

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DANIEL PECKER

Sur la réalité des points doubles des courbes gauches

Annales de l'institut Fourier, tome 49, n° 5 (1999), p. 1439-1452

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_5_1439_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_5_1439_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA RÉALITÉ DES POINTS DOUBLES DES COURBES GAUCHES

par Daniel PECKER

1. Introduction.

Une courbe irréductible de degré d non dégénérée dans $\mathbb{P}_n$ (c'est-à-dire non contenue dans un hyperplan) ne peut avoir plus de $C(d, n)$ points doubles, la borne de Castelnuovo $C(d, n)$ étant définie comme suit (voir [H.E]) :

$$C(d, n) = \frac{1}{2}m(2d - 2 - (n - 1)(m + 1))$$

avec

$$d \geq n \geq 2 \quad \text{et} \quad m = \left\lfloor \frac{d-1}{n-1} \right\rfloor.$$

Notre résultat est le suivant :

THÉOREME. — Soient α, β, γ des entiers tels que $\alpha + \beta + 2\gamma \leq C(d, n)$. Il existe une courbe réelle nodale irréductible de degré d , non dégénérée dans $\mathbb{P}_n$, ayant α points doubles réels à tangentes réelles, β points isolés dans le domaine réel, 2γ points doubles imaginaires et aucun autre point singulier.

Le cas des courbes planes est dû à Shustin [S] qui utilise une extension aux courbes singulières de la méthode de Viro (voir [V], [R]). Notre méthode est résumée dans la note [P4] (voir aussi les cas $\beta = \gamma = 0$ dans [P1], et $\alpha = \gamma = 0$ dans [P2]). On construit tout d'abord des courbes planes paramétrées par des fractions rationnelles ayant des numérateurs et des dénominateurs de degrés spécifiés. On en déduit des courbes avec $C(d, n)$

Mots-clés : Courbes gauches – Points doubles réels.

Classification math. : 14 – 14Hxx – 14Pxx.

points doubles sur des surfaces rationnelles réglées et lisses. On conclut la démonstration du théorème grâce au théorème de Brusotti.

Rappelons ce théorème, dû à Brusotti pour les courbes planes et à Gudkov pour les courbes situées sur une surface quadrique (voir [B], [G]; voir aussi [T], [S], [P3], [P2]).

THÉORÈME. — *Si l'on choisit des points doubles réels et des paires de points doubles imaginaires conjugués d'une courbe réelle nodale située sur le plan projectif, ou sur un hyperboloïde, il existe une courbe réelle de même degré, ayant pour seuls points singuliers des points doubles voisins des points doubles choisis (et de même type réel).*

Description de la construction

Le lemme suivant permet de ramener la recherche des points doubles d'une courbe rationnelle à un problème géométrique dans le plan des paramètres.

Si f est une fraction rationnelle à une variable, notons

$$\Delta_f(x, y) = \frac{f(x + iy) - f(x - iy)}{2iy}.$$

LEMME 1. — *Soit C une courbe paramétrée par des fractions rationnelles réelles*

$$X = f(t), \quad Y = g(t)$$

où $f'(t)$ et $g'(t)$ ne s'annulent pas simultanément et $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$. Les points de C situés dans l'anneau qui sont centres de deux branches transverses sont obtenus pour les valeurs du paramètre t qui appartiennent au domaine de définition de f et de g , et qui sont de la forme $t = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ est un point d'intersection simple des deux courbes

$$\Delta_f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_g(x, y) = 0.$$

Si l'intersection de ces deux courbes ne contient aucun triplet de points tel que la somme de leurs ordonnées soit nulle, tous les points ainsi obtenus sont des points doubles ordinaires. Si x et y sont tous deux réels, on obtient un point double isolé dans le domaine réel. Si x et iy sont tous deux réels, on obtient un point double réel à tangentes réelles. Dans tous les autres cas, on obtient des paires de points doubles imaginaires conjugués.

Le paragraphe 2 expose les idées principales de la méthode. Dans la proposition 1, on commence par l'étude directe de courbes ayant une coordonnée paramétrée par une fraction rationnelle très simple, l'autre coordonnée étant paramétrée par un polynôme $B(t)$. Dans le corollaire, on en déduit la nature réelle des intersections de la courbe $\Delta_B(x, y) = 0$ avec le cercle unité. Dans la proposition 2, on construit une fraction rationnelle f telle que $\Delta_f(x, y) = 0$ soit proche de la réunion du cercle unité et de l'homothétique d'un ensemble Δ_g déjà construit. Par récurrence, les ordonnées des points d'intersection des courbes $\Delta_B = 0$ et $\Delta_f = 0$ vérifient la condition de position générale du lemme 1. Cette proposition 2 est l'outil principal de la démonstration de notre théorème par récurrence. Le cas des courbes sans point double réel à tangentes réelles fait l'objet du troisième paragraphe.

2. Constructions de courbes auxiliaires planes.

PROPOSITION 1 (voir [P4]). — Soient $\alpha + \beta + 2\gamma = b - 1$. Il existe un polynôme réel $B(t)$ de degré b tel que la courbe

$$Y = t + \frac{1}{t}, \quad X = B(t)$$

ait $b - 1$ points doubles ordinaires dans le plan affine, dont α points doubles réels à tangentes réelles, β points réels isolés et 2γ points doubles imaginaires. De plus, pour tout entier $b_0 \leq b$ tel que $b - b_0$ soit pair, il existe un réel x_0 tel que l'équation $B(t) = x_0$ ait exactement b_0 solutions réelles.

Rappel de démonstration. — On montre dans [P4] que le polynôme $B(t)$ peut être construit de la manière suivante. Soient x_j, y_h des nombres réels vérifiant

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_\alpha < y_1 < \cdots < y_\gamma,$$

et posons

$$f(t) = (t - x_1) \cdots (t - x_\alpha)(t - y_1)^2 \cdots (t - y_\gamma)^2.$$

Soit $U(t)$ un polynôme unitaire de degré $\beta + 1$ ayant toutes ses racines réelles assez petites pour que l'équation $U(t) - U(1/t) = 0$ ait toutes ses racines de module un, et tel que $f(0)U'(0) < 0$. Alors, si k est assez grand, le polynôme $B(t) = U(t)f(t/k)$ convient. $\square$

On déduit de cette proposition le résultat suivant :

COROLLAIRE 1. — Soient α, β, γ des entiers. Il existe un polynôme $B(t)$ de degré $b = \alpha + \beta + 2\gamma + 1$ tel que les courbes

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{B(x + iy) - B(x - iy)}{2iy} = 0$$

aient $2(b - 1)$ points d'intersection dans l'anneau, dont 2β sont réels, 2α sont d'abscisse réelle et d'ordonnée imaginaire pure, et 4γ sont d'abscisse imaginaire. De plus, on peut supposer qu'il n'existe aucun triplet de ces points tel que la somme de leurs ordonnées soit nulle. Enfin, pour tout entier $b_0 \leq b$, tel que $b - b_0$ soit pair, il existe un réel x_0 tel que l'équation $B(t) = x_0$ ait exactement b_0 solutions réelles.

Rappel de démonstration (voir [P4]). — Si $g(t) = t + \frac{1}{t}$, $\Delta_g(x, y) = 0$ définit le cercle unité, et par suite le lemme 1 de l'introduction et la proposition 1 donnent directement le résultat. De plus, quitte à modifier un peu le polynôme $B(t)$, on peut supposer l'hypothèse de position générale vérifiée. $\square$

PROPOSITION 2. — Soient a, e, b des entiers tels que $(a - e, b) = 1$ et $a > e \geq 1$. Notons $\delta = \frac{1}{2}(b - 1)(a + e - 1)$. Soient α, β des entiers tels que $\alpha + \beta \leq \delta$ et $\beta \geq \delta - (b - 1)$. Il existe des polynômes réels $A(t)$, $E(t)$ et $B(t)$ de degrés a, e , et b tels que la courbe paramétrée par

$$X = B(t), \quad Y = \frac{A(t)}{E(t)},$$

ait pour seuls points singuliers dans le plan affine δ points doubles ordinaires, dont α sont réels à tangentes réelles et β sont réels isolés. De plus, pour tout entier $b_0 \leq b$ tel que $b - b_0$ soit pair, il existe un réel x_0 tel que cette courbe rencontre la droite $X = x_0$ en exactement b_0 points réels.

Démonstration. — Si f est une fraction rationnelle définie en $p \in \mathbb{R}$, et si

$$G(z) = f(z) + \frac{\varepsilon}{(z - p)}$$

où ε est un petit nombre réel, alors $\Delta_G(x, y) = 0$ si et seulement si

$$((x - p)^2 + y^2)\Delta_f(x, y) = \varepsilon.$$

Soit V un ouvert contenant le lieu singulier de $\Delta_f = 0$. Si ε est assez petit et de signe adéquat on voit que $\Delta_G = 0$ est, dans le plan des (x, y) réels, la réunion d'un ovale autour de $(p, 0)$ et d'une « petite variation » de $\Delta_f = 0$, c'est-à-dire une figure C^1 proche de $\Delta_f = 0$ en dehors de V . Soit U une (petite) boule contenant $(1, 0)$. En itérant cette construction on en déduit l'existence d'une fraction rationnelle $f(t) = \tilde{A}(t)/\tilde{E}(t)$ (où $\deg(\tilde{A}) = a - 1$ et $\deg(\tilde{E}) = e - 1$) telle que $\Delta_f = 0$ se compose de $e - 1$ petits ovales emboîtés autour de l'origine, et d'une figure qui est C^1 proche de la réunion des $a - e - 1$ droites $(z - 1)^{a-e} = (\bar{z} - 1)^{a-e}$, $(z - 1) \neq (\bar{z} - 1)$ en dehors de U (pour la figure 1, on a pris $e = 3$ et $a - e = 5$). On peut donc supposer que $\Delta_f = 0$ rencontre la réunion des $(b - 1)$ droites $\Delta_{tb}(x, y) = 0$ en $2(\delta - (b - 1))$ points réels vérifiant la condition du lemme 1.

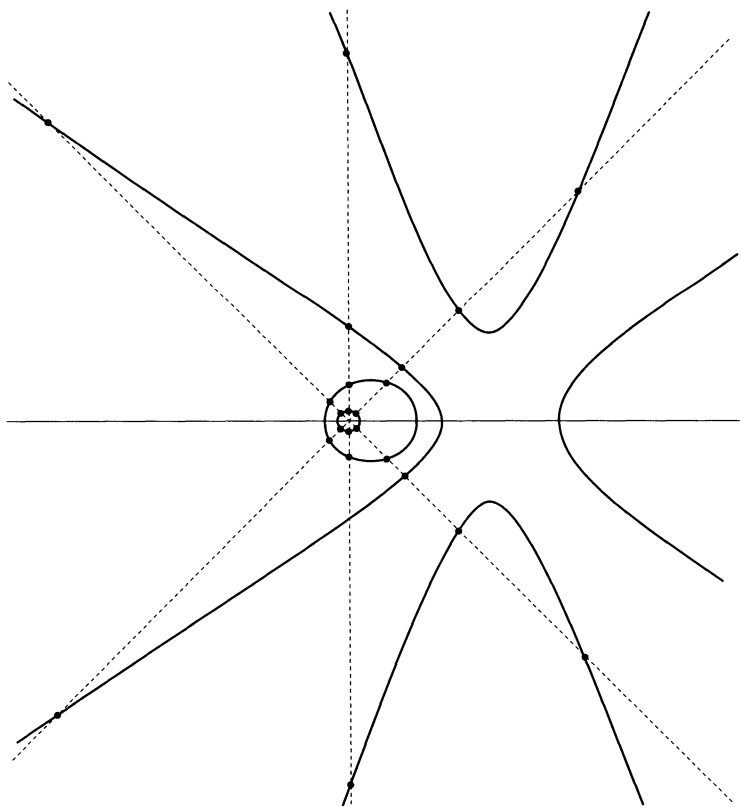


Figure 1 (cf. [P2]). La courbe $\Delta_f = 0$ où $f(t) = \tilde{A}(t)/\tilde{E}(t)$, avec $\deg(\tilde{A}) = 7$ et $\deg(\tilde{E}) = 2$, rencontrant les $b - 1$ droites $\Delta_{tb}(x, y) = 0$ en $(b - 1)(\tilde{a} + \tilde{e} - 1)$ points à coordonnées réelles (on a ici $\tilde{a} = 7$, $b = 4$ et $\tilde{e} = 2$).

D'autre part, d'après le corollaire 1, il existe un polynôme réel $B(t)$ de degré b tel que la fonction $c(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ s'annule en $2(b-1)$ points réguliers distincts de $\Delta_B = 0$ dont $2(\beta - (\delta - (b-1)))$ sont réels, et 2α sont d'abscisse réelle et d'ordonnée imaginaire pure et dont les ordonnées satisfont la condition du lemme 1. Soit E un ensemble compact contenant ces points dans son intérieur et ne contenant pas l'origine. Posons

$$g(z) = \frac{A(z)}{E(z)} = f\left(\frac{z}{k}\right) + \frac{1}{kz}$$

où k est un nombre réel. Un calcul simple montre que $\Delta_g(x, y) = 0$ si et seulement si

$$c_k(x, y) = (x^2 + y^2)\Delta_f\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) - 1 = 0.$$

On voit donc que $c_k(x, y)$ tend uniformément vers $c(x, y)$ sur le compact E quand k tend vers l'infini. Comme $c_k(x, y)$ est réel si x et y le sont (et si x et iy le sont), on voit (par transversalité) que cette fonction s'annule en $2(b-1)$ points de $\Delta_B = 0$, dont $2(\beta - (\delta - (b-1)))$ sont réels, et 2α sont d'abscisse réelle et d'ordonnée imaginaire pure.

Par conséquent, il y aura dans E autant de points d'intersection de chaque sorte dans $\{\Delta_g = 0\} \cap \{\Delta_B = 0\}$ que dans $\{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{\Delta_B = 0\}$.

Pour compter les points d'intersection de $\{\Delta_g = 0\} \cap \{\Delta_B = 0\}$ situés au voisinage de l'infini, utilisons une homothétie de rapport $1/k$ centrée à l'origine. L'homothétique de $\Delta_g = 0$ a pour équation

$$\Delta_f(x, y) - \frac{1}{k^2(x^2 + y^2)} = 0,$$

l'homothétique de $\Delta_B = 0$ a pour équation

$$\Delta_{t^b}(x, y) + O\left(\frac{1}{k}\right) = 0.$$

Par transversalité, on voit donc que $\Delta_g = 0$ et $\Delta_B = 0$ ont $2(\delta - (b-1))$ points d'intersection réels en dehors de E si k est assez grand.

Par le lemme 1, on a donc énuméré δ points doubles de notre courbe, et, par le théorème de Bézout, il n'y en a pas d'autre (cf. [P2]). $\square$

3. Quelques courbes sans point double réel à tangentes réelles.

Pour pouvoir démontrer notre théorème principal par récurrence nous aurons aussi besoin de quelques constructions de courbes rationnelles sans point double réel à tangentes réelles. Les démonstrations sont analogues à celles du paragraphe précédent.

LEMME 2. — *Étant donné un entier u , il existe un réel h et un polynôme $U(t)$ de degré $u + 1$ tel que la courbe affine*

$$X(t) = \varphi(t) = t + \frac{ht}{t^2 + 1}, \quad Y(t) = U(t),$$

ait $2u$ points doubles qui sont tous réels isolés, ou bien (au choix) $2u - 2$ points doubles réels isolés et deux points doubles imaginaires. De plus, pour tout entier $u_0 \leq u + 1$ tel que $u - u_0$ soit impair, il existe un réel x_0 tel que l'équation $U(t) = x_0$ ait exactement u_0 solutions réelles. On peut aussi supposer que $U(\sqrt{-1})$ n'est pas réel.

Démonstration. — Un calcul simple montre que $\Delta_\varphi(x, y) = 0$ si et seulement si

$$(x^2 + (y - 1)^2)(x^2 + (y + 1)^2) = h(x^2 + y^2 - 1).$$

Si h tend vers l'infini, $\Delta_\varphi(x, y) = 0$ se compose de deux ovales dans le plan des (x, y) réels. L'un de ces ovales tend au sens C^1 vers le cercle unité. L'homothétique de l'autre ovale dans l'homothétie de centre l'origine et de rapport $1/\sqrt{h}$ tend aussi vers le cercle unité au sens C^1 .

On peut trouver, grâce au corollaire 1, un polynôme réel $U(t)$ de degré $u + 1$ tel que $\Delta_U = 0$ rencontre le petit ovale en $2u$ points réels, ou (au choix) en $2u - 4$ points réels, et 4 points d'abscisse non réelle. Si h est assez grand, $\Delta_U = 0$ rencontre le grand ovale en $2u$ points réels, et par suite $\Delta_\varphi = 0$ rencontre $\Delta_U = 0$ en $4u$ points réels (ou $4u - 4$ points réels et 4 points d'abscisse non réelle.) On en déduit le résultat par transversalité. En rajoutant au besoin un petit monôme εt à $U(t)$, on peut de plus supposer que $U(\sqrt{-1})$ n'est pas réel. $\square$

PROPOSITION 3. — *Étant donnés un entier pair b et des entiers β , et γ tels que $\beta + 2\gamma = 2(b - 1)$, il existe un polynôme $B(t)$ de degré b , et un*

réel h tel que la courbe

$$X(t) = \varphi(t) = t + \frac{ht}{t^2 + 1}, \quad Y(t) = B(t),$$

ait 2γ points doubles imaginaires, β points doubles réels isolés, et aucun autre point singulier dans le plan affine. De plus, pour tout entier pair $b_0 \leq b$, il existe un réel x_0 tel que l'équation $B(t) = x_0$ ait exactement b_0 solutions réelles.

Démonstration. — Supposons tout d'abord $\beta = 2u$ avec u impair; γ est donc pair. Par le lemme 2, il existe un polynôme de degré $u + 1$ à coefficients réels $U(t)$ et un réel h , tels que la courbe affine $(X(t) = t + ht/(t^2 + 1), U(t))$ ait β points réels isolés. L'intersection de $\Delta_X = 0$ et de $\Delta_U = 0$ se compose alors de $4u$ points d'intersection (a_j, b_j) à coordonnées réelles. Les nombres complexes $u_j = a_j + b_j\sqrt{-1}$, qui sont les valeurs du paramètre donnant les points doubles de cette courbe, vérifient $X(u_j) = X(\bar{u}_j)$, et comme $U(\sqrt{-1})$ n'est pas réel, ils sont différents de $\pm\sqrt{-1}$. Choisissons des disques disjoints $D(u_j)$ contenant ces points, et ne contenant aucun point de ramification de $X(t)$ et ne contenant pas non plus $\pm\sqrt{-1}$. Soit

$$f(t) = (t - y_1)^2(t - y_2)^2 \cdots (t - y_{\gamma/2})^2$$

où les y_ℓ sont des nombres strictement positifs distincts. Considérons $B(t) = U(t)f(t/k)$. Choisissons des disques disjoints $D(y_\ell)$ contenant les y_ℓ et ne contenant aucun point de ramification de $X(t)$, et ne contenant pas non plus 0 ni $\pm\sqrt{-1}$. Au voisinage de chacun des disques $D(u_j)$ et $kD(y_\ell)$, l'équation d'inconnue s

$$X(s) = X(t), \quad s \neq t \iff (1 + s^2)(1 + t^2) = h(st - 1)$$

a deux racines $g_1(t)$ et $g_2(t)$. Ces deux racines tendent vers $\pm\sqrt{-1}$ sur $kD(y_\ell)$ quand k tend vers l'infini. En prenant la conjuguée de cette équation, on voit que $\overline{g_1(t)} = g_1(\bar{t})$ ou bien $\overline{g_1(t)} = g_2(\bar{t})$. Quand t est réel et assez grand $g_1(t)$ n'est pas réel, par conséquent on aura $\overline{g_1(t)} = g_2(\bar{t})$ sur chaque disque $kD(y_\ell)$ si k est assez grand. Choisissons $g_1(t)$ sur chacun des disques $D(u_j)$ tel que $g_1(u_j) = \bar{u}_j$; on aura sur chacun de ces disques $\overline{g_1(t)} = g_1(\bar{t})$. On aura aussi $g_1(g_1(t)) = t$ sur chaque disque $D(u_j)$.

Si k est assez grand, on aura $|B(g_1(t))| < |B(t)|$ sur le bord de chaque disque $kD(y_\ell)$. Et par suite $B(t) - B(g_1(t))$ a le même nombre de racines

que $B(t)$ sur chacun de ces disques, c'est-à-dire deux. Si t est réel et assez grand, $B(t) - B(g_1(t))$ n'est pas réel, car $B(g_1(t))$ est proche de $B(\pm\sqrt{-1})$ qui n'est pas réel quand k est assez grand. On en déduit que ces racines, τ_1 et τ_2 , ne sont pas réelles. On obtient donc ainsi quatre couples (t, s) distincts de nombres non réels $(\tau_1, g_1(\tau_1))$, $(\tau_2, g_1(\tau_2))$, $(\bar{\tau}_1, g_2(\bar{\tau}_1))$, $(\bar{\tau}_2, g_2(\bar{\tau}_2))$, tels que $|t| > |s|$ et $B(t) = B(s)$, $X(t) = X(s)$. Ces points donnent quatre points doubles. En tout on obtient donc ainsi 2γ points doubles imaginaires.

Sur un disque $D(u_j)$, on a

$$(B(t) - B(g_1(t))) - f(0)(U(t) - U(g_1(t))) = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

et par suite, si k est assez grand, $B(t) - B(g_1(t))$ a autant de racines que $U(t) - U(g_1(t))$, c'est-à-dire une seule t_j . Comme g_1 est involutive sur $D(u_j) \cup D(\bar{u}_j)$, $g_1(\bar{t}_j)$ est aussi une racine de $B(t) - B(g_1(t))$ contenue dans le disque $D(u_j)$. On a donc $g_1(\bar{t}_j) = t_j$ et $\bar{t}_j = g_1(t_j)$. On obtient donc ainsi $4u$ valeurs du paramètre telles que $B(t) = B(\bar{t})$, $X(t) = X(\bar{t})$, c'est-à-dire $\beta = 2u$ points doubles réels isolés, ce qui achève la démonstration dans ce premier cas.

Le deuxième cas $\beta = 2v$ avec v pair se traite de manière identique. On prend alors un polynôme $U(t)$ de degré $v + 2$, tel que la courbe $(X(t), U(t))$ ait $2v$ points doubles isolés et 2 points doubles imaginaires, et $f(t)$ un polynôme ayant $\frac{1}{2}(\gamma - 1)$ racines doubles strictement positives. $\square$

PROPOSITION 4. — Soient $a > e \geq 2$ et b des entiers tels que b soit pair et $(a - e, b) = 1$. Si γ et β vérifient

$$\beta + 2\gamma = \delta = \frac{1}{2}(b - 1)(a + e - 1), \quad \beta \geq \delta - 2(b - 1),$$

il existe des polynômes réels $A(t), E(t), B(t)$ de degrés a, e, b tels que la courbe affine $X(t) = B(t)$, $Y(t) = A(t)/E(t)$ ait β points doubles isolés, 2γ points doubles imaginaires, et aucun autre point singulier. De plus, pour tout entier pair $b_0 \leq b$, il existe un réel x_0 tel que l'équation $B(t) = x_0$ ait exactement b_0 solutions réelles.

Démonstration. — D'après la proposition 3, il existe un polynôme $B(t)$ tel que la courbe

$$X = B(t), \quad Y = \varphi(t) = t + \frac{ht}{t^2 + 1},$$

ait $\beta_1 = \beta - (\delta - 2(b - 1))$ points isolés et 2γ points doubles imaginaires. Comme dans la démonstration de la proposition 2, il existe des polynômes

$A_{-2}(t)$ et $E_{-2}(t)$ de degrés $a - 2$ et $e - 2$ tels que la courbe affine $(t^b, A_{-2}(t)/E_{-2}(t))$ ait $\delta - 2(b - 1)$ points doubles isolés. Posons

$$f(t) = \frac{A_{-2}(t)}{E_{-2}(t)}.$$

On peut supposer que $\Delta_f(0, 0) = 1$. Considérons

$$g(t) = kf\left(\frac{t}{k}\right) + \frac{ht}{t^2 + 1}.$$

On a

$$\Delta_g(x, y) = \Delta_f\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) - 1 + \Delta_\varphi(x, y).$$

Si k est grand, l'ensemble $\Delta_g(x, y) = 0$ se compose d'une partie bornée qui est proche de $\Delta_\varphi(x, y) = 0$ et d'une partie à l'infini proche de l'homothétique de $\Delta_f(x, y) = 0$ dans le rapport k (car $\Delta_\varphi(x, y)$ tend vers 1 quand (x, y) tend vers l'infini). Et donc, par transversalité, $\Delta_g = 0$ rencontrera $\Delta_B = 0$ en $2\beta = 2\beta_1 + 2(\delta - 2(b - 1))$ points (x, y) réels et en 4γ points d'abscisses non réelles. Par le théorème de Bézout, on voit qu'il n'y en a pas d'autre. $\square$

4. Démonstration du théorème.

PROPOSITION 5. — Soit a, e, b des entiers tels que $a - e = 1$ ou bien $a - e = b - 1$. Soient α, β, γ des entiers tels que

$$\alpha + \beta + 2\gamma = \frac{1}{2}(b - 1)(a + e - 1).$$

Il existe des polynômes réels A, E, B, B_1 de degré a, e, b et $b_1 \leq b$, tels que la courbe affine paramétrée par

$$X = \frac{B(t)}{B_1(t)}, \quad Y = \frac{A(t)}{E(t)B_1(t)},$$

ait α points doubles réels à tangentes réelles, β points réels isolés, et 2γ points doubles imaginaires. Dans le cas où $a - e = 1$, on peut de plus supposer que $b_1 = 0$. De plus, pour tout entier $b_0 \leq b$ tel que $b - b_0$ soit pair, il existe un réel x_0 tel que l'équation $X(t) = x_0$ ait exactement b_0 solutions réelles.

Démonstration. — Notons $\delta = \alpha + \beta + 2\gamma$.

• *Cas $a - e = 1$.* — Démontrons le résultat par récurrence sur e . Précisons l'hypothèse de récurrence en y incluant le fait que les polynômes $B(t)$ ont toutes leurs racines réelles, et prennent des valeurs différentes en chacun de leurs extremums.

L'assertion est évidente pour $e = 0$ et si $e = 1$, c'est la proposition 1. Supposons donc $e \geq 2$.

▷ Si $\beta \geq \delta - (b - 1)$, on applique la proposition 2; sinon on a $\alpha + 2\gamma > b - 1$.

▷ Si $\alpha = 0$, b pair et $2\gamma \leq 2(b - 1)$, on applique la proposition 4.

▷ Si $\alpha = 0$, $\gamma > b - 1$, par récurrence il existe des polynômes $A_{-2}(t)$, $E_{-2}(t)$ et $B(t)$ de degrés $a - 2$, $e - 2$, b tels que la courbe paramétrée par $X(t) = B(t)$, $Y(t) = A_{-2}(t)/E_{-2}(t)$ ait $\delta - 2(b - 1)$ points doubles dont $2(\gamma - (b - 1))$ imaginaires, et les autres réels isolés. Soit z un nombre non réel qui n'est pas un point de ramification de $B(t)$. La courbe affine paramétrée par

$$X(t) = B(t), \quad Y(t) = \frac{A_{-2}(t)}{E_{-2}(t)} + \frac{\varepsilon}{t - z} + \frac{\varepsilon}{t - \bar{z}},$$

répond à la question si ε est assez petit. Comme $X(t)$ n'est pas modifié pour cette nouvelle courbe, elle coupe toute droite $X(t) = x_0$ en le même nombre de points que la précédente.

▷ Si $\alpha \neq 0$ ou si b est impair, soient $\alpha_1 \leq \alpha$, $\gamma_1 \leq \gamma$ tels que $(\alpha_1 + 1) + 2\gamma_1 = b$. Par récurrence, il existe des polynômes B , A_{-1} , E_{-1} de degrés b , $a - 1$, $e - 1$ tels que la courbe

$$X = B(t), \quad Y = f(t) = \frac{A_{-1}(t)}{E_{-1}(t)},$$

ait $\alpha - \alpha_1, \beta, 2(\gamma - \gamma_1)$ points doubles de chaque type et rencontre la droite $X = X_0$ en $\alpha_1 + 1$ points réels. Soit p un nombre réel tel que $X(p) = X_0$. La courbe

$$X = B(t), \quad Y = f(t) + \frac{\varepsilon}{t - p},$$

aura $\alpha, \beta, 2\gamma$ points doubles de chaque type si ε est assez petit. De plus $X(t)$ n'étant pas modifié, cette nouvelle courbe coupe toute droite $X(t) = x_0$ en exactement autant de points que la précédente.

• *Cas $a - e = b - 1$.* — On fait aussi une récurrence sur e , l'hypothèse de récurrence contenant les mêmes précisions sur le polynôme $B(t)$ que dans le cas précédent.

Si $e = 0$, il s'agit de démontrer le résultat pour les courbes planes. On fait une récurrence sur le degré d . Pour obtenir les précisions voulues sur le polynôme $B(t)$, il suffira de vérifier l'existence d'une droite réelle ayant d points d'intersection réels (distincts ou confondus) avec la courbe.

La récurrence commence facilement : en effet, si $d \leq 2$ il n'y a rien à démontrer.

▷ Si $\beta \geq \frac{1}{2}(d-2)(d-3)$, posons $b = a = d-1$ et $e = 1$. On a $(a-e, b) = 1$ et $a > e \geq 1$. Si l'on pose $\delta = \frac{1}{2}(b-1)(a+e-1) = (d-1)(d-2)$, on a aussi $\beta \geq \delta - (b-1) = \frac{1}{2}(d-2)(d-3)$. On peut donc appliquer la proposition 2, ce qui nous donne une courbe plane répondant à la question.

Nous supposons donc dorénavant que $\beta < \frac{1}{2}(d-2)(d-3)$.

▷ Supposons $\alpha = 0$ et d pair. Par récurrence, il existe une courbe C_{d-1} de degré $d-1$ ayant β points doubles isolés, $2\gamma - (d-2)$ points doubles imaginaires, et rencontrant une droite réelle D en un seul point réel. On obtient alors notre courbe en simplifiant ce point de la courbe $C_{d-1} \cup D$. Si L est une droite réelle rencontrant C_{d-1} en $d-1$ points réels elle rencontrera la nouvelle courbe en d points réels.

▷ Si $\alpha = 0$, $\beta \leq \frac{1}{2}(d-3)(d-4)$ et $\beta \neq 0$. Par récurrence, il existe une courbe C_{d-2} de degré $d-2$ ayant $\beta-1$ points doubles isolés et aucun point double réel à tangentes réelles. Soit L une droite réelle rencontrant C_{d-2} en $d-2$ points réels, et P un point réel de L n'appartenant pas à C_{d-2} . Soit D une droite imaginaire passant par P et rencontrant C_{d-2} en $d-2$ points distincts, $\bar{D}$ sa conjuguée. On obtient alors notre courbe en simplifiant une paire de points doubles imaginaires de $C_{d-2} \cup D \cup \bar{D}$. Cette courbe rencontre bien la droite réelle L en d points réels.

▷ Supposons $\alpha = \beta = 0$ et d impair. On a $d = 4k+1$. Soient $C_1, \dots, C_k$ k coniques en position générale, n'ayant pas d'équation réelle, qui coupent la droite de l'infini en $2k$ points réels, et une (autre) droite réelle D en $2k$ points imaginaires distincts. Soit C_{2k} la réunion des ces coniques, et $\bar{C}_{2k}$ sa conjuguée complexe. Choisissons un point z_j dans $C_j \cap D$. On obtient alors notre courbe en simplifiant les k paires de points doubles $(z_j, \bar{z}_j)$ sur la courbe $C_{2k} \cup \bar{C}_{2k} \cup D$. Cette courbe rencontre la droite de l'infini en d points réels.

▷ Si $\alpha = 0$, d impair et $\beta \geq \frac{1}{2}(d-3)(d-4)$, prenons $a = b = d-1$ et $e = 1$. Alors b est pair, $\beta > \delta - 2(b-1)$, et on applique la proposition 4.

▷ Enfin, supposons $\alpha \neq 0$ et $\alpha + 2\gamma > d-2$. Soient $\alpha_1 \leq \alpha$, $\gamma_1 \leq \gamma$ tels que $\alpha_1 + 2\gamma_1 = d-2$. Par récurrence il existe une courbe C_{d-1} de

degré $d - 1$ ayant $\alpha - \alpha_1$, β , $2(\gamma - \gamma_1)$ points doubles de chaque type qui rencontre une droite réelle D en $\alpha_1 + 1$ points réels. On obtient alors C_d en simplifiant un de ces points sur la courbe $C_d \cup D$ grâce au théorème de Brusotti.

- Le cas $e = 1$ se déduit du cas précédent. Soit $(A(t) : \tilde{B}(t) : \tilde{D}(t))$ les coordonnées homogènes d'une courbe plane de degré $b + 1$. On peut supposer que $\deg(A) = b$ et $\deg(\tilde{D}) = \deg(\tilde{B}) = b + 1$. En retranchant à $\tilde{D}$ et à $\tilde{B}$ un multiple de A , on peut supposer que $\tilde{B}(t) = B(t)E(t)$ et $\tilde{D}(t) = B_1(t)E(t)$ où $\deg(E) = 1$. En considérant les coordonnées affines de cette courbe on obtient le résultat pour $e = 1$.

- Si $e \geq 2$, la récurrence se poursuit exactement comme dans le premier cas où $a - e = 1$. □

Démonstration du théorème. — Supposons tout d'abord que $\alpha + \beta + 2\gamma = C(d, n)$. Posons $m = [(d - 1)/(n - 1)]$ et $b = m + 1 \geq 2$.

- Si $n = 2k + 1$, soient $a = e + 1 = d - kb$ et

$$X = B(t), \quad Y = \frac{A(t)}{E(t)},$$

donnés par la proposition 5. Alors la courbe

$$(X, X^2, \dots, X^k, Y, YX, \dots, YX^k)$$

est une courbe rationnelle de degré d non dégénérée dans $\mathbb{P}_n$ et qui possède $C(d, n)$ points doubles dans l'anneau. Comme $C(d, n)$ est une borne pour le nombre de points doubles, cette courbe n'a pas d'autre point singulier, et répond donc à la question.

- Si $n = 2k$, soient $a = d - 1 - (k - 1)b$, $e = d - kb$ et

$$X = \frac{B(t)}{B_1(t)}, \quad Y = \frac{A(t)}{E(t)B_1(t)},$$

donnés par la proposition 5. Dans ce cas on prend la courbe

$$(X, X^2, \dots, X^k, Y, YX, \dots, YX^{k-1}).$$

Pour conclure, on constate que les courbes sont construites sur des surfaces qui sont isomorphes à l'hyperboloïde dans le premier cas, et au plan projectif éclaté dans le deuxième cas (voir [H], p. 93). Par conséquent, on peut appliquer le théorème de Brusotti, ou celui de Gudkov, pour simplifier un nombre arbitraire de points doubles sur les courbes obtenues. □

BIBLIOGRAPHIE

- [B] L. BRUSOTTI, Sulla “piccola variazione” di una curva piana algebrica reali, *Rend. Rom. Ac. Lincei*, 30 (1921).
- [G] D.A. GUDKOV, Generalization of a theorem of Brusotti for curves on a surface of second order, *Functional Analysis and its applications*, 14, n°1 (1980), 15–18.
- [H] J. HARRIS, Algebraic geometry, a first course, *Graduate texts in Mathematics*, Springer, 133 (1993).
- [H.E] J. HARRIS, Curves in projective space (Chapter III in collaboration with D. Eisenbud), *Les presses de l’université de Montréal*, 1982.
- [P1] D. PECKER, Simple constructions of algebraic curves with nodes, *Compositio Math.*, 87 (1993), 1–4.
- [P2] D. PECKER, Un théorème de Harnack dans l’espace, *Bull. Sci. Math.*, 118 (1994), 475–484.
- [P3] D. PECKER, On the geometric genus of projective curves, *J. Pure and Applied Algebra*, 136 (1999), 57–65.
- [P4] D. PECKER, Note sur la réalité des points doubles des courbes gauches, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 324, série I (1997), 807–812.
- [R] J.-J. RISLER, Constructions d’hypersurfaces réelles (d’après Viro), exposé 763 (3), *Séminaire Bourbaki, Astérisque*, 216 (1993), 69–86.
- [S] E.I. SHUSTIN, Real plane algebraic curves with prescribed singularities, *Topology*, 32 (4) (1993), 845–856.
- [T] A. TANNENBAUM, On the geometric genera of projective curves, *Math. Ann.*, 240 (1979), 213–221.
- [V] O.Ya. VIRO, Constructing real algebraic varieties with prescribed topology, Thèse, LOMI, Leningrad, English translation : Patchworking real algebraic varieties, Uppsala University, 1985.

Manuscrit reçu le 27 février 1998,
accepté le 19 juin 1998.

Daniel PECKER,
Université Paris VI
Département de Mathématiques
case 247, 4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05.
pecker@math.jussieu.fr