ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHRISTIAN EVEN

Étude d'une fonction remarquable associée aux moyennes de convolution

Annales de l'institut Fourier, tome 49, nº 2 (1999), p. 687-705

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_2_687_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
49, 2 (1999), 687–705

ÉTUDE D'UNE FONCTION REMARQUABLE ASSOCIÉE AUX MOYENNES DE CONVOLUTION

par Christian EVEN

Introduction.

La resommation réelle, c'est-à-dire l'attribution d'une somme réelle $\varphi(\mathrm{z})$ à une série divergente réelle $\widetilde{\varphi}(z) = \sum a_\sigma z^{-\sigma}$, conduit dans les cas les plus simples à composer trois opérations :

1. l'application de la transformation de Borel formelle $\mathcal{B}$ qui change $\widetilde{\varphi}(z)$ en une série convergente $\sum a_\sigma \zeta^{\sigma-1}/\Gamma(\sigma)$ de somme $\widehat{\varphi}(\zeta)$ pour ζ petit ;

2. le prolongement analytique de $\widehat{\varphi}(\zeta)$ le long de $\mathbb{R}_+$;

3. l'application de la transformée de Laplace $\mathcal{L}$ à la fonction $\widehat{\varphi}(\zeta)$ ainsi prolongée ;

soit schématiquement :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\varphi}(z) & \dashrightarrow & \varphi(z) \\ {\scriptstyle \mathcal{B}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathcal{L}} \\ \widehat{\varphi}(\zeta)\ \text{local} & \longrightarrow & \widehat{\varphi}(\zeta)\ \text{global} \end{array}$$

Si le prolongement $\widehat{\varphi}$ le long de $\mathbb{R}_+$ est uniforme, le procédé ne fonctionne évidemment qu'à la condition que $\widehat{\varphi}$ soit de croissance au plus exponentielle. Mais les choses se compliquent lorsque $\widehat{\varphi}$ est multiforme au-dessus de $\mathbb{R}_+$, et ceci même dans le cas le plus favorable, où les singularités

Mots-clés : Resommation – Convolution – Diffusion – Théorie de Fredholm – Équations intégrales – Résolvant.
Classification math. : 47A10 – 47G10 – 45B05.

sont toutes intégrables et contournables chacune, tant à droite qu'à gauche. En pareil cas, l'intégrale de Laplace ne saurait porter directement sur la fonction multiforme $\widehat{\varphi}$, mais seulement sur une moyenne uniforme $\mathbf{m}\widehat{\varphi}$ judicieusement choisie :

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\varphi}(z) & & \dashrightarrow & & \varphi(z) \\ {\scriptstyle \mathcal{B}}\downarrow & & & & \uparrow{\scriptstyle \mathcal{L}} \\ \widehat{\varphi}(\zeta) \text{ local} & \longrightarrow & \widehat{\varphi}(\zeta) \text{ global multiforme} & \longrightarrow & \mathbf{m}\widehat{\varphi}(\zeta) \text{ global uniforme} \end{array}$$

Mais nous n'aurons une resommation satisfaisante, c'est-à-dire vérifiant :

$$\widetilde{\varphi}_1(z)\widetilde{\varphi}_1(z) \mapsto \varphi_1(z)\varphi_2(z) \tag{1}$$

$$\widetilde{\varphi}(z) \text{ réel } \mapsto \varphi(z) \text{ réel} \tag{2}$$

que si la moyenne respecte la convolution[1]

$$\mathbf{m}(\widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2) = \mathbf{m}(\widehat{\varphi}_1) * \mathbf{m}(\widehat{\varphi}_2) \tag{3}$$

et que si elle respecte la réalité

$$\widehat{\varphi}(\zeta) \text{ germe réel } \mapsto \mathbf{m}\widehat{\varphi}(\zeta) \text{ fonction uniforme réelle.} \tag{4}$$

Dans toute la suite, nous supposerons pour simplifier que toutes les singularités réelles de $\widehat{\varphi}$ sont au-dessus de $\mathbb{N}$. Se donner une moyenne uniformisante revient donc à se donner des poids

$$\mathbf{m}^{\epsilon} = \mathbf{m}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r} \quad \Big(\varepsilon_i \in \{+,-\}; \sum_{\varepsilon_i} \mathbf{m}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r} = 1\Big) \tag{5}$$

et à définir l'action de $\mathbf{m}$ par

$$\mathbf{m}\widehat{\varphi}(\zeta) = \sum_{\varepsilon_i} \mathbf{m}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r} \widehat{\varphi}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r}(\zeta), \text{ si } r < \zeta < r+1 \tag{6}$$

où $\widehat{\varphi}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r}(\zeta)$ désigne bien sûr la détermination de $\widehat{\varphi}$ obtenue par prolongement de $\widehat{\varphi}(\zeta)$ à partir de $\zeta = 0$ et en contournant la singularité au point j par le dessous si $\varepsilon_j = +$ et par le dessus si $\varepsilon_j = -$.

Il est clair que la moyenne $\mathbf{m}$ respecte la réalité si et seulement si

$$\mathbf{m}^{\bar{\varepsilon}_1,\dots,\bar{\varepsilon}_r} = \operatorname{conj}(\mathbf{m}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r}), \quad \forall(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r) \tag{7}$$

où $\bar{\varepsilon}_j$ désigne le signe opposé de ε_j et où conj dénote la conjugaison complexe. Dans le cas important de poids tous réels, la condition s'écrit

$$\mathbf{m}^{\bar{\varepsilon}_1,\dots,\bar{\varepsilon}_r} = \mathbf{m}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r}, \quad \forall(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r) \tag{8}$$

[1] Attention : au premier membre, on convole localement les germes $\widehat{\varphi}_1$ et $\widehat{\varphi}_2$, puis on prolonge le germe convolé et on en prend ensuite la moyenne; tandis qu'au second membre on convole globalement les germes uniformes $\mathbf{m}(\widehat{\varphi}_1)$ et $\mathbf{m}(\widehat{\varphi}_2)$.

Quant au respect de la convolution une étude algébrique montre qu'elle équivaut à une infinité de conditions du type

$$\mathbf{m}^a \mathbf{m}^b = \sum T_c^{a,b} \mathbf{m}^c \tag{9}$$

où a, b, c désignent trois séquences quelconques de signes $\pm$ (de longueur r_1, r_2 et $r_1 + r_2$) et où T dénote un "tenseur de structure" à valeurs $T_c^{a,b}$ toutes entières.

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier une fonction remarquable, notée $\mathbf{cross_m}(z)$ associée à chaque moyenne $\mathbf{m}$ et définie comme fonction génératrice des poids correspondant aux chemins alternés $+ - + - + \cdots$, soit

$$\mathbf{cross_m}(z) = 1 + \mathbf{m}^{+} z + \mathbf{m}^{+-} z^2 + \mathbf{m}^{+-+} z^3 + \mathbf{m}^{+-+-} z^4 + \cdots \tag{10}$$

Des considérations de "calcul étranger" montrent que si la moyenne $\mathbf{m}$ respecte convolution et réalité et si ses poids sont réels (autrement dit si on a (8) et (9)), la fonction $\mathbf{cross_m}$ vérifie toujours

$$\mathbf{cross_m}(z)\mathbf{cross_m}(-z) = 1. \tag{11}$$

Nous renvoyons le lecteur à Jean Ecalle et Frédéric Menous ([3], [4], [6]) pour ces points que nous ne développerons pas ici. Nous essaierons simplement d'indiquer ce qui fait l'intérêt et l'importance de la fonction **cross**.

Il se trouve en effet qu'on ne peut appliquer la transformation de Laplace à la moyenne $\mathbf{m}\widehat{\varphi}(\zeta)$ que si celle-ci est (au plus) de croissance exponentielle. Or pour la plupart des séries divergentes $\widetilde{\varphi}(z)$ d'origine naturelle dont la transformée de Borel est ramifiée aux points de $\mathbb{N}$, une difficulté précise se présente : même lorsque les déterminations latérales (inférieure et supérieure) de $\widehat{\varphi}(\zeta)$ sont de croissance exponentielle, le long de chemins γ suffisamment sinueux (*i.e.* longeant l'axe $\mathbb{R}_+$ en le traversant "assez fréquemment"), cette même fonction $\widehat{\varphi}(\zeta)$ présente (très génériquement) une croissance (légèrement) surexponentielle.

Le seul moyen pour pallier cette difficulté consiste à recourir à de "bonnes moyennes" $\mathbf{m}$ ("well-behaved averages") qui par un jeu subtil "de compensations universelles" entre les diverses déterminations, livrent une somme $\mathbf{m}\widehat{\varphi}(\zeta)$ à croissance exponentielle (*cf.* [3], [4], [6]).

Mais on pourrait songer à un autre procédé plus brutal et plus simple : pourquoi ne pas utiliser des moyennes $\mathbf{m}$ "magiques", dont les poids $\mathbf{m}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r}$ décroîtraient surexponentiellement le long des chemins γ

les plus "sinueux", de manière à compenser directement la croissance surexponentielle de $\widehat{\varphi}(\zeta)$ le long de chacun de ces chemins et livrer, au bout du compte, une moyenne $\mathbf{m}\widehat{\varphi}(\zeta)$ à croissance (au plus) exponentielle?

L'idée est séduisante, mais irréalisable : la compensation ne peut pas se faire directement (sur chaque chemin séparément), mais seulement indirectement, en prenant en compte la totalité des chemins. Autrement dit, il existe de bonnes moyennes, mais il n'en existe pas de "magiques". Or, pour établir ce dernier point, la méthode la plus directe consiste à examiner les chemins de sinuosité maximale, c'est-à-dire les chemins alternés $(+-+-+-\cdots)$ et à montrer que les poids $\mathbf{m}^{+-+-\cdots}$ qui leur correspondent ne peuvent jamais présenter une décroissance suffisamment forte. Mais cela conduit tout droit à étudier les fonctions génératrices de ces poids, c'est-à-dire $\mathbf{cross}_{\mathbf{m}}(z)$.

Plus généralement, les poids correspondant aux chemins alternés sont les plus "révélateurs" et la connaissance de $\mathbf{cross}_{\mathbf{m}}(z)$ fournit des renseignements précieux sur la moyenne $\mathbf{m}$ sous-jacente.

Donnons trois exemples associés aux importantes moyennes **mun**, **mon** et **man** (*cf.* [3], [4], [6]) :

$$\mathbf{cross}_{\mathbf{mon}}(z) = \exp(z/2) \qquad \text{fonction entière}$$

$$\mathbf{cross}_{\mathbf{man}}(z) = \frac{1+z/4}{1-z/4} \qquad \text{fonction méromorphe, rationnelle}$$

$$\mathbf{cross}_{\mathbf{mun}}(z) = \sqrt{\frac{1+z/2}{1-z/2}} \qquad \text{fonction algébrique.}$$

On voit qu'ici $\mathbf{cross}_{\mathbf{m}}$ est respectivement entière, rationnelle et algébrique. Le cas intermédiaire est particulièrement intéressant, car la moyenne **man** se trouve être induite par un processus de diffusion (*cf.* [3], [4], [6]). Il s'agit là d'un procédé général – que nous allons préciser – pour fabriquer des $\mathbf{m}$ qui seront automatiquement de "bonnes moyennes" (respectant réalité, convolution, et assurant la "compensation").

Il est donc naturel de se demander à quoi ressemble $\mathbf{cross}_{\mathbf{m}}$ pour une moyenne générale $\mathbf{m}$ induite par diffusion. Nous allons montrer ici que la rationalité est "accidentelle" (nous verrons pourquoi), la méromorphie est en revanche parfaitement typique : toute moyenne $\mathbf{m}$ induite par diffusion donne lieu à une fonction $\mathbf{cross}_{\mathbf{m}}(z)$ méromorphe. Qui plus est, ces fonctions méromorphes revêtent une forme remarquable, que l'on peut éclairer et préciser grâce à la théorie des équations intégrales et des déterminants de Fredholm.

Cas des moyennes induites par diffusion.

Rappelons comment une diffusion de distribution f induit une moyenne $\mathbf{m}_f$: il s'agit d'un processus de diffusion à prendre ici dans un sens quelque peu dégénéré; $f \in L_1(\mathbb{R})$ correspond à la densité de probabilité de présence d'une particule originellement située en 0 après une unité de temps le long d'un axe réel. Le poids de la moyenne $\mathbf{m}_f^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s}$ $(\varepsilon_j \in \{+,-\})$ correspond à la probabilité que la particule se trouve après un temps s sur la demi-droite $\mathbb{R}_{\varepsilon_s}$ après s'être trouvée successivement aux temps i sur les demi-droites $\mathbb{R}_{\varepsilon_i}$.

On peut ainsi définir une famille de fonctions indexée par les $\varepsilon = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_s)$ de la façon suivante :

$$f^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^s} f(x_1)\cdots f(x_s) H(\varepsilon_1 \check{x}_1)\cdots H(\varepsilon_x \check{x}_s)\delta(\check{x}_s - x)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_s$$

$$\begin{cases} f^{\varepsilon_1}(x) = f(x)H(\varepsilon_1 x) \\ f^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_s}(x) = (f^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{s-1}} * f)(x)H(\varepsilon_s x) \end{cases}$$

où H représente la fonction de Heaviside et $\check{x}_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i$, de sorte que

$$\mathbf{m}_f^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} f^\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le cas qui nous intéresse, correspond aux moyennes de convolution à support dans $\mathbb{N}$ vérifiant les propriétés (8) et (9), se traduit par le fait que f doit être réelle paire et telle que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

La fonction remarquable associée à cette moyenne est la série génératrice de ces poids alternés, soit

$$1 + \mathbf{m}_f^+ z + \mathbf{m}_f^{+-} z^2 + \mathbf{m}_f^{+-+} z^3 + \cdots$$

Nous la noterons plus simplement : $\mathbf{cross}_f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{m}_n(f) z^n$.

Si nous introduisons pour plus de clarté les opérateurs suivants :

- C^-, l'opérateur de changement de signe : $C^- \ : g \mapsto (x \mapsto g(-x))$.
- $C^+ = \mathrm{Id}$, de sorte que $C^{\varepsilon_1}C^{\varepsilon_2} = C^{\varepsilon_1\varepsilon_2}$.
- H_ε, l'opérateur de multiplication par la fonction $x \mapsto H(\varepsilon x)$, où H est la fonction de Heaviside, remarquons que c'est un projecteur. On a aussi $C^{\varepsilon_1} H_{\varepsilon_2} = H_{\varepsilon_1\varepsilon_2} C^{\varepsilon_1}$.

- $(*f)$, l'opérateur de convolution par f : $(*f)\ : g \mapsto g * f$.
  D'où, en tenant compte de la parité de f,
  $$C^-(*f) = (*f) \quad \text{et} \quad (*f)C^- = C^-(*f).$$
- $K_\varepsilon = H_\varepsilon(*f)$, ce qui donne, par application des règles précédentes,
  $$K_\varepsilon C^- = C^- K_{-\varepsilon}.$$

Alors il apparaît que la suite de fonctions $f_n = C^{(-)^{n-1}} f^{+-\cdots(-)^{n-1}}$ est définie par la relation de récurrence
$$f_n = C^{(-)^{n-1}} K_{(-)^{n-1}} C^{(-)^{n-2}} f_{n-1} = C^- K_- f_{n-1}$$
et on pourra poser $f_0 = \delta$ avec $f_1 = H_+ f = C^- H_+ f$.

Or les règles précédentes montrent que $H_+ C^- K_- H_+ = C^- K_- H_+$, ce qui montre que cette expression définit par conséquent un opérateur K_f de $H_+ L_p = L_p(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même pour $p \geq 1$. Cet opérateur est un opérateur intégral de noyau $f(x+t)$:
$$K_f g(x) = \int_0^\infty f(x+t) g(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus il apparaît que $K_f = (*H_+ f)C^- H_+$.

On a ainsi $f_{n+1} = K_f f_n$ et (f_n) est une suite de $L_1(\mathbb{R}_+)$ pour $n \geq 1$, de plus
$$\mathbf{m}_n(f) = \mathbf{m}_f^{+-\cdots(-)^{n-1}} = \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x$$
en prenant pour convention : $\displaystyle\int_0^\infty f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

LEMME 1. — *K_f est un opérateur compact hermitien de $L_1(\mathbb{R}_+)$, aussi bien que de $L_2(\mathbb{R}_+)$, et $\|K_f\| \leq \|f\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}$.*

Preuve. — Pour $p = 1$ ou 2, l'inégalité de Young dans L_p indique que $\|(*H_+ f)\| = \|f\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}$ et comme $\|C^-\| = \|H_+\| = 1$, on constate que K_f est un opérateur continu de $L_p(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même, avec $\|K_f\| \leq \|f\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}$.

Comme K_f est un opérateur intégral dont le noyau est réel symétrique, il est clair que K_f est hermitien.

D'autre part, la famille des polynômes d'exponentielle, à savoir les expressions de la forme
$$e^{-x} P(e^{-x}) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-kx}$$

où P est un polynôme, sont denses dans $L_1(\mathbb{R}_+)$ (ce qui se voit en faisant le changement de variable $u = e^{-x}$ dans les intégrales sur $\mathbb{R}_+$, ce qui ramène à une intégrale de 0 à 1 où l'on peut appliquer le théorème de Weierstrass et approximer $f(-\ln u)$ par un polynôme dans $L_1\Big([0,1], \dfrac{\mathrm{d}u}{u}\Big)$). Par conséquent il existe une suite (f_n) de polynômes d'exponentielle telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L_1(\mathbb{R}_+)$.

Or les K_{f_n} sont des opérateurs de rang fini, puisque

$$\int_0^\infty e^{-k(x+t)} g(t)\,\mathrm{d}t = e^{-kx}\int_0^\infty e^{-kt} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mais alors, $K_{f-f_n} = K_f - K_{f_n}$ et par conséquent $\|K_f - K_{f_n}\| \leq \|f - f_n\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}$, ce qui montre que K_f est limite d'opérateurs de rang fini, donc compact. □

De ce lemme, il s'ensuit en particulier que $\mathbf{cross}_f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{m}_n(f) z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\dfrac{1}{\|f\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}}$.

Nous allons à présent montrer comment la théorie de Fredholm – lorsqu'elle pourra s'appliquer, et notamment si f est un polynôme d'exponentielle – permet d'expliciter $\mathbf{cross}_f$.

Une expression de $\mathbf{cross}_f$ faisant intervenir les déterminants de Fredholm.

Par définition nous avons

$$\mathbf{cross}_f(z) = 1 + z\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + z^n \int_0^{+\infty} (K_f)^{n-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots$$

Or la série

$$T_z(x) = f(x) + zK_f f(x) + z^2 (K_f)^2 f(x) + \cdots + z^n (K_f)^n f(x) + \cdots$$

converge normalement dans L_1 pour des valeurs assez petites de $|z|$ puisqu'on a vu que K_f est un opérateur borné de L_1 dans L_1 et que $f \in L_1$. Comme d'autre part la forme linéaire $h \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ est continue sur L_1, on peut par conséquent permuter l'intégration et la sommation, de sorte que

$$\mathbf{cross}_f(z) = 1 + z\int_0^{+\infty} T_z(x)\,\mathrm{d}x$$

T_z satisfait l'équation intégrale $T_z - zK_fT_z = f$, on reconnaît notamment dans l'expression de T_z la série dite de Sturm-Liouville de cette équation.

D'autre part, en prenant pour convention $\int_0^\infty \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1$ et $K_f(\delta) = f$, et en notant $S_z(x) = \delta + zT_z$, il apparaît que $\mathbf{cross}_f(z) = \int_0^\infty S_z(x)\,\mathrm{d}x$, $S_z(x)$ étant solution de l'équation intégrale $S_z - zK_fS_z = \delta$.

La théorie de Fredholm des équations intégrales va nous permettre d'exprimer T_z et S_z, et par suite $\mathbf{cross}_f$, sous une forme remarquable, au moins dans le cas où f est un polynôme d'exponentielle donc appartenant à L_2, et K_f étant alors de rang fini, donc de Hilbert-Schmidt et même traçable.

Les formules de Fredholm.

Smithies (*cf.* [1], [7]) a établi des formules analogues à celles de Fredholm (qui ne valent que si l'intégrale porte sur un intervalle compact $[a,b]$) pour une équation intégrale $x - zAx = (\mathrm{Id} - zA)x = y$, l'opérateur A étant associé à un noyau $\mathcal{K}(s,t)$ qui est L^2 (donc définit un opérateur de Hilbert-Schmidt), et tel que $\mathcal{K}(t,t)$ soit intégrable.

Pour chaque z tel que $1/z$ n'est pas une valeur propre de l'opérateur compact A, la solution unique s'exprime à l'aide du résolvant de Fredholm R_z, qui est un opérateur intégral associé au noyau $\Gamma_z(x,t)$ et défini par la relation

$$(\mathrm{Id} - zA)^{-1} = \mathrm{Id} + zR_z$$

et par conséquent la solution s'exprime

$$x = y + zR_zy.$$

Les formules donnent le noyau Γ_z associé à R_z sous la forme $\Gamma_z(x,t) = \dfrac{\Delta_z(x,t)}{\det(\mathrm{Id} - zA)}$ où :

- $\det(\mathrm{Id} - zA)$ est le déterminant de Fredholm de l'opérateur A et définit une fonction entière de z qui s'exprime sous forme de série par

$$d(z) = \det(\mathrm{Id} - zA) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}_+^n} K\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_n \\ x_1 \cdots x_n \end{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

où $K\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_n \\ y_1 \cdots y_n \end{pmatrix}$ représente le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \mathcal{K}(x_1, y_1) & \cdots & \mathcal{K}(x_1, y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{K}(x_n, y_1) & \cdots & \mathcal{K}(x_n, y_n) \end{vmatrix}.$$

- D'autre part le produit du noyau résolvant $\Gamma_z(x,t)$ par $\det(\mathrm{Id} - zA)$ est aussi une fonction entière de z, qui peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta_z(x,t) &= \Gamma_z(x,t)\det(\mathrm{Id} - zA) \\ &= \mathcal{K}(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}_+^n} K\begin{pmatrix} x\ x_1 \cdots x_n \\ t\ x_1\ \cdots\ x_n \end{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n. \end{aligned}$$

Appliquons ce qui précède à l'expression de T_z solution de $T_z - zK_fT_z = f$. Cela donne :

$$\begin{aligned} T_z(x) &= f(x) + z\int_0^{+\infty} \Gamma_z(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(x) + \frac{z}{d(z)}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} K\begin{pmatrix} x\ x_1 \cdots\ x_n \\ t\ x_1 \cdots\ x_n \end{pmatrix} f(t) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$

D'autre part, formellement, on serait tenté d'écrire, de façon plus concise,

$$\begin{aligned} S_z(x) &= (\mathrm{Id} + zR_A(z))\delta \\ &= \delta + z\int_0^{\infty} \Gamma_z(x,t)\delta(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \delta + z\Gamma_z(x,0). \end{aligned}$$

Mais tous ces calculs qui font intervenir δ auraient à être légitimés en se plaçant par exemple dans un espace de distributions. Mais ce n'est pas ici nécessaire, et comme $S_z = \delta + zT_z$, pour la simplicité de la suite, il nous suffira d'établir le lemme suivant :

Lemme 2. — $T_z(x) = \Gamma_z(x,0)$.

Preuve.

$$\begin{aligned} d(z)\Gamma_z(x,0) &= \Delta_z(x,0) \\ &= \mathcal{K}(x,0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}_+^n} K\begin{pmatrix} x\ x_1\ \cdots\ x_n \\ 0\ x_1\ \cdots\ x_n \end{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d(z)T_z(x) &= d(z)f(x) + z\int_0^{+\infty} d(z)\Gamma_z(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= d(z)f(x) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{n+1}\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} K\begin{pmatrix} x\ x_1 & \cdots & x_n \\ t\ x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix} f(t)\mathrm{d}\vec{x_i}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

si on développe $K\begin{pmatrix} x\ x_1 & \cdots & x_n \\ 0\ x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}$ par rapport à la première colonne :

$$
\begin{aligned}
&K\begin{pmatrix} x\ x_1 & \cdots & x_n \\ 0\ x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix} \\
&\quad = f(x)K\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(x_i)K\begin{pmatrix} x\ x_1 & \cdots & x_{i-1}\ x_{i+1} & \cdots & x_n \\ x_1\ x_2 & \cdots & x_i\ \ x_{i+1} & \cdots & x_n\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

soit en permutant les colonnes :

$$
\begin{aligned}
&K\begin{pmatrix} x\ x_1 & \cdots & x_n \\ 0\ x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix} \\
&\quad = f(x)K\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)K\begin{pmatrix} x\ x_1 & \cdots & x_{i-1}\ x_{i+1} & \cdots & x_n \\ x_i\ x_1 & \cdots & x_{i-1}\ x_{i+1} & \cdots & x_n\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

en intégrant sur $\mathbb{R}_+^n$ et en renommant les variables :

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^n} K\begin{pmatrix} x\ x_1 & \cdots & x_n \\ 0\ x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\mathrm{d}\vec{x_i} \\
&\quad = f(x)\int_{\mathbb{R}_+^n} K\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\mathrm{d}\vec{x_i} - \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}_+^n} f(t)K\begin{pmatrix} x\ x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ t\ x_1 & \cdots & x_{n-1}\end{pmatrix}\mathrm{d}\vec{x_i}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

en multipliant par $\dfrac{(-z)^n}{n!}$ et en sommant de 0 à n :

$$
\begin{aligned}
d(z)\Gamma_z(x,0) = f(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-z)^n}{n!}\int_{\mathbb{R}_+^n} K\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\mathrm{d}\vec{x_i} \\
-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-z)^n}{(n-1)!}\int_{\mathbb{R}_+^n} f(t)K\begin{pmatrix} x\ x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ t\ x_1 & \cdots & x_{n-1}\end{pmatrix}\mathrm{d}\vec{x_i}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

d'où en réindexant :

$$
\begin{aligned}
d(z)\Gamma_z(x,0) &= f(x)d(z) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{n+1}\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f(t)K\begin{pmatrix} x\ x_1 & \cdots & x_n \\ t\ x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\mathrm{d}\vec{x_i}\,\mathrm{d}t \\
&= d(z)T_z(x)
\end{aligned}
$$

d'où $T_z(x) = \Gamma_z(x,0)$. □

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Si f est un polynôme d'exponentielles, alors*

$$\mathbf{cross}(z) = \int_0^{+\infty} S_z(t)\,\mathrm{d}t = \frac{d(-z)}{d(z)} \tag{12}$$

où $d(z) = \det(\mathrm{Id} - zK_f)$ est le déterminant de Fredholm de l'opérateur K_f.

D'après ce qui précède,

$$\mathbf{cross}(z) = 1 + z\int_0^{\infty} \Gamma_z(x,0)\,\mathrm{d}x = \frac{d(z) + z\displaystyle\int_0^{\infty} \Delta_z(x,0)\,\mathrm{d}x}{d(z)}$$

car $\displaystyle\int_0^{\infty} K(x,0)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1/2$, et (12) revient alors à prouver que

$$d(z) + z\int_0^{\infty} \Delta_z(x,0)\,\mathrm{d}x = d(-z),$$

ou encore,

$$z\int_0^{\infty} \Delta_z(x,0)\,\mathrm{d}x = d(-z) - d(z)$$

soit

$$2\sum_{n\ \mathrm{impair}\geq 3}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\int_{\mathbb{R}_+^n} K\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}z^n}{(n-1)!}\int_{\mathbb{R}_+^n} K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,$$

l'égalité des termes en z se vérifiant aisément.

Autrement dit, il s'agit de vérifier que pour tout n pair, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = 0$$

et d'autre part, que si n impair (c'est aussi vrai pour 1), on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \frac{2}{n}\int_{\mathbb{R}_+^n} K\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

Ici $K\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ représente le déterminant :

$$\begin{vmatrix} f(x_1+y_1) & \cdots & f(x_1+y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x_n+y_1) & \cdots & f(x_n+y_n) \end{vmatrix}.$$

Nous allons ici écrire f comme une transformée de Laplace

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} F(t)\,\mathrm{d}t$$

ou plus précisément comme une somme discrète d'exponentielles $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k e^{-kx}$, qui peut être vue comme une transformée de Laplace relativement à une mesure discrète. Toutes ces intégrales multiples exprimées en fonction de f vont se représenter avantageusement moyennant le théorème de Fubini par des intégrales multiples en fonction de F, et toute la théorie de Fredholm va se réexprimer avec ces ingrédients.

Ainsi, avec des notations classiques :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 = \mathrm{Tr}(K) &= \int_0^{+\infty} f(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} e^{-2xt} F(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} e^{-2xt}\,\mathrm{d}x F(t)\,\mathrm{d}t\Big) \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{2t}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

cette dernière intégrale devant converger puisque f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

De même on montrerait que

$$\begin{aligned}
\sigma_2 = \mathrm{Tr}(K^2) &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{F(t)F(u)}{(t+u)^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}u \\
\sigma_3 = \mathrm{Tr}(K^3) &= \iiint_{\mathbb{R}_+^3} \frac{F(t)F(u)F(v)}{(t+u)(u+v)(v+t)}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Les intégrales avec les déterminants de Fredholm ainsi transformées font intervenir des déterminants de Hilbert :

$$H\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{u_1+v_1} & \cdots & \dfrac{1}{u_1+v_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{1}{u_1+v_n} & \cdots & \dfrac{1}{u_n+v_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod\limits_{i>j}(u_i-u_j)(v_i-v_j)}{\prod\limits_{i,j}(u_i+v_j)}.$$

En effet

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^n} K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \mathrm{d}\vec{x_j} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \begin{vmatrix} f(x_1) & f(x_2+x_1) & \cdots & f(x_n+x_1) \\ f(x_2) & f(2x_2) & \cdots & f(x_n+x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x_n) & f(x_2+x_n) & \cdots & f(2x_n) \end{vmatrix} \mathrm{d}\vec{x_j} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \begin{vmatrix} \int_0^\infty e^{-x_1u_1}F(u_1)du_1 & \int_0^\infty e^{-(x_2+x_1)u_2}F(u_2)du_2 & \cdots & \int_0^\infty e^{-(x_n+x_1)u_n}F(u_n)du_n \\ \int_0^\infty e^{-x_2u_1}F(u_1)du_1 & \int_0^\infty e^{-2x_2u_2}F(u_2)du_2 & \cdots & \int_0^\infty e^{-(x_n+x_2)u_n}F(u_n)du_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_0^\infty e^{-x_nu_1}F(u_1)du_1 & \int_0^\infty e^{-(x_2+x_n)u_2}F(u_2)du_2 & \cdots & \int_0^\infty e^{-2x_nu_n}F(u_n)du_n \end{vmatrix} \mathrm{d}\vec{x_j} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^{2n}} \begin{vmatrix} e^{-x_1u_1} & e^{-x_1u_2} & \cdots & e^{-x_1u_n} \\ e^{-x_2u_1} & e^{-x_2u_2} & \cdots & e^{-x_2u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{-x_nu_1} & e^{-x_nu_2} & \cdots & e^{-x_nu_n} \end{vmatrix} \prod_{i\geq 2} e^{-x_iu_i} \prod_{i\geq 1} F(u_i)\mathrm{d}\vec{x_j}\mathrm{d}\vec{u_i} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^{2n}} \begin{vmatrix} e^{-x_1u_1} & e^{-x_1u_2} & \cdots & e^{-x_1u_n} \\ e^{-x_2(u_1+u_2)} & e^{-x_22u_2} & \cdots & e^{-x_2(u_n+u_2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{-x_n(u_1+u_n)} & e^{-x_n(u_2+u_n)} & \cdots & e^{-2x_nu_n} \end{vmatrix} \prod_{i\geq 1} F(u_i)\mathrm{d}\vec{x_j}\mathrm{d}\vec{u_i} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \begin{vmatrix} \int_0^\infty e^{-x_1u_1}\mathrm{d}x_1 & \int_0^\infty e^{-x_1u_2}\mathrm{d}x_1 & \cdots & \int_0^\infty e^{-x_1u_n}\mathrm{d}x_1 \\ \int_0^\infty e^{-x_2(u_1+u_2)}\mathrm{d}x_2 & \int_0^\infty e^{-x_22u_2}\mathrm{d}x_2 & \cdots & \int_0^\infty e^{-x_2(u_n+u_2)}\mathrm{d}x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_0^\infty e^{-x_n(u_1+u_n)}\mathrm{d}x_n & \int_0^\infty e^{-x_n(u_2+u_n)}\mathrm{d}x_n & \cdots & \int_0^\infty e^{-2x_nu_n}\mathrm{d}x_n \end{vmatrix} \prod_{i\geq 1} F(u_i)\mathrm{d}\vec{u_i} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \begin{vmatrix} \frac{1}{u_1} & \frac{1}{u_2} & \cdots & \frac{1}{u_n} \\ \frac{1}{u_1+u_2} & \frac{1}{2u_2} & \cdots & \frac{1}{u_n+u_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{u_1+u_n} & \frac{1}{u_2+u_n} & \cdots & \frac{1}{2u_n} \end{vmatrix} \prod_{i\geq 1} F(u_i)\mathrm{d}\vec{u_i} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} H\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ 0 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \prod_i F(u_i)\mathrm{d}\vec{u_i}.
\end{aligned}
$$

Autrement dit, il s'agit de vérifier que pour tout n pair,

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} H\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ 0 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \prod_i F(u_i)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n = 0$$

et d'autre part, que si n impair, on a

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^n} H\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ 0 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \prod_i F(u_i)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n \\
&\qquad\qquad = \frac{2}{n}\int_{\mathbb{R}_+^n} H\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \prod_i F(u_i)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n,
\end{aligned}
$$

or l'intégrale sur $\mathbb{R}_+^n$ reste la même sous l'action d'une permutation des u_i, ainsi

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\Sigma_n} g(u_{\sigma(1)},\cdots,u_{\sigma(n)})\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n = \int_{\mathbb{R}_+^n} g(u_1,\cdots,u_n)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n.$$

Notons $\operatorname{sym}(g)(u_1,\cdots,u_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\Sigma_n} g(u_{\sigma(1)},\cdots,u_{\sigma(n)})$ le symétrisé de g.

Il apparaît que le résultat serait acquis si l'on montre que le symétrisé de $H\begin{pmatrix} u_1\ u_2 & \cdots & u_n \\ 0\ u_2 & \cdots & u_n\end{pmatrix}$ est nul pour n pair, et qu'il vaut $\frac{2}{n}H\begin{pmatrix} u_1\ u_2 & \cdots & u_n \\ u_1\ u_2 & \cdots & u_n\end{pmatrix}$ pour n impair.

Or il s'avère que

$$H\begin{pmatrix} u_1\ u_2 & \cdots & u_n \\ 0\ u_2 & \cdots & u_n\end{pmatrix} = 2\prod_{i\geq 2}\frac{(u_i+u_1)}{(u_i-u_1)} H\begin{pmatrix} u_1\ u_2 & \cdots & u_n \\ u_1\ u_2 & \cdots & u_n\end{pmatrix}.$$

Comme $H\begin{pmatrix} u_1\ u_2 & \cdots & u_n \\ u_1\ u_2 & \cdots & u_n\end{pmatrix}$ est symétrique et que $\prod_{i\geq 2}\frac{(u_i+u_1)}{(u_i-u_1)}$ est invariant sous l'action des permutations qui laissent 1 invariant, c'est-à-dire les éléments de $\sigma(\llbracket 2,n\rrbracket)$, il suffit pour le symétriser de faire la moyenne des termes obtenus en faisant agir σ_n modulo $\sigma(\llbracket 2,n\rrbracket)$ dont une version est donnée par l'identité et les transpositions qui impliquent 1, et on est conduit à montrer le lemme suivant :

LEMME 3.

$$s_n = \sum_{k=1\cdots n}\left(\prod_{\substack{i\neq k\\ 1\leq i\leq n}}\frac{(u_i+u_k)}{(u_i-u_k)}\right) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n \textit{ impair}\\ 0 & \textit{si } n \textit{ pair.}\end{cases}$$

Preuve. — Par récurrence en faisant une décomposition en éléments simples sur u_n. s_0 est une somme vide, donc vaut 0, s_1 est un produit vide, donc égal à 1.

Posons $a_k^n = \prod_{\substack{i\neq k\\ 1\leq i\leq n}}\frac{(u_i+u_k)}{(u_i-u_k)}$. Si $k\neq n$, alors cette décomposition s'écrit : $a_k^n = a_k^{n-1} + \frac{2a_k^{n-1}u_k}{u_n-u_k}$. Pour $k=n$, on a $a_n^n = (-1)^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2a_k^{n-1}u_k}{u_n-u_k}$; d'où $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{n-1} + (-1)^{n-1} = s_{n-1} + (-1)^{n-1}$.□

Ainsi le symétrisé de $\prod_{i\geq 2} \frac{(u_i+u_1)}{(u_i-u_1)}$ vaut 0 si n est pair et $\frac{1}{n}$ si n est impair, d'où :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^n} H\begin{pmatrix} u_1 \, u_2 \cdots \, u_n \\ 0 \, u_2 \cdots \, u_n \end{pmatrix} \prod_i F(u_i) \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathrm{sym}\left(H\begin{pmatrix} u_1 \, u_2 \cdots \, u_n \\ 0 \, u_2 \cdots \, u_n \end{pmatrix}\right) \prod_i F(u_i) \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathrm{sym}\left(\prod_{i\geq 2} \frac{(u_i+u_1)}{(u_i-u_1)}\right) 2H\begin{pmatrix} u_1 \, u_2 \cdots \, u_n \\ u_1 \, u_2 \cdots \, u_n \end{pmatrix} \prod_i F(u_i) \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n \\
&= \begin{cases} 0 & \text{, si } n \text{ est pair;} \\ \frac{2}{n} \int_{\mathbb{R}_+^n} H\begin{pmatrix} u_1 \, u_2 \cdots \, u_n \\ u_1 \, u_2 \cdots \, u_n \end{pmatrix} \prod_i F(u_i) \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n & \text{, si } n \text{ est impair.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Une expression de cross donnée par une extension des formules de Newton.

Nous savons que pour une classe bien particulière d'opérateurs intégraux (classe dite de Schatten $\mathcal{S}_1$), ceux qui sont dits traçables (*cf.* [1], [2]), la somme des valeurs propres (qui est en général une série), comme celle des puissances successives de cet opérateur, se laisse exprimer remarquablement par une intégrale élémentaire.

Par exemple, si un opérateur (ici supposé hermitien et réel) traçable est associé au noyau $\mathcal{K}(x,y)$, alors la série des valeurs propres est sommable et sa somme s'exprime (en suivant des notations usuelles) par

$$\sigma_1 = \mathrm{Tr}(K_f) = \sum_i \lambda_i = \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x,x)\,\mathrm{d}x$$

de même,

$$\sigma_2 = \mathrm{Tr}(K_f^2) = \sum_i \lambda_i^2 = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(y,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

et

$$\sigma_3 = \mathrm{Tr}(K_f^3) = \sum_i \lambda_i^3 = \iiint_{\mathbb{R}_+^3} \mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(y,z)\mathcal{K}(z,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Ces expressions intégrales (que nous noterons σ_i ou $\sigma_i(f)$ pour être plus précis), considérées lorsque $\mathcal{K}(x,y) = f(x+y)$, peuvent être étudiées pour elles-mêmes, indépendamment de leur éventuelle correspondance avec des traces. Or ici apparaît une notable dissymétrie selon la parité de l'indice i. Par exemple, comme notre opérateur est symétrique et réel, le fait que l'intégrale $\sigma_2 = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(y,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ soit définie signifie que l'opérateur est de Hilbert-Schmidt, et ceci revient à supposer que la fonction $x \mapsto xf(x)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ce qui n'est pas forcément réalisé.

LEMME 4. — *Les intégrales $\sigma_{2k+1}(f)$ sont toujours définies pour $k \in \mathbb{N}$ et chacune constitue une fonction continue de $L_1(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathbb{R}$.*

Preuve. — Donnons l'esquisse de la preuve pour σ_3 et nous laisserons la généralisation au lecteur. Posons le changement de variable $a = x+y, b = y+z, c = z+x$ dans σ_3 :

$$\iiint_{\mathbb{R}_+^3} f(x+y)f(y+z)f(z+x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{D}} f(a)f(b)f(c)2\,\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c.$$

Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$ (n'oublions pas que f est paire), on constate que cette dernière expression est bien absolument convergente et donne bien lieu à une fonction continue de $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$. Ce changement de variable n'est licite que si l'indice i est impair. □

Tous les opérateurs de rang fini sont traçables, et en ce qui nous concerne particulièrement, tous les opérateurs K_f, où $\mathcal{K}(x,y) = f(x+y)$ et f est un polynôme d'exponentielles.

Or il existe dans ce cas une correspondance analogue à celle qu'établissent les formules dites de Newton en dimension finie et les traces des puissances de l'opérateur, qui implique cette fois le déterminant de Fredholm (*cf.* par exemple [2], p. 160),

$$d(z) = \exp\Big(-\int_0^z \operatorname{Tr} R_z(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

Mais comme le résolvant de Fredholm s'écrit sous la forme d'une série normalement convergente

$$R_z = K_f + zK_f^2 + z^2K_f^3 + \cdots,$$

on obtient la relation

$$d(z) = \exp(-\sigma_1 z - \sigma_2/2z^2 - \sigma_3/3z^3 - \cdots)\ ;$$

d'où finalement

$$\mathbf{cross}_f(z) = \frac{d(-z)}{d(z)} = \exp\Big(2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma_{2k+1}}{2k+1}z^{2k+1}\Big).$$

On remarque qu'interviennent uniquement les σ_i avec i impair. Écrivons-les $\sigma_i(f)$ pour rappeler leur dépendance de f.

Nous avons donc établi la relation suivante entre séries formelles :

$$\mathbf{cross}_f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{m}_n(f) z^n = \exp\Big(2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_{2k+1}(f)}{2k+1} z^{2k+1}\Big).$$

Cette relation est en particulier valable pour les f qui sont des polynômes d'exponentielles denses dans $L_1(\mathbb{R}_+)$. Or, nous avons vu que les $\sigma_{2k+1}(f)$ constituent des fonctions continues de f. D'autre part, les poids $\mathbf{m}_n(f)$ sont aussi des fonctions continues de f, comme il apparaît à considérer l'expression intégrale faisant intervenir f qui les définit. Il s'ensuit par densité qu'on a le

COROLLAIRE 1. — *La relation*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{m}_n(f) z^n = \exp\Big(2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_{2k+1}(f)}{2k+1} z^{2k+1}\Big)$$

est vraie pour toute $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$.

La relation $\mathbf{cross}_f(z) = \exp\Big(2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_{2k+1}(f)}{2k+1} z^{2k+1}\Big)$ présente notamment un intérêt calculatoire, les intégrales $\sigma_{2k+1}(f)$ étant fréquemment plus simples à calculer que les intégrales $\mathbf{m}_n(f)$.

$\mathbf{cross}_f$ est une fonction méromorphe.

Observons formellement que si l'on considère

$$\begin{aligned}
S_z(x) &= \delta + z f(x) + z^2 f_2(x) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (zK_f)^n \cdot \delta \\
&= (\mathrm{Id} - zK_f)^{-1} \cdot \delta \\
&= \delta + z \sum_{n=0}^{\infty} (zK_f)^{n-1} \cdot f \\
&= \delta + zK_f (\mathrm{Id} - zK_f)^{-1} \cdot \delta \\
&= \delta + (\mathrm{Id} - zK_f)^{-1} \cdot f,
\end{aligned}$$

$K_f(\mathrm{Id} - zK_f)^{-1}$ est le *résolvant de Fredholm* de l'opérateur K_f. Tandis que $R(\zeta) = (K_f - \zeta)^{-1}$ est le *résolvant* de K_f. Ici, en posant $\zeta = \frac{1}{z}$, on obtient

$$S_z(x) = \delta - \zeta R(\zeta)(x) f(x).$$

L'étude du résolvant est classique ([1], [5]), il est en particulier holomorphe sauf pour ζ appartenant au spectre de K_f (en particulier en 0), et il est même méromorphe avec des seuls pôles simples dans ce domaine dit *ensemble résolvant*, lorsqu'on a affaire à un opérateur hermitien compact dans un Hilbert. Ici les opérateurs peuvent être vus dans L_1 ou dans L_2, de toutes façons, ils coïncident sur un sous-ensemble dense de ces deux espaces. Mais le fait de les considérer dans L_1 permet de justifier l'intégration sous le signe somme, car fortement holomorphe implique faiblement holomorphe (c'est même équivalent) et l'application qui, à un opérateur A associe $\int_0^\infty Af(x)\,\mathrm{d}x$ est une forme linéaire continue. D'où

$$\mathbf{cross}_f = \int_0^\infty S_z(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \zeta \int_0^\infty R(\zeta)(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En particulier le calcul fonctionnel nous dit que dans ce cas le développement de Laurent commence par un terme qui donne le résidu en un point et celui-ci est le projecteur spectral correspondant à la valeur propre λ :

$$R(\zeta) = \frac{P_\lambda}{\lambda - \zeta} + \text{ série entière en } \lambda - \zeta.$$

En appliquant la forme linéaire continue terme à terme à ces développements, on obtiendra ceux de $\mathbf{cross}_f(1/\zeta)$. En revenant à z, on constate donc que $\mathbf{cross}_f$ est une fonction méromorphe, admettant pour seuls pôles des pôles simples parmi les inverses des valeurs propres de K_f, mais pas nécessairement toutes. L'exemple de la fonction $f(x) = 3e^{-|x|} - 15e^{-2|x|} + 15e^{-3|x|}$ illustre ce fait . L'opérateur K_f est alors de rang 3, les formules que nous avons données rendent facile le calcul de son déterminant de Fredholm et montrent qu'il admet $1/4$ pour valeur propre double et $-1/4$ pour valeur propre simple. D'où $\mathbf{cross}_f(z) = \dfrac{1 + z/4}{1 - z/4} = \mathbf{cross}_{\mathbf{man}}(z)$ (d'ailleurs il semblerait que $\mathbf{m}_f = \mathbf{man}$, rappelons que **man** est la moyenne induite par la diffusion de densité $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$). Nous avons donc ainsi caractérisé au mieux la fonction **cross** lorsque la moyenne est induite par diffusion.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Dunford-J.T. Schwartz, Linear Operators, Part I : General Theory; Part II : Spectral Theory. New York : Interscience 1958, 1963.

[2] GOHBERG, KREJN, Introduction à la théorie des opérateurs non auto-adjoints dans un espace hilbertien, Monographies universitaires de Mathématiques n° 39, Dunod.

[3] J. ECALLE, Well-behaved convolution averages and their application to real resummation, à paraître, première partie parue dans [5].

[4] J. ECALLE et F. MENOUS, Well-behaved convolution averages and the non-accumulation theorem for limit-cycles, Prépublication d'Orsay, 1995.

[5] T. KATO, Pertubation theory for linear operators, Springer Verlag, 1966.

[6] F. MENOUS, Les bonnes moyennes uniformisantes et leurs applications à la resommation réelle, Thèse, Paris XI Orsay, 1996.

[7] F. SMITHIES, Integral equations, Cambridge University Press, 1970.

Manuscrit reçu le 21 juin 1998,
accepté le 20 novembre 1998.

Christian EVEN,
20 rue Gustave Lambert
92380 Garches (France).