [M1] pour l'expression de $\wp(sz)$ en tant que fraction rationnelle en $\wp(z)$. On dérive cette expression pour obtenir $\wp'(sz)$ et ensuite on réduit au même dénominateur.

4. Modification de la forme linéaire et du point.

Rappelons la forme linéaire $\mathcal{L}'(\mathbf{z})=\beta_0'z_0+\ldots+\beta_k'z_k$ et le point $\mathbf{u}'=(1,u_1,\ldots,u_k)$ considérés dans le théorème. On suppose que $\beta_1',\ldots,\beta_k'$ sont non tous nuls car sinon le théorème est immédiat (cf. Remarque 1). Nous allons modifier cette forme et ce point de la façon suivante :

1er cas : $\beta_0'\neq 0$; c'est le cas dit non homogène. On choisit m, $(0\leq m\leq k)$ tel que $|\beta_m'|=\max_{0\leq i\leq k}|\beta_i'|$, on pose $\beta_i=\frac{\beta_i'}{\beta_m'}$, $(i=0,\ldots,k)$ et on considère la nouvelle forme linéaire $\mathcal{L}(\mathbf{z})=-z_{-1}+\beta_0z_0+\ldots+\beta_kz_k$ et le nouveau point $\mathbf{u}=(0,1,u_1,\ldots,u_k)$ de $\mathbf{C}^{k+2}$.

2ème cas : $\beta_0'=0$; c'est le cas dit homogène. On choisit m, $(1\leq m\leq k)$ tel que $|\beta_m'|=\max_{1\leq i\leq k}|\beta_i'|$, on pose $\beta_i=\frac{\beta_i'}{\beta_m'}$, $(i=1,\ldots,k)$, $\beta_0=1$ et on considère la nouvelle forme linéaire $\mathcal{L}(\mathbf{z})=-z_{-1}+\beta_0z_0+\beta_1z_1+\ldots+\beta_kz_k$ et le nouveau point $\mathbf{u}=(1,1,u_1,\ldots,u_k)$. Le choix de ce nouveau point est crucial pour la démonstration du théorème. Notons que N. Hirata (cf. [Hi]) avait considéré le point $\mathbf{u}=(0,0,u_1,\ldots,u_k)$). Remarquons que les coefficients de la forme $\mathcal{L}$ sont de modules ≤ 1, $\beta_1,\ldots,\beta_k$ ne sont pas tous nuls et $h(\beta_i)\leq 2\log B$ $(i=0,\ldots,k)$. Dans les deux cas, on a $\mathcal{L}(\mathbf{u})=\frac{\mathcal{L}'(\mathbf{u}')}{\beta_m'}$. Alors, $\mathcal{L}(\mathbf{u})\neq 0$ est équivalent à $\mathcal{L}'(\mathbf{u}')\neq 0$. D'après l'inégalité de Liouville, on a $\log|\beta_m'|\geq -Dh(\beta_m')$, donc si $\mathcal{L}(\mathbf{u})\neq 0$ on a $\log|\mathcal{L}'(\mathbf{u}')|\geq\log|\mathcal{L}(\mathbf{u})|-Dh(\beta_m')\geq\log|\mathcal{L}(\mathbf{u})|-D\log B$.

Alors pour minorer $|\mathcal{L}'(\mathbf{u}')|$, il suffit de minorer $|\mathcal{L}(\mathbf{u})|$; dans la suite l'étude portera sur cette nouvelle forme $\mathcal{L}$ et ce nouveau point $\mathbf{u}$.

On choisit dans les deux cas comme base de $W\ :=\ker\mathcal{L}$, la base $(\mathbf{e}_0,\ldots,\mathbf{e}_k)$ définie par $\mathbf{e}_i=(\beta_i,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, où 1 est la $(i+1)^{\text{ième}}$ coordonnée.

On considère la projection de $\mathbf{u}$ sur W définie par

$$\mathbf{w} = (\mathcal{L}(\mathbf{u}), 1, u_1, \ldots, u_k)$$

dans le cas non homogène (resp. $\mathbf{w} = (1 + \mathcal{L}(\mathbf{u}), 1, u_1, \ldots, u_k)$ dans le cas homogène). On a $|\mathbf{w} - \mathbf{u}|_1 = |\mathcal{L}(\mathbf{u})|$.

5. Choix des paramètres et d'un sous-groupe privilégié.

On plonge le groupe algébrique $\mathbf{G}_\mathbf{a}^2 \times \mathcal{E}^k$ dans l'espace multi-projectif $\mathbf{P} := \mathbf{P}_1^2 \times \mathbf{P}_2^k$. Si V est une sous-variété de $\mathbf{P}$, on désigne par $H(V,\ L_{-1}, L_0, L_1, \ldots, L_k)$ la valeur de la partie homogène de plus grand degré ($= \dim V$) du polynôme de Hilbert-Samuel multi-homogène de V multiplié par $\dim V!$ (cf. [P]). Dans tout le texte $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots$ désignent des nombres réels ne dépendant que de k, ω_1, ω_2 et C_0 un nombre réel assez grand par rapport à tous les c_i. Ces nombres réels c_i, C_0 sont évidemment indépendants des paramètres $D, B, V_1, \ldots, V_k$ et E du théorème. Posons

$$U_0 = C_0^{\frac{5}{2}(k+1)+9}\ D^{k+2} \log(BD \log V) \log(DE) \prod_{i=1}^{k} (\log V_i)(\log E)^{-k}$$

$$S = \left(C_0^7 \frac{D \log(BD \log V) + \log E}{\log E}\right)^{1/2},$$

$$S_0 = \left[\frac{S}{C_0}\right].$$

Soit U un nombre réel > 0, définissons les paramètres

$$L_{-1}^{\#} = \frac{U}{C_0^7 \big(D \log(BD \log V) + \log E\big)},$$

$$L_0^{\#} = \frac{U}{C_0 \big(D \log(1 + D) + \log E\big)},$$

$$L_0' = \left(\min\Big(\frac{1}{c_1} L_0^{\#}, \log(BD \log V) + \frac{\log E}{D}\Big)\right)^{1/2} \quad \text{où } c_1 = 2(\pi + 2)/\sqrt{|\mathbf{d}|},$$

$$L_0'' = \left[\frac{L_0^{\#}}{\deg \Delta_{L_0'}}\right], \qquad L_0 = L_0''\ \deg \Delta_{L_0'},$$

$$L_i^{\#} = \frac{\max(U_0, U)}{DS^2 \log V_i} \quad (i = 1, \ldots, k), \qquad L_i = [L_i^{\#}] \quad (i = -1, 1, \ldots, k),$$

$$T^{\#} = C_0^{5/2} \frac{\max(U_0, U)}{S^2 \log E}, \qquad T = [T^{\#}] \ \text{ et } \ T_0 = \left[\frac{T}{C_0^2}\right],$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière.

Notons $\mathcal{O}(S)=\{s\in\mathcal{O},|s|<S\}$, $\Gamma(S)=\{\Phi(s\mathbf{u}),\ s\in\mathcal{O}(S)\}$.

LEMME 5.1. — *Il existe un nombre réel U ; $0\le U\le U_0$ tel que pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de codimension r' dans G et vérifiant $T_{G'}(\mathbf{C})\subset W$, on ait*

$$(5.1)\quad (T^{\#})^{r'-1}\operatorname{card}\big((\Gamma(S)+G')/G'\big)H(G',L_{-1}^{\#},L_0^{\#},\dots,L_k^{\#})\\ \ge C_0H(G,L_{-1}^{\#},L_0^{\#},\dots,L_k^{\#})$$

et il existe un sous-groupe algébrique connexe $\widetilde{G}$ de codimension $\tilde r$ dans G vérifiant $T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})\subset W$ tel que

$$(5.2)\quad (T^{\#})^{\tilde r-1}\operatorname{card}\big((\Gamma(S)+\widetilde{G})/\widetilde{G}\big)H(\widetilde{G},L_{-1}^{\#},L_0^{\#},\dots,L_k^{\#})\\ =C_0H(G,L_{-1}^{\#},L_0^{\#},\dots,L_k^{\#}).$$

Preuve. — Soit G' un sous-groupe algébrique connexe de $\mathbf{G}_\mathbf{a}^2\times\mathcal{E}^k$ tel que $T_{G'}(\mathbf{C})\subset W$. G' est de la forme $G'_0\times G'_1$ avec G'_0 un sous-groupe algébrique connexe de $\mathbf{G}_\mathbf{a}^2$ et G'_1 un sous-groupe algébrique connexe de $\mathcal{E}^k$. Posons $r'_0=2-\dim G'_0$, $r'_1=k-\dim G'_1, r'=r'_0+r'_1$. Comme $T_{G'}(\mathbf{C})\subset W, G'_0\ne\mathbf{G}_\mathbf{a}^2$ et $r'_0\ne 0$.

Notons $U'=\max(U,U_0)$,

$$A(G')=C_0^{-1}(T^{\#}/U')^{r'-1}\operatorname{card}\big((\Gamma(S)+G')/G'\big)\\ \times\frac{H(G',L_{-1}^{\#}/U,L_0^{\#}/U,L_1^{\#}/U'\dots,L_k^{\#}/U')}{H(G,L_{-1}^{\#}/U,L_0^{\#}/U,L_1^{\#}/U'\dots,L_k^{\#}/U')}$$

et

$$B(G')=A(G')^{1/r'_0}\max\{A(G'),U_0\}^{\frac{r'_0-1}{r'_0}}.$$

$A(G')$ et $B(G')$ ne dépendent pas du paramètre U ; parmi les sous-groupes algébriques connexes G' de G vérifiant $T_{G'}(\mathbf{C})\subset W$ on en choisit un $\widetilde{G}$ tel que $B(\widetilde{G})$ soit minimal et on note encore U le nombre réel $B(\widetilde{G})$. Montrons d'abord que $U\le U_0$. Si $U>U_0$, alors $U'=U$. D'autre part d'après le lemme 3.4 de [P], on a

$$H(G,L_{-1}^{\#}/U,L_0^{\#}/U,L_1^{\#}/U'\dots,L_k^{\#}/U')\\ =(\dim G)!(\deg G)\prod_{i=-1}^{0}(L_i^{\#}/U)\prod_{i=1}^{k}(L_i^{\#}/U')\\ =3^k(k+2)!\prod_{i=-1}^{0}(L_i^{\#}/U)\prod_{i=1}^{k}(L_i^{\#}/U')$$

et $H(\{0\}, L_{-1}^{\#}/U, L_0^{\#}/U, \ldots, L_k^{\#}/U) = 1$, où $\{0\}$ est le groupe nul.

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} A(\{0\}) &\leq \frac{c_1}{3^k(k+2)!} C_0^{\frac{5}{2}(k+1)+7} (S^2 \log E)^{-(k+1)} S^2 (D \log(1+D) + \log E) \\ &\qquad \times \Big(D \log(BD \log V) + \log E \Big) \prod_{i=1}^{k} DS^2 \log V_i \\ &\leq U_0, \end{aligned}$$

d'où $B(\{0\}) \leq A(\{0\})^{\frac{1}{2}} U_0^{\frac{1}{2}} \leq U_0$. Or on a $U \leq B(\{0\})$, donc $U \leq U_0$ et cela contredit l'hypothèse.

Preuve des propriétés (5.1) et (5.2). — Soit G' un sous-groupe de G tel que : $T_{G'}(\mathbf{C}) \subset W$. Par définition $B(G') = \max\Big\{ A(G'), A(G')^{\frac{1}{r_0'}} U_0^{\frac{r_0'-1}{r_0'}} \Big\}$, puisque $\frac{H(G, L_{-1}^{\#}, \ldots, L_k^{\#})}{H(G', L_{-1}^{\#}, \ldots, L_k^{\#})}$ est multi-homogène de degré r_0' en $(L_{-1}^{\#}, L_0^{\#})$ et de degré r_1' en $(L_1^{\#}, \ldots, L_k^{\#}))$, en remplaçant $A(G')$ par sa valeur, on obtient

$$\begin{aligned} &B(G') = \\ &\max\Bigg\{ C_0^{-1} (T^{\#})^{r'-1} \operatorname{card}\Big(\frac{\Gamma(S)+G'}{G'} \Big) \frac{H(G', L_{-1}^{\#}, L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#})}{H(G, L_{-1}^{\#}, L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#})} \Big(\frac{U_0}{U} \Big)^{1-r_0'} U, \\ &\quad \Big(C_0^{-1} (T^{\#})^{r'-1} \operatorname{card}\Big(\frac{\Gamma(S)+G'}{G'} \Big) \frac{H(G', L_{-1}^{\#}, L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#})}{H(G, L_{-1}^{\#}, L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#})} \Big)^{1/r_0'} U \Bigg\}. \end{aligned}$$

Comme $U \leq B(G'), U \leq U_0$ et $r_0' \geq 1$, on en déduit la propriété (5.1).

Pour démontrer (5.2), on remarque que $A(\widetilde{G}) \leq B(\widetilde{G}) \leq B(\{0\}) \leq U_0$, d'où

$$\begin{aligned} B(\widetilde{G}) &= A(\widetilde{G})^{\frac{1}{\tilde{r}_0}} U_0^{\frac{\tilde{r}_0-1}{\tilde{r}_0}} \\ &= \Big(C_0^{-1} (T^{\#})^{\tilde{r}-1} \operatorname{card}\Big(\frac{\Gamma(S)+\widetilde{G}}{\widetilde{G}} \Big) \frac{H(\widetilde{G}, L_{-1}^{\#}, L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#})}{H(G, L_{-1}^{\#}, L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#})} \Big)^{1/\tilde{r}_0} U, \end{aligned}$$

comme $B(\widetilde{G}) = U$, on en déduit (5.2).

Dans toute la suite, U désignera le nombre réel défini par le lemme précédent et les paramètres $L_i^{\#}, T^{\#}$ les paramètres définis en fonction de ce nombre U au début de ce paragraphe.

LEMME 5.2. — *Les paramètres définis ci-dessus vérifient les inégalités suivantes :*

i) $\log E \leq c_{15} D \min_{1 \leq i \leq k} \log V_i$

ii) $U \geq C_0 S^2 \log E$

iii) $D L_0^{\#} \log(2 + \frac{S}{L_0'}) \leq \frac{U_0}{C_0^{1/2}}$

iv) $D L_0^{\#} \log(2 + \frac{T}{L_0''}) \leq \frac{U_0}{C_0^{1/2}}$

v) *Pour tout* $i = -1, \ldots, k$, $L_i \geq 1$.

Vérification de i). — Par hypothèse dans le théorème, pour tout $i = 1, \ldots, k$, on a

$$\log E \leq \frac{1}{2} \log e^2 D \log V_i - \log |u_i|.$$

u_i est par hypothèse non nul, donc si $|u_i| < \frac{|\omega_1|}{10} \min(1, \mathrm{Im}(\tau))$, alors u_i n'est pas pôle de $\wp$ et on a $|\wp(u_i)| \geq \frac{1}{5|u_i|^2}$ (cf. [Da], lemme 3.3).

Or $|\wp(u_i)| \leq e^{Dh(\wp(u_i))} \leq e^{D \log V_i}$, d'où $\log |u_i| \geq -\frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} D \log V_i$ et $\log E \leq D \log V_i + \frac{1}{2} \log 5 + 1 \leq 4D \log V_i$.

Si $|u_i| \geq \frac{|\omega_1|}{10} \min(1, \mathrm{Im}(\tau))$, on a

$$\log E \leq \frac{1}{2} \log e^2 D \log V_i - \log\left(\frac{|\omega_1|}{10} \min(1, \mathrm{Im}(\tau))\right), \quad (i = 1, \ldots, k).$$

En conclusion, on obtient $\log E \leq c_{15} D \min_{1 \leq i \leq k} \log V_i$, où $c_{15} = \max\bigl(4, 1 - \log\bigl(\frac{|\omega_1|}{10} \min(1, \mathrm{Im}(\tau))\bigr)\bigr)$.

Preuve de l'inégalité ii). — Par définition on a $U \geq A(\widetilde{G})$; nous allons minorer $A(\widetilde{G})$. $\widetilde{G}$ étant un sous-groupe algébrique de $\mathbf{G}_\mathbf{a}^2 \times \mathcal{E}^k$, il est de la forme $\widetilde{G}_0 \times \widetilde{G}_1$ avec $\widetilde{G}_0$ un sous-groupe algébrique de $\mathbf{G}_\mathbf{a}^2$ et $\widetilde{G}_1$ un sous-groupe algébrique de $\mathcal{E}^k$. Comme $T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C}) \subset W$, $(0, 1, 0, \ldots, 0) \notin W$ et $(1, 0, \ldots, 0) \notin W$, on a $\{0\} \times \mathbf{G}_\mathbf{a} \not\subset \widetilde{G}_0$ et $\mathbf{G}_\mathbf{a} \times \{0\} \not\subset \widetilde{G}_0$. Par conséquent, $\widetilde{G}_0$ est ou bien le groupe nul $\{(0,0)\}$, ou bien un sous-groupe algébrique de $\mathbf{G}_\mathbf{a}^2$ de dimension 1 tel que $T_{\widetilde{G}_0}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}(v_1, v_2)$ avec $v_1 \neq 0$ et $v_2 \neq 0$.

Si $\widetilde{G}_0 = \{(0,0)\}$, on a $\mathrm{card}((\Gamma(S) + \widetilde{G})/\widetilde{G}) \geq \mathrm{card}\, \mathcal{O}(S) \geq c_8 S^2$, d'où en remplaçant $T^{\#}$ par sa valeur dans la définition de $A(\widetilde{G})$, on obtient

$$A(\widetilde{G}) \geq c_8 C_0^{-1} (C_0^{-5/2} S^2 \log E)^{-\tilde{r}+1} \times S^2 \frac{H(\widetilde{G}, L_{-1}^{\#}/U, L_0^{\#}/U, L_1^{\#}/U_0 \ldots, L_k^{\#}/U_0)}{H(G, L_{-1}^{\#}/U, L_0^{\#}/U, L_1^{\#}/U_0 \ldots, L_k^{\#}/U_0)}$$

or, dans ce cas on a

$$H(\widetilde{G}, L_{-1}^{\#}/U, L_0^{\#}/U, L_1^{\#}/U_0 \ldots, L_k^{\#}/U_0) = H(\widetilde{G}_1, L_1^{\#}/U_0, \ldots, L_k^{\#}/U_0),$$

et le lemme 3.1 de [P] fournit l'inégalité

$$(5.3)\quad H(\widetilde{G}_1, L_1^\#/U_0,\dots,L_k^\#/U_0) \geq \Big(\max_{1\leq i\leq k}(L_i^\#/U_0)\Big)^{-k+\dim \widetilde{G}_1}\prod_{i=1}^k (L_i^\#/U_0).$$

D'autre part, on a (cf. [P], lemme 3.4) l'égalité

$$(5.4)\quad \frac{H(G, L_{-1}^\#/U, L_0^\#/U, L_1^\#/U_0\dots,L_k^\#/U_0)}{3^k(k+2)!} = \prod_{i=-1}^0 (L_i^\#/U)\prod_{i=1}^k (L_i^\#/U_0).$$

D'où,

$$\begin{aligned} A(\widetilde{G}) &\geq \frac{c_8}{3^k(k+2)!}(C_0^{-5/2}S^2\log E)^{-\tilde r+1}S^2(S^2\log E)\\ &\quad \times (D\log(1+D)+\log E)\Big(DS^2\min_{1\leq i\leq k}\log V_i\Big)^{\tilde r-2}\\ &\geq \frac{c_8}{3^k(k+2)!}C_0^{\frac52(\tilde r-1)}S^2\log E\Big(D\min_{1\leq i\leq k}\log V_i/\log E\Big)^{\tilde r-2}, \end{aligned}$$

comme $\log E\leq c_{15}D\min_{1\leq i\leq k}\log V_i$, $\tilde r>1$ et C_0 est suffisamment grand, on en déduit que $A(\widetilde{G})\geq C_0S^2\log E$.

Si $T_{\widetilde{G}_0}(\mathbf{C})$ est de la forme $\mathbf{C}(v_1,v_2)$ avec $v_1\neq 0$ et $v_2\neq 0$, on a

$$(5.5)\qquad H(\widetilde{G}_0, L_{-1}^\#/U, L_0^\#/U)\geq L_{-1}^\#/U + L_0^\#/U.$$

D'autre part, on déduit du lemme 3.1 de [P] que

$$\begin{aligned} &H(\widetilde{G}, L_{-1}^\#/U, L_0^\#/U, L_1^\#/U_0\dots,L_k^\#/U_0)\\ &\qquad\geq H(\widetilde{G}_0, L_{-1}^\#/U, L_0^\#/U)H(\widetilde{G}_1, L_1^\#/U_0,\dots,L_k^\#/U_0). \end{aligned}$$

En minorant $\mathrm{card}((\Gamma(S)+\widetilde{G})/\widetilde{G})$ par 1 et en utilisant les inégalités (5.3), (5.4) et (5.5), on obtient dans ce cas

$$\begin{aligned} A(\widetilde{G}) &\geq \frac{C_0^{-1}}{3^k(k+2)!}(C_0^{-5/2}S^2\log E)^{-\tilde r+1}(U/L_{-1}^\#)\Big(\min_{1\leq i\leq k}(U_0/L_i^\#)\Big)^{\tilde r-1}\\ &\geq \frac{C_0^{-1}}{3^k(k+2)!}C_0^{5(\tilde r-1)/2}S^2\log E\Big(D\min_{1\leq i\leq k}\frac{\log V_i}{\log E}\Big)^{\tilde r-1}. \end{aligned}$$

Or on a $\tilde r>1$, car sinon $\tilde r=1$ et $\widetilde{G}_1=\mathcal{E}^k$, comme $\beta_1,\dots,\beta_k$ sont supposés non tous nuls alors $T_{\widetilde{G}(\mathbf{C})}\not\subset W$, ce qui contredit le choix de $\widetilde{G}$.

C_0 étant assez grand et $\tilde r>1$, il résulte de l'inégalité précédente que

$$A(\widetilde{G})\geq C_0S^2\log E.$$

Preuve de iii). — Si $L_0'=\big(\log(BD\log V)+\frac{\log E}{D}\big)^{1/2}$ alors on a $S/L_0'\leq C_0^{7/2}(D/\log E)^{1/2}$ et par définition

$$U/L_0^\# = C_0\big(D\log(1+D)+\log E\big),$$

d'où

$$\begin{aligned} DL_0^{\#}\log(2{+}\frac{S}{L_0'}) &\leq \frac{DU}{C_0(D\log(1{+}D)+\log E)}\log(2{+}C_0^{7/2}(D/\log E)^{1/2}) \\ &\leq \frac{U}{C_0^{1/2}}, \quad \text{car } C_0 \text{ est suffisamment grand.} \end{aligned}$$

Si $L_0' = \left(\frac{L_0^{\#}}{2c_1}\right)^{1/2}$, on a

$$\begin{aligned} DL_0^{\#}\log(2+\frac{S}{L_0'}) &\leq DL_0^{\#}\log 2 + DL_0^{\#}\log\left(1+c_1\frac{S^2}{L_0^{\#}}\right) \\ &\leq DL_0^{\#}\log 2 + c_1DS^2 \\ &\leq \frac{U_0}{C_0^{1/2}}. \end{aligned}$$

Preuve de iv). — On a par définition $L_0'' = \left[\frac{L_0^{\#}}{\deg \Delta_{L_0'}}\right]$ et par ailleurs $\deg \Delta_{L_0'} \leq c_1{L'}_0^2$, on en déduit que $L_0^{\#} \leq 2c_1{L'}_0^2L_0''$. D'où

$$\begin{aligned} DL_0^{\#}\log\left(2+\frac{T}{L_0''}\right) &\leq DL_0^{\#}\log 2 + 2c_1DL_0''{L'}_0^2\log\left(1+\frac{T}{2L_0''}\right) \\ &\leq DL_0^{\#}\log 2 + c_1D{L'}_0^2T \\ &\leq DL_0^{\#}\log 2 + c_1(D\log(BD\log V)+\log E)T \\ &\leq \frac{U_0}{C_0^{1/2}}. \end{aligned}$$

Vérification de v). — D'après vii), on a $U \geq C_0S^2\log E$, d'où $L_{-1}^{\#} \geq C_0$ et $L_{-1} \geq C_0 - 1 > 1$.

Par ailleurs, on a $S^2\log E > C_0(D\log(1+D)+\log E)$, d'où

$$L_0^{\#} \geq \frac{U}{S^2\log E} \geq C_0.$$

Comme $L_0 = \left[\frac{L_0^{\#}}{\deg \Delta_{L_0'}}\right]\deg \Delta_{L_0'}$ et $\deg \Delta_{L_0'} \leq \frac{L_0^{\#}}{2}$, on en déduit que

$$L_0 \geq \frac{L_0^{\#}}{2} \geq \frac{C_0}{2} \geq 1.$$

D'autre part, puisque $\log E \leq c_{15}(D\min_{1\leq i\leq k}\log V_i)$, on obtient

$$U_0 \geq DS^2\max_{1\leq i\leq k}\log V_i \quad \text{et par suite} \quad L_i \geq 1 (i=1,\ldots,k).$$

6. Démonstration du théorème.

6.1. Schéma de la preuve du théorème.

On suppose que $\mathbf{u} \notin T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})$ et $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ est "petit". On construit une hypersurface de $\mathbf{P}_1^2 \times \mathbf{P}_2^k$ ne contenant pas G de multidegrés $\leq (L_{-1}, L_0,\ L_1, \ldots, L_k)$ s'annulant sur $\Gamma(S)$ le long de W à l'ordre T; il s'agit de résoudre un système $(\mathcal{S})$ d'équations linéaires homogènes, on estime en utilisant le lemme 6.7 de [PW1] exactement le rang ρ de ce système par projection sur le groupe privilégié $\widetilde{G}$ défini au §5 au lieu de le majorer brutalement par le nombre d'équations; on montre que ρ est inférieur au nombre d'inconnues de $(\mathcal{S})$ à l'aide de l'égalité (5.2) du lemme 5.1 et grâce à un lemme de zéros de P. Philippon, on montre qu'il existe un sous-groupe algébrique G' de G tel que $T_{G'}(\mathbf{C}) \subset W$ et ne vérifiant pas l'inégalité (5.2) du lemme 5.1, cela contredit le choix des paramètres.

Pour l'estimation du rang ρ, par projection sur $\widetilde{G}$, on est amené à distinguer deux cas selon que $\exp_G(u)$ est un point de torsion de $G/\widetilde{G}$ (c'est le cas dit périodique) ou non (c'est le cas dit non périodique). L'extrapolation portera sur les dérivations dans le cas périodique selon la méthode de Gel'fond et sur les points dans le cas non périodique selon la méthode de Baker.

La preuve du théorème consiste à contredire l'**hypothèse (H)** suivante :

$$(\mathbf{H})\ : \mathbf{u} \notin T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C}) \quad \text{et} \quad |\mathcal{L}(\mathbf{u})| < \exp(-C_0 U_0).$$

On procède par l'absurde; on suppose que l'hypothèse **(H)** est vérifiée.

6.2. Les deux cas périodique et non périodique.

Rappelons que Λ désigne le réseau des périodes de $\mathcal{E}$ et que l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{E}$ a été identifié à $\mathcal{O}$ un sous-anneau du corps $\mathbf{Q}(\tau)$ des multiplications de $\mathcal{E}$. Notons $\Omega = \{0\} \times \{0\} \times \Lambda^k$.

Ou bien il existe $s \in \mathcal{O}(S) \setminus \{0\}$, tel que $s\mathbf{u} \in \Omega + T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})$; c'est le cas dit périodique. On pose dans ce cas

$$\begin{aligned}\Sigma = \{(\mathbf{t}, s) \in \mathbf{Z}^{k+1} \times \mathcal{O},\ \ \mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_k),\ \ 0 \leq t_j < 2T (j = 0, \ldots, k-1)\\ 0 \leq t_k < T_0, s \in \mathcal{O}(S)\},\end{aligned}$$

$$S_1 = S, \quad T_1 = T_0.$$

Ou bien pour tout $s \in \mathcal{O}(S) \setminus \{0\}$, $s\mathbf{u} \notin \Omega + T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})$; c'est le cas non périodique. On pose dans ce cas

$$\begin{aligned}\Sigma = \{(\mathbf{t}, s) \in \mathbf{Z}^{k+1} \times \mathcal{O},\ \ \mathbf{t} = (t_0, \dots, t_k)\\ 0 \le t_j < 2T (j = 0, \dots, k), s \in \mathcal{O}(S_0)\},\\ S_1 = S_0, \quad T_1 = T.\end{aligned}$$

6.3. Choix de bases de l'hyperplan W.

Rappelons que $\mathbf{C}^{k+2}$ est munie de la base canonique, $|\bullet|_1$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbf{C}^{k+2}$, $T_G(\mathbf{C})$ a été identifié à $\mathbf{C}^{k+2}$ et nous avons noté encore $|\bullet|_1$ la norme induite sur $T_G(\mathbf{C})$ par cette identification. D'autre part l'isomorphisme de W dans $\mathbf{C}^{k+1}$ associant la base $(\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_k)$ à la base canonique de $\mathbf{C}^{k+1}$ permet d'identifier W à $\mathbf{C}^{k+1}$ et de munir W d'une seconde norme $|\bullet|_2$. $T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})$ étant contenue dans W, on choisit $(\mathbf{e}'_0, \dots, \mathbf{e}'_{\tilde{d}-1})$ une base de $T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})$ orthonormée pour $|\bullet|_2$ et on la complète en une base $(\mathbf{e}'_0, \dots, \mathbf{e}'_k)$ de W orthonormée pour $|\bullet|_2$.

Les coefficients des matrices de passage entre $(\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_k)$ et $(\mathbf{e}'_0, \dots, \mathbf{e}'_k)$ sont de modules ≤ 1.

D'autre part, les deux normes $|\bullet|_1$ et $|\bullet|_2$ sont équivalentes sur W. Comme $|\beta_i| \le 1$ pour tout $i = 0, \dots, k$, on vérifie que les constantes de comparaison de ces deux normes sont des constantes indépendantes des paramètres notamment D et B.

Dans le cas périodique, on montre (cf. [Da], lemme 6.6) que la distance de $\mathbf{u}$ à $T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})$ est suffisamment grande pour que la projection $\mathbf{w}$ de $\mathbf{u}$ sur W définie au §4 ne soit pas contenue dans $T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})$ vu que $\mathbf{w}$ est très proche de $\mathbf{u}$ grâce à l'hypothèse (**H**). Dans le cas périodique, l'extrapolation portera sur les dérivations selon la direction $\mathbf{w}$.

Quitte à renuméroter les vecteurs $\mathbf{e}'_{\tilde{d}}, \dots, \mathbf{e}'_k$, on peut supposer que $(\mathbf{e}'_0, \dots, \mathbf{e}'_{k-1}, \mathbf{w})$ est une base de W.

Pour harmoniser les notations, on notera $\mathbf{f} = (\mathbf{e}'_0, \dots, \mathbf{e}'_{k-1}, \mathbf{w})$ dans le cas périodique et $\mathbf{f} = (\mathbf{e}'_0, \dots, \mathbf{e}'_{k-1}, \mathbf{e}'_k)$ dans le cas non périodique. On montre (cf. [Da], proposition 6.9) le lemme suivant sur le changement de base.

LEMME 6.1. — *Soient $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^{k+1}$ et f une fonction analytique au voisinage de $\mathbf{z}$ et T' un entier $\le 2(k+1)T$. Alors, on a*

$$\log \max_{|\mathbf{t}|\le T'} |D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} f(\mathbf{z})| \le \log \max_{|\mathbf{t}|\le T'} |D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}} f(\mathbf{z})| + c_{16}U_0$$

et

$$\log \max_{|\mathbf{t}|\le T'} |D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}} f(\mathbf{z})| \le \log \max_{|\mathbf{t}|\le T'} |D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} f(\mathbf{z})| + c_{16}U_0.$$

6.4. Construction de la fonction auxiliaire.

On peut supposer sans restriction que

$$K = \mathbf{Q}\big(g_2, g_3, \tau, \beta_0, \dots, \beta_k, \{\wp(u_j)\ ;\ \ u_j \notin \Lambda, j = 1, \dots, k\}\big).$$

Choisissons une base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_D\}$ de K sur $\mathbf{Q}$ telle que α_i $(i = 1, \dots, D)$ soit un monôme en $g_2, g_3, \tau, \beta_0, \dots, \beta_k$, $\wp(u_j)(u_j \notin \Lambda)$, de degré total $\le D$. En tenant compte des inégalités (2.1) et (2.2) du théorème, on a

$$(6.1)\quad h(\alpha_1, \dots, \alpha_D) \le D^2\Big(\log B + \max_{1\le i\le k} \log V_i + h(g_2) + h(g_3) + h(\tau)\Big).$$

Notons $I(\mathcal{E})$ l'idéal de définition dans $\mathbf{C}[\mathbf{P}_2]$ de la courbe elliptique $\mathcal{E}$ et $\big(\mathbf{C}[\mathbf{P}_2]/I(\mathcal{E})\big)_L$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des polynômes de $\mathbf{C}[\mathbf{P}_2]$ mod $(I(\mathcal{E}))$ de degré L. On a (cf. [H], proposition 7.6. (d) p. 52)

$$\dim_{\mathbf{C}}\big(\mathbf{C}[\mathbf{P}_2]/I(\mathcal{E})\big)_L = 3L.$$

Soit $\mathcal{B}_i$ $(i = 1, \dots, k)$ un relevé dans $\mathbf{C}[\mathbf{P}_2]$ d'une base de $\big(\mathbf{C}[\mathbf{P}_2]/\ I(\mathcal{E})\big)_{L_i}$ formé de monômes $\mathbf{X}_i^{\mathbf{n}_i}$ $(\operatorname{card} \mathcal{B}_i = 3L_i)$.

La fonction auxiliaire que nous allons construire sera de la forme $P\circ\Phi$ avec P un polynôme de $K[\mathbf{A}_1^2 \times \mathbf{P}_2^k]$ de type (3.3),

$$P(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{n}} p_{\mathbf{n}} X_{-1}^{n_{-1}} \Delta_{L_0'}^{n_0''}(X_0 + n_0')\mathbf{X}_1^{\mathbf{n}_1} \dots \mathbf{X}_k^{\mathbf{n}_k}$$

où la somme porte sur tous les uplets $\mathbf{n} = (n_{-1}, n_0', n_0'', \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k)$ tels que $n_{-1} \in \mathbf{Z}\ ; 0 \le n_{-1} < L_{-1}$, $n_0' \in \mathcal{O}_{\mathbf{k}} \setminus \{0\}\ ;\ |n_0'| \le L_0', n_0'' \in \mathbf{Z}\ ; 0 < n_0'' \le L_0''$, $\mathbf{n}_i\,;\ \mathbf{X}_i^{\mathbf{n}_i} \in \mathcal{B}_i$, $(i = 1, \dots, k)$. On pose $L_0 = L_0'' \deg \Delta_{L_0'}$. P est de degrés $\le (L_{-1}, L_0, \dots, L_k)$.

Les polynômes $\Delta_{L_0'}^{n_0''}(X_0 + n_0')\ ; n_0' \in \mathcal{O}_{\mathbf{k}} \setminus \{0\}, |n_0'| \le L_0', 0 < n_0'' \le L_0''$ étant $\mathbf{C}$-linéairement indépendants (cf. lemme 3.1 iv)) et les multi-monômes $\mathbf{X}_i^{\mathbf{n}_i}\ ; (\mathbf{X}_i^{\mathbf{n}_i} \in \mathcal{B}_i)$ étant $\mathbf{C}$-linéairement indépendants modulo $(I(\mathcal{E}))$, pour tout i; $(i=1,\ldots,k)$, on en déduit que P est non nul sur G dès que P est non identiquement nul.

LEMME 6.2. — *Soit P un polynôme de $K[\mathbf{A}_1^2 \times \mathbf{P}_2^k]$ à coefficients inconnus, de degrés $(L_{-1}, L_0, \ldots, L_k)$, avec $L_i \geq 1$ pour tout $i=-1,\ldots,k$. Notons : $F = P \circ \Phi$, ρ le rang du système $\{(D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{u}) = 0,\ (\mathbf{t}, s) \in \Sigma)\}$ et ν le nombre d'inconnues de ce système dans $\mathbf{Z}$. Alors, on a*

$$\rho \leq \frac{c_{18}}{C_0} H(G, L_{-1}, L_0, L_1, \ldots, L_k)$$

et

$$\nu \geq \frac{1}{(k+2)!} DH(G, L_{-1}, L_0, L_1, \ldots, L_k).$$

Preuve. — Comme $\dim(W/T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})) = \tilde{r} - 1$, on obtient grâce au lemme 6.7 de [PW1], dans le cas non périodique l'inégalité

$$\rho \leq 8^{\dim \widetilde{G}} (2T)^{\tilde{r}-1} \operatorname{card}\big((\Gamma(S_0) + \widetilde{G})/\widetilde{G}\big) H(\widetilde{G}, L_{-1}^{\#}, \ldots, L_k^{\#})$$

et dans le cas périodique, puisque $\mathbf{w} \notin T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})$, l'inégalité

$$\rho \leq 8^{\dim \widetilde{G}} (2T)^{\tilde{r}-2} T_0 \operatorname{card}\big((\Gamma(S) + \widetilde{G})/\widetilde{G}\big) H(\widetilde{G}, L_{-1}^{\#}, \ldots, L_k^{\#}).$$

Notons que dans le cas non périodique on a $\operatorname{card}\big((\Gamma(S') + \widetilde{G})/\widetilde{G}\big) = \operatorname{card} \mathcal{O}(S')$, pour tout $S' \leq S$, d'où

$$\operatorname{card}\big((\Gamma(S_0) + \widetilde{G})/\widetilde{G}\big) \leq \frac{c_{17}}{C_0^2} \operatorname{card}\big((\Gamma(S) + \widetilde{G})/\widetilde{G}\big).$$

Ces inégalités jointes à l'égalité (5.2) entraînent

$$\rho \leq \frac{2^{3(k+1)} c_{17}}{C_0} H(G, L_{-1}^{\#}, \ldots, L_k^{\#}).$$

Comme $L_i^{\#} \leq 2L_i$, on a

$$H(G, L_{-1}^{\#}, \ldots, L_k^{\#}) \leq 2^{k+2} H(G, L_{-1}, \ldots, L_k).$$

D'où $\rho \leq \frac{c_{18}}{C_0} H(G, L_{-1}, \ldots, L_k)$.

Enfin le nombre d'inconnues ν dans $\mathbf{Z}$ du système est

$$\nu = 3^k D \prod_{i=-1}^{k} L_i = \frac{1}{(k+2)!} DH(G, L_{-1}, \ldots, L_k).$$

D'où le lemme.

PROPOSITION 6.3. — *Il existe un polynôme P de $K[\mathbf{A}_1^2 \times \mathbf{P}_2^k]$ ne s'annulant pas sur G de degrés $(L_{-1}, L_0, \ldots, L_k)$ vérifiant $h(P) \leq C_0^{1/3}\frac{U_0}{D}$ et tel que la fonction $F = P \circ \Phi$ vérifie*

$$|D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{u})| \leq \exp(-C_0^{2/3} U_0), \quad \textit{pour tout} \quad (\mathbf{t}, s) \in \Sigma.$$

Preuve. — On écrit les coefficients de P, que l'on va déterminer, dans la base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_D)$ de K, choisie précédemment. On obtient un système d'inéquations linéaires dont les inconnues sont dans $\mathbf{Z}$. Commençons par majorer les coefficients de ce système; pour cela, appliquons le lemme 3.2, avec $x_i = e_i$ $(i = 0, \ldots, k)$, $m = k+1$, $\mathbf{v} = s\mathbf{u}$, $f = Q \circ \Phi$, où $Q(\mathbf{X}) = X_{-1}^{n-1} \Delta_{L_0'}^{n_0''}(X_0 + n_0')\mathbf{X}_1^{\mathbf{n}_1} \ldots \mathbf{X}_k^{\mathbf{n}_k}$; on obtient, pour tout $(\mathbf{t}, s) \in \Sigma$

$$\begin{aligned} \log |D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}} f(s\mathbf{u})| \leq{}& L_{-1} \log \max_{0 \leq i \leq k} (1, |\beta_i|) + 2(k+1)T \log 2(k+2)^2 T \\ &+ L_{-1} \log(S+1) + c_6 L_0 \Big(1 + \log\Big(\frac{S}{L_0'} + 2\Big)\Big) \\ &+ c_7 \sum_{i=1}^{k} L_i (S|u_i| + 1)^2 + \log H(Q), \end{aligned}$$

où $H(Q)$ désigne le maximum des modules des coefficients de Q.

On a

$$\log H(Q) \leq \log \max_{\substack{|n_0'| \leq L_0' \\ 0 \leq n_0'' \leq L_0''}} H\big(\Delta_{L_0'}^{n_0''}(X_0 + n_0')\big).$$

Comme

$$H\big(\Delta_{L_0'}^{n_0''}(X_0 + n_0')\big) \leq \max_{0 \leq \sigma \leq L_0} \left|\frac{1}{\sigma!}\frac{\partial^\sigma}{\partial z_0^\sigma}(\Delta_{L_0'}^{n_0''}(z_0 + n_0')|_{z_0=0}\right|,$$

on déduit du lemme 3.1 que $\log H\big(\Delta_{L_0'}^{n_0''}(X_0 + n_0')\big) \leq c_{19} L_0$.

D'autre part $\max_{0 \leq i \leq k} |\beta_i| \leq 1$ et par hypothèse on a $|u_i|^2 \leq D \log V_i$. D'où

$$\begin{aligned} \log |D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}} f(s\mathbf{u})| \leq{}& 2(k+1)T \log 2(k+2)^2 T + L_{-1} \log(S+1) \\ &+ c_{20} L_0 \Big(1 + \log\Big(2 + \frac{S}{L_0'}\Big)\Big) + c_{21} \sum_{i=1}^{k} D S^2 L_i \log V_i \\ \leq{}& c_{22} U_0. \end{aligned}$$

Ensuite on utilise le lemme 6.1 pour déduire l'inégalité

$$\log |D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} f(s\mathbf{u})| \leq c_{23} U_0, \quad \text{pour tout} \quad (\mathbf{t}, s) \in \Sigma.$$

En notant ρ le rang du système $\{D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{u}) = 0 \ (\mathbf{t}, s) \in \Sigma\}$ et ν le nombre d'inconnues dans $\mathbf{Z}$, d'après le lemme 6.1, on a : $\frac{\nu}{2\rho} \geq \frac{C_0}{2c_{18}(k+2)!}D$. Les hypothèses du lemme 3.4 sont vérifiées avec $\mu \leq 2^{k+1}c_1T^{k+1}S^2 \leq C_0^{\frac{5}{2}(k+2)}U_0^{k+1}$, $m \leq \log\nu + c_{23}U_0 \leq c_{24}U_0$, $\delta = \frac{C_0^{1/4}U_0}{D}$, $p = C_0^{2/3}U_0$; en effet, $\frac{\nu}{2\rho}\delta \geq \frac{C_0^{5/4}U_0}{2c_{18}(k+2)!} \geq \log(2\mu)+\delta+m+p+1$, puisque C_0 est suffisamment grand.

Alors, le lemme 3.4 joint à l'inégalité (6.1) permet de conclure.

LEMME 6.4. — *On a, pour tout* $(\mathbf{t}, s) \in \mathbf{Z}^{k+1} \times \mathcal{O}$, $\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_k)$, $0 \leq t_j < 2T$ $(j = 0, \ldots, k)$, $s \in \mathcal{O}(S)$,

$$|D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{u}) - D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{w})| \leq \exp(-C_0^{2/3}U_0).$$

Preuve. — Pour $\mathbf{t}$, $\mathbf{s}$ vérifiant les hypothèses du lemme on considère la fonction à une variable réelle $f(x) = D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{u} + sx(\mathbf{w} - \mathbf{u}))$. On a

$$\begin{aligned} |f(1) - f(0)| &\leq \max_{0\leq x\leq 1} |f'(x)| \\ &\leq |s(\mathbf{w} - \mathbf{u})|_1 \max_{0\leq x\leq 1} \left|\frac{\partial}{\partial z_{-1}} D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{u} + sx(\mathbf{w} - \mathbf{u})\right|. \end{aligned}$$

Le lemme 3.2 joint au lemme 6.1 fournit l'estimation

$$\max_{0\leq x\leq 1} \left|\frac{\partial}{\partial z_{-1}} D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{u} + sx(\mathbf{w} - \mathbf{u})\right| \leq \exp(c_{25}U_0)$$

et d'après l'hypothèse $(\mathbf{H})$ on a $|(\mathbf{w} - \mathbf{u})|_1 \leq \exp(-C_0U_0)$, comme C_0 est assez grand, on en déduit le lemme.

Le lemme 6.4 joint à la proposition 6.3 entraîne

$$\log|D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{w})| \leq -c_{26}C_0^{2/3}U_0, \quad \text{pour tout} \quad (\mathbf{t}, s) \in \Sigma. \tag{6.2}$$

6.5. Extrapolation.

PROPOSITION 6.5. — *Pour tout* $(\mathbf{t}, s) \in \mathbf{Z}^{k+1} \times \mathcal{O}$, $0 \leq t_j < T$ $(j = 0, \ldots, k)$, $s \in \mathcal{O}(S)$, *on a*

$$\log|D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{w})| \leq -c_{31}C_0^{1/2}U_0.$$

Preuve. — Dans le cas non périodique, on fixe $\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_k)$ $0 \leq t_j < T$ $(j = 0, \ldots, k)$ et on pose $f(z) = D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}}F(z\mathbf{w})$. Dans le cas périodique, on fixe $(t_0, \ldots, t_{k-1})$ $0 \leq t_i < T$ $(i = 0, \ldots, k-1)$ et on pose

$f(z) = D_{\mathbf{f}_0}^{t_0} \circ \ldots \circ D_{\mathbf{f}_{k-1}}^{t_{k-1}} F(z\mathbf{w})$. Dans les deux cas, on déduit de l'inégalité (6.2) que

$$\log \frac{|f^{(\sigma)}(s)|}{\sigma!} \leq -c_{27} C_0^{2/3} U_0, \quad \text{pour tout } \sigma, \quad 0 \leq \sigma < T_1, \quad s \in \mathcal{O}(S_1).$$

Nous allons appliquer la formule d'interpolation du lemme 3.4 avec $r = S$, $R = 6rE$. Le lemme 6.1 montre que

$$\log |f|_R \leq \log \max_{\substack{|\mathbf{t}| \leq (k+1)T \\ |z| \leq R}} |D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}} F(z\mathbf{w})| + c_{16} U_0,$$

et en appliquant le lemme 3.2 avec $x_i = e_i$, on obtient

$$\begin{aligned}\log |f|_R \leq\ & (k+1)T \log(k+2)^2 T + L_{-1} \log(2R+1) \\ & + c_6 L_0 \Big(1 + \log \Big(2 + \frac{R}{L_0'}\Big)\Big) + c_7 \sum_{i=1}^{k} L_i (R|u_i| + 1)^2 + h(P) + c_{16} U_0 \\ \leq\ & c_{28} C_0^{1/3} U_0.\end{aligned}$$

Par conséquent, la formule d'interpolation du lemme 3.3 montre que

$$\begin{aligned}|f|_{2r} \leq\ & \exp(c_{28} C_0^{1/3} U_0 - c_8 T_1 S_1^2 \log E) \\ & + \exp(c_9 T_1 S_1^2 \log 6 c_9 C_0 E - c_{27} C_0^{2/3} U_0) \\ \leq\ & \exp(-c_{29} C_0^{1/2} U_0).\end{aligned}$$

Dans le cas non périodique, cette inégalité entraîne immédiatement que pour tout $(\mathbf{t}, s) \in \mathbf{Z}^{k+1} \times \mathcal{O}$, $0 \leq t_j < T$ $(j = 0, \ldots, k)$, $s \in \mathcal{O}(S)$,

$$|D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{w})| \leq \exp(-c_{29} C_0^{1/2} U_0).$$

Dans le cas périodique, puisque $\mathbf{f}_k = \mathbf{w}$, on a

$$f^{(t_k)}(s) = D_{\mathbf{f}_0}^{t_0} \circ \ldots \circ D_{\mathbf{f}_k}^{t_k} F(z\mathbf{w}).$$

Or, d'après les inégalités de Cauchy, on a

$$|f^{(t_k)}(s)| \leq t_k! \frac{|f|_{2r}}{r^{t_k}}.$$

D'où, pour tout $(\mathbf{t}, s) \in \mathbf{Z}^{k+1} \times \mathcal{O}$, $0 \leq t_j < T$ $(j = 0, \ldots, k)$, $s \in \mathcal{O}(S)$, on a

$$|D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{w})| \leq \exp(-c_{30} C_0^{1/2} U_0).$$

La proposition 6.5 est ainsi établie avec $c_{31} = \min(c_{29}, c_{30})$.

La proposition 6.5 jointe au lemme 6.4 montre que pour tout $(\mathbf{t}, s) \in \mathbf{Z}^{k+1} \times \mathcal{O}$, $0 \leq t_j < T$ $(j = 0, \ldots, k)$, $s \in \mathcal{O}(S)$,

$$\log |D_{\mathbf{f}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{u})| \leq -c_{32} C_0^{1/2} U_0.$$

Ensuite le lemme 6.1 permet de passer aux dérivations le long de la base à coordonnées algébriques $\mathbf{e}$ et d'obtenir

$$\log |D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}} F(s\mathbf{u})| \leq -c_{33} C_0^{1/2} U_0, \tag{6.3}$$

pour tout $(\mathbf{t}, s) \in \mathbf{Z}^{k+1} \times \mathcal{O}$; $0 \leq t_j < T$, $s \in \mathcal{O}(S)$.

6.6. Inégalité de Liouville.

PROPOSITION 6.6. — *Soient T, S deux entiers positifs, $t_0, \ldots, t_k$ des entiers tels que $|\mathbf{t}| = t_0 + \cdots + t_k < T$ et $s \in \mathcal{O}(S)$.*

On suppose que $F = P \circ \Phi$ a un zéro en $s\mathbf{u}$ d'ordre $|\mathbf{t}|$ le long de W et que $D^{\mathbf{t}}_{\mathbf{e}} F(s\mathbf{u}) \neq 0$. Alors, on a

$$\log |D^{\mathbf{t}}_{\mathbf{e}} F(s\mathbf{u})| \geq -c_{45} C_0^{1/3} U_0.$$

Preuve. — Rappelons que

$$P(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{n}} p_{\mathbf{n}} X_{-1}^{n_{-1}} \Delta_{L_0'}^{n_0''}(X_0 + n_0') \mathbf{X}_1^{\mathbf{n}_1} \ldots \mathbf{X}_k^{\mathbf{n}_k}$$

et rappelons les notations

$$\mathbf{n}_j = (n_{j,0}, n_{j,1}, n_{j,2}), \quad |\mathbf{n}_j| = \sum_{i=0}^{2} n_{j,i}, \quad (j = 1, \ldots, k).$$

Considérons les fonctions entières :

$$\Theta_{\mathbf{n}_j}(z) = \big(\sigma^{3n_{j,0}} (\sigma^3 \wp)^{n_{j,1}} (\sigma^3 \wp')^{n_{j,2}}\big)(z).$$

Comme $\mathbf{t}$ est un multi-indice de longueur $|\mathbf{t}|$ minimal tel que :

$$D^{\mathbf{t}}_{\mathbf{e}} P \circ \Phi(s\mathbf{u}) \neq 0,$$

d'après la formule de Leibniz, on a, en notant $\mathbf{z} = (z_{-1}, z_0, z_1, \ldots, z_k)$,

$$(6.4) \quad D^{\mathbf{t}}_{\mathbf{e}} \left(\frac{P \circ \Phi(\mathbf{z})}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq k \\ su_j \notin \Lambda}} \big(\sigma_j^{3|\mathbf{n}_j|}(z_j)\big) \prod_{\substack{1 \leq i \leq k \\ su_j \in \Lambda}} \big(\sigma_j^3 \wp'\big)^{|\mathbf{n}_j|}(z_j)} \right)\Big|_{\mathbf{z}=s\mathbf{u}}$$

$$= \left(\frac{D^{\mathbf{t}}_{\mathbf{e}} P \circ \Phi(\mathbf{z})}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq k \\ su_j \notin \Lambda}} \big(\sigma_j^{3|\mathbf{n}_j|}(z_j)\big) \prod_{\substack{1 \leq j \leq k \\ su_j \in \Lambda}} \big(\sigma_j^3 \wp'\big)^{|\mathbf{n}_j|}(z_j)} \right)\Big|_{\mathbf{z}=s\mathbf{u}}$$

$D^{\mathbf{t}}_{\mathbf{e}} \left(\frac{P \circ \Phi(\mathbf{z})}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq k \\ su_j \notin \Lambda}} \big(\sigma_j^{3|\mathbf{n}_j|}(z_j)\big) \prod_{\substack{1 \leq j \leq k \\ su_j \in \Lambda}} \big(\sigma_j^3 \wp'\big)^{|\mathbf{n}_j|}(z_j)} \right)\Big|_{\mathbf{z}=s\mathbf{u}}$ est un nombre algébrique non nul dont nous voulons estimer la hauteur; pour cela nous allons l'exprimer autrement.

Considérons $\left(\frac{d}{dz_j}\right)^i \big(\Theta_{\mathbf{n}_j}(z_j) \sigma_j^{3|\mathbf{n}_j|}(z_j)\big)\Big|_{z_j = su_j}$ pour j tel que $su_j \notin \Lambda$ et notons

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{\omega_2}{2} & \text{si } su_j = \dfrac{\omega_1}{2} \\ \dfrac{\omega_1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\Big(\frac{d}{dz_j}\Big)^i\Big(\frac{\Theta_{\mathbf{n}_j}(z_j)}{\sigma_j^{3|\mathbf{n}_j|}(z_j)}\Big)_{|z_j=su_j} = \Big(\frac{d}{dz_j}\Big)^i \wp^{n_{j,1}}\wp'^{n_{j,2}}(z_j)_{|z_j=su_j}$$
$$= \Big(\frac{d}{dz_j}\Big)^i \wp^{n_{j,1}}\wp'^{n_{j,2}}(z_j+su_j+\theta_j)_{|z_j=\theta_j},$$

comme $\wp(su_j+\theta_j)\in K$, on déduit du lemme 3.5 sur les formules d'addition sur $\mathcal{E}$ que

$$\wp^{n_{j,1}}\wp'^{n_{j,2}}(z_j+su_j+\theta_j) = \frac{Q_{\mathbf{n}_j}\big(\wp(z_j),\wp'(z_j)\big)}{\big(\wp(z_j)-\wp(su_j+\theta_j)\big)^{3L_j}},$$

où $\{Q_{\mathbf{n}_j}(X,Y), |\mathbf{n}_j| = L_j\}$ est une famille de polynômes de $K[X,Y]$ vérifiant

$$(6.5)\quad \begin{aligned} &h(Q_{\mathbf{n}_j}, |\mathbf{n}_j| = L_j) \le L_j(c_{10} + 2h(\wp(su_j+\theta_j), \wp'(su_j+\theta_j))),\\ &\max\deg Q_{\mathbf{n}_j} \le 2L_j.\end{aligned}$$

Si $su_j\in\Lambda$, on a

$$\Big(\frac{d}{dz_j}\Big)^i \frac{\Theta_{\ell_j}(z_j)}{(\sigma^3\wp')^{|\mathbf{n}_j|}(z_j)}_{|z_j=su_j} = \Big(\frac{d}{dz_j}\Big)^i \frac{1}{\wp'^{n_{j,0}}}\Big(\frac{\wp}{\wp'}\Big)^{n_{j,1}}(z_j)_{|z_j=su_j},$$

Afin d'harmoniser les notations posons dans ce cas $\theta_j = su_j$.

Notons $M_{\mathbf{n}_j}(X,Y) = X^{n_{j,0}}Y^{n_{j,1}}$ et considérons la fonction :

$$\Psi(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}} p_{\mathbf{n}} z_{-1}^{n-1}\Delta_{L_0'}^{n_0''}(z_0+n_0') \prod_{\substack{1\le j\le k\\ su_j\notin\Lambda}} Q_{\mathbf{n}_j}\big(\wp(z_j),\wp'(z_j)\big)$$
$$\times \prod_{\substack{1\le j\le k\\ su_j\in\Lambda}} \mathcal{M}_{\mathbf{n}_j}\Big(\frac{1}{\wp'(z_j)}, \frac{\wp}{\wp'}(z_j)\Big)$$

où les nombres $p_{\mathbf{n}}$ désignent les coefficients de P.

On a évidemment pour tout $\mathbf{t}'$

$$D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}'}\Bigg(\frac{P\circ\Phi(\mathbf{z})}{\prod_{\substack{1\le j\le k\\ su_j\notin\Lambda}}\big(\sigma_j^{3|\mathbf{n}_j|}(z_j)\big)\prod_{\substack{1\le j\le k\\ su_j\in\Lambda}}\big(\sigma_j^3\wp'\big)^{|\mathbf{n}_j|}(z_j)}\Bigg)_{|\mathbf{z}=s\mathbf{u}}$$
$$= D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}'}\Bigg(\frac{\Psi(\mathbf{z})}{\prod_{\substack{1\le j\le k\\ su_j\notin\Lambda}}\big(\wp(z_j)-\wp(su_j+\theta_j)\big)^{3L_j}}\Bigg)_{|\mathbf{z}=\theta},$$

où $\theta = (su_{-1}, su_0, \theta_1, \dots, \theta_k)$. Comme $\mathbf{t}$ est un multi-indice de longueur $|\mathbf{t}|$ minimal tel que : $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}(P \circ \Phi(s\mathbf{u}) \neq 0$, on en déduit, en utilisant la formule de Leibniz, que $\mathbf{t}$ est un multi-indice de longueur $|\mathbf{t}|$ minimal tel que : $(D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}\Psi)(\theta) \neq 0$ et

$$D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}\left(\frac{\Psi(\mathbf{z})}{\prod_{\substack{1\le j\le k\\ su_j\notin\Lambda}}\big(\wp(z_j)-\wp(su_j+\theta_j)\big)^{3L_j}}\right)\Big|_{\mathbf{z}=\theta} = \frac{D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}\Psi(\theta)}{\prod_{\substack{1\le j\le k\\ su_j\notin\Lambda}}\big(\wp(\theta_j)-\wp(su_j+\theta_j)\big)^{3L_j}},$$

d'où

$$(6.6)\quad D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}\left(\frac{P\circ\Phi(\mathbf{z})}{\prod_{\substack{1\le j\le k\\ su_j\notin\Lambda}}(\sigma_j^{3|\mathbf{n}_j|}(z_j))\prod_{\substack{1\le j\le k\\ su_j\in\Lambda}}(\sigma_j^3\wp')^{|\mathbf{n}_j|}(z_j)}\right)\Big|_{z=s\mathbf{u}} = \frac{D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}\Psi(\theta)}{\prod_{\substack{1\le j\le k\\ su_j\notin\Lambda}}(\wp(\theta_j)-\wp(su_j+\theta_j))^{3L_j}}.$$

Estimation de la hauteur de $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}\Psi(\theta)$. — Par définition on a

$$D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}} = \Big(\beta_0\frac{\partial}{\partial z_{-1}}+\frac{\partial}{\partial z_0}\Big)^{t_0}\circ\dots\circ\Big(\beta_k\frac{\partial}{\partial z_{-1}}+\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)^{t_k}.$$

Comme

$$\Big(\beta_j\frac{\partial}{\partial z_{-1}}+\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)^{t_j} = \sum_{i_j=0}^{t_j}\binom{t_j}{i_j}\beta_j^{t_j-i_j}\Big(\frac{d}{dz_{-1}}\Big)^{t_j-i_j}\Big(\frac{d}{dz_j}\Big)^{i_j},$$

on a

$$D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}\Psi(\theta) = \sum_{\mathbf{n}}\sum_{i_0=0}^{t_0}\cdots\sum_{i_k=0}^{t_k} p_{\mathbf{n}}\alpha_{\mathbf{n},i_0,\dots,i_k},$$

où

$$\alpha_{\mathbf{n},i_0,\dots,i_k} = \prod_{0\le j\le k}\binom{t_j}{i_j}\prod_{0\le j\le k}(\beta_j^{t_j-i_j})\Big(\frac{d}{dz_{-1}}\Big)^{t_0-i_0+\dots+t_k-i_k} z_{-1}^{n_{-1}}\Big|_{z_{-1}=su_{-1}}$$
$$\times\Big(\frac{d}{dz_0}\Big)^{i_0}\Delta_{L_0'}^{n_0''}(z_0)\Big|_{z_0=su_0+n_0'}\prod_{\substack{1\le j\le k\\ su_j\notin\Lambda}}\Big(\frac{d}{dz_j}\Big)^{i_j}Q_{\mathbf{n}_j}\big(\wp(z_j),\wp'(z_j)\big)\Big|_{z_j=\theta_j}$$
$$\times\prod_{\substack{1\le j\le k\\ su_j\in\Lambda}}\Big(\frac{d}{dz_j}\Big)^{i_j}\mathcal{M}_{\mathbf{n}_j}\Big(\frac{1}{\wp'(z_j)},\frac{\wp}{\wp'}(z_j)\Big)\Big|_{z_j=\theta_j}.$$

Pour l'estimation de la hauteur de $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}\Psi(\theta)$, nous allons d'abord estimer $h\big(\alpha_{\mathbf{n},i_0,\dots,i_k};\ \mathbf{n},\ i_0\le t_0,\dots,i_k\le t_k\big)$.

On a les inégalités suivantes :

$$h\Big(\prod_{0\le j\le k}\binom{t_j}{i_j},\ 0\le i_j\le T\Big)\le \log\prod_{0\le j\le k}2^{t_j}\le T\log 2\le \frac{U_0}{D},$$

$$h\Big(\prod_{0\le j\le k}\beta_j^{t_j-i_j}, i_j\le t_j\Big)\le \sum_{j=0}^{k}t_jh(\beta_j)\le T\log B\le \frac{U_0}{D}.$$

$\left(\frac{d}{dz_{-1}}\right)^{t_0-i_0+\ldots+t_k-i_k}z_{-1}^{n_{-1}}\Big|_{z_{-1}=su_{-1}}$ étant un entier de $\mathbf{k}$, on a

$$\begin{aligned}h\Big(\Big(\frac{d}{dz_{-1}}\Big)^{t_0-i_0+\ldots+t_k-i_k}&z_{-1}^{n_{-1}}\Big|_{z_{-1}=su_{-1}}, n_{-1}\le L_{-1}, i_j\le t_j\Big)\\&\le \max\Big\{\log\Big|\Big(\frac{d}{dz_{-1}}\Big)^{i}z_{-1}^{n_{-1}}\Big|_{z_{-1}=su_{-1}}\Big|, n_{-1}\le L_{-1}, i\le T\Big\}\\&\le T\log L_{-1}+L_{-1}\log S\\&\le \frac{U_0}{D}.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après le lemme 3.1, on a

$$\begin{aligned}h\Big(\Big(\frac{d}{dz_{-1}}\Big)^{i_0}\Delta_{L_0'}^{n_0''}(z_0)\Big|_{z_0=su_0+n_0'}, i_0\le t_0, n_0''\le L_0'', |n_0'|\le L_0'\Big)&\\ \le c_3L_0\Big(1+\log\Big(2+\frac{S}{L_0'}\Big)+\log\Big(2+\frac{T}{L_0''}\Big)\Big)&+T\log T\\ \le c_{34}\frac{U_0}{D}.&\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après le lemme 3.6, pour tout i, $0\le i\le T$ et tout j, $1\le j\le k$ tel que $su_j\notin\Lambda$, on a

$$\Big(\frac{d}{dz_j}\Big)^{i}Q_{\mathbf{n}_j}\big(\wp(z_j),\wp'(z_j)\big)_{|z_j=\theta_j}=Q_{i,\mathbf{n}_j}\big(\wp(\theta_j),\wp'(\theta_j)\big),$$

où $\{Q_{i,\mathbf{n}_j}(X,Y), i\le T, |\mathbf{n}_j|=L_j\}$ est une famille de polynômes de $K[X,Y]$ de degrés majorés par $2L_j+T$ et vérifiant

$$h\big(Q_{i,\mathbf{n}_j}, i\le T, |\mathbf{n}_j|=L_j\big)\le h\big(Q_{\mathbf{n}_j}, |\mathbf{n}_j|=L_j\big)+c_{12}T\log(L_j+T).$$

Comme $su_j\notin\Lambda$, on a par définition $\theta_j=\omega_1/2$ ou $\omega_2/2$ donc $\wp'(\theta_j)=0$ et par suite on a

$$\begin{aligned}&h(Q_{i,\mathbf{n}_j}(\wp(\theta_j),\wp'(\theta_j)), i\le T, |\mathbf{n}_j|=L_j)\\&\qquad\le h(Q_{i,\mathbf{n}_j}, i\le T, |\mathbf{n}_j|=L_j)+(2L_j+T)h(\wp(\theta_j))+\log(2L_j+T).\end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'inégalité (6.5) on a

$$h\big(Q_{\mathbf{n}_j}, |\mathbf{n}_j|=L_j\big)\le L_j\big(c_{10}+2h\big(\wp(su_j+\theta_j),\wp'(su_j+\theta_j)\big)\big),$$

du lemme (3.5) sur les lois d'addition sur $\mathcal{E}$, on déduit que

$$h(\wp(su_j+\theta_j),\wp'(su_j+\theta_j)) \leq c_{35} + 2h\big(\wp(su_j),\wp'(su_j)\big),$$

et du lemme 3.7 que

$$h\big(\wp(su_j),\wp'(su_j)\big) \leq c_{36}S^2 + c_{14}h\big(\wp(u_j),\wp'(u_j)\big) \leq c_{37}S^2\log V_j,$$

d'où

$$h\big(Q_{\mathbf{n}_j}, |\mathbf{n}_j| = L_j\big) \leq c_{38}S^2 L_j \log V_j.$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned} h\big(Q_{i,\mathbf{n}_j}(\wp(\theta_j),\wp'(\theta_j))),\ & i \leq T, |\mathbf{n}_j| = L_j\big) \\ & \leq c_{38}L_jS^2\log V_j + c_{12}T\log(L_j+T) \\ & \leq c_{39}\frac{U_0}{D}. \end{aligned}$$

Pour $j, 1 \leq j \leq k$ tel que $su_j \in \Lambda$, on a, par définition $\theta_j = su_j$ et on est amené à estimer $h\big(\big(\frac{d}{dz_j}\big)^i\mathcal{M}_{\mathbf{n}_j}\big(\frac{1}{\wp'(z_j)},\frac{\wp}{\wp'}(z_j)\big)_{|z_j=\theta_j}, i \leq T, |\mathbf{n}_j| = L_j\big)$

D'après le lemme 3.6 on a

$$\Big(\frac{d}{dz_j}\Big)^i\mathcal{M}_{\mathbf{n}_j}\Big(\frac{1}{\wp'},\frac{\wp}{\wp'}\Big)(z_j) = \mathcal{M}_{i,\mathbf{n}_j}\Big(\frac{1}{\wp'},\frac{\wp}{\wp'}\Big)(z_j),$$

où $\{\mathcal{M}_{i,\mathbf{n}_j}(X,Y), i \leq T, |\mathbf{n}_j| = L_j\}$ est une famille de polynômes de $K[X,Y]$ de degrés majorés par L_j+T et vérifiant

$$h\big(\mathcal{M}_{i,\mathbf{n}_j}, i \leq T, |\mathbf{n}_j| = L_j\big) \leq c_{12}T\log(L_j+T).$$

Comme $\theta_j \in \Lambda$, par périodicité on a $\mathcal{M}_{i,\mathbf{n}_j}\big(\frac{1}{\wp'},\frac{\wp}{\wp'}\big)(\theta_j) = \mathcal{M}_{i,\mathbf{n}_j}(0,0)$. D'où

$$\begin{aligned} h\Big(\Big(\frac{d}{dz_j}\Big)^i\mathcal{M}_{\mathbf{n}_j}\Big(\frac{1}{\wp'(z_j)},\frac{\wp}{\wp'}(z_j)\Big)_{|z_j=\theta}, i \leq T, |\mathbf{n}_j| = L_j\Big) & \\ \leq h\big(\mathcal{M}_{i,\mathbf{n}_j}, i \leq T, |\mathbf{n}_j| = L_j\big) \leq c_{40}\frac{U_0}{D}. \end{aligned}$$

Par conséquent on obtient

$$h\big(\alpha_{\mathbf{n},i_0,\ldots,i_k}\ ; \mathbf{n}, i_0 \leq t_0, \ldots, i_k \leq t_k\big) \leq c_{41}\frac{U_0}{D}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} h\big(D^{\mathbf{t}}_{\mathbf{e}}\Psi(\theta) \leq h(P) + h\big(\alpha_{\mathbf{n},i_0,\ldots,i_k}\ ; \mathbf{n}, i_0 \leq t_0, \ldots, i_k \leq t_k\big) & \\ + \log 3^k L_{-1}L_0.\ldots.L_k + \log(t_0+1).\ldots.\log(t_k+1) & \end{aligned}$$

et $h(P) \leq C_0^{1/3}\frac{U_0}{D}$, d'où $h\big(D^{\mathbf{t}}_{\mathbf{e}}\Psi(\theta) \leq c_{42}C_0^{1/3}\frac{U_0}{D}$.

D'autre part, on a

$$h\Big(\prod_{\substack{1\le j\le k\\ su_j\notin\Lambda}}\big(\wp(\theta_j)-\wp(su_j+\theta_j)\big)^{-3L_j}\Big)\le c_{43}\sum_{j=1}^{k}L_jS^2\log V_j$$
$$\le c_{43}k\frac{U_0}{D}.$$

En définitive ces inégalités jointes à l'égalité (6.6) entraînent la majoration

$$h\left(D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}\Big(\frac{P\circ\Phi(\mathbf{z})}{\prod_{\substack{1\le i\le k\\ su_i\notin\Lambda}}\big(\sigma_i^{3|\mathbf{n}_i|}(z_i)\big)\prod_{\substack{1\le i\le k\\ su_i\in\Lambda}}\big(\sigma_i^3\wp'\big)^{|\mathbf{n}_i|}(z_i)}\Big)\Big|_{\mathbf{z}=s\mathbf{u}}\right)\le c_{44}C_0^{1/3}\frac{U_0}{D},$$

et par suite on déduit de l'inégalité de Liouville que

$$\log\left|D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}\Big(\frac{P\circ\Phi(\mathbf{z})}{\prod_{\substack{1\le i\le k\\ su_i\notin\Lambda}}\big(\sigma_i^{3|\mathbf{n}_i|}(z_i)\big)\prod_{\substack{1\le i\le k\\ su_i\in\Lambda}}\big(\sigma_i^3\wp'\big)^{|\mathbf{n}_i|}(z_i)}\Big)\Big|_{\mathbf{z}=s\mathbf{u}}\right|\ge -c_{44}C_0^{1/3}U_0.$$

Enfin l'égalité (6.4) jointe à l'inégalité (3.2) permet de conclure.

LEMME 6.7. — *La fonction $F=P\circ\Phi$ vérifie $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{u})=0$, pour tout $(\mathbf{t},s)\in\mathbf{Z}^{k+1}\times\mathcal{O}$, $|\mathbf{t}|<T$ et $s\in\mathcal{O}(S)$.*

Preuve. — Supposons qu'il existe $(\mathbf{t},s)\in\mathbf{Z}^{k+1}\times\mathcal{O}$; $|\mathbf{t}|<T$, $s\in\mathcal{O}(S)$ tel que $D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}F(\mathbf{su})\neq 0$. Alors, d'après l'inégalité (6.3) on a $\log|D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{u})|\le -c_{33}C_0^{1/2}U_0$ et d'après la proposition 6.6 on a $\log|D_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}}F(s\mathbf{u})|\ge -c_{45}C_0^{1/3}U_0$. Comme C_0 est assez grand, on a une contradiction. D'où le lemme.

6.7. Utilisation du lemme de zéro et conclusion.

D'après le lemme 6.7, le polynôme P de degrés $(L_{-1},\dots,L_k)$ $(L_i\ge 1,\ \ i=-1,\dots,k)$, construit précédemment, s'annule sur $\Gamma(S)$ à un ordre $\ge T$ le long de W. Comme P est non identiquement nul, il est par construction non nul sur G. Alors le lemme de zéro de P. Philippon (cf. [P], théorème 2-1) montre qu'il existe G' un sous-groupe algébrique connexe de G, $G'\neq G$, vérifiant

$$(6.7)\quad T^{\operatorname{codim}_W W\cap T_{G'}(\mathbf{C})}\operatorname{card}\Big(\Gamma\Big(\frac{S}{k+2}\Big)+G')/G'\Big)$$
$$\le (2(k+2))^{2(k+2)}\frac{H(G,L_{-1},\dots,L_k)}{H(G',L_{-1},\dots,L_k)}.$$

Si $T_{G'}(\mathbf{C}) \subset W$, on a, dans ce cas, $\operatorname{codim}_W T_{G'}(\mathbf{C}) = r' - 1$ avec $r' = \operatorname{codim}_G G'$. L'inégalité (6.7) jointe à l'inégalité

$$\frac{H(G, L_{-1}, \ldots, L_k)}{H(G', L_{-1}, \ldots, L_k)} \leq \frac{H(G, L^{\#}_{-1}, \ldots, L^{\#}_k)}{H(G', L^{\#}_{-1}, \ldots, L^{\#}_k)}$$

entraîne

$$T^{r'-1} \operatorname{card}\big((\Gamma(\frac{S}{k+2}) + G')/G'\big) \leq (2(k+2))^{2(k+2)} \frac{H(G, L^{\#}_{-1}, \ldots, L^{\#}_k)}{H(G', L^{\#}_{-1}, \ldots, L^{\#}_k)}.$$

Cela contredit l'inégalité (5.1) du lemme 5.1 car C_0 est assez grand. Donc $T_{G'}(\mathbf{C}) \not\subset W$. Par suite, on a $\operatorname{codim}_W W \cap T_{G'}(\mathbf{C}) = r'$ et l'inégalité (6.7) s'écrit

$$(6.8) \quad T^{r'} \operatorname{card}\big((\Gamma(\frac{S}{k+2}) + G')/G'\big) H(G', L_{-1}, \ldots, L_k) \leq (2(k+2))^{2(k+2)} H(G, L_{-1}, \ldots, L_k).$$

G' est de la forme $G' = G'_0 \times G'$ avec G'_0 un sous-groupe algébrique de $\mathbf{G}_a^2$ et G'_1 un sous-groupe algébrique de $\mathcal{E}^k$.

Rappelons que

$$\mathbf{u} = \begin{cases} (0, 1, u_1, \ldots, u_k) & \text{dans le cas non homogène} \\ (1, 1, u_1, \ldots, u_k) & \text{dans le cas homogène.} \end{cases}$$

Par conséquent $\Phi(s\mathbf{u})$ appartient à G' alors $(0, s)$ appartient à $T_{G'_0}(\mathbf{C})$ dans le cas non homogène (resp. (s, s) appartient à $T_{G'_0}(\mathbf{C})$ dans le cas homogène).

On en déduit que si $(0, 1)$ n'appartient pas à $T_{G'_0}(\mathbf{C})$ dans le cas non homogène (resp. $(1, 1)$ n'appartient pas à $T_{G'_0}(\mathbf{C})$ dans le cas homogène), on a

$$\operatorname{card}\Big(\big(\Gamma(\frac{S_1}{k+2}\big) + G')/G'\Big) = \operatorname{card} \mathcal{O}\Big(\frac{S_1}{k+2}\Big).$$

On distingue alors deux cas :

1er cas. — $(0, 1) \notin T_{G'_0}(\mathbf{C})$ dans le cas non homogène (resp. $(1, 1) \notin T_{G'_0}(\mathbf{C})$ dans le cas homogène). Dans ce cas, on a

$$\operatorname{card}\Big(\Big(\Gamma\Big(\frac{S}{k+2}\Big) + G'\Big)/G'\Big) \geq c_8 \Big(\frac{S}{k+2}\Big)^2$$

et

$$\frac{H(G, L_{-1}, \ldots, L_k)}{H(G', L_{-1}, \ldots, L_k} \leq 3^k (k+2)! L_0 \big(\max(L_{-1}, L_1, \ldots, L_k)\big)^{r'-1}.$$

Par suite, l'inégalité (6.8) entraîne

$$T^{r'}S^2 \leq c_{46}L_0\big(\max(L_{-1},L_1,\ldots,L_k)\big)^{r'-1},$$

où $c_{46}=\frac{3^k(2(k+2))^{3k+8}}{c_8}$. Comme $r'\geq 1$ et $T>\max(L_{-1},L_1,\ldots,L_k)$, on en déduit que

$$TS^2\leq c_{46}L_0.$$

Or, $TS^2\geq C_0L_0$ et C_0 est suffisamment grand, donc ce cas ne peut se produire.

2ème cas. — $(0,1)\in T_{G'_0}(\mathbf{C})$ dans le cas non homogène (resp. $(1,1)\in T_{G'_0}(\mathbf{C})$ dans le cas homogène). Dans ce cas, on a

$$\frac{H(G,L_{-1},\ldots,L_k)}{H(G',L_{-1},\ldots,L_k)}\leq 3^k(k+2)!\big(\max(L_{-1},L_1,\ldots,L_k)\big)^{r'},$$

et en minorant trivialement card $\big(\Gamma\big(\frac{S}{k+2}\big)+G'\big)/G'\big)$ par 1, l'inégalité (6.8) entraîne, puisque $r'\geq 1$, la majoration

$$T\leq c_{47}\max(L_{-1},L_1,\ldots,L_k),\quad \text{où}\quad c_{47}=3^k(2(k+2))^{3k+6}.$$

Or, $T\geq C_0\max(L_{-1},L_1,\ldots,L_k)$, donc ce cas ne peut se produire.

En conclusion, l'hypothèse (**H**) est fausse. Alors,

– ou bien $\mathbf{u}\notin T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})$ et on a $\log|\mathcal{L}(\mathbf{u})|\geq -C_0U_0$; on en déduit que $\log|\mathcal{L}'(\mathbf{u}')|\geq -c_{48}C_0U_0$; d'où l'inégalité (2.4) du théorème ;

– ou bien $\mathbf{u}\in T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})$. $\widetilde{G}$ étant un groupe produit $\widetilde{G}=\widetilde{G}_0\times\widetilde{G}_1$, avec $\widetilde{G}_0$ un sous-groupe algébrique de $\mathbf{G}_{\mathbf{a}}^2$, $\widetilde{G}_1$ un sous-groupe algébrique de $\mathcal{E}^k$.

Rappelons que par définition de $\widetilde{G}$, on a $T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})\subset W$. Dans le cas non homogène, cela entraîne que $(0,1)\in T_{\widetilde{G}_0}(\mathbf{C})$ et par conséquent $(0,1,0,\ldots,0)\in W$. Cela ne peut se produire car $\beta_0\neq 0$, donc c'est le cas homogène, rappelons (cf. §4) que dans ce cas $\mathcal{L}$ et $\mathbf{u}$ sont définis par $\mathcal{L}(\mathbf{z})=-z_{-1}+z_0+\beta_1z_1+\ldots+\beta_kz_k$ et $\mathbf{u}=(1,1,u_1,\ldots,u_k)$. Comme $\mathbf{u}\in T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})$ et $T_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})\subset W$, on a $T_{\widetilde{G}_0}(\mathbf{C})=\mathbf{C}(1,1)$, donc $T_{\widetilde{G}_1}(\mathbf{C})\subset\ker\mathcal{L}'$ et on a évidemment $(u_1,\ldots,u_k)\in T_{\widetilde{G}_1}(\mathbf{C})$.

D'où le théorème 2.1.

Preuve du corollaire 2.2. — Comme $\frac{u_1}{u_2}\notin\mathbf{Q}(\tau)$, $\frac{u_1}{u_2}$ est transcendant (cf. [M1], théorème 5). Cherchons d'abord une minoration de $|u_1-\alpha u_2|$ quand α est un nombre algébrique de degré $\leq D$ et de mesure de Mahler $M(\alpha)\leq M$ ($M\geq e$). On utilise le théorème 2.1 avec $G=\mathcal{E}^2, k=2$, $\mathcal{L}(\mathbf{z})=$

$z_1 - \alpha z_2$, $\log B = \max(e, \frac{\log M}{D})$, $V_1 = V_2 = e^{c_{49}}, E^2 = c_{50}D$ avec $c_{49} = \max\big(h(\exp_{\mathcal{E}}(u_1)), h(\exp_{\mathcal{E}}(u_2)), |u_1|^2, |u_2|^2, 1\big)$, $c_{50} = e^2 \frac{c_{49}}{\max(|u_1|^2, |u_2|^2)}$.

$u_1 - \alpha u_2$ étant non nul, le théorème 2.1 montre qu'il existe $c_{51} = c(\omega_1, \omega_2, u_1, u_2) > 0$ tel que $|\frac{u_1}{u_2} - \alpha| \geq f(D, M))$, où $f(D, M) = c_{51} \frac{D^3(\log M + D \log eD)}{\log eD}$.

À partir de cette estimation le lemme 2.3 de [PW2] permet de passer à une mesure de transcendance de $\frac{u_1}{u_2}$; de manière précise on obtient pour tout polynôme P non nul de $\mathbf{Z}[X]$ de hauteur $h(P) \leq \log H$ $(H \geq e)$ et de degré $\leq D$,

$$\begin{aligned} \big|P(\frac{u_1}{u_2})\big| &\geq \exp\big(-f(D, \log H + \log D) - 2D(\log H + D)\big) \\ &\geq \exp\Big(-c_{52} D^3 \frac{(\log H + D \log eD)}{\log eD}\Big) . \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

[AM] M. ABLY et M. M'ZARI, Polynômes de Lagrange sur les entiers d'un corps quadratique imaginaire, Journal de théorie des Nombres de Bordeaux, 10 (1) (1998), 85–105.

[B] A. BAKER, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers I, II, III, IV, Mathematika, 13 (1966), 204–216, 14 (1967), 102–107, 220–228, 15 (1968), 204–216.

[BWü] A. BAKER and G. WÜSTHOLZ, Logarithmic forms and groups varieties, J. reine & ang. Math., 442 (1993), 19–62.

[CL] J. COATES and S. LANG, Diophantine approximation on abelian varieties with CM, Inventiones Mathematicae, 34 (1976), 129–133.

[Da] S. DAVID, Minorations de formes linéaires de logarithmes elliptiques, Mémoires de la S. M. F., 62, 143 p., supplément au Bull. S. M. F., 123 (3) (1995).

[Di] G. DIAZ, Minorations de combinaisons linéaires non homogènes pour un logarithme elliptique, C. R. Acad. Sci. Paris, 318, Série I (1994), 879–883.

[H] R. HARTSHORNE, Algebraic geometry, Graduate texts in Mathematics, 52, Springer-Verlag (1977).

[Hi] N. HIRATA, Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques, Inv. Math., 104 (2) (1991), 401–433.

[M1] D. MASSER, Elliptic functions and transcendence, Springer Lectures Notes, 437 (1975).

[M2] D. MASSER, Polynomial interpolation in several variables, J. Approximation Theory, 24 (1978), 18–34.

[P] P. PHILIPPON, Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, Bull. S. M. F., 114 (1986), 355–383.

[PW1] P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT, Formes linéaires de logarithmes elliptiques et mesures de transcendance, 798–805, théorie des nombres. J. -M. De Koninck & C. Levesque (éd. Walter de Gruyter, Berlin, New York (1989).

[PW2] P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT, Formes linéaires de logarithmes dans les groupes algébriques commutatifs, Illinois Jour. of Math., t. 32 (2), 281–314.

[W1] M. WALDSCHMIDT, Nombres transcendants et groupes algébriques, Astérisque (1979), 69–70.

[W2] M. WALDSCHMIDT, Transcendence measures for exponentials and logarithms, J. Austr. Math. Soc., Ser. A 25 (1978), 445–465.

[Wü] G. WÜSTHOLZ, Recent progress in transcendence theory, dans Number Theory, Proceedings Noordwijkerhout 1983, édité par H. Jager, Springer Lecture Notes in Math., V. 1068 (1984), 280–296.

Manuscrit reçu le 29 janvier 1999,
accepté le 8 septembre 1999.

Mohammed ABLY,
Université des Sciences et Technologies de Lille
UFR de Mathématiques - URA CNRS 751
Bât. M2
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France).
ably@agat.univ-lille1.fr