ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-MARIE LION
JEAN-PHILIPPE ROLIN

Intégration des fonctions sous-analytiques et volumes des sous-ensembles sous-analytiques

Annales de l'institut Fourier, tome 48, nº 3 (1998), p. 755-767
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_3_755_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 3 (1998), 755-767

INTÉGRATION DES FONCTIONS SOUS-ANALYTIQUES ET VOLUMES DES SOUS-ENSEMBLES SOUS-ANALYTIQUES

par J.-M. LION et J.-P. ROLIN

1. Introduction.

Soit $f(x) = a_{-d}/x^{d/q} + ... + a_{-1}/x^{1/q} + a_0 + a_1 x^{1/q} + a_2 x^{2/q} + ...$ une série de Puiseux réelle définie au voisinage de l'intervalle $]0,1]$. L'aire du domaine délimité par le graphe de la fonction f, l'axe horizontal $\{y = 0\}$ et les axes verticaux $\{x = 1\}$ et $\{x = x_0\}$ n'est pas nécessairement une série de Puiseux mais la somme d'une série de Puiseux de x_0 et d'un logarithme de x_0. L'objet de ce travail est de montrer le caractère très général de cette affirmation.

La droite réelle $\mathbf{R}$ est plongée dans la droite projective réelle $\mathbf{P}_1$: $[x : 1] \sim [1 : x']$ si et seulement si $xx' = 1$. Si $n \in \mathbf{N}$ l'espace $\mathbf{R}^n$ est donc plongé dans le tore $\mathbf{P}_1^n$.

Un sous-ensemble Y de $\mathbf{R}^n$ est un *sous-analytique global* s'il existe $d \in \mathbf{N}$ et un sous-ensemble analytique Z du tore $\mathbf{P}_1^{n+d}$ tel que $Y = \pi(Z) \cap \mathbf{R}^n$ où π est la projection canonique de $\mathbf{P}_1^{n+d}$ sur $\mathbf{P}_1^n$. Les propriétés des ensembles sous-analytiques ont été étudiées entre autre par Bierstone et Milman [BM], Gabrielov [Ga], Hironaka [Hi] et Łojasiewicz [Loj]. Tout sous-analytique global $Y \subset \mathbf{R}^n$ vérifie la propriété de finitude uniforme suivante : il existe un entier d majorant le nombre de composantes connexes

Mots-clés : Sous-analytiques - Volume - Densité - Intégration.
Classification math. : 32B15 - 32B20.

de $E \cap Y$ indépendamment du choix du sous-espace affine E. Le théorème du complémentaire de Gabrielov affirme que le complémentaire d'un sous-analytique global est un sous-analytique global. Soit D un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$. Une fonction $f : D \to \mathbf{R}$ est une *fonction sous-analytique globale* si son graphe est un sous-analytique global. Le sous-ensemble D est donc un sous-analytique global.

Soit Y un sous-ensemble stratifiable d'une variété riemannienne N et soit $(\Gamma_i), i \in I$ une stratification de Y. Soit k le maximum des dimensions des strates Γ_i et soit Y_k la réunion des strates de dimension k. L'ensemble Y_k est une sous-variété riemannienne de dimension k de la variété N. Le volume k-dimensionnel de Y_k est un réel positif ou infini indépendant de la stratification de Y utilisée pour le calculer : ce nombre noté $v_k(Y)$ est appelé *volume k-dimensionnel de Y*. Les sous-analytiques sont stratifiables. Nous étudions leurs volumes.

THÉORÈME 1. — *Soit Y un sous-analytique global de l'espace euclidien $\mathbf{R}^{n+m}$. On suppose que les fibres $Y_x = Y \cap (\{x\} \times \mathbf{R}^m)$ sont de dimension au plus k. La fonction volume k-dimensionnel $v(x) = v_k(Y_x)$ est alors du type suivant : il existe une partition finie de $\mathbf{R}^n$ en sous-ensembles définis à partir d'égalités et d'inégalités de fonctions de la forme $\phi(x, \log a_1(x), ..., \log a_r(x))$ où ϕ et les a_i sont sous-analytiques globales. Sur chacun de ces sous-ensembles la fonction volume $v(x)$ est infinie ou coïncide avec la restriction d'une fonction de la forme*

$$P(t_1, ..., t_d, \log t_1, ..., \log t_d)$$

où P est un polynôme et les t_i sont des fonctions sous-analytiques globales de x. Si de plus la projection de Y sur $\mathbf{R}^m$ est relativement compacte, alors la fonction v est bornée.

Remarque. — Dans le cas où $n = 1$ on obtient une partition finie de $\mathbf{R}$ en intervalles sur chacun desquels la fonction $v(x)$ est de la forme $|x-a|^r P(|x-a|^{1/p}, \log|x-a|)$ où P est polynôme en $\log|x-a|$ à coefficients des fonctions analytiques de $|x-a|^{1/p}$, $r \in \mathbf{Q}, p \in \mathbf{N}$.

La preuve de ce résultat se fait en deux étapes : la formule de Cauchy-Crofton [Sa], [La] combinée avec le théorème du complémentaire de Gabrielov pour les sous-analytiques [Ga] ramène ce problème de calcul de volume k-dimensionnel au calcul de la primitive d'une fonction sous-analytique globale bornée et à support compact. Le théorème de préparation des fonctions sous-analytiques globales de [LR] (voir aussi Parusiński [Pa]) permet de calculer cette primitive.

THÉORÈME D'INTÉGRATION. — *Soit une fonction* $f(x,y,z)$: $[0,1]^n \times [0,1]^m \times [0,1] \to [0,1]$ *qui est un polynôme en des fonctions sous-analytiques globales et en leurs logarithmes. Il existe alors une fonction* $F(x,\varepsilon,y) : [0,1]^n \times [0,1] \times [0,1]^m \to [0,1]$ *du même type vérifiant la propriété suivante. Soient* $x \in [0,1]^n$ *et* $y \in [0,1]^m$. *La fonction* $F(x,\varepsilon,y)$ *tend en croissant vers l'intégrale* $\int_0^1 f(x,y,z)dz$ *lorque* ε *décroît vers 0.*

Le théorème d'élimination inspiré de [DMM] permet de conclure :

THÉORÈME D'ÉLIMINATION. — *Soit* $F(x,\varepsilon)$ *une fonction définie sur* $\mathbf{R}^n\times]0,+\infty[$, *à valeurs dans* $[0,+\infty]$ *et d'un des deux types suivants :*

Il existe une partition finie de $\mathbf{R}^n\times]0,+\infty[$ *en sous-ensembles* D_i *définis à partir d'égalités et d'inégalités de fonctions de la forme*

$$\phi(x,\varepsilon,\log a_1(x,\varepsilon),...,\log a_r(x,\varepsilon))$$

où ϕ *et les* a_i *sont sous-analytiques globales. Il existe des fonctions* G_i, *toutes sous-analytiques globales (type I) ou toutes polynomiales (type II), telles qu'en restriction à chaque* D_i *la fonction* $F(x,\varepsilon)$ *est* $+\infty$ *ou coïncide avec*

$$G_i(T_1,...,T_r,\log T_1,...,\log T_r)$$

où les $T_j(x,\varepsilon)$ *sont des fonctions sous-analytiques globales de* (x,ε).

Alors, si $x \in \mathbf{R}^n$, *la limite* $\lim_{\varepsilon\to 0} F(x,\varepsilon)$ *existe. De plus elle définit une fonction* $f(x)$ *du même type que* $F(x,\varepsilon)$ *mais d'une variable de moins.*

Suivant [Le], si x est un point de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ on appelle *densité k-dimensionnelle* de X au point x la limite $\theta(x)$ suivante lorsqu'elle existe :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v_k(X \cap \{||x-y|| < \varepsilon\})/\sigma_k\varepsilon^k$$

où σ_k désigne le volume de la boule unité de l'espace euclidien $\mathbf{R}^k$. Kurdyka et Raby [KR] montrent que si X est un sous-analytique global de dimension inférieure ou égale à k sa densité k-dimensionnelle est définie en tout point de $\mathbf{R}^n$. Ils donnent l'exemple suivant qui montre que la fonction densité n'est pas sous-analytique : la fonction densité associée au semi-algébrique

$$\{X = \{(x,y,z,s,t)/tr(r+z) \leq x^2 \leq r(r+z), 0 \leq xy \leq 2xsr + r(r+z), \\ s \leq 1/2, t \leq 1/4\}$$

avec $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ est égale en restriction à $\{x=y=z=0\}$

$$\theta((0,s,t)) = (1/32\pi)(s - st - t\log t).$$

Elle n'est pas sous-analytique. Ce phénomène est précisé par le corollaire suivant du théorème 1 et du théorème d'élimination.

COROLLAIRE. — *Soit X un sous-analytique global de dimension au plus k de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Alors la fonction densité k-dimensionnelle $\theta(x)$ de X en $x \in \mathbf{R}^n$ est bien définie et c'est une fonction bornée du type suivant : il existe une partition finie de $\mathbf{R}^n$ en sous-ensembles définis à partir d'égalités et d'inégalités de fonctions de la forme $\phi(x, \log a_1(x), ..., \log a_r(x))$ où ϕ et les a_i sont sous-analytiques globales. Sur chacun de ces sous-ensembles la fonction densité $\theta(x)$ est une fonction bornée et elle coïncide avec la restriction d'une fonction de la forme*

$$P(t_1, ..., t_d, \log t_1, ..., \log t_d)$$

où P est un polynôme et les t_i sont des fonctions sous-analytiques globales de x.

Les "x^λ-sous-ensembles" de Tougeron [To] et Miller [Mi] sont obtenus par projection linéaire sur $\mathbf{R}^n$ de sous-ensembles de $\mathbf{R}^{n+m+2k}$ du type $Y \cap \{t_1 = s_1^{\lambda_1}, ..., t_k = s_k^{\lambda_k}\}$ où les λ_i sont des réels positifs et Y un sous-analytique global. La famille des x^λ-sous-ensembles est stable par passage au complémentaire [Mi]. Il existe un théorème de préparation des x^λ-fonctions (théorème III de [LR]). Aussi les théorèmes et le corollaire admettent des variantes pour les x^λ-sous-ensembles.

Les résultats précédents peuvent être énoncés dans le cadre riemannien analytique et pour des intégrales de k-formes sous-analytiques. La formule de Cauchy-Crofton est remplacée par une formule intégrale plus générale qui ne tient pas compte des symétries de la structure euclidienne et par un découpage des sous-analytiques inspirés de [KR] et de [Ro]. Nous expliquons cette généralisation dans la dernière partie.

Nous pensons que ces résultats permettent d'obtenir des algèbres de fonctions stables par intégration et vérifiant des propriétés de finitude uniforme.

De nombreux auteurs se sont déjà intéressés à ces problèmes. En voici une liste non-exhaustive : Loeser [Lo], Jeanquartier [Je], Arnold-Goussein-Zadé-Varshenko [AGV] Barlet [Ba], Malgrange [Ma], Le Dung Trang [LDT], Nilsonn [Ni]... Les uns ont considéré le point de vue holomorphe, les autres sont restés dans le domaine réel et se sont intéressés à des développements asymptotiques. Dans notre travail, c'est le caractère log-analytique convergent des développements qui est mis en évidence.

Lou van den Dries nous a suggéré que le théorème de préparation devait permettre d'intégrer facilement les fonctions sous-analytiques globales et nous a encouragés à explorer cette voie. Rémi Langevin nous a enseigné la géométrie intégrale. Nous les remercions tous les deux.

2. Preuves du théorème 1 et du corollaire.

Preuve du théorème 1.

Cas 1 : la projection de Y sur $\mathbf{R}^m$ est relativement compacte. Soit G_m^k la grasmannienne affine des sous-espaces affines de codimension k de l'espace euclidien $\mathbf{R}^m$. Par compacité, quitte à se placer dans une carte de $\mathbf{P}_1^n \times \mathbf{R}^m$, on peut supposer que Y est un sous-analytique relativement compact de $\mathbf{R}^{n+m}$. Si $x \in \mathbf{R}^n$ et $E \in G_m^k$ nous notons $\delta(x,E)$ la fonction égale à $\mathrm{Card}(E \cap Y_x)$ ou 0 suivant que $\mathrm{Card}(E \cap Y_x)$ est fini ou non. D'après le théorème du complémentaire de Gabrielov pour les sous-analytiques et la propriété de finitude uniforme des sous-analytiques, la fonction $\delta(x,E)$ est une fonction sous-analytique bornée et à support compact de $\mathbf{R}^n \times G_m^k$. D'après la formule de Cauchy-Crofton [Sa], [La], il existe une mesure μ sur G_m^k obtenue canoniquement à partir de la métrique euclidienne de $\mathbf{R}^m$ telle que le volume k-dimensionnel de Y_x soit égal à l'intégrale

$$\int_{E \in G_m^k} \delta(x,E)\, d\mu.$$

Or la mesure μ est une mesure à densité analytique. En restreignant la fonction $\delta(x,E)$ à une carte de $\mathbf{R}^n \times G_m^k$ nous sommes ramenés à intégrer par rapport à y une fonction $g(x,y)$ sous-analytique bornée définie sur $[0,1]^n \times [0,1]^d$ où d est la dimension de la grasmannienne G_m^k. Le cas 1 est alors une conséquence des théorèmes d'intégration et d'élimination : on applique d fois le théorème d'intégration en partant de la fonction $g(x,y)$. On obtient une fonction $G(x,\varepsilon) = G(x,\varepsilon_d,...,\varepsilon_1)$ vérifiant les conclusions du théorème d'intégration. D'après le théorème de convergence dominée et le théorème de Fubini l'intégrale $\int_{[0,1]^d} g(x,y)dy_1...dy_d$ est égale à la limite itérée $\lim\limits_{\varepsilon_d \to 0} \dots \lim\limits_{\varepsilon_1 \to 0} G(x,\varepsilon)$. D'après le théorème d'élimination cette limite itérée est une fonction de x qui vérifie les conclusions du théorème 1.

Cas 2 : le cas général. Soit Y un sous-analytique global de $\mathbf{R}^{n+m}$. On note Z le sous-analytique global de $\mathbf{R}^{n+1+m}$ défini par

$$Z = \{(x,\varepsilon,z) / \tfrac{1}{\varepsilon} z \in Y_x, 0 < \varepsilon < 1, ||z|| < 1\}.$$

La projection sur $\mathbf{R}^m$ de Z est dans la boule unité. On peut donc appliquer le cas 1 à Z. On note $v(x,\varepsilon)$ le volume k-dimensionnel de $Z_{x,\varepsilon}$. Par construction l'ensemble $Z_{x,\varepsilon}$ est l'homothétique (de rapport ε) de l'ensemble $Y_x \cap \{||y|| < 1/\varepsilon\}$. Le volume de ce dernier est égal à $v(x,\varepsilon)/\varepsilon^k$. Puisque le volume de Y_x est égal à la limite $\lim_{\varepsilon\to 0} v(x,\varepsilon)/\varepsilon^k$, le cas 1 et le théorème d'élimination permettent de conclure.

Preuve du corollaire. — Soit X un sous-analytique global de $\mathbf{R}^n$. On note Y le sous-analytique global de $\mathbf{R}^{n+1+n}$ défini par

$$Y = \{(x,\varepsilon,y)/||y|| < 1, x+\varepsilon y \in X, 0 < \varepsilon < 1\}.$$

Les ensembles $Y_{x,\varepsilon}$ sont inclus dans la boule unité. On note $v(x,\varepsilon)$ le volume de $Y_{x,\varepsilon}$. C'est une fonction bornée de x et de ε. En appliquant le théorème 1 puis le théorème d'élimination on montre que la fonction $\lim_{\varepsilon\to 0} v(x,\varepsilon)/\sigma_k$ est bien définie et que c'est une fonction bornée du type voulu. Par définition cette limite est la densité de X en x.

Remarque. — L'estimation de $v(x,\varepsilon)$ en fonction de ε est un problème ouvert. Lorsque X est une sous-variété plongée, Karp et Pinski [KP] donnent une formule asymptotique de cette fonction dont le second terme est un invariant de la seconde forme fondamentale. Ce terme caractérise les sphères plongées.

3. Preuves des théorèmes d'intégration et d'élimination.

Elles reposent sur le théorème de préparation des fonctions sous-analytiques globales de [LR]. Ce théorème est une généralisation du théorème du complémentaire de Gabrielov.

THÉORÈME DE PRÉPARATION [LR]. — *Soient $h_1,\dots,h_r$ des fonctions sous-analytiques globales définies sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ et $M > 1$. Il existe une partition finie de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ en cylindres sous-analytiques globaux sur lesquels les h_i sont simultanément préparées par rapport à la variable z : soient C un tel cylindre et B sa base. Il existe des entiers positifs $d_1,\dots,d_r$, tels que la restriction à C de chaque h_i est de la forme*

$$h_i = A_i \alpha^{d_i} u_i$$

ou

$$h_i = A_i \beta^{d_i} u_i,$$

les fonctions A_i, α, β et u_i vérifiant les propriétés suivantes :

(1) *Les* A_i *sont des fonctions sous-analytiques globales de la base* B.

(2) $\alpha = ((z-\theta)/a)^{1/p}$ *et* $\beta = (b/(z-\theta))^{1/p}$ *sont des fonctions à valeurs dans* $[0,1]$ *avec* $p \in \mathbf{N}$ *et* a, b *et* θ *des fonctions sous-analytiques globales de* $x \in B$. *De plus, soit* $\theta \equiv 0$, *soit* $|z/\theta|$ *est à valeurs dans un compact de* $]0, +\infty[$.

(3) $u_i(x,y) = U_i(\phi_1, ..., \phi_s, \alpha, \beta)$, avec $\phi_1, ..., \phi_s$ *des fonctions sous-analytiques globales de la base* B *à valeurs dans* $[0,1]$ *et* $U_i(w_1, ..., w_{s+2})$ *une série entière de polyrayon de convergence* $(2, ..., 2)$ *à valeurs dans* $]1/M, M[$.

Preuve du théorème d'intégration. — Le théorème de préparation nous permet de nous restreindre à l'étude de la situation suivante. Le support de la fonction f est un cylindre sous-analytique $C = \{(x,y,z)/x \in B_1, y \in B_2,\ \phi(x,y) < z < \psi(x,y)\}$ (ϕ et ψ sont sous-analytiques, définies sur la base $B = B_1 \times B_2$, continues et $\phi < \psi$). Sur ce cylindre la fonction f est une fonction à valeurs dans $[0,1]$ somme de fonctions de la forme

$$t(x,y,z) = L(x,y)g(x,y,z)(\log h_1(x,y,z))^{k_1} ... (\log h_r(x,y,z))^{k_r}$$

où L est un produit de logarithmes de fonctions sous-analytiques globales définies sur la base B, $k_1, ..., k_r$ sont des entiers positifs et les fonctions $g, h_1, ..., h_r$ sont sous-analytiques globales sur le cylindre C. De plus il existe des entiers positifs p et q, des fonctions sous-analytiques a, b, θ ($\theta \leq \phi$), $\phi_1, ..., \phi_l$, de la base B à valeurs dans $[0,1]$, tels que $((z-\theta)/a)^{1/p}$, $(b/(z-\theta))^{1/p}$ soient également majorées par 1 sur C. Il existe enfin des fonctions sous-analytiques globales $A, A_1, ..., A_r$ de la base B et des séries entières $U(w_1, ..., w_{s+2})$ et $U_i(w_1, ..., w_{s+2})$ de polyrayon de convergence $(2, ..., 2)$ et à valeurs dans un compact de $]0, +\infty[$ telles que :

(1) $$g = A\alpha^q u \quad \text{avec} \quad \alpha = \left(\frac{z-\theta}{a}\right)^{1/p} \text{ ou } \left(\frac{b}{z-\theta}\right)^{1/p},$$

(2) $$h_i = A_i(z-\theta)u_i,$$

où

$$u(x,y,z) = U(\phi_1, ..., \phi_s, ((z-\theta)/a)^{1/p}, (b/(z-\theta))^{1/p})$$

et

$$u_i(x,y,z) = U_i(\phi_1, ..., \phi_s, ((z-\theta)/a)^{1/p}, (b/(z-\theta))^{1/p}).$$

En développant le produit $\prod_{i=1}^{r} (\log A_i(z-\theta)u_i)^{k_i}$ à l'aide des égalités $\log A_i(z-\theta)u_i = \log A_i(z-\theta) + \log u_i$, on se ramène au cas où $t = t_0 v$ avec

$t_0 = LA \prod_{i=1}^{r} (\log A_i(z-\theta))^{k_i}$ et

$$v = V(\phi_1, ..., \phi_s, ((z-\theta)/a)^{1/p}, (b/(z-\theta))^{1/p})$$

où V est une série entière de polyrayon de convergence $(2, ..., 2)$.

Un raisonnement analogue à celui du paragraphe I.6. de [LR] permet de prouver facilement le lemme suivant en scindant la série V :

LEMME DE SCISSION. — *Il existe des séries entières $V_1, \overline{V_1}$ et V_2 de polyrayon de convergence $(2, ..., 2)$ et des fonctions sous-analytiques globales $v_1(x,y,z), \overline{v_1}(x,y,z), v_2(x,y,z)$ et $c(x,y)$ telles que :*

$$V = V_1 + V_2,$$

$$v_i = V_i(a, \phi_1, ..., \phi_s, ((z-\theta)/a)^{1/p}, (b/(z-\theta))^{1/p}),$$

$$\overline{v_1} = \overline{V_1}(a, \phi_1, ..., \phi_s, ((z-\theta)/a)^{1/p}, (b/(z-\theta))^{1/p}),$$

la fonction $\overline{v_1}(z-\theta)$ est une primitive de v_1, et $v_2 = c/(z-\theta)$.

Ce lemme nous permet de supposer que la fonction t est égale à $t_0 v_1$ ou à $t_0 c/(z-\theta)$. Si on fixe x et y la fonction $z \mapsto t(x,y,z)$ est continue sur les intervalles compacts $[\phi + \varepsilon(\psi-\phi)/2, \psi - \varepsilon(\psi-\phi)/2]$, $\varepsilon > 0$. Dans les deux cas il suffit donc de calculer les intégrales convergentes

$$T(x, \varepsilon, y) = \int_{\phi+\varepsilon(\psi-\phi)/2}^{\psi-\varepsilon(\psi-\phi)/2} t(x,y,z)dz$$

en intégrant t par parties. Montrons que la somme $F(x, \varepsilon, y)$ des fonctions $T(x, \varepsilon, y)$ est une fonction à valeurs dans $[0,1]$ vérifiant les conclusions du théorème d'intégration. Pour cela, en raisonnant par récurrence sur les multi-indices $(r, k_1, ..., k_r)$ ordonnés par l'ordre lexicographique, prouvons que les fonctions $T(x, \varepsilon, y)$ sont des polynômes en des fonctions sous-analytiques globales et en leurs logarithmes.

Cas 1 : $t = t_0 v_1$. On intègre par parties en choisissant comme primitive de LAv_1 la fonction $H = LA\overline{v_1}(z-\theta)$.

La fonction $H(x,y,z)\dfrac{d}{dz}\prod_{i=1}^{r}(\log A_i(z-\theta))^{k_i}$ est une somme de fonctions vérifiant les hypothèses et de multi-indices strictement inférieurs à $(r, k_1, ..., k_r)$.

La fonction $[H(x,y,z)\prod_{i=1}^{r}(\log A_i(z-\theta))^{k_i}]_{\phi+\varepsilon(\psi-\phi)/2}^{\psi-\varepsilon(\psi-\phi)/2}$ est un polynôme en des fonctions sous-analytiques globales et en leurs logarithmes.

Cas 2 : $t = t_0 c/(z-\theta)$. On intègre par parties en choisissant comme primitive de $LAc/(z-\theta)\log(A_r(z-\theta))^{k_r}$ la fonction

$$H(x,y,z) = LAc/(k_r+1)(\log A_r(z-\theta))^{k_r+1}.$$

La fonction $H(x,y,z)\dfrac{d}{dz}\prod_{i=1}^{r-1}(\log A_i(z-\theta))^{k_i}$ est une somme de fonctions vérifiant les hypothèses et de multi-indices strictement inférieurs à $(r,k_1,\dots,k_r)$. De plus la fonction $\left[H(x,y,z)\prod_{i=1}^{r-1}(\log A_i(z-\theta))^{k_i}\right]_{\phi+\varepsilon(\psi-\phi)/2}^{\psi-\varepsilon(\psi-\phi)/2}$ est un polynôme en des fonctions sous-analytiques globales et en leurs logarithmes.

Preuve du théorème d'élimination. — On prouve d'abord ce théorème dans le premier cas (type I). Le cas polynomial (type II) s'en déduit après une analyse particulière.

Le cas général. À x fixé, la fonction $\varepsilon \mapsto F(x,\varepsilon)$ est une fonction log-analytique d'une variable. Elle admet donc une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$ qui définit $f(x)$ (voir [DMM]).

Préparons simultanément par rapport à ε les fonctions sous-analytiques T_i et les fonctions $a_1,\dots,a_r$ qui interviennent dans la définition des ensembles D_i. Il existe des fonctions sous-analytiques globales, $l_1(x),\dots,l_m(x)$ et $H(x,z_1,\dots,z_m,v_1,v_2)$, $H_1(x,z_1,\dots,z_m,v_1,v_2)$, ..., $H_N(x,z_1,\dots,z_m,v_1,v_2)$ telles que pour tout $x\in\mathbf{R}^n$ fixé, si ε est assez petit

$$F(x,\varepsilon) = H(L(x),\varepsilon,\log\varepsilon) \quad \text{avec} \quad L(x) = (x,\log l_1(x),\dots,\log l_m(x))$$

et le triplet $(x,\varepsilon,\log\varepsilon)$ est dans un ensemble défini à partir d'égalités et d'inégalités des fonctions $H_k(L(x),\varepsilon,\log\varepsilon)$.

Nous préparons les fonctions sous-analytiques $H,H_1,\dots,H_N$ par rapport aux variables v_2 puis v_1. Nous obtenons ainsi une partition finie de $\mathbf{R}^n$ par des ensembles vérifiant les propriétés suivantes. Soit B un tel ensemble :

1) Il est défini par un nombre fini d'égalités et d'inégalités vérifiées par des fonctions $\phi(L(x))$ où ϕ est sous-analytique globale.

2) Il existe un polycylindre C de base B défini par

$$C = \{(x,v_1,v_2)/x\in B,\ 0<v_1<\phi_1(L(x)),\ \phi_2(L(x),v_1) < -v_2 < \phi_3(L(x),v_1)\}$$

où ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 sont des fonctions sous-analytiques globales à valeurs dans $]0,+\infty[$ ou égales à $+\infty$ et la limite $\lim\limits_{v_1\to 0}\phi_2(L(x),v_1)$ est finie si $x\in B$ alors que la limite $\lim\limits_{v_1\to 0}\phi_3(L(x),v_1)$ est infinie si $x\in B$.

3) Supposons que la restriction de F à C n'est pas constamment égale à l'infini. Il existe un entier positif p et des fonctions sous-analytiques globales $\theta_1, \dots, \theta_s, b$ et c telles que l'application ψ définie sur le polycylindre C par

$$\psi(x, v_1, v_2) = ((\theta_j(L(x), v_1))_{j \leq s}, v_2^{1/p}/b(L(x), v_1), c(L(x), v_1)/v_2^{1/p})$$

soit bornée. Il existe aussi des rationnels r_1 et r_2, une fonction sous-analytique globale A et une application analytique U définie au voisinage du compact $\overline{\psi(C)}$ et à valeurs dans un compact de $]0, \infty[$ telle que la fonction $H(L(x), v_1, v_2)$ soit égale à la fonction

$$v_1^{r_1} v_2^{r_2} A(L(x)) U(\psi(x, v_1, v_2))$$

si $(x, v_1, v_2) \in C$. De plus soit $A \equiv 0$, soit A ne s'annule jamais.

Soit $x \in B$. D'après le point 2), puisque la fonction ϕ_3 est sous-analytique par rapport à v_1 et tend vers l'infini quand v_1 tend vers 0, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que la courbe $\{(x, \varepsilon, \log \varepsilon)/\varepsilon \in]0, \varepsilon_x[\}$ est dans C.

Soit $j = 1, \dots, s$. D'après le théorème du complémentaire de Gabrielov, il existe une fonction sous-analytique globale Θ_j telle que si $x \in B$, $\Theta_j(L(x))$ soit égal à la limite quand v_1 tend vers 0 de $\theta_j(L(x), v_1)$. Puisque les fonctions b et c sont sous-analytiques et que la fonction ψ est bornée, à $x \in B$ fixé, les limites quand ε tend vers 0 des fonctions $(\log \varepsilon)^{1/p}/b(L(x), \varepsilon)$ et $c(L(x), \varepsilon)/(\log \varepsilon)^{1/p}$ sont nulles. Supposons $A \not\equiv 0$ et discutons suivant les valeurs de r_1 et r_2.

- Si $r_1 > 0$ ou si $r_1 = 0$ et $r_2 < 0$, $f(x) = 0$ sur B.
- Si $r_1 < 0$, ou si $r_1 = 0$ et $r_2 > 0$, $f(x) = +\infty$ sur B.
- Si $r_1 = r_2 = 0$ alors $f(x) = A(L(x))U((\Theta_j(L(x)))_{j \leq s}, 0, 0)$ sur B.

Le cas polynomial. À x fixé, la fonction $\varepsilon \mapsto F(x, \varepsilon)$ est encore une fonction log-analytique d'une variable. Elle admet donc une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$ qui définit $f(x)$. On refait la même étude. Seul le point 3) est modifié. Il devient :

3′) Supposons que la restriction de F à C n'est pas constamment égale à $+\infty$. Il existe $d, s \in \mathbf{N}$, il existe des fonctions sous-analytiques globales $(u_{i,j}(x, \varepsilon))_{0 \leq i \leq d, 0 \leq j \leq s}$ et il existe des fonctions $(F_{i,j}(x))_{0 \leq i \leq d, 0 \leq j \leq s}$ du même type que F mais indépendantes de ε tels que si $x \in B$, et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_x[$, la fonction $F(x, \varepsilon)$ est égale à

$$F(x, \varepsilon) = \sum_{0 \leq i \leq d} \sum_{0 \leq j \leq s} F_{i,j}(x) u_{i,j}(x, \varepsilon) (\log \varepsilon)^i.$$

On utilise maintenant le corollaire suivant du théorème de préparation.

LEMME. — *Soient $g_1(x,\varepsilon),...,g_N(x,\varepsilon)$ des fonctions sous-analytiques globales définies sur $\mathbf{R}^n\times]0,+\infty[$. Si $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_N) \in \mathbf{R}^N$ on pose $g(\lambda,x,\varepsilon) = \lambda_1 g_1(x,\varepsilon) + ... + \lambda_N g_N(x,\varepsilon)$. Il existe alors $M \in \mathbf{N}$, des rationnels $r_1,...,r_M$, des fonctions $h_1(\lambda,x),...,h_M(\lambda,x)$ linéaires en λ et à coefficients des fonctions sous-analytiques globales de x et une partition en sous-analytiques globaux $E_1,...,E_M$ de $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^n$ tels que si $(\lambda,x)\in E_k$ alors la limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g(\lambda,x,\varepsilon)/\varepsilon^{r_k}$ n'est pas nulle et est égale à $h_k(\lambda,x)$.*

Pour chaque $i \in \{0,...d\}$ on applique ce lemme à $\sum\limits_{j\leq s} F_{i,j}(x)u_{i,j}(x,\varepsilon)$: les $F_{i,j}$ jouent le rôle des λ_j. On utilise aussi le fait que les monômes $(\varepsilon^r(\log\varepsilon)^i)_{r\in\mathbf{Q},i\in N}$ sont naturellement ordonnés suivant leur comportement lorsque ε tend vers 0. Cet ordre correspond à l'ordre lexicographique inverse sur les couples $(-r,i)$. On obtient une partition finie de B en sous-ensembles vérifiant les propriétés suivantes. Soit X un tel ensemble : il est défini à partir d'égalités et d'inégalités de fonctions de la forme $\phi(x,\log a_1(x),...,\log a_r(x))$ où ϕ et les a_i sont sous-analytiques globales. De plus, il existe $r\in\mathbf{Q}, k\in\mathbf{N}$ et une fonction $A(x)$ du même type que F et dont la restriction à X est à valeurs dans $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ tels que si $x\in X$, la limite de $F(x,\varepsilon)/(A(x)\varepsilon^r(\log\varepsilon)^k)$ est égale à 1. On conclut alors facilement :

- Si $r>0$ alors $f(x)=0$ si $x\in X$.
- Si $r<0$ ou $r=0$ et $k\neq 0$ alors $f(x)=+\infty$ si $x\in X$.
- Si $r=0$ et $k=0$ alors $f(x)=A(x)$ si $x\in X$.

4. Le cas riemannien.

Si l'espace $\mathbf{R}^m$ est muni d'une métrique riemannienne analytique g quelconque on ne peut plus appliquer la formule de Cauchy-Crofton pour calculer les volumes. Cependant, en reprenant les stratifications de Kurdyka-Raby [KR] et Roche [Ro] nous sommes ramenés à la situation suivante :

1) L'ensemble Y est un sous-analytique relativement compact de $\mathbf{R}^{n+m}$.
2) Si $x\in\mathbf{R}^n$ et Y_x non vide alors la restriction à Y_x de la projection orthogonale euclidienne de Y_x sur $\mathbf{R}^k$ est un difféomorphisme analytique π_x de Y_x sur son image.

3) Le jacobien euclidien $|J(x,y)|$ de π_x en $y \in Y_x$ est minoré par $1/2$.

On note $\omega_g(x,y)$ la forme volume en $y \in Y_x$ associée à la structure riemannienne induite par g sur Y_x. Le volume riemannien $v_g(x)$ de Y_x est donné par la formule intégrale

$$v_g(x) = \int_{z \in \mathbf{R}^k} \theta(x,z) dz_1 ... dz_k$$

où θ est la fonction sous-analytique globale bornée et à support compact définie par

$$\theta(x,z) = |\omega_g(\pi_x^{-1}(z),x)/J(\pi_x^{-1}(z),x)|.$$

Cette intégrale se calcule donc à l'aide du théorème d'intégration.

La généralisation aux k-formes sous-analytiques est analogue.

BIBLIOGRAPHIE

[AGV] V.I. ARNOLD, A. VARCHENKO et S. GOUSSEIN-ZADÉ, Singularités des applications différentiables, MIR, Moscou, 1986.

[Ba] D. BARLET, Développement asymptotique des fonctions obtenues par intégration sur les fibres, Inv. Math., 68 (1982), 129-174.

[BM] E. BIERSTONE et P. MILMAN, Semianalytic and subanalytic sets, Publ. Math. IHES, 67 (1988), 5-42.

[DMM] L. van den DRIES, A. MACINTYRE et D. MARKER, The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation, Annals of Maths, 140 (1994), 183-205.

[Ga] A. GABRIELOV, Projections of semi-analytic sets, Funct. Anal. Appl., 2 (1968), 282-291.

[Hi] H. HIRONAKA, Subanalytic sets, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Tokyo, Kinokuniya, (1973), 453-493 .

[Je] P. JEANQUARTIER, Intégration sur les fibres d'une fonction analytique, dans Introduction à la théorie algébrique des systèmes différentiels, 1-39, Travaux en cours, 34, Hermann, Paris (1988).

[KP] L. KARP et M. PINSKY, Volume of small extrinsic ball in a submanifold, Bull. London Math. Soc., 21 (1989), 87-92.

[KR] K. KURDYKA et G. RABY, Densité des ensembles sous-analytiques, Ann. Inst. Fourier, 39-3 (1989), 753-771.

[La] R. LANGEVIN, Un peu de géométrie intégrale, Images des Mathématiques, CNRS, (1995), 58-67.

[LDT] LE DUNG TRANG, Geometry of monodromy and Nilpotency exponent, manuscrit (1979).

[Le] P. LELONG, Intégration sur un ensemble analytique complexe, Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), 239-262.

[LR] J.-M. LION et J.-P. ROLIN, Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles, Ann. Inst. Fourier, 47-3 (1997), 859-884.

[Lo] F. LOESER, Volumes des tubes autour des singularités, Duke Math. Journal, 53 (1986), 443-455.

[Łoj] S. ŁOJASIEWICZ, Stratifications et triangulations sous-analytiques, Università degli Studi di Bologna (1986).

[Ma] B. MALGRANGE, Intégrales asymptotiques et monodromie, Ann. Scien. ENS, 7 (1974), 405-430.

[Mi] C. MILLER, Expansions of the real field with power functions, Ann. Pure Appl. Logic, 68 (1994).

[Ni] N. NILSSON, dans Arkiv för Mathematik.

[Pa] A. PARUSIŃSKI, Lipschitz stratification of subanalytic sets, Ann. Scient. ENS, 27 (1994), 661-996.

[Ro] C.A. ROCHE, Densities for certain leaves of real analytic foliations, Astérisque, 222 (1994), 373-387.

[Sa] L.A. SANTALÓ, Integral geometry and geometric probability dans Encyclopedia of mathematics and its applications, Addison-Wesley, Reading, Vol 1.

[To] J.-C. TOUGERON, Paramétrisations de petits chemins en géométrie analytique réelle, preprint Université de Rennes.

Manuscrit reçu le 22 septembre 1997,
accepté le 13 janvier 1998.

J.-M. LION & J.-P. ROLIN,
Université de Bourgogne
Laboratoire de Topologie
BP 400
21011 Dijon Cedex (France).
lion@u-bourgogne.fr
rolin@u-bourgogne.fr