

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN CERF

Combinatoire des simplexes sans singularités

I. Le cas différentiable

Annales de l'institut Fourier, tome 48, n° 4 (1998), p. 1129-1166

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_4_1129_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_4_1129_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMBINATOIRE DES SIMPLEXES SANS SINGULARITÉS

I. LE CAS DIFFÉRENTIABLE

par Jean CERF

Introduction.

F. Lalonde a démontré dans [L] que, pour toute variété différentiable V munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension n , l'homologie des simplexes différentiablement plongés transverses à \mathcal{F} est isomorphe à l'homologie de V en tout degré inférieur à n . Le long et difficile travail de Lalonde est centré sur la preuve du résultat suivant, qui avait été conjecturé par W. Shih, et qui n'est pas un cas particulier du précédent : dans le cas où V est munie d'une submersion différentiable f sur une variété de dimension n , l'homologie des simplexes plongés *dont le composé avec f est plongé*, est isomorphe à l'homologie de V en tout degré inférieur à n . Dans le cas non feuilleté, les deux résultats se confondent et s'énoncent : l'homologie des simplexes différentiablement plongés est isomorphe à celle de V en tout degré inférieur à la dimension. Dans [C] j'ai donné de ce dernier énoncé une preuve différente de celle de Lalonde, preuve qui suggère que les étoiles de simplexes topologiquement plongés portent certains invariants topologiques, dont la nullité dans le cas différentiable est la clef du théorème.

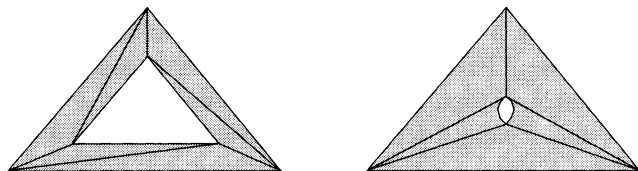
On définira effectivement de tels invariants dans la seconde partie du présent travail, consacrée au cas topologique. La première partie, présentée ici, traite le cas différentiable et ne nécessite pas la définition explicite d'invariants, mais seulement de groupes d'obstructions (ceux-là mêmes

Mots-clés : Simplexe – Ensemble simplicial – Complexe – Bicomplexe – Homologie – Variété différentiable – Feuilletage – Plongement – Immersion.

Classification math. : 55N99 – 55U99 – 57R30 – 57R40.

où les invariants prendront leur valeur). Le lemme fondamental de cette première partie (qui sera établi dans le cadre plus général des «espaces simpliciaux») a pour conséquence que *les groupes d'obstructions sont nuls pour tout sous-ensemble simplicial ouvert au sens C^∞ de l'ensemble des simplexes singuliers différentiables, qui soit stable par subdivision et qui satisfasse à une condition simple, dite d'isotopie des étoiles*. Un lemme de topologie différentielle élémentaire affirme que cette condition est satisfaite pour l'ensemble des simplexes plongés transverses à un feuilletage, pour celui des simplexes plongés dont le composé avec une submersion est plongé, ainsi que pour un troisième ensemble, celui des simplexes *immersés* transverses à un feuilletage. On est alors en mesure de démontrer d'un coup les énoncés relatifs à ces trois cas.

Au centre de ce travail se trouve la notion de ruban qui, dans un premier temps, s'est imposée comme substitut «non différentiable» des «champs de vecteurs transverses à une chaîne» de Lalonde. Voici une brève description d'un ruban de simplexes plongés. Un ruban de base un cycle c de p -simplexes plongés est une chaîne de $(p+1)$ -simplexes plongés reposant tous sur c , qui par une face, qui par une arête, ..., qui par un sommet, de façon que les bords de tous ces simplexes se détruisent entre eux, à la double exception des faces par lesquelles un simplexe repose sur c , d'une part, et, d'autre part, des faces opposées à la pointe d'un simplexe reposant sur cette pointe; ces dernières constituent le bord supérieur du ruban. La figure ci-dessous représente deux exemples de rubans basés sur le bord du triangle; celui de gauche peut être décomposé en 3 prismes triangulés basés sur chacun des côtés, et provient donc, par intégration et triangulation, d'un champ transverse à la Lalonde; le ruban de droite ne possède pas de décomposition de ce type.



Il est naturel de classer les simplexes d'un ruban de base un cycle c suivant la dimension de l'arête par laquelle ils reposent sur c . Ceci conduit à introduire des simplexes dont le modèle est le simplexe type Δ^{p+q} muni d'une «âme», c'est-à-dire d'une face itérée marquée de dimension p . On peut se restreindre au cas où l'âme est engendrée par les «derniers»

sommets de Δ^{p+q} , soit $q, q+1, \dots, q+p$; l'âme est alors parfaitement déterminée par sa dimension. Les opérateurs de faces d'un tel simplexe σ se partagent en deux classes : ceux dont l'image contient l'âme, et ceux dont l'image contient tous les sommets de l'âme sauf un. La somme alternée des premiers est l'opérateur β , celle des seconds est l'opérateur δ , ce qui définit le *bicomplexe des simplexes plongés* $C(V) = \sum_{p+q \leq n} C_{p,q}(V)$ dont la 0-ième ligne $C_{\bullet,0}(V)$ s'identifie au complexe des simplexes plongés de V . C'est dans l'homologie des colonnes de ce bicomplexe que se trouvent les obstructions à l'existence de rubans, ainsi qu'à l'invariance par subdivision linéaire, et, dans le cas différentiable, à l'invariance par isotopie.

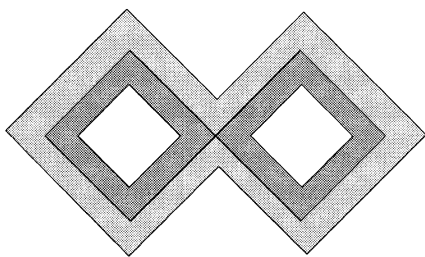
Voici le plan de la première partie du travail.

Le §1 est consacré aux bicomplexes et aux ensembles bisimpliciaux. Les bicomplexes qu'on utilisera ont la particularité que $C_{p,q} = 0$ en dehors du «triangle» $p \geq -1, q \geq 0, p+q \leq n$, où n est un entier positif ou $n = \infty$; c'est pour ces bicomplexes qu'on définit la notion algébrique de ruban. Un *ruban* de degré $p+1$ est essentiellement une $(p+1)$ -chaîne z du complexe \mathcal{C} , associé au bicomplexe $C_{\bullet,\bullet}$, telle que le bord total ∂z soit nul sauf les composantes des bidegrés extrêmes $(p,0)$ (la base du ruban) et $(-1,p+1)$ (le bord supérieur). Le lemme 1 donne une condition suffisante d'existence d'un ruban de base donnée, en termes de nullité de certains groupes d'homologie des colonnes de $C_{\bullet,\bullet}$. Le lemme 2 donne, en termes d'existence de rubans, une condition suffisante d'invariance de l'homologie de la ligne $C_{\bullet,0}$ par un morphisme du bicomplexe dans lui-même. On précise ensuite en quel sens on entendra les termes «ensemble simplicial» (sans opérateurs de dégénérescence, mais avec augmentation) et ensemble bisimplicial. Tout ensemble (bi)simplicial engendre sur \mathbb{Z} un (bi)complexe. Tout ensemble simplicial possède une «extension naturelle» en un ensemble bisimplicial, et s'identifie à la 0-ième ligne de cet ensemble.

Le §2 est une première application des généralités qui précèdent. Toute subdivision linéaire (par exemple la subdivision barycentrique) définit une transformation naturelle du foncteur complexe singulier S_{\bullet} sur la catégorie des espaces topologiques. Cette transformation peut être étendue au «bicomplexe singulier» $S_{\bullet,\bullet}$, extension naturelle de S_{\bullet} , en subdivisant de la manière suivante le simplexe identité de $S_{p,q}(\Delta^{p+q})$: on subdivise son âme à l'aide de s , puis on prend le cône itéré de cette subdivision par rapport aux q premiers sommets de Δ^{p+q} . On doit s'assurer qu'on a ainsi défini un morphisme de bicomplexes, ce qui est le cas pour tout sous-complexe «admissible» C_{\bullet} du complexe singulier (cf. 2.2, définition 3); tels

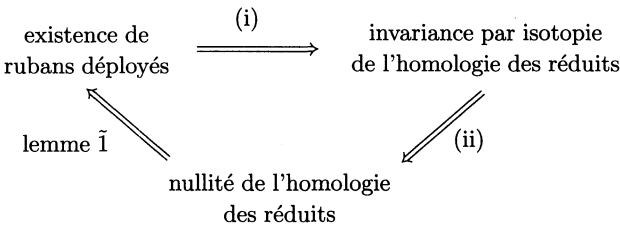
sont par exemple le complexe des simplexes plongés et celui des simplexes immergés, éventuellement transverses à un feuilletage. On déduit alors des lemmes 1 et 2 que si l'homologie des colonnes $C_{p,\bullet}$ est nulle (pour $p \geq 1$), alors l'homologie de $C_{\bullet,0}$ est invariante par subdivision linéaire.

Le §3 est un retour aux généralités. Il donne, pour tout ensemble bisimplicial $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ et pour le bicomplexe correspondant $C_{\bullet,\bullet}$ une liste de propriétés utiles au §4. La *décomposition canonique en étoiles* (cf. 3.1) des colonnes $\Gamma_{p,\bullet}$ pour $p \geq 0$ est définie sur chaque $\Gamma_{p,q}$ par l'application « âme » $(\beta_0)^q : \Gamma_{p,q} \rightarrow \Gamma_{p,0}$. Il lui est associé une décomposition directe de $C_{p,\bullet}$ et de son homologie, analogue à celle de l'homologie singulière d'un espace topologique non connexe. La *réduction à l'ordre m* (cf. 3.2) consiste à ne considérer que les simplexes de dimension $\geq m$, et pour chaque tel simplexe σ , à oublier les opérateurs de faces dont l'image ne contient pas le « noyau » de σ , c'est-à-dire la face engendrée par les $(m+1)$ derniers sommets. Un simplexe du réduit $\Gamma_{p,q}^{(m)}$ est donc un simplexe de $\Gamma_{p+m+1,q}$ pourvu d'une âme de dimension $p+m+1$ et d'un noyau de dimension m , contenu dans l'âme. Les numéros 3.3 et 3.4 règlent un problème soulevé par la notion d'*isotopie*, qui sera définie en 4.1 dans le cadre des « espaces simpliciaux », et qui jouera un rôle essentiel dans tout le §4. La notion d'isotopie n'est pas définie pour une chaîne, mais pour une famille finie $(\sigma_j)_{j \in J}$ de simplexes. Si $(\lambda_j)_{j \in J}$ est une famille de coefficients entiers telle que $x = \sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_j$ soit un cycle, il arrive, lorsque la famille (σ_j) est « singulière », au sens illustré par la figure, qu'il existe différents systèmes de relations d'incidence entre les σ_j assurant chacun que x soit un cycle.



Les familles (σ'_j) voisines de (σ_j) telles que $\sum_{j \in J} \lambda_j \sigma'_j$ reste un cycle, sont alors de différents types, d'où la nécessité d'avoir des rubans adaptés à chaque type; c'est le rôle des *rubans déployés*. On montre (lemme $\tilde{1}$) que les conditions homologiques suffisantes pour l'existence de rubans assurent aussi l'existence de rubans déployés.

Au §4 est prouvé le *lemme fondamental*, qui sera appliqué dans la suite à des ensembles de simplexes singuliers munis de la topologie C^0 ou C^∞ suivant le cas, mais qui est établi dans le cadre plus général d'un « espace simplicial » Γ_\bullet : chaque Γ_p est muni d'une topologie, et les opérateurs de faces sont continus. Ce lemme énonce que les « groupes d'obstructions » sont nuls lorsque les conditions suivantes sont satisfaites : la « propriété locale d'extension » (i), qui est plus qu'une condition de Kan locale, puisqu'elle stipule qu'on peut étendre au simplexe des morphismes donnés sur un sous-ensemble simplicial quelconque du bord ; et la « propriété d'isotopie des étoiles » (ii) qui affirme que toute étoile-cycle est isotope à une étoile-bord. On démontre simultanément le lemme fondamental et l'invariance par isotopie, selon le schéma de récurrence suivant (on ne précise pas ici les degrés) :



Le paragraphe se termine par une première application : les espaces de simplexes singuliers qui sont admissibles (au sens de 2.2), et qui vérifient les conditions (i) et (ii), donnent lieu pour tout couple d'ouverts à une suite exacte de Mayer-Vietoris.

Le §5 contient la démonstration des résultats annoncés au début de cette Introduction : le théorème de Lalonde et sa généralisation aux simplexes immergés, tous deux relatifs à la catégorie des variétés feuilletées, et la conjecture de Shih, relative à la catégorie des variétés munies d'une submersion. Ces énoncés ont en commun d'être relatifs à un certain foncteur Γ_\bullet sur la catégorie correspondante, tel que $\Gamma_\bullet(V)$ soit un sous-espace simplicial ouvert de l'espace $\Sigma_\bullet^\infty(V)$ des simplexes singuliers différentiables de V ; en outre, Γ_\bullet est naturel au sens que, pour tout ouvert U de V muni de la structure induite, $\Gamma_\bullet(U)$ est constitué des éléments de $\Gamma_\bullet(V)$ dont l'image est dans U ; on montre à l'Appendice A que $\Gamma_\bullet(V)$ possède la propriété locale d'extension, et à l'Appendice B que $\Gamma_\bullet(V)$ possède la propriété d'isotopie des étoiles, en degré convenable. Les résultats du §4 montrent que pour un foncteur ayant ces propriétés, et pour tout couple (U_1, U_2) d'ouverts de V , les homologies de $C_\bullet(U_1), C_\bullet(U_2), C_\bullet(U_1 \cap U_2)$ et $C_\bullet(U_1 \cup U_2)$ sont liées par la suite exacte de Mayer-Vietoris.

L'utilisation répétée de cette suite (selon la méthode de Lalonde [L], reprise dans [C]) permet de ramener la démonstration du théorème au cas du modèle local $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Dans ce dernier cas la preuve est une linéarisation par isotopie fondée sur le théorème de C^1 -approximation de Whitehead. Le paragraphe se termine par une remarque : le théorème dans sa version relative aux simplexes immergés implique les deux autres, moyennant l'utilisation de la subdivision barycentrique relative, technique qui est décrite à l'Appendice C.

Je remercie Laurent Siebenmann et Michel Zisman, ainsi que Jean Barge, Vincent Franjou, Jean Lannes et François Laudénbach qui, à différents moments de l'élaboration de ce travail, m'ont prêté une oreille attentive et amicale. Mes remerciements vont aussi au «referee» de cet article, pour la qualité de sa lecture et de ses remarques.

1. Bicomplexes, rubans, ensembles bisimpliciaux.

1.1. Bicomplexes et rubans.

On rappelle qu'un *bicomplexe* est un groupe abélien bigradué $\sum_{p,q} C_{p,q}$, muni de deux opérateurs β et δ , de bidegré respectif $(0, -1)$ et $(-1, 0)$, tels que

$$(1) \quad \beta^2 = \delta^2 = \beta\delta + \delta\beta = 0.$$

Le groupe $\sum_q C_{p,q}$ muni de l'opérateur β est un complexe qu'on note $C_{p,\bullet}$; de même $\sum_p C_{p,q}$ muni de δ est noté $C_{\bullet,q}$; le bicomplexe lui-même est noté soit C , soit $C_{\bullet,\bullet}$.

Le groupe C , gradué par le degré total $p+q$, et muni de la différentielle $\partial = \beta + \delta$, est appelé *complexe associé* à C ; on le note \mathcal{C} .

On utilisera exclusivement des bicomplexes tels que $C_{p,q} = 0$ pour $q < 0$; l'injection canonique $\xi : C_{\bullet,0} \rightarrow C$ est alors un morphisme de complexes. En plus on supposera toujours

$$(2) \quad C_{p,q} = 0 \quad \text{pour } p < -1.$$

DÉFINITION 1. — Soit p un entier ≥ 0 , et soit $x \in C_{p,0}$. Un *ruban* de base x de C est un élément $z = z_1 + z_2 + \cdots + z_{p+1}$ de C_{p+1} (avec

$z_i \in C_{p+1-i,i}$) tel que

$$(3) \quad \partial z = x + \delta z_{p+1}.$$

De (3) résulte $\beta z_1 = x$, ainsi que $\partial(x + \delta z_{p+1}) = \delta \beta z_1 + \beta \delta z_{p+1} = 0$; pour $p > 0$, la dernière égalité implique $\delta \beta z_1 = \beta \delta z_{p+1} = 0$; donc, pour $p > 0$, la base d'un ruban de degré $p + 1$ est un cycle.

LEMME 1. — Si les groupes d'homologie $H_j(C_{p-j,*})$ sont nuls pour $0 \leq j \leq p$, alors tout p -cycle de $C_{*,0}$ est base d'un ruban.

Démonstration. — Soit x un p -cycle de $C_{*,0}$; on choisit z_1 tel que $\beta z_1 = x$; alors $\beta \delta z_1 = -\delta x = 0$, ce qui permet de choisir z_2 tel que $\beta z_2 = -\delta z_1$, et ainsi de suite jusqu'à z_{p+1} . \square

LEMME 2. — Soient C et \tilde{C} deux bicomplexes; on suppose que le morphisme $\xi_* : H(C_{*,0}) \rightarrow H(C)$ est injectif. Soient μ et μ' deux morphismes $\tilde{C}_{*,0} \rightarrow C_{*,0}$; soit p un entier ≥ 0 et soit \tilde{x} un cycle de $\tilde{C}_{p,0}$ qui soit base d'un ruban $\tilde{z} \in \tilde{C}_{p+1}$.

S'il existe un sous-complexe \tilde{Z} de \tilde{C} contenant $\{\tilde{z}\}$ et $\tilde{C}_{*,0}$, tel que μ et μ' peuvent se prolonger en deux morphismes $\tilde{Z} \rightarrow C$ coïncidant sur $\tilde{Z} \cap \tilde{C}_{-1,p+1}$, alors $\mu \tilde{x}$ et $\mu' \tilde{x}$ sont homologues dans $C_{*,0}$.

Démonstration. — Notant encore μ et μ' les prolongements respectifs de ces morphismes, on a, puisque $\partial \tilde{z} - \tilde{x} \in \tilde{Z} \cap \tilde{C}_{-1,p+1}$

$$\mu(\partial \tilde{z} - \tilde{x}) = \mu'(\partial \tilde{z} - \tilde{x})$$

ce qui s'écrit

$$\mu \tilde{x} - \mu' \tilde{x} = \partial(\mu \tilde{z} - \mu' \tilde{z}).$$

On conclut à l'aide de l'injectivité de ξ_* . \square

LEMME 2' (cas particulier du lemme 2). — Soit C un bicomplexe ayant la propriété d'injectivité de ξ_* . Soit μ un morphisme $C \rightarrow C$ laissant $C_{-1,p+1}$ fixe. Si tout p -cycle de $C_{*,0}$ est base d'un ruban, alors $H_p(C_{*,0})$ est fixe pour le morphisme μ_* défini par μ . \square

RUBANS TRONQUÉS. — Soit m un entier tel que $-1 \leq m < p$. Un ruban tronqué à l'ordre m , de base $x \in C_{p,0}$, est un élément $z = z_1 + \cdots + z_{p-m}$ de C_{p+1} (avec $z_i \in C_{p+1-i,i}$) tel que

$$(3_m) \quad \partial z = x + \delta z_{p-m}.$$

La base x est un cycle de $C_{p,0}$ dès que $p \geq m + 2$. Le cas $m = -1$ est celui des rubans proprement dits. Les résultats ci-dessus se généralisent; on a notamment

LEMME 1_m. — Hypothèse : $H_j(C_{p-j,\bullet}) = 0$ pour $0 \leq j \leq p - m - 1$. Conclusion : Tout p -cycle de $C_{\bullet,0}$ est base d'un ruban tronqué à l'ordre m .

LEMME 2'_m. — Hypothèses : injectivité de ξ_* ; le morphisme μ laisse $C_{m,p-m}$ fixe; tout p -cycle de $C_{\bullet,0}$ est base d'un ruban tronqué à l'ordre m . Conclusion : $H_p(C_{\bullet,0})$ est fixe pour μ_* .

1.2. Ensembles simpliciaux et bisimpliciaux.

DÉFINITION 2. — Un ensemble simplicial est une suite $\Gamma_\bullet = (\Gamma_p)_{p \geq -1}$ d'ensembles, où Γ_p est, soit vide, soit muni d'une famille $(d_i)_{0 \leq i \leq p}$ d'applications $\Gamma_p \rightarrow \Gamma_{p-1}$, dites applications de faces, vérifiant

$$(4) \quad d_i d_{i'} = d_{i'-1} d_i \quad \text{pour } i < i'.$$

Cette définition implique que l'ensemble des degrés p pour lesquels $\Gamma_p \neq \emptyset$ est un intervalle (fini ou infini) d'entiers, d'origine -1 . Le complexe de chaînes C_\bullet défini par Γ_\bullet est le complexe $\sum_{p \geq -1} C_p$, avec $C_p = \mathbb{Z}[\Gamma_p]$. La différentielle $d : C_p \rightarrow C_{p-1}$ est donnée pour $p \geq 0$ par $d = \sum_{i=0}^p (-1)^i d_i$, elle est nulle sur C_{-1} .

DÉFINITION 2'. — Un ensemble bisimplicial est une famille $\Gamma_{\bullet,\bullet} = (\Gamma_{p,q})_{p \geq -1, q \geq 0}$, où $\Gamma_{p,q}$ est, soit vide, soit muni de deux familles d'applications de faces : $(\beta_i)_{0 \leq i \leq q-1}$, de bidegré $(0, -1)$ et $(\delta_j)_{0 \leq j \leq p}$, de bidegré $(-1, 0)$, vérifiant chacune les relations du type (4), et vérifiant en plus

$$(4') \quad \beta_i \delta_j = \delta_j \beta_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq q-1 \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq p.$$

Remarque. — La définition 2' s'écarte de la définition habituelle en introduisant un décalage entre la numérotation des lignes et celle des colonnes : c'est $\Gamma_{\bullet, \bullet+1}$ qui est bisimplicial au sens classique. Les lignes $\Gamma_{\bullet, q}$ et les colonnes décalées $\Gamma_{p, \bullet+1}$ sont des ensembles simpliciaux. La suite $\mathcal{T}_\bullet = (\mathcal{T}_p)_{p \geq -1}$, où \mathcal{T}_p est l'ensemble $\bigcup_{-1 \leq j \leq p} \Gamma_{j, p-j}$, les faces sur $\Gamma_{j, p-j}$ étant mises dans l'ordre $\beta_0, \dots, \beta_{p-j-1}, \delta_0, \dots, \delta_j$, est un ensemble simplicial dit ensemble simplicial associé à $\Gamma_{\bullet, \bullet}$. La définition 2' conduit en 1.3 à identifier l'ensemble simplicial Γ_\bullet à la ligne zéro de son extension naturelle; il en résulte notamment que le degré d'un ruban est égal à celui des simplexes de Γ_\bullet dont il est combinaison (c'est-à-dire à la dimension du ruban lorsque Γ_\bullet est l'ensemble des simplexes singuliers d'un espace topologique).

Le bicomplexe $C_{\bullet, \bullet}$ défini par l'ensemble bisimplicial $\Gamma_{\bullet, \bullet}$ est le bicomplexe $\sum_{p \geq -1} \sum_{q \geq 0} C_{p, q}$, avec $C_{p, q} = \mathbb{Z}[\Gamma_{p, q}]$; les différentielles issues de $C_{p, q}$ sont définies par

$$(5) \quad \beta_{p, q} = \sum_{i=0}^{i=q-1} (-1)^i \beta_i \quad \text{pour } q \geq 1;$$

$$(6) \quad \delta_{p, q} = \sum_{j=0}^{j=p} (-1)^{j+q} \delta_j \quad \text{pour } p \geq 0,$$

et sont nulles dans les autres cas.

Le complexe simple \mathcal{C} associé à $C_{\bullet, \bullet}$ est le complexe engendré par l'ensemble simplicial \mathcal{T}_\bullet , associé à $\Gamma_{\bullet, \bullet}$ (cf. remarque ci-dessus).

1.3. Extension naturelle d'un ensemble simplicial.

Soit Γ_\bullet un ensemble simplicial. On pose

$$\begin{aligned} \Gamma_{p, q} &= \Gamma_{p+q} \times \{q\} && \text{pour } p \geq -1 \text{ et } q \geq 0; \\ \beta_i(\sigma, q) &= (d_i \sigma, q-1) && \text{pour } 0 \leq i \leq q-1 \text{ et } \sigma \in \Gamma_{p+q}; \\ \delta_j(\sigma, q) &= (d_{j+q} \sigma, q) && \text{pour } 0 \leq j \leq p \text{ et } \sigma \in \Gamma_{p+q}. \end{aligned}$$

On a ainsi défini un ensemble bisimplicial $\Gamma_{\bullet, \bullet}$; les différentielles du bicomplexe correspondant $C_{\bullet, \bullet}$ sont

$$(5') \quad \beta_{p, q}(\sigma, q) = \sum_{i=0}^{i=q-1} (-1)^i (d_i \sigma, q-1) \quad \text{pour } q \geq 1;$$

$$(6') \quad \delta_{p,q}(\sigma, q) = \sum_{i=q}^{i=p+q} (-1)^i (d_i \sigma, q) \quad \text{pour } p \geq 0,$$

et sont nulles dans les autres cas.

L'application $\Gamma_\bullet \rightarrow \Gamma_{\bullet,\bullet}$ (resp. $C_\bullet \rightarrow C_{\bullet,\bullet}$) définie par $\sigma \mapsto (\sigma, 0)$ est appelée *injection naturelle*; identifiant Γ_\bullet (resp. C_\bullet) à son image isomorphe $\Gamma_{\bullet,0}$ (resp. $C_{\bullet,0}$), on dit que $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ (resp. $C_{\bullet,\bullet}$) est *l'extension naturelle* de Γ_\bullet (resp. C_\bullet).

Remarque 1. — L'application $(\sigma, 0) \mapsto (\sigma, 1 + \text{degré } \sigma)$ définit un isomorphisme $\Gamma_{\bullet,0} \xrightarrow{\approx} \Gamma_{-1,\bullet+1}$ (et par conséquent un isomorphisme $C_{\bullet,0} \xrightarrow{\approx} C_{-1,\bullet+1}$).

Remarque 2. — Soit $\bar{\omega}$ la projection $\mathcal{C} \rightarrow C_{\bullet,0}$ définie par $\bar{\omega}(\sigma, q) = (\sigma, 0)$; c'est un inverse à gauche de l'injection $\xi : C_{\bullet,0} \rightarrow \mathcal{C}$. D'après (5') et (6') on a, pour $\sigma \in \Gamma_{p+q}$,

$$\bar{\omega} \circ (\beta_{p,q} + \delta_{p,q}) \cdot (\sigma, q) = (d\sigma, 0).$$

Donc $\bar{\omega}$ est un morphisme de complexes. On peut énoncer :

Pour le bicomplexe $C_{\bullet,\bullet}$ obtenu par extension naturelle d'un ensemble simplicial Γ_\bullet , le morphisme $\xi_ : H(C_{\bullet,0}) \rightarrow H(\mathcal{C})$ est injectif.*

2. Application au complexe singulier : condition suffisante d'invariance de l'homologie d'un sous-complexe par subdivision linéaire.

2.1. Complexe et bicomplexe singuliers d'un espace topologique.

Pour tout entier $p \geq 0$, on note Δ^p le simplexe type de dimension p et id_p l'application identique de Δ^p . Pour tout espace topologique X , on note $\Sigma_p(X)$ l'ensemble des p -simplexes singuliers $\Delta^p \rightarrow X$. On définit $d_i \text{id}_p$ pour $0 \leq i \leq p$ comme le $(p-1)$ -simplexe affine de Δ^p envoyant les sommets $0, 1, \dots, p-1$ de Δ^{p-1} sur $0, 1, \dots, \hat{i}, \dots, p$ dans cet ordre, puis on pose

$$d_i \sigma = \sigma \circ d_i \text{id}_p \quad \text{pour tout } \sigma \in \Sigma_p(X).$$

On pose $\Sigma_{-1}(X) = \pi_0(X)$; la suite $\Sigma_\bullet(X) = (\Sigma_p(X))_{p \geq -1}$ est alors un ensemble simplicial au sens de 1.2. Le complexe $S_\bullet(X)$ engendré par $\Sigma_\bullet(X)$

est le *complexe singulier* de X , muni de son augmentation à valeurs dans $H_0(X)$. L'extension naturelle $S_{\bullet,\bullet}(X)$ de $S_\bullet(X)$ est appelée *bicomplexe singulier* de X .

Complexe et bicomplexe singuliers sont des foncteurs covariants sur la catégorie des espaces topologiques. Tout $\sigma \in \Sigma_p(X)$ définit un morphisme $S_\bullet(\Delta^p) \rightarrow S_\bullet(X)$ et un morphisme $S_{\bullet,\bullet}(\Delta^p) \rightarrow S_{\bullet,\bullet}(X)$ commutant avec l'injection naturelle, qu'on désigne tous deux par $\sigma_\#$. Pour tout $(\sigma, q) \in \Sigma_{p,q}(X)$, on pose $(\sigma, q)_\# = \sigma_\#$. On définit $x_\#$ par linéarité pour tout élément x du complexe ou du bicomplexe singulier.

2.2. Subdivisions linéaires, sous-complexes admissibles.

Une *subdivision linéaire* est une suite $s = (s_p)_{p \geq 0}$ de chaînes affines des simplexes types $\Delta^0, \Delta^1, \dots, \Delta^p, \dots$, chacune associée à une triangulation du simplexe correspondant. On suppose en plus que $s_0 = \text{id}_0$ et que les s_p vérifient la condition de cohérence

$$(7) \quad ds_p = \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i (d_i \text{id}_p)_\# s_{p-1} \quad \text{pour } p > 0.$$

Pour tout $x \in S_p(X)$, on pose

$$(8) \quad sx = x_\# s_p.$$

La condition (7) entraîne que s , prolongé par l'identité sur l'image de l'augmentation, est un morphisme $S_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet(X)$. Il résulte de (8) que s est une transformation naturelle du foncteur complexe singulier sur la catégorie des espaces topologiques. On pourra vérifier que la suite de ce paragraphe est valable pour une telle transformation dès que le transformé de id_p est, pour tout $p \geq 0$, combinaison linéaire de simplexes affines non dégénérés de Δ^p .

DÉFINITION 3. — Un sous-ensemble simplicial Γ_\bullet de $\Sigma_\bullet(X)$ est dit *admissible* si, pour tout $p \geq 0$, pour tout $\sigma \in \Gamma_p$ et tout simplexe affine non dégénéré α de Δ^p , on a $\sigma \circ \alpha \in \Gamma_\bullet$. Le sous-complexe C_\bullet de $S_\bullet(X)$ engendré par Γ_\bullet est également dit admissible.

Il résulte de (7) que, si C_\bullet est un sous-complexe admissible de $S_\bullet(X)$, toute subdivision linéaire laisse C_\bullet stable, et définit par conséquent un morphisme $C_\bullet \rightarrow C_\bullet$.

2.3. Condition suffisante d'invariance par subdivision linéaire.

LEMME 3. — Soit s une subdivision linéaire. Pour tout espace topologique X , le morphisme $s : S_{\bullet}(X) \rightarrow S_{\bullet}(X)$ peut s'étendre en un morphisme $\bar{s} : S_{\bullet,\bullet}(X) \rightarrow S_{\bullet,\bullet}(X)$ laissant fixes les colonnes $S_{-1,\bullet}(X)$ et $S_{0,\bullet}(X)$. Pour tout sous-complexe admissible C_{\bullet} de $S_{\bullet}(X)$, le morphisme \bar{s} laisse stable l'extension naturelle $C_{\bullet,\bullet}$ de C_{\bullet} , et induit par conséquent un morphisme $C_{\bullet,\bullet} \rightarrow C_{\bullet,\bullet}$.

Le lemme 3 sera démontré en 2.5.

COROLLAIRE. — Soient X un espace topologique, C_{\bullet} un sous-complexe admissible du complexe singulier $S_{\bullet}(X)$, et $C_{\bullet,\bullet}$ l'extension naturelle de C_{\bullet} . S'il existe un entier n tel que $H_q(C_{p,\bullet}) = 0$ pour $p \geq 1$, $q \geq 0$, $p + q \leq n - 1$, alors l'homologie $H_p(C_{\bullet})$ est invariante par toute subdivision linéaire s (i.e. s_{\ast} induit l'identité sur $H_p(C_{\bullet})$) pour $0 \leq p \leq n - 1$.

Démonstration du corollaire. — L'invariance de $H_0(C_{\bullet})$ est claire; on suppose donc $1 \leq p \leq n - 1$, et on applique les lemmes 1_0 et $2'_0$ (cf. 1.1, rubans tronqués). On a par hypothèse $H_0(C_{p,\bullet}) = H_1(C_{p-1,\bullet}) = \dots = H_{p-1}(C_{1,\bullet}) = 0$, donc d'après le lemme 1_0 tout p -cycle de $C_{\bullet,0}$ est base d'un ruban tronqué à l'ordre 0. Il résulte du lemme 3 que \bar{s} est un morphisme laissant fixe $C_{0,p}$. Donc, d'après le lemme $2'_0$, $H_p(C_{\bullet})$ est fixe pour \bar{s}_{\ast} , c'est-à-dire pour s_{\ast} . \square

2.4. Opérateurs de cônes dans le complexe et le bicomplexe singuliers d'un espace affine.

Soit A un espace affine et soit $a \in A$. L'opérateur $k_a : S_{\bullet}(A) \rightarrow S_{\bullet}(A)$, appelé *cône de sommet a* , est défini comme suit. Sur $S_{-1}(A)$, k_a est égal au 0-simplexe défini par a . Pour tout $p \geq 0$ et pour tout $\sigma \in \Sigma_p(A)$, on définit $k_a \sigma \in \Sigma_{p+1}(A)$ par les trois conditions suivantes : $k_a \sigma \cdot 0 = a$ (où 0 désigne le sommet zéro de Δ^{p+1}); $d_0 k_a \sigma = \sigma$; $k_a \sigma$ est linéaire sur tout segment passant par le sommet 0. On a les formules

$$(9) \quad \begin{cases} d_0 k_a = \text{identité}; \\ d_i k_a = k_a d_{i-1} \quad \text{pour } i > 0. \end{cases}$$

On définit comme suit les opérateurs de cônes dans $S_{\bullet,\bullet}(A)$. Un simplexe $\sigma_{p,q} \in \Sigma_{p,q}(A)$ étant un simplexe $\sigma \in \Sigma_{p+q}(A)$ placé dans la case (p, q) , on convient que $\bar{k}_a \sigma_{p,q}$ est le simplexe $k_a \sigma \in \Sigma_{p+q+1}(A)$ placé dans la case

$(p, q + 1)$, ce qui revient à prolonger l'opérateur k_a de $S_\bullet(A)$ identifié à la colonne $S_{-1,\bullet}(A)$ (et non à la ligne $S_{\bullet,0}(A)$). On déduit aussitôt de (9), (5') et (6')

$$(10) \quad \beta \bar{k}_a = \text{identité} - \bar{k}_a \beta;$$

$$(11) \quad \delta \bar{k}_a = -\bar{k}_a \delta.$$

2.5. Démonstration du lemme 3.

Dans le bicomplexe $S_{\bullet,\bullet}(\Delta^{p+q})$, on pose pour $q \geq 1$

$$\bar{k}_{[q]} = \bar{k}_0 \bar{k}_1 \dots \bar{k}_{q-1},$$

où \bar{k}_i désigne l'opérateur cône au sommet i . En itérant respectivement (10) et (11), on obtient

$$(10_q) \quad \beta \bar{k}_{[q]} = \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i \bar{k}_0 \dots \widehat{\bar{k}_i} \dots \bar{k}_{q-1} + (-1)^q \bar{k}_{[q]} \beta \quad \text{pour } q \geq 2;$$

$$(11_q) \quad \delta \bar{k}_{[q]} = (-1)^q \bar{k}_{[q]} \delta \quad \text{pour } q \geq 1.$$

On utilisera en outre la propriété suivante (de vérification facile) de l'opérateur cône itéré.

(*) Pour $(p, q) \geq (0, 2)$ et pour $i = 0, 1, \dots, q-1$, il y a commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & & \bar{k}_{[q-1]} & \\ & & & \longrightarrow & \\ ((d_0)^{q-1} \text{id}_{p+q-1})_\# & \nearrow & S_{p,0}(\Delta^{p+q-1}) & & S_{p,q-1}(\Delta^{p+q-1}) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow (d_i \text{id}_{p+q})_\# \\ S_{p,0}(\Delta^p) & & & & \\ ((d_0)^q \text{id}_{p+q})_\# & \searrow & S_{p,0}(\Delta^{p+q}) & \xrightarrow{\bar{k}_0 \dots \widehat{\bar{k}_i} \dots \bar{k}_{q-1}} & S_{p,q-1}(\Delta^{p+q}). \end{array}$$

Notant $\text{id}_{p,q}$ l'élément id_{p+q} placé dans la case (p, q) , et identifiant $S_p(\Delta^{p+q})$ à $S_{p,0}(\Delta^{p+q})$, on pose, pour $p \geq -1$ et $q \geq 1$

$$(12) \quad \bar{s} \text{id}_{p,q} = \bar{k}_{[q]} s(\beta_0)^q \text{id}_{p,q},$$

ce qui s'écrit aussi si $p \neq -1$

$$(12') \quad \bar{s} \operatorname{id}_{p,q} = \bar{k}_{[q]}((d_0)^q \operatorname{id}_{p+q})_{\#} s \operatorname{id}_p.$$

Pour tout espace topologique X et pour tout $x \in S_{p,q}(X)$ on pose

$$(13) \quad \bar{s}x = x_{\#} \bar{s} \operatorname{id}_{p,q}.$$

Les formules (12) et (13) montrent que \bar{s} fixe les colonnes $S_{-1,\bullet}(X)$ et $S_{0,\bullet}(X)$, et la formule (12') montre que $\bar{s} \operatorname{id}_{p,q}$ est combinaison linéaire de simplexes affines non dégénérés, de sorte que \bar{s} laisse stable l'extension naturelle de tout sous-complexe admissible. Il reste à prouver que \bar{s} est un morphisme, ce qui compte tenu de (13) se réduit aux deux vérifications suivantes :

Commutation de \bar{s} et β en $\operatorname{id}_{p,q}$ pour $q \geq 1$.

On suppose $p \geq 0$, car le cas $p = -1$ est trivial puisque $S_{-1,\bullet}(X)$ est fixe. Si $q = 1$, la formule (12) donne (compte tenu de (10) et du fait que $\beta_{\bullet,0} = 0$)

$$\beta \bar{s} \operatorname{id}_{p,1} = \beta \bar{k}_0 s \beta_0 \operatorname{id}_{p,1} = s \beta \operatorname{id}_{p,1}.$$

Supposant désormais $q \geq 2$ on a successivement :

$$\begin{aligned} \beta \bar{s} \operatorname{id}_{p,q} &= \beta \bar{k}_{[q]}((d_0)^q \operatorname{id}_{p+q})_{\#} s \operatorname{id}_p && \text{par (12')} \\ &= \sum_{i=0}^{i=q-1} (-1)^i \bar{k}_0 \dots \widehat{\bar{k}_i} \dots \bar{k}_{q-1}((d_0)^q \operatorname{id}_{p+q})_{\#} s \operatorname{id}_p \\ &&& \text{par (10}_q\text{) et la nullité de } \beta_{\bullet,0} \\ &= \sum_{i=0}^{i=q-1} (-1)^i (d_i \operatorname{id}_{p+q})_{\#} \bar{k}_{[q-1]}((d_0)^{q-1} \operatorname{id}_{p+q-1})_{\#} s \operatorname{id}_p && \text{par (*)} \\ &= (\beta \operatorname{id}_{p,q})_{\#} \bar{k}_{[q-1]}((d_0)^{q-1} \operatorname{id}_{p+q-1})_{\#} s \operatorname{id}_p && \text{par (5')} \\ &= \bar{s} \beta \operatorname{id}_{p,q} && \text{par (12') et (13).} \end{aligned}$$

Commutation de \bar{s} et δ en $\operatorname{id}_{p,q}$ pour $p \geq 0$ et $q \geq 1$.

On a en $\operatorname{id}_{p,q}$

$$\begin{aligned} \delta \bar{s} &= \delta \bar{k}_{[q]} s (\beta_0)^q && \text{par (12)} \\ &= (-1)^q \bar{k}_{[q]} \delta s (\beta_0)^q && \text{par (11}_q\text{)} \\ &= (-1)^q \bar{k}_{[q]} s \delta (\beta_0)^q && \text{puisque } s \text{ est un morphisme} \\ &= \bar{k}_{[q]} s (\beta_0)^q \delta && \text{par (6) et (4')} \\ &= \bar{s} \delta && \text{par (12) et (13).} \end{aligned}$$

□

3. Suite de l'étude générale des ensembles bisimpliciaux : décomposition, réduction, systèmes de relations d'incidence.

3.1. Décomposition canonique d'un ensemble simplicial ou bisimplicial.

DÉFINITION 4. — Soit Γ_\bullet un ensemble simplicial; pour tout $\sigma \in \Gamma_p$, l'élément $(d_0)^{p+1}\sigma$ de Γ_{-1} est appelé *noyau* de σ ; lorsque $p = -1$, σ est égal à son noyau.

Pour tout $\alpha \in \Gamma_{-1}$ et tout $p \geq 0$, on note $\Gamma_p\{\alpha\}$ l'image réciproque de α par $(d_0)^{p+1}$. On note $\Gamma_\bullet\{\alpha\}$ la suite $\{\alpha\}, \Gamma_0\{\alpha\}, \dots$, et $C_\bullet\{\alpha\}$ le complexe correspondant; on dit que $\Gamma_\bullet\{\alpha\}$ (resp. $C_\bullet\{\alpha\}$) est l'*étoile totale* de α dans Γ_\bullet (resp. C_\bullet). Une chaîne de $C_p\{\alpha\}$, i.e une chaîne de C_p dont tous les simplexes ont même noyau α , est appelée *p-étoile de noyau α* . Il résulte de (4) qu'on a

$$(d_0)^p d_i = (d_0)^{p+1} \quad \text{pour } 0 \leq i \leq p.$$

La partition $\Gamma_\bullet = \bigcup_{\alpha \in \Gamma_{-1}} \Gamma_\bullet\{\alpha\}$ est donc une décomposition d'ensemble simplicial; on dit que c'est la *décomposition canonique* de Γ_\bullet au-dessus de Γ_{-1} . Il lui est associé la décomposition directe canonique

$$(14) \quad C_\bullet \approx \sum_{\alpha \in \Gamma_{-1}} C_\bullet\{\alpha\}$$

et la décomposition directe correspondante en homologie

$$(14') \quad H_p(C_\bullet) \approx \sum_{\alpha \in \Gamma_{-1}} H_p(C_\bullet\{\alpha\}) \quad \text{pour tout } p \geq 0,$$

d'où il résulte en particulier que l'homologie de degré p de C_\bullet est nulle si et seulement si toutes les p -étoiles qui sont des cycles sont des bords.

DÉFINITION 4'. — Soit $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ un ensemble bisimplicial. Pour tout $\sigma \in \Gamma_{p,q}$, l'élément $(\delta_0)^{p+1}(\beta_0)^q\sigma$ de $\Gamma_{-1,0}$ est appelé *noyau* de σ . Le noyau $(\beta_0)^q\sigma$ de σ considéré comme élément de $\Gamma_{p,\bullet}$ est appelé *âme* de σ ; lorsque $q = 0$, σ est égal à son âme.

Cette extension de la notion de noyau est cohérente avec la notion d'extension naturelle d'un ensemble simplicial (cf. 1.3).

Pour $\alpha \in \Gamma_{-1,0}$, on introduit les notations $\Gamma_{p,q}\{\alpha\}$, $C_{p,q}\{\alpha\}$, analogues aux précédentes. Il résulte de (4) et (4') qu'on a

$$(\delta_0)^{p+1}(\beta_0)^{q-1}\beta_i = (\delta_0)^p(\beta_0)^q\delta_j = (\delta_0)^{p+1}(\beta_0)^q$$

pour $0 \leq i \leq q-1$ et $0 \leq j \leq p$.

La partition $\Gamma_{\bullet,\bullet} = \bigcup_{\alpha \in \Gamma_{-1,0}} \Gamma_{\bullet,\bullet}\{\alpha\}$ est donc une décomposition d'ensemble bisimplicial, qui définit une décomposition directe de $C_{\bullet,\bullet}$. La relation « avoir même âme » conduit, pour tout $p \geq -1$, à la partition (plus fine que celle induite par la précédente)

$$\Gamma_{p,\bullet} = \bigcup_{\alpha \in \Gamma_{p,0}} \Gamma_{p,\bullet}\{\alpha\},$$

à laquelle sont associées les décompositions

$$(14_p) \quad C_{p,\bullet} \approx \sum_{\alpha \in \Gamma_{p,0}} C_{p,\bullet}\{\alpha\},$$

et

$$(14'_p) \quad H_q(C_{p,\bullet}) \approx \sum_{\alpha \in \Gamma_{p,0}} H_q(C_{p,\bullet}\{\alpha\}) \quad \text{pour tout } q \geq 0.$$

Une chaîne de $C_{p,q}\{\alpha\}$, i.e une chaîne de $C_{p,q}$ dont tous les simplexes ont même âme α , est appelée (p, q) -étoile d'âme α .

Exemple. — Pour tout $\sigma \in \Gamma_{p,q}$, la chaîne $\beta\sigma$ est une $(p, q-1)$ -étoile ayant même âme que σ .

3.2. Réduction à l'ordre m .

Soit Γ_\bullet un ensemble simplicial et soit $m \geq -1$. On appelle *réduit de* Γ_\bullet à l'ordre m l'ensemble simplicial $\Gamma_\bullet^{(m)}$ défini par $\Gamma_p^{(m)} = \Gamma_{p+m+1}$, les applications de faces de $\Gamma_p^{(m)}$ étant d_0, d_1, \dots, d_p . Le réduit $\Gamma_\bullet^{(-1)}$ s'identifie à Γ_\bullet .

Soit $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ un ensemble bisimplicial. On appelle *réduit de* $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ à l'ordre m l'ensemble bisimplicial $\Gamma_{\bullet,\bullet}^{(m)}$ défini par $\Gamma_{p,q}^{(m)} = \Gamma_{p+m+1,q}$, les applications de faces de $\Gamma_{p,q}^{(m)}$ étant d'une part les β_i de $\Gamma_{p+m+1,q}$, et d'autre part $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_p$. En particulier, les colonnes $\Gamma_{p,\bullet}^{(m)}$ et $\Gamma_{p+m+1,\bullet}$ sont identiques.

Dans le cas où $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ est l'extension naturelle de Γ_\bullet , $\Gamma_{\bullet,\bullet}^{(m)}$ est l'extension naturelle de $\Gamma_\bullet^{(m)}$. Il y a donc isomorphisme canonique entre la colonne $\Gamma_{-1,\bullet}^{(m)}$ et la ligne $\Gamma_{\bullet-1,0}^{(m)}$, qui s'identifie à $\Gamma_{\bullet-1}^{(m)}$, de sorte qu'on a des isomorphismes canoniques :

$$(15) \quad \begin{cases} \Gamma_{m,q} \approx \Gamma_{q-1}^{(m)}, \\ H_q(C_{m,\bullet}) \approx H_{q-1}(C_\bullet^{(m)}). \end{cases}$$

3.3. Relations d'incidence, modèles.

On note $[\Delta^p]_\bullet$ l'ensemble simplicial (isomorphe à celui de parties de $\{0, 1, \dots, p\}$) dont les éléments sont l'application identique id_p de Δ^p et ses faces itérées de tous ordres. Pour tout ensemble simplicial Γ_\bullet et pour tout $\sigma \in \Gamma_p$, il y a un morphisme unique $\varphi_\sigma : [\Delta^p]_\bullet \rightarrow \Gamma_\bullet$ tel que $\varphi_\sigma \text{id}_p = \sigma$. Toute famille $(\sigma_j)_{j \in J}$ de p -simplexes de Γ_\bullet définit donc un morphisme $\varphi : [\Delta^p]_\bullet \times J \rightarrow \Gamma_\bullet$ tel que $\varphi(\text{id}_p, j) = \sigma_j$ pour tout $j \in J$, où la structure d'ensemble simplicial de $[\Delta^p]_\bullet \times J$ est la somme de celles des $[\Delta^p]_\bullet \times \{j\}$, c'est-à-dire que les faces sont définies par $d_i(\sigma, j) = (d_i \sigma, j)$.

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur $[\Delta^p]_\bullet \times J$, compatible avec φ d'une part et avec les d_i d'autre part (c'est-à-dire que $(\sigma, j) \sim (\bar{\sigma}, \bar{j})$ entraîne d'une part $\varphi(\sigma, j) = \varphi(\bar{\sigma}, \bar{j})$, et d'autre part $d_i(\sigma, j) \sim d_i(\bar{\sigma}, \bar{j})$ pour tout i tel que $0 \leq i \leq \text{degré } \sigma$). On notera que la compatibilité de \mathcal{R} avec le morphisme φ implique la compatibilité avec le degré. La relation \mathcal{R} définit un ensemble simplicial quotient $(\Gamma_{\mathcal{R}})_\bullet$ et des morphismes $\tilde{\varphi}$ et ψ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & (\Gamma_{\mathcal{R}})_\bullet \\ & \nearrow \tilde{\varphi} & \downarrow \psi \\ [\Delta^p]_\bullet \times J & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma_\bullet \end{array}$$

Pour tout $j \in J$, on note $\tilde{\varphi}(\text{id}_p, j) = \tilde{\sigma}_j$; le morphisme surjectif $\tilde{\varphi}$ est le morphisme défini par la famille $(\tilde{\sigma}_j)_{j \in J}$ de p -simplexes de $(\Gamma_{\mathcal{R}})_\bullet$.

DÉFINITION 5. — Si, en plus des conditions ci-dessus, \mathcal{R} n'identifie aucun couple de simplexes distincts de degré p , on dit que \mathcal{R} est un *système de relations d'incidence* de la famille (σ_j) , et que $(\Gamma_{\mathcal{R}})_\bullet$ est le *modèle* de la famille (σ_j) munie du système \mathcal{R} . Les systèmes de relations d'incidence d'une famille (σ_j) sont tous contenus dans le système défini par la relation « $\varphi(\sigma, j) = \varphi(\bar{\sigma}, \bar{j})$ et degré $\sigma < p$ »; ce système est dit *total* pour la famille (σ_j) .

LEMME 4. — Soit $(\sigma_j)_{j \in J}$ une famille de p -simplexes de l'ensemble simplicial Γ_\bullet et soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur $[\Delta^p]_\bullet \times J$, compatible avec φ et avec les d_i .

1) $(\Gamma_{\mathcal{R}})_\bullet$ est la réunion des $\tilde{\sigma}_j$ et de leurs faces itérées de tous ordres.

2) Pour que \mathcal{R} soit un système de relations d'incidence, il faut et il suffit que $\tilde{\varphi}$ soit injectif sur $\{\text{id}_p\} \times J$.

3) Si \mathcal{R} est un système de relations d'incidence des (σ_j) , pour que \mathcal{R} soit total, il faut et il suffit que ψ soit injectif sur l'ensemble des simplexes de degré $< p$ de $(\Gamma_{\mathcal{R}})_\bullet$.

4) Si \mathcal{R} est total, $\sum_{j \in J} \lambda_j \tilde{\sigma}_j$ est un cycle pour toute famille d'entiers $(\lambda_j)_{j \in J}$, nuls sauf un nombre fini, telle que $\sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_j$ soit un cycle.

5) À toute famille $(\sigma'_j)_{j \in J}$ de p -simplexes de Γ_\bullet ayant en commun avec (σ_j) un système de relations d'incidence \mathcal{R} est attaché le même modèle $(\Gamma_{\mathcal{R}})_\bullet$, et on a $\tilde{\sigma}'_j = \tilde{\sigma}_j$ pour tout j . En outre, pour tout j tel que σ_j et σ'_j aient même noyau, les morphismes ψ et $\psi' : (\Gamma_{\mathcal{R}})_\bullet \rightarrow \Gamma_\bullet$ coïncident sur le noyau de $\tilde{\sigma}_j$.

Démonstration. — Les vérifications sont immédiates, par exemple :

preuve de 4) : prolongeant linéairement ψ , on a

$$\psi d(\sum \lambda_j \tilde{\sigma}_j) = d\psi(\sum \lambda_j \tilde{\sigma}_j) = d(\sum \lambda_j \sigma_j) = 0,$$

et on applique 3) ;

preuve de 5) : l'hypothèse d'égalité des noyaux s'écrit $d_0^{p+1}(\psi \tilde{\sigma}_j) = d_0^{p+1}(\psi' \tilde{\sigma}_j)$; d'où $\psi(d_0^{p+1} \tilde{\sigma}_j) = \psi'(d_0^{p+1} \tilde{\sigma}_j)$. \square

3.4. Rubans déployés.

Soit $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ un ensemble bisimplicial muni de la surjection « âme » : $\Gamma_{\bullet,\bullet} \rightarrow \Gamma_{\bullet,0}$ (cf. 3.1). Soient Σ_\bullet un ensemble simplicial et ψ un morphisme : $\Sigma_\bullet \rightarrow \Gamma_{\bullet,0}$. Sur le produit fibré de Σ_\bullet et $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ au-dessus de $\Gamma_{\bullet,0}$, dont les éléments sont les couples (σ, τ) tels que $\psi\sigma$ = âme de τ , on définit le bidegré de (σ, τ) comme étant celui de τ , et on définit des opérateurs de faces issus de (σ, τ) , de bidegré noté (p, q) , par

$$\beta_i(\sigma, \tau) = (\sigma, \beta_i \tau) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq q-1;$$

$$\delta_j(\sigma, \tau) = (d_j \sigma, \delta_j \tau) \quad \text{pour } 0 \leq j \leq p.$$

On vérifie qu'on a ainsi défini un ensemble bisimplicial, qu'on note $\Pi_{\bullet,\bullet}$. On note pr_1 (resp. pr_2) la projection (resp. le morphisme de projection) de $\Pi_{\bullet,\bullet}$ sur Σ_{\bullet} (resp. $\Gamma_{\bullet,\bullet}$).

En particulier, $\Pi_{\bullet,0}$ est le graphe de ψ ; la restriction de pr_1 à $\Pi_{\bullet,0}$ est donc un isomorphisme; on note η l'isomorphisme inverse : $\Sigma_{\bullet} \rightarrow \Pi_{\bullet,0}$. Pour tout $p \geq -1$ et pour tout $\sigma \in \Sigma_p$, on a un isomorphisme d'ensembles simpliciaux

$$(16_p) \quad \Pi_{p,\bullet}\{\eta\sigma\} \approx \Gamma_{p,\bullet}\{\psi\sigma\}.$$

Il y a commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi_{\bullet,\bullet} & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \Gamma_{\bullet,\bullet} \\
 \text{pr}_1 \downarrow & \searrow \text{âme} & \downarrow \text{âme} \\
 & \Pi_{\bullet,0} & \\
 \swarrow \text{pr}_1 & \nearrow \eta & \searrow \text{pr}_2 \\
 \Sigma_{\bullet} & \xrightarrow{\psi} & \Gamma_{\bullet,0}
 \end{array}$$

Application. — On applique ce qui précède au cas où $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ est l'extension naturelle d'un ensemble simplicial Γ_{\bullet} , identifié à $\Gamma_{\bullet,0}$, où Σ_{\bullet} est le modèle $(\Gamma_{\mathcal{R}})_{\bullet}$ d'une famille finie $(\sigma_j)_{j \in J}$ de simplexes de Γ_p munie d'un système \mathcal{R} de relations d'incidence, et où ψ est le morphisme : $(\Gamma_{\mathcal{R}})_{\bullet} \rightarrow \Gamma_{\bullet}$ défini en 3.3. On rappelle que dans cette situation on a défini pour tout $j \in J$ l'élément $\tilde{\sigma}_j \in (\Gamma_{\mathcal{R}})_p$ et que celui-ci vérifie $\psi\tilde{\sigma}_j = \sigma_j$.

DÉFINITION 6. — Soient $\Gamma_{\bullet}, \Gamma_{\bullet,\bullet}, (\sigma_j)_{j \in J}, \mathcal{R}, (\Gamma_{\mathcal{R}})_{\bullet}$ comme ci-dessus; soit $\Pi_{\bullet,\bullet}$ l'ensemble bisimplicial associé à $\psi : (\Gamma_{\mathcal{R}})_{\bullet} \rightarrow \Gamma_{\bullet} \approx \Gamma_{\bullet,0}$, et soit \mathcal{P}_{\bullet} le complexe associé au bicomplexe $P_{\bullet,\bullet}$ engendré par $\Pi_{\bullet,\bullet}$. Soit $(\lambda_j)_{j \in J}$ une famille d'entiers.

Un *ruban déployé* relatif à la famille $(\sigma_j, \lambda_j)_{j \in J}$, et au système \mathcal{R} de relations d'incidence entre les σ_j , est un ruban \tilde{z} de \mathcal{P}_{p+1} , de base l'élément $\sum_{j \in J} \lambda_j \eta(\tilde{\sigma}_j)$ de $\mathcal{P}_{\bullet,0}$.

Il est clair que $\text{pr}_2 \tilde{z}$ est un ruban de \mathcal{C}_{p+1} , de base $\sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_j$. D'autre part on a le

LEMME $\tilde{1}$. — Sous les conditions du lemme 1, c'est-à-dire

$$H_j(C_{p-j,\bullet}) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq j \leq p,$$

il existe un ruban déployé relatif à toute famille finie $(\sigma_j, \lambda_j)_{j \in J}$ d'éléments de $\Gamma_p \times \mathbb{Z}$ et à tout système \mathcal{R} de relations d'incidence entre les σ_j , tels que $\sum_{j \in J} \lambda_j \tilde{\sigma}_j$ soit un cycle.

Démonstration. — La nullité de $H_j(C_{p-j,\bullet})$ entraîne par (14') celle de $H_j(C_{p-j,\bullet}\{\sigma\})$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{p,0}$, donc par (16_p) celle de $H_j(P_{p-j,\bullet}\{\tilde{\sigma}\})$ pour tout $\tilde{\sigma} \in \Pi_{p,0}$, donc par (14') celle de $H_j(P_{p-j,\bullet})$. On peut donc appliquer le lemme 1 à $P_{\bullet,\bullet}$. \square

4. Espaces simpliciaux et bisimpliciaux.

4.1. Définition et exemples. Isotopies.

DÉFINITION 7. — Soit Γ_\bullet (resp. $\Gamma_{\bullet,\bullet}$) un ensemble (bi)simplicial. On dit que c'est un *espace (bi)simplicial* si tous les Γ_p (resp. tous les $\Gamma_{p,q}$) sont munis d'une topologie de façon que toutes les applications de faces soient continues.

Exemples.

1. L'ensemble $\Sigma_p(X)$ des p -simplexes singuliers d'un espace topologique X est muni pour tout $p \geq 0$ de la topologie C^0 des applications continues $\Delta^p \rightarrow X$, et $\Sigma_{-1}(X) \approx \pi_0(X)$ est muni de la topologie discrète; ceci définit l'espace simplicial $\Sigma_\bullet(X)$. Définition analogue de $\Sigma_\bullet^\infty(V)$, espace simplicial des simplexes singuliers de classe C^∞ d'une variété différentiable V de classe C^∞ : $\Sigma_p^\infty(V)$ est muni de la topologie C^∞ des applications $C^\infty : \Delta^p \rightarrow V$, et ici encore $\Sigma_{-1}^\infty(V) \approx \pi_0(V)$ est discret.

2. L'extension naturelle d'un espace simplicial (en particulier $\Sigma_{\bullet,\bullet}(X), \Sigma_{\bullet,\bullet}^\infty(V)$) est naturellement un espace bisimplicial.

3. Pour tout $m \geq 0$, le réduit $\Gamma_\bullet^{(m)}$ (cf. 3.2) d'un espace simplicial Γ_\bullet a une structure induite d'espace simplicial.

DÉFINITION 8. — Soit Γ_\bullet un espace simplicial; soient $p \geq 0$ et $\sigma \in \Gamma_p$. Une *isotopie d'origine* σ de Γ_\bullet est une famille continue $(\sigma_t)_{t \in [0,1]}$ de points de Γ_p telle que $\sigma_0 = \sigma$.

Remarque. — L'usage du mot isotopie est habituellement réservé aux espaces de plongements. Dans le cas des immersions, l'expression habituellement utilisée est « homotopie régulière ».

Une isotopie de la famille $(\sigma_j)_{j \in J}$ est une famille $(\sigma_{j,t})_{j \in J; t \in [0,1]}$ d'isotopies. Si J est fini, une telle isotopie s'identifie (notations de 3.3) à un chemin (φ_t) d'origine φ dans l'espace des morphismes $[\Delta^p]_\bullet \times J \rightarrow \Gamma_\bullet$, muni de la topologie de la convergence simple; si \mathcal{R} est un système de relations d'incidence de la famille (σ_j) , on dit que l'isotopie respecte \mathcal{R} si φ_t peut s'écrire $\psi_t \circ \tilde{\varphi}$, où (ψ_t) est un chemin d'origine ψ dans l'espace des morphismes $(\Gamma_{\mathcal{R}})_\bullet \rightarrow \Gamma_\bullet$, muni de la même topologie.

4.2. Propriété locale d'extension.

Soit Γ_\bullet un espace simplicial et soit $p \geq 0$; on rappelle (cf. 3.3) la notation φ_σ pour le morphisme $[\Delta^p]_\bullet \rightarrow \Gamma_\bullet$ défini par $\sigma \in \Gamma_p$.

DÉFINITION 9. — On dit que Γ_\bullet possède la *propriété locale d'extension* en degré p si, pour tout $\sigma \in \Gamma_p$, tout sous-ensemble simplicial $[K]_\bullet$ de $[\Delta^p]_\bullet$, et tout morphisme $\varphi' : [K]_\bullet \rightarrow \Gamma_\bullet$, proche de $\varphi_\sigma|[K]_\bullet$ pour la convergence simple, il existe $\sigma' \in \Gamma_p$, proche de σ , tel que $\varphi_{\sigma'}|[K]_\bullet = \varphi'$.

LEMME 5. — On suppose que Γ_\bullet a la propriété locale d'extension en degré p . Soit Σ_\bullet un ensemble simplicial fini, homogène de degré p (i.e. tout simplexe est face itérée d'un simplexe de degré p , et Σ_{p+1} est vide). Pour tout sous-ensemble simplicial Σ'_\bullet de Σ_\bullet , et pour tout morphisme $\mu : \Sigma_\bullet \rightarrow \Gamma_\bullet$, il existe, pour tout morphisme $\mu' : \Sigma'_\bullet \rightarrow \Gamma_\bullet$, proche de $\mu|_{\Sigma'_\bullet}$ pour la convergence simple, un morphisme $\mu'' : \Sigma_\bullet \rightarrow \Gamma_\bullet$, proche de μ pour la convergence simple et prolongeant μ' .

Remarque. — Si p est le degré maximal des simplexes de Σ_\bullet sans qu'il y ait homogénéité, la conclusion subsiste si on suppose que la propriété locale d'extension est vraie en tout degré $\leq p$.

Démonstration. — On procède par récurrence sur le nombre de simplexes de Σ_p . Chaque pas de la récurrence consiste à prouver le lemme dans le cas particulier où il existe $\sigma \in \Sigma_p$ tel qu'en notant $[\sigma]_\bullet$ l'ensemble simplicial $\varphi_\sigma([\Delta^p]_\bullet)$ engendré par σ , on ait $\Sigma_\bullet = \Sigma'_\bullet \cup [\sigma]_\bullet$. Avec les

notations de 3.3, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & [\Delta^p]_{\bullet} & \\ \varphi_{\sigma} \swarrow & & \searrow \varphi_{\mu\sigma} \\ \Sigma_{\bullet} & \xrightarrow{\mu} & \Gamma_{\bullet} \end{array}$$

On pose $\varphi_{\sigma}^{-1}(\Sigma'_{\bullet} \cap [\sigma]_{\bullet}) = [K]_{\bullet}$. Il existe par hypothèse $\sigma' \in \Gamma_p$, proche de $\mu\sigma$, tel que

$$\varphi_{\sigma'}|_{[K]_{\bullet}} = \mu' \circ \varphi_{\sigma}.$$

On pose $\mu''\sigma = \sigma'$, ce qui définit μ'' sur $[\sigma]_{\bullet}$ de façon que $\mu'' \circ \varphi_{\sigma} = \varphi_{\sigma'}$ et donc que $\mu'' \circ \varphi_{\sigma}$ coïncide sur $[K]_{\bullet}$ avec $\mu' \circ \varphi_{\sigma}$. Donc μ'' coïncide avec μ' sur $\Sigma'_{\bullet} \cap [\sigma]_{\bullet}$ et par conséquent définit un prolongement de μ' . \square

4.3. Conditions suffisantes pour l'invariance de l'homologie par isotopie.

LEMME 6. — Soit $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ un espace bisimplicial. On suppose que

a) le morphisme $\xi_* : H(C_{\bullet,0}) \rightarrow H(C)$ est injectif.

On suppose en plus que pour un certain entier $p \geq 0$ on ait

b) $\Gamma_{\bullet,0}$ possède la propriété locale d'extension en degré $p+1$;

et

c) $H_j(C_{p-j,\bullet}) = 0$ pour $0 \leq j \leq p$.

Alors l'homologie $H_p(C_{\bullet,0})$ est, à noyaux fixes, invariante localement et par isotopie, au sens explicité ci-dessous.

Invariance locale à noyaux fixes. — Soit $(\sigma_j, \lambda_j)_{j \in J}$ une famille finie d'éléments de $\Gamma_{p,0} \times \mathbb{Z}$ telle que $x = \sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_j$ soit un δ -cycle. Alors tout δ -cycle $\sum_{j \in J} \lambda_j \sigma'_j$ tel que, pour tout $j \in J$, σ'_j soit proche de σ_j et ait même noyau que σ_j , est δ -homologue à x .

Invariance par isotopie à noyaux fixes. — Soient (σ_j, λ_j) et x comme ci-dessus. Soit $(\sigma_{j,t})_{j \in J; t \in [0,1]}$ une isotopie d'origine (σ_j) telle que pour tout $(j, t) \in J \times [0, 1]$ le noyau de $\sigma_{j,t}$ soit celui de σ_j , et que $x_t = \sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_{j,t}$ soit un δ -cycle pour tout $t \in [0, 1]$; alors x_t est δ -homologue à x pour tout $t \in [0, 1]$.

Remarques.

1. L'invariance locale à noyaux fixes entraîne l'invariance par isotopie à noyaux fixes.
2. La condition de fixité des noyaux est superflue lorsque Γ_{-1} est discret.
3. Dans la preuve du lemme 6, la condition c) n'intervient que comme condition suffisante d'existence de rubans déployés.

Démonstration du lemme 6. — On démontre l'invariance locale à noyaux fixes (cf. remarque 1); c'est une propriété de la famille $(\sigma_j, \lambda_j)_{j \in J}$ qui est visiblement équivalente à la même propriété relative à la famille $(\sigma_j, \lambda_j)_{j \in J, \lambda_j \neq 0}$; on suppose donc dans la suite $\lambda_j \neq 0$ pour tout $j \in J$.

L'ensemble de tous les fermés de $(\Gamma_\bullet)^J$ définis par une équation du type

$$d_{i_1 i_2 \dots i_q} \sigma_j = d_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \dots \bar{i}_q} \sigma_{\bar{j}} \quad (\text{avec } j \neq \bar{j})$$

est fini. L'appartenance de (σ_j) à un tel fermé est la condition nécessaire et suffisante pour que la relation correspondante

$$d_{i_1 i_2 \dots i_q} (\text{id}_p \times \{j\}) \sim d_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \dots \bar{i}_q} (\text{id}_p \times \{\bar{j}\})$$

appartienne au système total \mathcal{R} des relations d'incidence de (σ_j) . Il en résulte que le système total \mathcal{R}' de toute famille (σ'_j) suffisamment voisine de (σ_j) est contenu dans \mathcal{R} . On fixe désormais $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ (pour lequel il n'y a qu'un nombre fini de choix), et on se borne aux (σ'_j) dont \mathcal{R}' est le système total. Les familles (σ_j) et (σ'_j) sont, relativement au système \mathcal{R}' , dans la situation décrite au 5) du lemme 4 : elles ont même modèle $(\Gamma_{\mathcal{R}'}_\bullet)$, et on a $\tilde{\sigma}'_j = \tilde{\sigma}_j$ pour tout j . D'après le 4) du même lemme, $\sum_{j \in J} \lambda_j \tilde{\sigma}'_j = \sum_{j \in J} \lambda_j \tilde{\sigma}_j$ est un cycle; on note ce cycle \tilde{x} .

À la famille (σ_j, λ_j) et au système \mathcal{R}' on associe comme en 3.4 l'ensemble bisimplicial $\Pi_{\bullet, \bullet}$ et le bicomplexe $P_{\bullet, \bullet}$ relatifs au morphisme $\psi : (\Gamma_{\mathcal{R}'})_\bullet \rightarrow \Gamma_{\bullet, 0}$. Il résulte de l'hypothèse c) et du lemme 1 (cf. 3.4) qu'il existe relativement à cette famille et à \mathcal{R}' un ruban déployé, c'est-à-dire, conformément à la définition 6, un ruban $\tilde{z} = \tilde{z}_1 + \dots + \tilde{z}_{p+1}$ de \mathcal{P}_{p+1} tel que $\beta \tilde{z}_1 = \eta \tilde{x}$. On note $[\tilde{z}]_{\bullet, \bullet}$ (resp. $[\tilde{y}]_{\bullet, \bullet}$) le sous-ensemble bisimplicial de $\Pi_{\bullet, \bullet}$ engendré par tous les simplexes de \tilde{z} (resp. $\delta \tilde{z}_{p+1}$) et toutes leurs faces itérées; il est clair que $[\tilde{y}]_{\bullet, \bullet} \subset [\tilde{z}]_{\bullet, \bullet}$.

Il résulte du 1 et du 2 du lemme 4 que les $\tilde{\sigma}_j$ sont distincts deux à deux, et que $(\Gamma_{\mathcal{R}'})_p$ est libre et engendré par les $\tilde{\sigma}_j$; donc, η étant un isomorphisme, $\Pi_{p,0}$ est libre et engendré par les $\eta\tilde{\sigma}_j$. Or tous les λ_j sont $\neq 0$ et $[\tilde{z}]_{\bullet,\bullet}$ contient $\eta\tilde{x}$; donc $[\tilde{z}]_{\bullet,\bullet}$ contient tous les $\eta\tilde{\sigma}_j$; donc $\Pi_{\bullet,0} \subset [\tilde{z}]_{\bullet,\bullet}$. D'après le diagramme commutatif de 3.3, le morphisme $\mu : [\tilde{z}]_{\bullet,\bullet} \rightarrow \Gamma_{\bullet,0}$ défini par pr_2 induit sur $\Pi_{\bullet,0}$ le morphisme $\psi \circ \eta^{-1}$. Le 1 du lemme 4 entraîne que $\Pi_{-1,0}$ est engendré par les noyaux des $\tilde{\sigma}_j$; il résulte donc du 5 du lemme 4 que $\psi \circ \eta^{-1}$ et $\psi' \circ \eta^{-1}$ coïncident sur $\Pi_{-1,0}$; ils coïncident donc sur $[\tilde{y}]_{\bullet,\bullet} \cap \Pi_{\bullet,0} \subset \Pi_{-1,0}$. Ainsi le morphisme $\psi' \circ \eta^{-1}$ (défini sur $\Pi_{\bullet,0}$) et le morphisme $\mu|[\tilde{y}]_{\bullet,\bullet}$ coïncident sur l'intersection de leurs ensembles de définition respectifs. Le morphisme μ' ainsi défini sur la réunion $\Pi_{\bullet,0} \cup [\tilde{y}]_{\bullet,\bullet}$ peut, d'après l'hypothèse b) et le lemme 5, se prolonger en un morphisme $\mu'' : [\tilde{z}]_{\bullet,\bullet} \rightarrow \Gamma_{\bullet,0}$ coïncidant avec μ sur $[\tilde{y}]_{\bullet,\bullet}$, donc sur $[\tilde{z}]_{\bullet,\bullet} \cap \Pi_{-1,p+1}$. On est maintenant dans les conditions d'application du lemme 2; on en conclut que $\psi\tilde{x}$ et $\psi'\tilde{x}$ sont homologues dans $C_{\bullet,0}$. \square

4.4. Propriété d'isotopie des étoiles et lemme fondamental.

DÉFINITION 10. — Soit $p \geq -1$. On dit qu'un espace simplicial Γ_{\bullet} possède la *propriété d'isotopie des p -étoiles* si, pour toute famille finie (σ_j, λ_j) d'éléments de $\Gamma_p \times \mathbb{Z}$ telle que tous les σ_j aient même noyau et que $\sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_j$ soit un cycle, il existe une isotopie $(\sigma_{j,t})$ d'origine (σ_j) dans Γ_p , conservant le noyau et les relations d'incidence (ce qui implique que $\sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_{j,t}$ soit un cycle pour tout t), telle que $\sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_{j,1}$ soit un bord.

Définition analogue, pour p et $q \geq 0$, de la *propriété d'isotopie des (p,q) -étoiles* d'un espace bisimplicial $\Gamma_{\bullet,\bullet}$: on remplace Γ_p par $\Gamma_{p,q}$, noyau par âme, cycle et bord par β -cycle et β -bord, et la condition de conservation des relations d'incidence se limite à celles relatives aux β_i (pour $0 \leq i \leq q-1$).

Remarque 1. — Lorsque $\sigma \in \Gamma_{p,0}$, l'âme de σ coïncide avec σ . La «propriété d'isotopie» pour les $(p,0)$ -étoiles se réduit donc à la surjectivité de $\beta_0 : \Gamma_{p,1} \rightarrow \Gamma_{p,0}$, c'est-à-dire à la nullité de $H_0(C_{p,\bullet})$.

Remarque 2. — Si $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ est l'extension naturelle de Γ_{\bullet} , il y a d'après l'isomorphisme (15) coïncidence entre la propriété d'isotopie des (p,q) -étoiles de $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ et celle des $(q-1)$ -étoiles de $\Gamma_{\bullet}^{(p)}$.

LEMME FONDAMENTAL. — Soit Γ_\bullet un espace simplicial. On suppose qu'il existe un entier n tel que

i) Γ_\bullet a la propriété locale d'extension en degré p pour $0 \leq p \leq n$;

ii) $\Gamma_\bullet^{(m)}$ a la propriété d'isotopie des p -étoiles pour $m \geq 0$, $p \geq -1$ et $p + m \leq n - 2$,

cette dernière hypothèse pouvant s'écrire de façon équivalente

ii') l'extension naturelle $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ de Γ_\bullet a la propriété d'isotopie des (p, q) -étoiles pour $p \geq 0$, $q \geq 0$, et $p + q \leq n - 1$.

Alors

1) $H_p(C_\bullet^{(m)}) = 0$ pour $m \geq 0$, $p \geq -1$ et $p + m \leq n - 2$;

2) $H_p(C_\bullet^{(m)})$ satisfait à l'invariance locale à noyaux fixes et à l'invariance par isotopie à noyaux fixes pour $p \geq 0$, $m \geq -1$ et $p + m \leq n - 2$. En particulier $H_p(C_\bullet)$ satisfait à l'invariance locale et à l'invariance par isotopie pour $0 \leq p \leq n - 1$ lorsque Γ_{-1} est discret.

La conclusion 1) peut s'écrire de façon équivalente

1') $H_q(C_{p,\bullet}) = 0$ pour $p \geq 0$, $q \geq 0$ et $p + q \leq n - 1$.

Démonstration. — L'hypothèse a) du lemme 6 (injectivité de ξ_*) est satisfaite par $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ d'après la remarque 2 de 1.3, et par les réduits de $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ puisque, comme on l'a noté en 3.2, $\Gamma_{\bullet,\bullet}^{(m)}$ est l'extension naturelle de $\Gamma_\bullet^{(m)}$. D'autre part, la propriété locale d'extension passe de Γ_\bullet en degré p à $\Gamma_\bullet^{(m)}$ en degré $p - m - 1$ si $p - m - 1 \geq 0$; il résulte donc de l'hypothèse i) que $\Gamma_\bullet^{(m)}$ a la propriété locale d'extension en degré p pour $m \geq -1$, $p \geq 0$, $p + m \leq n - 1$. Le lemme 6 se traduit donc par le critère d'invariance suivant, valable sous l'hypothèse i) :

Pour $p \geq 0$, $m \geq -1$, et $p + m \leq n - 2$, la condition

$$(17_p)^{(m)} \quad H_j(C_{p-j,\bullet}^{(m)}) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq j \leq p$$

entraîne pour $H_p(C_\bullet^{(m)})$ l'invariance locale à noyaux fixes et l'invariance par isotopie à noyaux fixes.

Le 1') du lemme fondamental dit exactement que $(17_p)^{(-1)}$ est vrai pour $p = 0, 1, \dots, n - 1$. La preuve du lemme fondamental est donc celle de $(17_p)^{(m)}$ pour $p \geq 0$, $m \geq -1$, et $p + m \leq n - 2$; et ceci, par définition du réduit, revient à prouver pour $p \geq 0$, $q \geq 0$ et $p + q \leq n - 1$

$$(17_{p,q}) \quad H_j(C_{p-j,\bullet}) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq j \leq q,$$

contenue dans U est noté simplement $\Gamma_\bullet[U]$. Les notations $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ et $\Gamma_{\bullet,\bullet}[\mathcal{U}]$ désignent les extensions naturelles respectives de Γ_\bullet et $\Gamma_\bullet[\mathcal{U}]$.

LEMME 7. — Soient p et $q \geq 0$; si $\Gamma_{\bullet,\bullet}$ possède la propriété d'isotopie des (p, q) -étoiles, il en est de même de $\Gamma_{\bullet,\bullet}[\mathcal{U}]$ pour toute partie \mathcal{U} de l'ensemble des ouverts.

Démonstration. — On peut se borner au cas où \mathcal{U} est fini. Si une (p, q) -étoile $x \in C_{p,q}[\mathcal{U}]$ est origine d'un chemin (x_t) dans $C_{p,q}$ tel que $x_1 = \beta z$ avec $z \in C_{p,q+1}$, alors le chemin $((x_t)_{\#} h_{p,q;\varepsilon})_{t \in [0,1]}$ (où $\varepsilon \in]0, 1]$ et où $h_{p,q;\varepsilon}$ est la contraction de Δ^{p+q} définie à l'Appendice B) est dans $C_{p,q}$ d'après l'hypothèse d'admissibilité, et on a $(x_1)_{\#} h_{p,q;\varepsilon} = \beta(z_{\#} h_{p,q;\varepsilon})$. Si ε est assez petit, $(x_t)_{\#} h_{p,q;\varepsilon}$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $z_{\#} h_{p,q;\varepsilon}$ sont dans $C_{\bullet,\bullet}[\mathcal{U}]$. D'autre part le chemin défini par $(x_{\#} h_{p,q;1-t})_{t \in [0,1-\varepsilon]}$ reste dans $C_{p,q}[\mathcal{U}]$ puisque les contractions diminuent les images. Le composé de ce chemin et du chemin $((x_t)_{\#} h_{p,q;\varepsilon})_{t \in [0,1]}$ est une isotopie de x à $x_1_{\#} h_{p,q;\varepsilon}$ dans $C_{p,q}[\mathcal{U}]$, qui conserve les relations d'incidence relatives aux β_i dès qu'il en est ainsi de l'isotopie (x_t) . \square

COROLLAIRE DU LEMME FONDAMENTAL. — Soit Γ_\bullet un sous-espace simplicial admissible (cf. 2.2) de $\Sigma_\bullet(X)$ (resp. $\Sigma_\bullet^\infty(V)$) satisfaisant aux hypothèses du lemme fondamental. Alors

1) Pour $0 \leq p \leq n-1$, le groupe $H_p(C_\bullet)$ et, plus généralement, le groupe $H_p(C_\bullet[\mathcal{U}])$ pour toute partie \mathcal{U} de l'ensemble des ouverts de X (resp. de V), sont invariants par toute subdivision linéaire.

2) Si \mathcal{U} est un recouvrement ouvert de X (resp. de V), le morphisme naturel $\nu_p : H_p(C_\bullet[\mathcal{U}]) \rightarrow H_p(C_\bullet)$ est bijectif pour $0 \leq p \leq n-1$. Si ce recouvrement se compose de deux ouverts U_1 et U_2 , on a la suite exacte de Mayer-Vietoris :

$$\begin{aligned} H_n(C_\bullet[U_1 \cap U_2]) &\rightarrow H_n(C_\bullet[U_1]) + H_n(C_\bullet[U_2]) \rightarrow H_n(C_\bullet[\mathcal{U}]) \rightarrow \\ H_{n-1}(C_\bullet[U_1 \cap U_2]) &\rightarrow H_{n-1}(C_\bullet[U_1]) + H_{n-1}(C_\bullet[U_2]) \rightarrow H_{n-1}(C_\bullet) \rightarrow \\ \cdots &\rightarrow H_0(C_\bullet[U_1 \cap U_2]) \rightarrow H_0(C_\bullet[U_1]) + H_0(C_\bullet[U_2]) \rightarrow H_0(C_\bullet) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Démonstration. — 1) Il résulte du lemme 7 que $\Gamma_\bullet[\mathcal{U}]$ vérifie les hypothèses du lemme fondamental dès que Γ_\bullet les vérifie; d'autre part l'admissibilité de Γ_\bullet entraîne évidemment celle de $\Gamma_\bullet[\mathcal{U}]$. On applique à $\Gamma_\bullet[\mathcal{U}]$ le 1) du lemme fondamental, puis le corollaire du lemme 3.

2) On désigne par s la subdivision barycentrique. La surjectivité de ν_p résulte de l'invariance de $H_p(C_\bullet)$ par s et du fait que la maille de l'itérée s^r est arbitrairement petite pour r grand. Preuve de l'injectivité de ν_p : soit $x \in C_p[\mathcal{U}]$; on suppose qu'il existe $z \in C_{p+1}$ tel que $x = dz$; d'après le 1), $s^r x$ est homologue à x dans $C_p[\mathcal{U}]$; or $s^r x = d(s^r z)$, et $s^r z \in C_{p+1}[\mathcal{U}]$ pour r assez grand.

L'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris est une conséquence classique de la bijectivité de ν_* . □

**5. Théorème de Lalonde et son extension
aux simplexes immergés.**

5.1. Énoncé du théorème.

Les trois théorèmes mentionnés dans l'Introduction affirment que, pour une variété différentiable V munie d'une certaine structure supplémentaire, et pour un entier $n(V)$ lié à cette structure, l'homologie engendrée par un certain sous-espace simplicial $\Gamma_\bullet(V)$ de $\Sigma^\infty(V)$ représente l'homologie de V jusqu'à la dimension $n(V)$ (en un sens précisé ci-dessous dans l'énoncé du théorème). A chaque cas correspond la catégorie et le foncteur Γ_\bullet qui sont définis dans le tableau ci-dessous.

Cas	Objets	Morphismes	Foncteur
1	variétés différentiables feuilletées ; $n = \text{codimension}$	plongements envoyant feuille dans feuille	ensemble des simplexes plongés transverses au feuilletage
2	idem	immersions envoyant feuille dans feuille	ensemble des simplexes immergés transverses au feuilletage
3	variétés différentiables munies d'une submersion ; $n = \text{dimension de la}$ variété but	paire de plongements commutant avec la submersion	ensemble des simplexes dont le composé avec la submersion est plongé

THÉORÈME. — Pour chacune des trois catégories ci-dessus, et pour le foncteur Γ_\bullet correspondant, le morphisme canonique $H_p(C_\bullet(V)) \rightarrow H_p(V)$ est, pour tout objet V de la catégorie, bijectif pour $0 \leq p \leq n(V) - 1$ et surjectif pour $p = n(V)$.

Ce théorème est dû à Lalonde [L] dans les cas 1 et 3.

5.2. La démonstration du théorème ramenée au cas du modèle local.

Pour chacune des catégories considérées, tout ouvert U est muni d'une structure induite qui vérifie

$$(18) \quad \Gamma_{\bullet}(U) = \Gamma_{\bullet}(V) \cap \Sigma_{\bullet}^{\infty}(V),$$

ce qui s'écrit $\Gamma_{\bullet}(U) = \Gamma_{\bullet}[U]$ avec la notation de 4.5. Il est clair que $\Gamma_{\bullet}(V)$ est toujours admissible (cette propriété est d'ailleurs impliquée par la «naturalité» de Γ_{\bullet} exprimée par (18)); d'après l'Appendice A, $\Gamma_{\bullet}(V)$ possède la propriété locale d'extension en tout degré $p \leq n$, et, d'après l'Appendice B, $\Gamma_{\bullet}(V)$ possède la propriété d'isotopie des (p, q) -étoiles pour $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q \leq n(V) - 1$. Donc, d'après le 2) du corollaire du lemme fondamental, et compte tenu de (18), pour tout couple (U_1, U_2) d'ouverts de V , les homologies de $C_{\bullet}(U_1)$, $C_{\bullet}(U_2)$, $C_{\bullet}(U_1 \cap U_2)$ et $C_{\bullet}(U_1 \cup U_2)$ sont liées par la suite exacte de Mayer-Vietoris. L'application du «lemme de 5» à cette suite montre que si le théorème est vérifié pour U_1, U_2 , et $U_1 \cap U_2$, il l'est aussi pour $U_1 \cup U_2$. L'utilisation récurrente de ce principe permet de passer du modèle $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ (muni suivant les cas de sa projection sur \mathbb{R}^n ou du feuilletage que celle-ci définit) au cas d'une réunion finie de pavés de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$; de là, par limite inductive, on passe au cas d'un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, muni de la structure induite. Soit alors V une variété ayant pour modèle local $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$; l'application récurrente de Mayer-Vietoris démontre le théorème pour tout ouvert de V recouvert par un nombre fini de cartes; on passe de là à V elle-même par limite inductive.

5.3. Démonstration du théorème dans le cas de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Mis à part le degré zéro, facile à traiter directement, l'énoncé se réduit à $H_p(C_{\bullet}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)) = 0$ pour $1 \leq p \leq n - 1$. La preuve s'appuie sur le théorème d'approximation de J.H.C. Whitehead ([Wh], théorème 1; cf. aussi [C], p. 21-23) qu'on va rappeler brièvement. Pour tout p -simplexe singulier de \mathbb{R}^N , on note $\ell\sigma$ le simplexe affine qui coïncide avec σ aux sommets de Δ^p ; on prolonge ℓ en un morphisme du complexe singulier $S(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même, qui commute avec tous les d_i . Puis, pour toute subdivision linéaire s , on définit le morphisme $\ell_s : S(\mathbb{R}^N) \rightarrow S(\mathbb{R}^N)$ (qui lui aussi commute avec tous les d_i) par la formule $s\ell_s = \ell s$. Whitehead démontre que si σ est une immersion différentiable, et si la subdivision s est «régulière» (l'exemple type de subdivision régulière est la «subdivision standard» de Whitney, cf. [Whitney], p. 359), alors $\ell_{s^r}\sigma$ est arbitrairement

proche de σ au sens C^1 lorsque r est grand. Revenant au cas de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, on déduit du théorème de Whitehead (appliqué pour $n + m = N$) que tout cycle x de C_p est, après subdivision convenable, isotope avec conservation des relations d'incidence à un cycle x' de simplexes affines, plongés, transverses. Le cycle x' , qui est homologue à x d'après le 2) du lemme fondamental et le 1) de son corollaire, se projette sur $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ suivant un cycle x'' de codimension $n - p \geq 1$. Si a est un point de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ extérieur à toutes les variétés affines supports des simplexes de x'' , le cône $k_a \cdot x'$ est une chaîne de $C_{p+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ dont le bord est x' .

5.4. Remarque finale.

Les trois théorèmes qu'on vient d'établir (et qu'on va désigner par 1, 2, 3, les foncteurs Γ_\bullet et C_\bullet correspondant à l'entier i étant notés respectivement Γ_\bullet^i et C_\bullet^i) ont entre eux des relations a priori : le théorème 1 est impliqué par le théorème 2, et le théorème 3 (pour la submersion f) est impliqué par le théorème 1 (pour le feuilletage défini par f). Les preuves étant similaires, on va montrer que le théorème 2 implique le théorème 1 ; cela résulte du

LEMME. — Soit p un entier tel que $0 \leq p \leq n(V) - 1$. L'invariance de $H_p(C^2(V))$ par subdivision linéaire entraîne la bijectivité du morphisme canonique

$$(19) \quad H_p(C_\bullet^1(V)) \longrightarrow H_p(C_\bullet^2(V)).$$

Démonstration. — Soit p' tel que $0 \leq p' \leq n(V)$, et soit $\sigma \in \Gamma_{p'}^2$; soit K_σ la réunion des faces de toute dimension de $\Delta^{p'}$ sur lesquelles σ induit une plongement ; pour qu'un p' -simplexe affine α de $\Delta^{p'}$ soit tel que $\sigma \circ \alpha \in \Gamma_{p'}^1$, il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

- (i) α est suffisamment petit ;
- (ii) l'image de α est contenue dans un voisinage suffisamment petit d'une face de K_σ .

Preuve de la surjectivité de (19) : on désigne par s la subdivision barycentrique ; soit x un cycle de $C_p^2(V)$, par hypothèse $s^r x$ est homologue à x pour tout entier r ; si r est grand, il résulte de (i) (pour $p' = p$), et du fait que la maille de s^r est arbitrairement petite, que $s^r x \in C_p^1(V)$.

Preuve de l'injectivité : on désigne ici par s le morphisme de subdivision barycentrique de $C_{\bullet}^2(V)$ relativement à $C_{\bullet}^1(V)$ (cf. Appendice C). Soit x un cycle de $C_p^1(V)$; on suppose qu'il existe $z \in C_{p+1}^2(V)$ tel que $dz = x$; pour tout entier r on a $d(s^r z) = s^r x \sim x$; si r est grand, il résulte de (i) et (ii) (appliqués pour $p' = p + 1$), et du fait que la maille relative de s^r est arbitrairement petite (cf. Appendice C), que $s^r z \in C_{p+1}^1(V)$.

Appendice A

Prolongement au simplexe d'une fonction "différentiable" sur le bord.

LEMME A. — *Pour tout $p \geq 0$, toute fonction réelle différentiable f sur une réunion K de faces de toutes dimensions de Δ^p (c'est-à-dire différentiable sur chaque face de K et continue sur K) peut être prolongée en une fonction différentiable sur Δ^p . En outre, on peut prendre pour support du prolongement un voisinage arbitrairement petit du support de f , et si f est petit au sens C^∞ , on peut choisir ce prolongement petit au sens C^∞ .*

Démonstration. — *Premier cas particulier* : K est une face de dimension q de Δ^p (avec $0 \leq q \leq p-1$) et f est nulle sur le bord de cette face. Soit T un voisinage tubulaire de K dans Δ^p , paramétré de façon à identifier (T, K) à $K \times (\Delta^{p-q}, 0)$; soit χ une fonction $(\Delta^{p-q}, 0) \rightarrow ([0, 1], \{1\})$, dont le support est un voisinage arbitrairement petit du sommet 0; on prolonge f en \bar{f} défini par $\chi(y)f(x)$ pour $(x, y) \in K \times \Delta^{p-q}$, et par zéro sur $\Delta^p - T$; le prolongement \bar{f} a la propriété d'être nul sur toutes les faces de dimension q de Δ^p autres que K .

Deuxième cas particulier : K est le q -squelette $[\Delta_q^p]$ (réunion des faces de dimension q de Δ^p) et f est nulle sur $[\Delta_{q-1}^p]$. On décompose f en somme de fonctions du type précédent, et on additionne les prolongements correspondants.

Troisième cas particulier : $K = [\Delta_q^p]$. Par récurrence sur q : si le problème est résolu pour $q-1$, la restriction de f à $[\Delta_{q-1}^p]$ se prolonge en une fonction h définie sur Δ^p ; la fonction $f - (h|[\Delta_q^p])$ est nulle sur $[\Delta_{q-1}^p]$, donc elle se prolonge, donc f se prolonge.

Cas général : par récurrence sur p : si le problème est résolu pour tout $p' \leq p$, on se ramène, en grimpant sur le squelette de Δ^p , au cas où K est du type $[\Delta_q^p]$. □

COROLLAIRE. — *Pour chacun des trois foncteurs de 5.1, et pour tout objet V de la catégorie correspondante, $\Gamma_\bullet(V)$ a la propriété locale d'extension en tout degré $p \leq n(V)$.*

Démonstration. — Puisque $\Gamma_p(V)$ est un ouvert de $\Sigma_p(V)$, la propriété locale d'extension en degré p s'énonce : pour tout $\sigma \in \Gamma_p$, et pour toute réunion K de faces de dimensions arbitraires de Δ^p , toute application différentiable $\sigma' : K \rightarrow V$, proche de $\sigma|_K$ au sens C^∞ , peut être prolongée en $\sigma'' \in \Gamma_p(V)$, proche de σ au sens C^∞ .

Il est classique de définir (au moyen d'une métrique riemannienne sur V) un isomorphisme d'un voisinage de σ dans $\Sigma_p^\infty(V)$ sur un voisinage de la section nulle dans l'espace des sections d'un fibré vectoriel (produit fibré de (Δ^p, σ) et du fibré tangent à V). On se ramène ainsi, en utilisant une partition de l'unité sur Δ^p , subordonnée à un recouvrement assez fin par des cartes locales de la variété à coins Δ^p , à prouver l'énoncé suivant : supposant qu'il existe des cartes locales respectives \mathcal{U}, \mathcal{V} de Δ^p et V , telles que $\sigma(\bar{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{V}$, tout σ' proche de $\sigma|_K$ et coïncidant avec σ au voisinage du complémentaire de $K \cap \mathcal{U}$, peut être prolongé en σ'' proche de σ . Notant ξ_ℓ ($\ell = 1, \dots, N$) les coordonnées sur \mathcal{V} , on applique le lemme A à la fonction, de support contenu dans $K \cap \mathcal{U}$, définie sur ce support par $\xi_\ell \circ \sigma' - \xi_\ell \circ \sigma$; on obtient ainsi une fonction $\theta_\ell : \Delta^p \rightarrow \mathbb{R}$, petite au sens C^∞ , à support dans \mathcal{U} . Les fonctions $\theta_\ell + \xi_\ell \circ \sigma|_{\mathcal{U}}$ (pour $\ell = 1, \dots, N$) définissent une application $\theta : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$; on prend pour σ'' l'application $\Delta^p \rightarrow V$ définie par θ sur \mathcal{U} et par σ sur $\Delta^p - \mathcal{U}$. \square

Remarque. — La démonstration du corollaire est plus simple (en particulier elle n'utilise pas de partition de l'unité) lorsque l'image de σ est contenue dans une carte, ce qui est toujours le cas lorsque σ est un plongement.

Appendice B

Le lemme d'isotopie des étoiles.

Cet Appendice a pour but de prouver le

LEMME B. — *Pour chacune des trois catégories considérées en 5.1, et pour tout objet V , l'ensemble simplicial $\Gamma_\bullet(V)$ possède la propriété d'isotopie des (p, q) -étoiles pour $p \geq 0, q \geq 0, p + q \leq n(V) - 1$.*

On rappelle que, pour $\sigma \in \Gamma_{p,q}(V)$, les β_i sont les q premières faces du $(p+q)$ -simplexe défini par σ ; que l'âme de σ est $(\beta_0)^q \sigma$; qu'une (p,q) -étoile est une chaîne de $C_{p,q}(V)$ dont tous les simplexes ont même âme; et que la «propriété d'isotopie» est la suivante : toute (p,q) -étoile qui est un β -cycle est isotope à un β -bord avec conservation de l'âme et des relations d'incidence relatives aux β_i ($i = 0, 1, \dots, q-1$).

Un énoncé similaire (limité au cas des plongements) est démontré dans [C] (proposition 2, p. 12). On n'entrera donc pas ici dans tous les détails, au demeurant très classiques, de la preuve.

On se limite aux cas 1 et 2, car le cas 3 se ramène au cas 1 par la méthode de contraction vers l'âme déjà utilisée dans la preuve du lemme 7 (cf. 4.5).

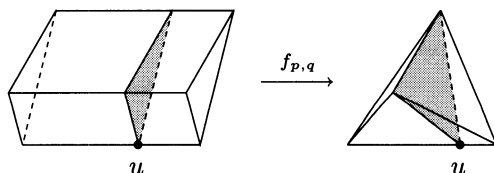
On utilise les notations Γ_\bullet^1 , C_\bullet^1 , etc., de 5.4; la démonstration se compose de quatre parties.

1. Choix des modèles.

Le modèle local, pour $n(V) = n$ et dimension $V = n+m$, est $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ feuilleté parallèlement à \mathbb{R}^m . On décompose \mathbb{R}^n en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-p-q}$. On choisit $\Delta^p \subset \mathbb{R}^p \times \{0, 0\}$. On choisit $\Delta^q \subset \{0\} \times \mathbb{R}^q \times \{0\}$. On choisit $\Delta^{p+q} \subset \Delta^p \times \Delta^q$ comme suit : c'est l'enveloppe convexe de ses sommets, pour lesquels on prend dans l'ordre

- (barycentre de Δ^p, i) pour $i = 0, 1, \dots, q-1$;
- (sommets i' de Δ^p , sommets q de Δ^q) pour $i' = 0, 1, \dots, p$.

On note $f_{p,q}$ l'application $\Delta^p \times \Delta^q \rightarrow \Delta^{p+q}$ qui fixe Δ^p et qui, pour tout $u \in \Delta^p$, est linéaire sur $\{u\} \times \Delta^q$ et envoie le point $(u, \text{sommet } i \text{ de } \Delta^q)$ au sommet i de Δ^{p+q} (pour $i = 0, 1, \dots, q-1$).



2. Réduction au cas des (p, q) -étoiles de $\Gamma_{\bullet, \bullet}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ dont l'âme est l'injection : $\Delta^p \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Soit $(\sigma_j)_{j \in J}$ une famille finie de simplexes de $\Gamma_{p, q}^2(V)$ ayant tous la même âme α . On choisit une immersion $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow V$, adaptée au feuilletage \mathcal{F} de V et au feuilletage de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, telle que $\varphi|_{\Delta^p} = \alpha$. Dans le cas où (σ_j) est une étoile de simplexes plongés, on choisit pour φ un plongement. Dans tous les cas, il existe, pour tout $j \in J$, en tout point u de Δ^p , un germe de plongement $g_{j;u} : \Delta^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, fixant Δ^p , transverse à \mathcal{F} , tel que

$$(\text{germe en } u \text{ de } \varphi) \circ g_{j;u} = \text{germe en } u \text{ de } \sigma_j.$$

La famille $(g_{j;u})_{u \in \Delta^p}$ définit un germe le long de Δ^p d'application : $\Delta^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, qui est un germe de plongement.

Il existe donc, pour tout voisinage W assez petit de Δ^p dans Δ^{p+q} , un plongement $\psi_j : W \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, fixant Δ^p , transverse à \mathcal{F} , tel que

$$\sigma_j|_W = \varphi \circ \psi_j \quad \text{pour tout } j \in J.$$

Notons $(h_{p,q;t})$ la rétraction induite sur $\Delta^p \times \Delta^q$ par la rétraction de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ sur $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ (définie par $h_{p,q;t}(u, v) = (u, tv)$). La famille $(\sigma_j \circ h_{p,q;\varepsilon}|_{\Delta^{p+q}})_{j \in J}$ est isotope à la famille (σ_j) pour tout $\varepsilon > 0$; si ε est assez petit, on a $h_{p,q;\varepsilon}(\Delta^{p+q}) \subset W$, et par conséquent

$$\sigma_j \circ h_{p,q;\varepsilon} = \varphi \circ \psi_j \circ h_{p,q;\varepsilon} \quad \text{sur } \Delta^{p+q}.$$

Ceci réduit le problème au cas de la famille $(\psi_j \circ h_{p,q;\varepsilon}|_{\Delta^{p+q}})$, qui est du type annoncé.

3. Linéarisation des (p, q) -étoiles de $\Gamma_{\bullet, \bullet}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ dont l'âme est l'injection de Δ^p .

Pour tout (p, q) -simplexe plongé σ d'une variété V , et pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on appelle ε -voisinage tubulaire (paramétré) de l'âme de σ dans σ le plongement $\tau_\varepsilon = \sigma \circ f_{p,q} \circ h_{p,q;\varepsilon} : \Delta^p \times \Delta^q \rightarrow V$. L'isotopie $(\sigma \circ h_{p,q;t}|_{\Delta^{p+q}})_{t \in [1, \varepsilon]}$ déforme σ en le simplexe $\sigma \circ h_{p,q;\varepsilon}|_{\Delta^{p+q}}$ dont l'image est contenue dans celle de l' ε -voisinage tubulaire. Soit $(f_{p,q;t})_{t \in [0, 1]}$ le chemin joignant linéairement l'identité à $f_{p,q}$ dans l'espace des applications de $\Delta^p \times \Delta^q$ dans lui-même; on voit facilement que (dès que $\varepsilon < 1$) ce chemin induit une isotopie sur l'image $h_{p,q;\varepsilon}(\Delta^p \times \Delta^q)$. Donc le chemin

$\sigma \circ f_{p,q;t} \circ h_{p,q;\varepsilon}|_{\Delta^{p+q}}|_{t \in [0,1]}$ est une isotopie joignant $\sigma \circ h_{p,q;\varepsilon}|_{\Delta^{p+q}}$ à $\tau_\varepsilon|_{\Delta^{p+q}}$. La linéarisation par isotopie d'un simplexe (resp. d'une étoile) est ainsi ramenée à celle de l' ε -voisinage tubulaire (resp. de la famille des ε -voisinages tubulaires) de son âme.

La linéarisation d'un ε -voisinage tubulaire suffisamment petit $\tau_\varepsilon : \Delta^p \times \Delta^q \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, fixant Δ^p , s'effectue elle-même en deux temps :

1^{er} temps : isotopie de déroulement, qui utilise la contractibilité de Δ^p . Soit $h_{p,t}$ l'homothétie de rapport t de Δ^p par rapport à son sommet p ; on pose pour $t \in [0, 1]$

$$\tau_{\varepsilon,t}(u, v) = \tau_\varepsilon(h_{p,1-t}u, v) + tu \quad \text{pour } (u, v) \in \Delta^p \times \Delta^q,$$

qui n'est pas une isotopie a priori, mais qui en est une pour ε assez petit; le tube $\tau_{\varepsilon,1}$ est « déroulé », c'est-à-dire que

$$\tau_{\varepsilon,1}(u, v) = \tau_\varepsilon(\text{sommet } p \text{ de } \Delta^p, v) + u.$$

2^e temps : linéarisation proprement dite. Le tube déroulé $\tau_{\varepsilon,1}$ possède un tube linéaire $\tau_{\varepsilon,1}^\ell$ tangent le long de l'âme; si ε est assez petit, $\tau_{\varepsilon,1}$ et $\tau_{\varepsilon,1}^\ell$ sont linéairement isotopes, c'est-à-dire que le chemin affine qui les joint dans l'espace des applications $\Delta^p \times \Delta^q \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est un chemin de plongements.

4. Le cas linéaire.

Soit $(\sigma_j)_{j \in J}$ une (p, q) -étoile de simplexes linéairement plongés dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ de façon transverse aux feuilles. Chaque σ_j se projette sur $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ selon un simplexe σ'_j de codimension $n - p - q > 0$. Soit a un point de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ extérieur à toutes les variétés affines supports des σ'_j ; pour tout j , le cône $\bar{k}_a \sigma_j$ est transverse aux feuilles. Pour toute famille $(\lambda_j)_{j \in J}$ d'entiers telle que $x = \sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_j$ soit un β -cycle, on a d'après (10) : $\beta \bar{k}_a x = x$. \square

Remarque. — Il faut à chaque fois vérifier que les isotopies utilisées respectent les relations d'incidence relatives aux β_i . L'argument essentiel est la commutativité, pour $i = 0, 1, \dots, q - 1$, du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta^p \times \Delta^{q-1} & \xrightarrow{f_{p,q-1}} & \Delta^{p+q-1} \\ \text{id}_p \times d_i \text{id}_q \downarrow & & \downarrow d_i \text{id}_{p+q} \\ \Delta^p \times \Delta^q & \xrightarrow{f_{p,q}} & \Delta^{p+q}. \end{array}$$

Pour plus de détails se reporter à [C], *loc. cit.*

Appendice C

Subdivisions linéaires relatives.

Cet Appendice, contrairement aux précédents, ne fait pas partie de la preuve du théorème 5.1. Il est utilisé en 5.4 pour montrer les relations a priori entre les cas 1, 2, 3, de ce théorème.

Conformément à la notation introduite en 3.3, on désigne par $[\Delta^p]_\bullet$ l'ensemble simplicial défini par l'application identique id_p de Δ^p et toutes ses faces itérées.

DÉFINITION. — Une *subdivision linéaire relative* est la donnée, pour $p = 0, 1, \dots$, et pour tout sous-ensemble simplicial Λ de $[\Delta^p]_\bullet$, d'une p -chaîne affine $s_{p,\Lambda}$ de Δ^p telle que

$$(01) \quad s_{0,\Lambda} = \text{id}_0 \text{ quel que soit } \Lambda \text{ (vide ou non vide) ;}$$

$$(02) \quad \text{les images des simplexes de } s_{p,\Lambda} \text{ triangulent } \Delta^p ;$$

$$(03) \quad ds_{p,\Lambda} = \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i (d_i \text{id}_p)_\# s_{p-1,\Lambda_i}, \text{ où } \Lambda_i \text{ désigne l'image réciproque de } \Lambda \text{ par l'application } (d_i \text{id}_p)_\# : [\Delta^{p-1}]_\bullet \rightarrow [\Delta^p]_\bullet.$$

Morphismes définis par une subdivision linéaire relative. — Soit X un espace topologique; soit Σ' un sous-ensemble simplicial de l'ensemble $\Sigma_\bullet(X)$ des simplexes singuliers de X . Pour tout $\sigma \in \Sigma_p(X)$, on note Σ'_σ le sous-ensemble simplicial de $[\Delta^p]_\bullet$ formé des simplexes σ' tels que $\sigma \circ \sigma' \in \Sigma'$. On définit l'application linéaire $s_{\Sigma'}$ du complexe singulier de X dans lui-même (laissant stables les sous-complexes admissibles) en posant pour tout $\sigma \in \Sigma_p(X)$

$$(04) \quad s_{\Sigma'} \sigma = \sigma_\# s_{p,\Sigma'_\sigma}.$$

En particulier, pour $X = \Delta^p$, $\Sigma' = \Lambda$ et $\sigma = \text{id}_p$, on trouve

$$s_\Lambda \text{id}_p = s_{p,\Lambda},$$

de sorte que (03) prend la forme

$$(03') \quad ds_\Lambda \text{id}_p = s_\Lambda d \text{id}_p.$$

Plus généralement, on a, puisque $(\Sigma'_\sigma)_i = \Sigma'_{d_i \sigma}$,

$$ds_{\Sigma'} \sigma = s_{\Sigma'} d\sigma,$$

en d'autres termes, pour Σ' fixé, $s_{\Sigma'}$ est un morphisme du complexe singulier de X dans lui-même.

Itération. — On définit l'itérée d'ordre 2 d'une subdivision linéaire relative en posant $(s^2)_{p,\Lambda} = s_\Lambda s_{p,\Lambda}$. C'est encore une subdivision linéaire relative (vérifier (03) sous la forme (03')). Même résultat pour l'itérée d'ordre quelconque.

L'exemple qui suit montre l'utilisation d'une subdivision linéaire relative itérée comme outil de subdivision sélective : on cesse de subdiviser un simplexe dès que celui-ci possède la taille ou plus généralement la propriété désirée.

Exemple : la subdivision barycentrique relative $\text{bar}_{\bullet,\Lambda}$. — On définit $\text{bar}_{p,\Lambda}$ par récurrence sur p , le cas $p = 0$ étant trivial. Supposant $\text{bar}_{0,\Lambda}, \dots, \text{bar}_{p-1,\Lambda}$ définis de manière à vérifier (02) et (03), on note k_{b_p} l'opérateur cône au barycentre de Δ^p , et on pose

$$\text{bar}_{p,\Lambda} = \begin{cases} \text{id}_p & \text{si } \Lambda = [\Delta^p]_\bullet; \\ k_{b_p} \left(\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i (d_i \text{id}_p)_\# \text{bar}_{p-1,\Lambda_i} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La vérification de (02) est immédiate, ainsi que celle de (03) pour $\Lambda = [\Delta^p]_\bullet$. Dans les autres cas, la définition ci-dessus s'écrit

$$\text{bar}_{p,\Lambda} = k_{b_p} \text{bar}_\Lambda d \text{id}_p,$$

où bar_Λ est défini par la formule (04) pour $X = \Delta^p$ et $\Sigma' = \Lambda$. L'hypothèse de récurrence implique que la restriction de bar_Λ au $(p-1)$ -squelette de Δ^p commute avec le bord, donc que $\text{bar}_\Lambda d \text{id}_p$ est un cycle; d'où aussitôt (03).

Les simplexes de Λ sont triangulés trivialement par $\text{bar}_{p,\Lambda}$. Tout simplexe τ de $\text{bar}_{p,\Lambda}$ est, soit le cône itéré d'une q -face d'un simplexe de Λ (avec $0 \leq q \leq p$) par rapport à une suite de $(p-q)$ barycentres de faces de Δ^p de dimension respective $q+1, \dots, p$; soit un simplexe de la subdivision barycentrique de Δ^p (cas qu'on peut inclure dans le précédent avec $q = -1$). Appelons *diamètre relatif* à Λ de τ le diamètre de son image $|\tau|$ dans le cas $q = -1$, la borne supérieure des distances des points de $|\tau|$ à $|d_0^{p-q} \tau|$ dans le cas $q \geq 0$. Appelons *maille relative* à Λ de $\text{bar}_{p,\Lambda}$ la borne supérieure des diamètres relatifs de ses simplexes. La maille relative à Λ de $\text{bar}_{p,\Lambda}$ est inférieure ou égale à la maille de la barycentrique $\text{bar}_{p,\emptyset}$; la même propriété subsiste pour les itérées respectives de même rang. Il en résulte le

LEMME C. — *La maille relative à Λ de $(\text{bar}^r)_{p,\Lambda}$ tend vers zéro quand $r \rightarrow \infty$.*

BIBLIOGRAPHIE

- [C] J. CERF, Homologie des simplexes plongés : une preuve nouvelle du théorème de Lalonde, Bull. Soc. Math. de France, 118 (1990), 1–25.
- [L] F. LALONDE, Homologie de Shih d'une submersion, Mémoire (nouvelle série) n° 30 supplément au Bull. Soc. Math. de France, 115 (1987).
- [Wh] J.H.C. WHITEHEAD, On C^1 -complexes, Ann. of Math., 41, n° 4 (1940).
- hitney] H. WHITNEY, Geometric integration theory, Princeton Math. Series 21, Princeton University Press (1957).

Manuscrit reçu le 13 novembre 1997,
accepté le 9 février 1998.

Jean CERF,
Université Paris-Sud
Mathématique
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France).