

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRÉDÉRIC CHAZAL

Structure locale et globale des feuilletages de Rolle, un théorème de fibration

Annales de l'institut Fourier, tome 48, n° 2 (1998), p. 553-592

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_2_553_0

© Annales de l'institut Fourier, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

STRUCTURE LOCALE ET GLOBALE DES FEUILLETAGES DE ROLLE, UN THÉORÈME DE FIBRATION

par Frédéric CHAZAL (*)

Introduction.

Un feuilletage transversalement orienté \mathcal{F} de codimension 1 sur une variété différentiable M connexe orientée est dit de *Rolle* si toute courbe transverse à \mathcal{F} coupe au plus une fois chaque feuille. Cette hypothèse très restrictive est vérifiée par des classes importantes de feuilletages. Par exemple, les feuilletages possédant une intégrale première sans point singulier sont de Rolle. D'après un argument classique de A. Haefliger [Hae1], les feuilletages analytiques des variétés simplement connexes le sont également.

De l'hypothèse de Rolle résultent deux propriétés de nature différente. La première, de nature « tangentielle », porte sur la topologie des feuilles : ce sont des hypersurfaces fermées orientables de M . La seconde, de nature « transverse », établit une bijection entre une courbe γ transverse à \mathcal{F} et l'ensemble des feuilles que cette courbe rencontre : le feuilletage induit par \mathcal{F} sur le saturé $\text{Sat}(\gamma)$ de γ possède une intégrale première, la projection p_γ qui applique une feuille sur son point d'intersection avec γ . L'étude de cette seconde propriété, c'est-à-dire de la structure transverse de \mathcal{F} , suffit à classifier certains feuilletages dont la topologie des feuilles est imposée.

(*) Une partie de ce travail a été réalisée lors d'un séjour à l'Université de Valladolid financé par le réseau européen TMR Singularités d'Equations Différentielles et Feuilletages.

Mots-clés : Feuilletage – Fibration – Géométrie analytique réelle – Hypersurfaces pfaffiennes – Propriété de Rolle – Séparation.

Classification math. : 57R30 – 58F18 – 14P15.

C'est ce que montrent, par exemple, W. Kaplan [Kap] pour les feuilletages non singuliers du plan et C.F.B. Palmeira [Pal] pour les feuilletages des variétés ouvertes dont toutes les feuilles sont difféomorphes à \mathbb{R}^{n-1} . Dès que la topologie des feuilles n'est plus fixée, la structure transverse de \mathcal{F} ne permet plus d'obtenir des propriétés satisfaisantes du feuilletage.

Dans une première partie de ce travail nous étudions une classe de feuilletages de Rolle qui possèdent certaines propriétés de «finitude» mais dont la topologie des feuilles peut varier. Sa définition repose sur la considération de couples feuilletage-fonction tapissante. On introduit la notion de *fonction tapissante adaptée* à un feuilletage de Rolle \mathcal{F} sur une variété M . C'est une fonction Q de M dans \mathbb{R}^+ , tapissante au sens de Thom, c'est-à-dire propre et possédant un nombre fini de valeurs critiques, qui vérifie les propriétés «de finitude» suivantes. L'ensemble Σ des points de tangence de \mathcal{F} aux hypersurfaces de niveau de Q est une union finie de courbes lisses disjointes et le sous-ensemble $T \subseteq \Sigma$ des points où \mathcal{F} est tangent à Σ est une union finie de points et de courbes compactes contenues dans des feuilles de \mathcal{F} . La structure des feuilletages de Rolle possédant une fonction tapissante adaptée est relativement simple.

THÉOREME 1. — *Soit M une variété différentiable de classe C^∞ orientée et \mathcal{F} un feuilletage de Rolle transversalement orientable sur M possédant une fonction tapissante adaptée. Il existe un nombre fini de feuilles F_1, \dots, F_p telles que chaque composante connexe V du complémentaire $M \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_p)$ est le saturé d'une courbe γ de classe C^∞ et la projection p_γ de $\text{Sat}(\gamma) = V$ sur γ est une C^∞ -fibration triviale.*

Ainsi la variété M se décompose en une union finie de feuilles et d'ouverts saturés sur lesquels le feuilletage a une structure de produit. Les feuilles F_1, \dots, F_p sont des «séparatrices» de \mathcal{F} . Ce résultat est une généralisation naturelle d'un théorème de fibration pour les feuilletages algébriques de Rolle prouvé dans [Cha1] et [Cha2]. Sa preuve repose sur les mêmes techniques que celles développées dans le cadre algébrique, c'est-à-dire sur l'étude du couple (\mathcal{F}, Q) . L'introduction de ce couple est une des idées directrices de cet article. Elle est à rapprocher d'une idée de R. Thom [Tho] pour généraliser la théorie de Morse aux variétés feuilletées. Étant données une variété feuilletée M et une fonction tapissante Q sur M , R. Thom propose de décrire les variations du type topologique du feuilletage induit sur les compacts $\{Q \leq r\}$ en étudiant les singularités de la restriction de Q aux feuilles. Ici, l'étude de l'ensemble de ces singularités va nous permettre de caractériser les séparatrices F_1, \dots, F_p du théorème précédent.

La classe de feuilletages que nous étudions (ceux possédant une fonction tapissante adaptée) est réellement plus riche que la classe algébrique. Nous montrons qu'elle contient les feuilletages analytiques de Rolle sur les variétés analytiques compactes. Plus précisément, si une équation de Pfaff $\omega = 0$ à coefficients analytiques sur une variété analytique compacte M' définit un feuilletage de Rolle \mathcal{F} sur $M = M' \setminus \text{Sing}(\omega)$, alors \mathcal{F} possède des fonctions tapissantes adaptées. Pour construire de telles fonctions, nous construisons tout d'abord des fonctions tapissantes adaptées aux feuilletages analytiques de Rolle sur des ouverts semi-analytiques relativement compacts de \mathbb{R}^n . Ces constructions s'inspirent de travaux de J.-M. Lion et J.-P. Rolin [Lio], [LiRo] sur l'homologie des ensembles semi-pfaffiens. Elles sont assez techniques et reposent sur des résultats classiques de géométrie analytique réelle et sur un théorème de finitude pour les hypersurfaces pfaffiennes dû à R. Moussu et C. Roche [MoRo]. On a alors le résultat suivant.

THÉOREME 2. — *Soit M' une variété analytique compacte orientée et soit $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}, \text{Sing}(\mathcal{F}))$ un feuilletage analytique de Rolle transversalement orientable sur $M = M' \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$. Il existe un nombre fini de feuilles F_1, \dots, F_p telles que chaque composante connexe V de $M \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_p)$ est le saturé d'une courbe γ de classe C^∞ et la projection p_γ de $\text{Sat}(\gamma) = V$ sur γ est une C^∞ -fibration triviale.*

Le théorème de fibration pour les feuilletages analytiques de Rolle sur les ouverts semi-analytiques relativement compacts de \mathbb{R}^n conduit à envisager une étude locale de ces feuilletages au voisinage d'une singularité. Dès le début d'une telle étude, on se heurte au problème du choix d'un voisinage semi-analytique de la singularité sur lequel on applique le théorème de fibration. En effet, les séparatrices, la topologie des feuilles et de l'espace des feuilles dépendent évidemment de ce choix. Examinons le cas des feuilletages possédant une singularité isolée. Soit $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}, \{0\})$ un feuilletage analytique de Rolle sur un voisinage U de $0 \in \mathbb{R}^n$, ayant une singularité isolée en 0. Les feuilletages \mathcal{F}_V et $\mathcal{F}_{V'}$ induits par \mathcal{F} sur V et V' , deux voisinages de 0 contenus dans U , ne sont généralement pas topologiquement conjugués. Nous nous proposons d'étudier l'existence d'une base de voisinages de l'origine bordés par les hypersurfaces de niveau d'une fonction analytique propre tels que le type topologique du feuilletage induit par \mathcal{F} sur chacun d'eux soit constant. Plus précisément, pour tous voisinages V et V' de cette base, $\mathcal{F}_{V \setminus \{0\}}$ et $\mathcal{F}_{V' \setminus \{0\}}$ sont C^∞ -conjugués. Ici encore, nous suivons les idées de R. Thom [Tho] en introduisant une fonction Q sur U possédant de « bonnes » propriétés et en étudiant ensuite le

type topologique des feuilletages induits sur les ouverts $\{Q < r\}$, $r > 0$. Une \mathcal{F} -fonction de Morse est une fonction Q de U dans \mathbb{R}^+ analytique, propre, telle que $\text{Sing}(\text{d}Q) = Q^{-1}(0) = \{0\}$, et telle que la restriction $Q|_F$ de Q à chaque feuille F est une fonction de Morse. Plus précisément, $Q|_F$ possède un nombre fini de singularités non dégénérées correspondant chacune à des valeurs critiques distinctes. Nous prouvons le résultat suivant.

THÉORÈME 3. — *Soit $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}, \{0\})$ un feuilletage analytique de Rolle sur un voisinage connexe U de l'origine 0 de \mathbb{R}^n possédant une singularité isolée en 0. Si Q est une \mathcal{F} -fonction de Morse sur U , alors il existe $R > 0$ tel que pour tous $r, r' < R$, les feuilletages \mathcal{F}_r et $\mathcal{F}_{r'}$ induits par \mathcal{F} sur les ouverts $\{Q < r\}$ et $\{Q < r'\}$ sont topologiquement conjugués. Plus précisément, la conjugaison est de classe C^∞ sur $\{Q < r\} \setminus \{0\}$ et continue en 0.*

La preuve de ce résultat repose sur le théorème de fibration général appliqué à \mathcal{F} sur l'ouvert U . En s'inspirant de techniques de J. Milnor [Mil2], on construit un champ de vecteurs sur chacune des composantes connexes du complémentaire des séparatrices dont le flot «réalise» les conjugaisons désirées. Cette preuve, malgré un aspect un peu technique, ne présente pas de difficultés majeures.

Un problème beaucoup plus délicat est celui de l'existence de \mathcal{F} -fonctions de Morse. Il est facile de construire des fonctions dont la restriction à chaque feuille de \mathcal{F} n'a pas de singularité dégénérée, mais il est beaucoup plus difficile de «séparer» les valeurs critiques correspondant à ces singularités. Nous conjecturons qu'il existe toujours des \mathcal{F} -fonctions de Morse. Nous savons le prouver seulement en dimension 2 ou lorsque le feuilletage \mathcal{F} possède une intégrale première. Dans le second cas, l'existence de \mathcal{F} -fonctions de Morse se déduit facilement des propriétés de finitude des ensembles semi-analytiques. Dans le premier cas, nous définissons d'abord le *pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} en 0*. C'est un raffinement de la notion de pseudo-groupe d'holonomie d'un feuilletage de Rolle. Ses éléments sont des germes en 0 de fonctions de \mathbb{R}^+ dans lui-même qui représentent les applications d'holonomie entre des demi-courbes analytiques transverses à \mathcal{F} issues de l'origine. L'existence de \mathcal{F} -fonctions de Morse se ramène à l'étude des points fixes de ces germes au voisinage de 0. En utilisant le théorème de désingularisation de Seidenberg [Sei], nous montrons que ces germes appartiennent à un sous-groupe du groupe de Dulac. Nous montrons que certains d'entre eux ont un développement formel différent de l'identité. En utilisant une version faible du théorème de Dulac [Dul],

nous en déduisons l'existence de \mathcal{F} -fonctions de Morse pour les feuilletages analytiques de Rolle en dimension 2. Nous ne savons pas montrer l'existence de \mathcal{F} -fonctions de Morse sans se ramener au problème de Dulac par l'intermédiaire de techniques de désingularisation. Ceci est essentiellement dû au fait que la condition d'appartenance de deux points à une même feuille ne se traduit généralement pas de manière analytique. C'est une condition de « nature transcendante ». En dimension plus grande, la même propriété de points fixes isolés pour les éléments du pseudo-groupe d'holonomie en 0 permettrait également de conclure à l'existence de \mathcal{F} -fonctions de Morse. Mais la désingularisation en dimension supérieure ou égale à 3 est beaucoup plus compliquée qu'en dimension 2 et ne nous permet pas d'étudier aussi facilement le pseudo-groupe d'holonomie d'un feuilletage analytique de Rolle en un point singulier.

Cet article est divisé en trois parties. La première est consacrée au rappel de quelques propriétés classiques de l'espace des feuilles. Dans la seconde partie nous étudions les propriétés des couples feuilletage de Rolle-fonction tapissantes. Ceci nous permet de prouver le théorème 1 dont on déduit le théorème 2. Enfin, la troisième partie est consacrée à l'étude locale des feuilletages analytiques de Rolle au voisinage d'une singularité isolée.

L'auteur remercie J.-M. Lion et R. Moussu de l'avoir encouragé dans ce travail.

1. Structure transverse des feuilletages de Rolle.

Soit M une variété différentiable de classe C^∞ , connexe, orientée. Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 défini par une équation de Pfaff $\omega = 0$ où ω est une 1-forme différentielle intégrable ($\omega \wedge d\omega = 0$) et non singulière sur M . Il est transversalement orienté par la forme ω . On suppose de plus que \mathcal{F} est *de Rolle*, c'est-à-dire que toute courbe transverse à \mathcal{F} coupe au plus une fois chaque feuille. Rappelons quelques propriétés classiques de l'espace des feuilles de \mathcal{F} .

On le note M/\mathcal{F} et $\Pi : M \rightarrow M/\mathcal{F}$ est l'application quotient correspondante. L'espace des feuilles est muni de la topologie quotient. Il ne vérifie généralement pas l'axiome de séparation de Hausdorff, ce qui rend son approche assez délicate. D'autre part, M/\mathcal{F} est aussi muni d'une structure différentiable et d'une relation d'ordre.

Pour construire un atlas C^∞ de M/\mathcal{F} montrons tout d'abord que la

restriction de \mathcal{F} au saturé d'une courbe transverse possède une intégrale première de classe \mathcal{C}^∞ .

Intégrales premières locales de \mathcal{F} . — Afin d'éliminer toute ambiguïté, rappelons la définition élémentaire suivante.

DÉFINITION 1.1. — *Une courbe \mathcal{C}^∞ paramétrée est une application $\gamma : I \rightarrow M$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^∞ , telle que $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, nous notons aussi γ l'image $|\gamma| = \gamma(I) \subseteq M$.*

Soit $t \mapsto \gamma(t)$ une courbe \mathcal{C}^∞ transverse à \mathcal{F} . D'après l'hypothèse de Rolle, l'application $\gamma : I \rightarrow M$ est un plongement de I dans M . La courbe γ coupe chaque feuille de $\text{Sat}(\gamma)$, le saturé de γ pour \mathcal{F} , en un unique point. Ainsi l'application p_γ de $\text{Sat}(\gamma)$ dans γ définie par $p_\gamma(x) = \gamma \cap F_x$, où F_x est la feuille passant par x , est bien définie. La paramétrisation $t \mapsto \gamma(t)$ étant un plongement d'un intervalle de \mathbb{R} dans M , l'application $\gamma^{-1} \circ p_\gamma$ est une intégrale première de classe \mathcal{C}^∞ du feuilletage induit par \mathcal{F} sur $\text{Sat}(\gamma)$. Nous noterons également p_γ cette intégrale première. D'autre part, si δ est une courbe transverse à \mathcal{F} telle que $\Pi(\delta) \cap \Pi(\gamma) \neq \emptyset$, p_δ possède les mêmes hypersurfaces de niveau que p_γ sur $\text{Sat}(\delta) \cap \text{Sat}(\gamma)$. Ainsi, l'application $p_\gamma \circ p_\delta^{-1}$ définie par $p_\gamma \circ p_\delta^{-1}(t) = p_\gamma(p_\delta^{-1}(\delta(t)))$, $t \in \delta^{-1}(\delta \cap \text{Sat}(\gamma))$, est un difféomorphisme entre deux intervalles de \mathbb{R} . C'est le difféomorphisme d'holonomie entre les sections transverses γ et δ . Il est défini de manière unique, indépendamment d'un chemin tracé sur chaque feuille joignant γ et δ .

Construction d'un atlas \mathcal{C}^∞ sur l'espace des feuilles et pseudo-groupe d'holonomie. — Soit $t \mapsto \gamma(t)$ une courbe \mathcal{C}^∞ transverse à \mathcal{F} . L'application $t \mapsto \Pi_\gamma(t) = \Pi \circ \gamma(t)$ est un homéomorphisme entre un intervalle de \mathbb{R} et l'ouvert $\Pi(\gamma) \subseteq M/\mathcal{F}$. Soit δ une courbe transverse à \mathcal{F} telle que $\Pi(\delta) \cap \Pi(\gamma) \neq \emptyset$. On a $\Pi_\gamma^{-1} \circ \Pi_\delta(t) = p_\gamma \circ p_\delta^{-1}(t)$ pour tout t tel que $\Pi(\delta(t)) \in \Pi(\gamma)$. Ainsi les couples $(\Pi(\gamma), \Pi_\gamma^{-1})$, où γ est une courbe transverse à \mathcal{F} , forment un atlas \mathcal{C}^∞ de l'espace des feuilles. Cet atlas munit M/\mathcal{F} d'une structure différentiable dont les ouverts de définition de cartes s'identifient aux courbes transverses à \mathcal{F} via une paramétrisation de celles-ci qui est un plongement. C'est par définition la *structure différentiable quotient de M* (voir [Hae2]). Les changements de cartes sont les difféomorphismes d'holonomie entre ces courbes transverses. La projection Π est une application de classe \mathcal{C}^∞ .

DÉFINITION 1.2. — *Le pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} est l'ensemble des changements de cartes de l'atlas précédemment défini sur l'espace des feuilles; plus précisément, c'est l'ensemble des difféomorphismes $h_{\gamma,\delta} = \Pi_{\gamma}^{-1} \circ \Pi_{\delta}$ où γ et δ sont des courbes paramétrées transverses à \mathcal{F} . On le munit de la loi de composition*

$$h_{\gamma,\delta} \circ h_{\delta,\alpha} = h_{\gamma,\alpha} \quad \text{si} \quad \Pi(\gamma) \cap \Pi(\delta) \cap \Pi(\alpha) \neq \emptyset.$$

Remarquons que l'élément $h_{\gamma,\delta}$ est un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R} qui dépend des paramétrisations des courbes γ et δ . Lorsque cela ne pose pas de problème, nous ne précisons pas ces paramétrisations. Si \mathcal{F} est un feuilletage analytique, on munit M/\mathcal{F} d'une structure de variété analytique en ne considérant que les couples $(\Pi(\gamma), \Pi_{\gamma}^{-1})$ où γ est une courbe analytique transverse à \mathcal{F} . Dans ce cas le pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} est l'ensemble des changements de cartes de l'atlas analytique. Les feuilletages que nous étudions étant de Rolle, donc sans holonomie, la définition et l'étude du pseudo-groupe d'holonomie peuvent sembler superflues. Nous verrons dans la suite de ce travail qu'il n'en est rien, en particulier lors de l'étude locale des feuilletages analytiques de Rolle.

Relation d'ordre sur l'espace des feuilles. — L'orientation transverse de \mathcal{F} permet d'introduire la relation suivante sur l'espace des feuilles.

DÉFINITION 1.3. — *Une courbe $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ de classe C^{∞} paramétrée, est dite \mathcal{F} -positive si $\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) > 0$ pour tout t . L'espace des feuilles est muni de la relation suivante : un point F est dit inférieur à un point F' , et on note $F \leq F'$, s'il existe une courbe \mathcal{F} -positive rencontrant les feuilles F et F' en $\gamma(t)$ et $\gamma(t')$ respectivement avec $t \leq t'$.*

Cette relation, introduite par Novikov dans [Nov], dépend de l'orientation transverse de \mathcal{F} . Son intérêt pour l'étude des feuilletages de Rolle réside dans le lemme suivant.

LEMME 1.4. — *La relation \leq est une relation d'ordre partiel sur M/\mathcal{F} et tout point de M/\mathcal{F} possède des points qui lui sont inférieurs et des points qui lui sont supérieurs.*

Ce lemme est une conséquence de l'assertion classique suivante qui résulte du théorème de redressement des feuilles.

ASSERTION. — Soient $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M$ et $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M$ deux courbes \mathcal{F} -positives, telles que $\gamma_1(1)$ et $\gamma_2(0)$ appartiennent à la même feuille. Pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe une courbe \mathcal{F} -positive $\tilde{\gamma}$ telle que $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_1(2t)$ si $t \leq \frac{1}{2} - \varepsilon$ et $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_2(2t - 1)$ si $t \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Preuve du lemme 1.4. — Soient F, F' et F'' trois points de M/\mathcal{F} tels que $F \leq F'$ et $F' \leq F''$. En appliquant l'assertion précédente à deux courbes \mathcal{F} -positives joignant F à F' et F' à F'' , on obtient une courbe \mathcal{F} -positive joignant F à F'' . Ainsi on a $F \leq F''$. Soient F et F' deux points distincts tels que $F \leq F'$ et $F' \leq F$. Il existe, d'après l'assertion précédente, une courbe \mathcal{F} -positive coupant deux fois la feuille F . Le feuilletage \mathcal{F} étant de Rolle, on a $F = F'$. La relation \leq est bien une relation d'ordre. D'autre part, si F est une feuille, il existe une courbe \mathcal{F} -positive coupant F . Ainsi, il existe des points supérieurs et des points inférieurs à F . \square

Il est important de noter que deux points non séparés ne sont pas comparables pour \leq . Ainsi, cette relation n'est pas, en général, un ordre total. D'autre part, cet ordre possède une signification géométrique : si γ est une courbe \mathcal{F} -positive, la paramétrisation définit un ordre total sur l'image $|\gamma|$ de γ et la restriction de Π à $|\gamma|$ est un homéomorphisme de $|\gamma|$ sur $\Pi(|\gamma|)$ respectant l'ordre. On dit que la courbe γ *paramètre* l'ensemble $\Pi(|\gamma|)$. Réciproquement le lemme suivant montre que tout intervalle de M/\mathcal{F} est paramétré par une courbe transverse à \mathcal{F} .

LEMME 1.5. — *Tout sous-ensemble ouvert I de M/\mathcal{F} homéomorphe à un intervalle est totalement ordonné; plus précisément, il existe une courbe \mathcal{F} -positive paramétrant I .*

Preuve. — Soient F et F' deux points de I . Le segment d'extrémités F et F' est recouvert par une union finie d'ouverts $\Pi(|\gamma_i|)$, $i = 1, \dots, p$, où les γ_i sont des courbes \mathcal{F} -positives. En appliquant l'assertion précédant la preuve du lemme 1.4, nous construisons une courbe \mathcal{F} -positive joignant les feuilles F et F' . Les feuilles F et F' sont donc comparables. L'intervalle I est totalement ordonné.

Soient (F_n) et (G_n) deux suites de points de I telles que (F_n) soit strictement croissante, non majorée dans I et (G_n) soit strictement décroissante, non minorée dans I . Supposons de plus que $G_0 \leq F_0$. Nous construisons alors une suite (γ_n) de courbes \mathcal{F} -positives telle que pour tout entier n , γ_n joigne les feuilles F_n et G_n et $|\gamma_n| \subseteq |\gamma_{n+1}|$. La réunion des $|\gamma_n|$ est l'image d'une courbe γ de classe \mathcal{C}^∞ transverse à \mathcal{F} telle que $\Pi(|\gamma|) = I$. \square

2. Théorèmes de fibration.

Soient M une variété différentiable de classe C^∞ , connexe, orientée et \mathcal{F} un feuilletage de Rolle C^∞ sur M défini par une 1-forme différentielle ω intégrable sur M . L'hypothèse de Rolle implique que les feuilles de \mathcal{F} sont sans holonomie. Un outil puissant pour l'étude des feuilletages de codimension 1 sans holonomie est le théorème de stabilité de Reeb [Ree2] : toute feuille compacte F sans holonomie possède un voisinage ouvert saturé sur lequel le feuilletage \mathcal{F} est conjugué au produit $F \times \mathbb{R}$. Ce théorème ne s'applique pas directement à notre situation. En effet, les feuilles de \mathcal{F} ne sont généralement pas compactes. Pour pallier cet inconvénient, nous introduisons une fonction tapissante sur M .

2.1. Fonctions tapissantes et lemme de stabilité.

Une fonction Q de M dans \mathbb{R}^+ est, par définition, *tapissante au sens de Thom* si elle est propre et possède un nombre fini de valeurs critiques. Notons O_r l'ouvert $\{x \in M : Q(x) < r\}$ de bord $H_r = \{x \in M : Q(x) = r\}$. Le couple (\mathcal{F}, Q) possède alors la propriété suivante.

LEMME 2.1 (lemme de stabilité). — *Soit γ une courbe \mathcal{F} -positive et soit ρ un réel supérieur à la plus grande valeur critique de Q tels que γ soit contenue dans O_ρ et les feuilles de $\text{Sat}(\gamma)$ soient transverses aux hypersurfaces H_r pour $r \geq \rho$. La projection $p_\gamma : \text{Sat}(\gamma) \rightarrow \gamma$ est une C^∞ -fibration triviale. De plus, $\text{Sat}(\bar{\tau})$ est fermé dans M pour toute courbe τ telle que $\bar{\tau} \subset \gamma$.*

Ce lemme est une variante du théorème de stabilité de Reeb (voir [Ree1], [Ree2], [God]), la transversalité remplaçant la compacité. Montrons qu'il est une conséquence de ce théorème et du lemme suivant.

LEMME 2.2. — *Soit γ une courbe \mathcal{F} -positive et soit ρ un réel supérieur à la plus grande valeur critique de Q tels que γ soit contenue dans O_ρ et les feuilles de $\text{Sat}(\gamma)$ soient transverses aux hypersurfaces H_r pour $r \geq \rho$. Le feuilletage induit par \mathcal{F} sur $\text{Sat}(\gamma)$ est C^∞ -conjugué au feuilletage induit par \mathcal{F} sur $\text{Sat}(\gamma) \cap O_{2\rho}$.*

Preuve du lemme 2.1. — Le feuilletage induit par \mathcal{F} sur $\text{Sat}(\gamma) \cap \overline{O_{2\rho}}$ est transverse au bord de $\text{Sat}(\gamma) \cap \overline{O_{2\rho}}$ et toutes ses feuilles sont compactes et sans holonomie. D'après le théorème de stabilité de Reeb, la restriction de la projection p_γ à $\text{Sat}(\gamma) \cap \overline{O_{2\rho}}$ est une C^∞ -fibration triviale. Le feuilletage

\mathcal{F} étant transverse à $\text{Sat}(\gamma) \cap H_{2\rho}$, la restriction de p_γ à $\text{Sat}(\gamma) \cap O_{2\rho}$ est aussi une fibration triviale. Il résulte alors du lemme précédent que

$$p_\gamma : \text{Sat}(\gamma) \longrightarrow \gamma$$

est une \mathcal{C}^∞ -fibration triviale. De plus, si τ est une courbe telle que $\bar{\tau} \subseteq \gamma$, $\text{Sat}(\bar{\tau}) \cap O_{2\rho}$ est fermé dans $O_{2\rho}$ et $\text{Sat}(\bar{\tau})$ est fermé dans M . \square

Preuve du lemme 2.2. — Munissons M d'une métrique riemannienne g . Nous construisons un champ de vecteurs X de classe \mathcal{C}^∞ sur $\text{Sat}(\gamma)$, tangent à \mathcal{F} et nous utilisons son flot pour obtenir une conjugaison entre le feuilletage induit par \mathcal{F} sur $\text{Sat}(\gamma)$ et le feuilletage induit par \mathcal{F} sur $\text{Sat}(\gamma) \cap O_{2\rho}$. Notons $\text{grad} Q$ le champ de vecteurs gradient de Q relativement à la métrique g . Soit X_1 la projection orthogonale du champ $\text{grad} Q$ sur l'espace tangent aux feuilles de \mathcal{F} . Les hypersurfaces de niveau de Q étant transverses à \mathcal{F} dans l'ouvert $\text{Sat}(\gamma) \setminus \bar{O}_\rho$, le champ X_1 ne s'annule pas dans cet ouvert. Le champ de vecteurs $X_2 = (Q^2/dQ(X_1))X_1$ est tangent à \mathcal{F} et vérifie $dQ(X_2) = Q^2$ dans $\text{Sat}(\gamma) \setminus \bar{O}_\rho$. Soit $\phi : [0; +\infty[\rightarrow [-1; 0]$ une application de classe \mathcal{C}^∞ nulle sur $[0; \rho]$ et constante égale à -1 sur $[2\rho; +\infty[$. Le champ de vecteurs

$$X = (\phi \circ Q)X_2$$

est bien défini, tangent à \mathcal{F} dans $\text{Sat}(\gamma)$ et vérifie $dQ(X) = -Q^2$ dans $\text{Sat}(\gamma) \setminus O_{2\rho}$ (voir Fig. 1).

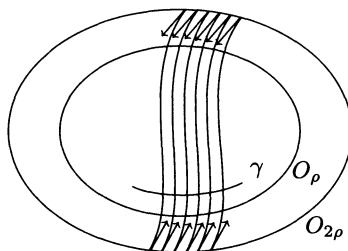


Figure 1

Son flot

$$\Psi : W \longrightarrow M, \quad W \subseteq \text{Sat}(\gamma) \times \mathbb{R}, \quad \Psi(x, t) = \Psi_x(t), \Psi_x(0) = x,$$

vérifie $Q(\Psi(x, t)) = (t + Q(x)^{-1})^{-1}$ lorsque $Q(\Psi(x, t)) \geq 2\rho$.

D'autre part, le champ X est rentrant dans $O_{2\rho}$ le long de $\text{Sat}(\gamma) \cap H_{2\rho}$. Il en résulte que pour $x \in \text{Sat}(\gamma)$, $\Psi(x, 1/2\rho) = \Psi_{1/2\rho}(x)$ est bien défini et appartient à $O_{2\rho}$. De plus, pour $x \in \text{Sat}(\gamma) \cap O_{2\rho}$, $\Psi_{-1/2\rho}(x) = \Psi_{1/2\rho}^{-1}(x)$ est bien défini et appartient à $\text{Sat}(\gamma)$. Ainsi

$$\Psi_{1/2\rho} : \text{Sat}(\gamma) \longrightarrow \text{Sat}(\gamma) \cap O_{2\rho}$$

est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme qui réalise une conjugaison entre le feuilletage induit par \mathcal{F} sur $\text{Sat}(\gamma)$ et le feuilletage induit par \mathcal{F} sur $\text{Sat}(\gamma) \cap O_{2\rho}$. \square

2.2. Fonctions tapissantes adaptées et séparatrices. Preuve du théorème 1.

Il nous faut maintenant caractériser les feuilles qui ne vérifient pas les hypothèses du lemme de stabilité. Sans hypothèse supplémentaire sur la fonction Q , l'ensemble de ces feuilles peut être infini. Pour éviter cela, nous introduisons la notion de fonction tapissante adaptée à un feuilletage de Rolle.

DÉFINITION 2.3. — *Une fonction $Q : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe \mathcal{C}^∞ est une fonction tapissante adaptée au feuilletage \mathcal{F} si elle satisfait aux propriétés suivantes :*

- (i) *Q est tapissante au sens de Thom.*
- (ii) *L'ensemble $\Sigma = \{x \in M / d_x Q \wedge \omega = 0\}$ des points de tangence de \mathcal{F} avec les hypersurfaces de niveau de Q est une union finie de courbes lisses disjointes.*
- (iii) *Le sous-ensemble $T \subseteq \Sigma$ des points où \mathcal{F} est tangent à Σ est une union finie de points et de courbes lisses compactes contenues dans des feuilles de \mathcal{F} .*

Dans la suite nous supposons qu'il existe une fonction tapissante Q adaptée au feuilletage \mathcal{F} . Les propriétés de Q permettent de définir des séparatrices du couple (\mathcal{F}, Q) . Pour cela, rappelons tout d'abord que $\Pi : M \rightarrow M/\mathcal{F}$ désigne la projection sur l'espace des feuilles et que M/\mathcal{F} est muni de la relation d'ordre \leq . L'ensemble T étant inclus dans un nombre fini de niveaux de la fonction Q et le nombre de valeurs critiques de Q étant fini, il existe $r_0 > 0$ tel que $\Sigma \setminus O_{r_0}$ soit une union finie de courbes lisses disjointes C_1, \dots, C_ℓ transverses aux hypersurfaces lisses H_r pour tout $r \geq r_0$. Dans toute la suite ce nombre réel r_0 est fixé. Les courbes

C_1, \dots, C_ℓ étant transverses à \mathcal{F} , nous les paramétrisons positivement, c'est-à-dire qu'elles vérifient $\omega(C'_i(t)) > 0$ pour tout t . L'indice i étant fixé, supposons que la fonction $Q \circ C_i(t)$ est croissante. Notons Λ_i la réunion des feuilles se projetant sur les éléments minimaux éventuels de l'ensemble des majorants de $\Pi(C_i)$. De tels éléments sont appelés *bornes supérieures* de $\Pi(C_i)$. L'ensemble Λ_i se caractérise aussi topologiquement :

$$\Lambda_i = \bigcap_{n \geq r_0} \overline{\text{Sat}(C_i \setminus O_n)}.$$

En utilisant la terminologie des dynamiciens, on dit que Λ_i est l'*ensemble ω -limite du saturé de C_i* . On définit de même Λ_i lorsque la fonction $Q \circ C_i(t)$ est décroissante : c'est l'ensemble des feuilles se projetant sur les éléments maximaux de l'ensemble des minorants de $\Pi(C_i)$ (*bornes inférieures* de $\Pi(C_i)$). Il possède la même caractérisation topologique que précédemment et est appelé *ensemble α -limite du saturé de C_i* . On note Λ la réunion des ensembles α ou ω -limite Λ_i . Une feuille contenue dans Λ est appelée une *séparatrice de \mathcal{F} relativement à la fonction tapissante Q* ou encore une *séparatrice du couple (\mathcal{F}, Q)* (voir Fig. 2).

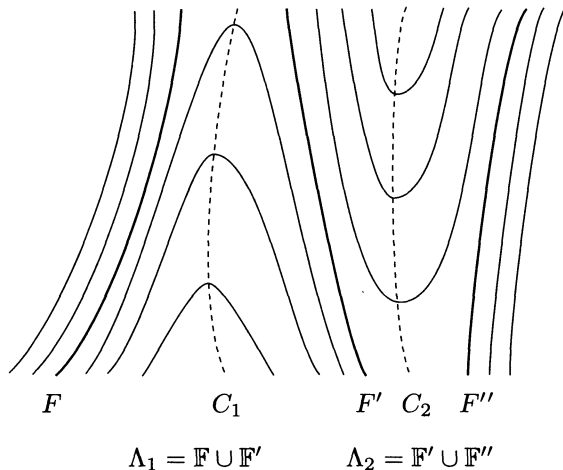


Figure 2

Remarquons que certains ensembles Λ_i peuvent être vides. Ils peuvent aussi contenir plusieurs feuilles qui sont alors non séparées par construction.

LÈMME 2.4. — *L'ensemble $\Pi(\Lambda)$ est fini et le cardinal de chaque ensemble $\Pi(\Lambda_i)$ est majoré par la somme des nombres de composantes connexes de $\Sigma \setminus T$ et T .*

Preuve. — D'après la définition de Q , toute union infinie de feuilles contient deux feuilles coupant la même composante connexe de $\Sigma \setminus T$. Les composantes connexes de $\Sigma \setminus T$ étant transverses à \mathcal{F} , toute union infinie de feuilles contient deux feuilles dont les images par Π sont comparables dans M/\mathcal{F} . Deux points de $\Pi(\Lambda_i)$, bornes supérieures (ou inférieures) d'un même ensemble, sont non comparables pour la relation d'ordre \leq . L'ensemble $\Pi(\Lambda_i)$ est donc fini et son cardinal est majoré par la somme des nombres de composantes connexes de $\Sigma \setminus T$ et T . \square

Le lemme suivant montre que les feuilles qui ne sont pas des séparatrices satisfont aux hypothèses du lemme de stabilité.

LÈMME 2.5. — *Soit γ une courbe C^∞ transverse à \mathcal{F} dont l'adhérence est compacte et ne rencontre pas Λ . Il existe $\rho > r_0$ tel que toute feuille F incluse dans $\text{Sat}(\gamma)$ soit transverse aux hypersurfaces H_r pour $r \geq \rho$.*

Preuve du lemme 2.5. — Il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $\Sigma \cap \text{Sat}(\bar{\gamma})$ soit inclus dans O_ρ . Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe une suite $\{x_n\}$ de points de $\Sigma \cap \text{Sat}(\bar{\gamma})$ telle que la suite $\{Q(x_n)\}$ soit croissante et non majorée. Puisque $\Sigma \setminus O_{r_0}$ est une union finie de courbes, on peut supposer que les x_n appartiennent à une même courbe C_i . Pour tout entier n , notons y_n l'intersection de $\bar{\gamma}$ et de la feuille passant par x_n . La courbe $\bar{\gamma}$ étant compacte et $\{Q(x_n)\}$ étant croissante, la suite $\{y_n\}$ converge vers un point y de $\bar{\gamma}$. Le sous-ensemble $\Pi(C_i)$ de M/\mathcal{F} est totalement ordonné et $Q(x_n)$ tend en croissant vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Si $Q \circ C_i(t)$ est une fonction croissante de t , la suite $\{\Pi(x_n)\}$ est croissante et non majorée dans $\Pi(C_i)$. Ainsi $\Pi(y)$ est une borne supérieure de $\Pi(C_i)$. De même, si $Q \circ C_i(t)$ est une fonction décroissante, $\Pi(y)$ est une borne inférieure de $\Pi(C_i)$. Dans les deux cas, le point y appartient à $\Lambda_i \cap \bar{\gamma}$. Ceci contredit l'hypothèse du lemme. \square

Le théorème 1 est maintenant une conséquence du lemme de stabilité et du lemme précédent.

Preuve du théorème 1. — Soit V une composante connexe de $M \setminus \Lambda$. Il nous suffit de prouver qu'il existe une courbe γ de classe C^∞ , transverse à \mathcal{F} ,

contenue dans V et telle que $\text{Sat}(\gamma) = V$. En effet d'après les lemmes 2.1 et 2.5, la restriction de la projection p_γ à une courbe compacte contenue dans γ est une C^∞ -fibration triviale. Ainsi la projection $p_\gamma : \text{Sat}(\gamma) = V \rightarrow \gamma$ est une C^∞ -fibration triviale. L'existence de la courbe γ est une conséquence de l'assertion suivante.

L'ouvert $\Pi(V)$ de M/\mathcal{F} est homéomorphe à un intervalle.

En effet, nous avons montré, lemme 1.5, que tout ouvert de M/\mathcal{F} homéomorphe à un intervalle est paramétré par une courbe C^∞ transverse à \mathcal{F} .

Prouvons, pour terminer, l'assertion précédente. Soit F une feuille contenue dans V . Appliquons le lemme 2.1 à une courbe compacte $\bar{\tau}$ coupant F et satisfaisant aux hypothèses du lemme 2.5. L'ensemble $\text{Sat}(\bar{\tau})$ est un voisinage saturé de F fermé dans M et C^∞ -difféomorphe à $F \times \bar{\tau}$. Ainsi une feuille F' , distincte de F et contenue dans $\text{Sat}(\bar{\tau})$ est séparée de F dans l'espace des feuilles. La feuille F n'est donc pas un point de branchement et l'ensemble $\Pi(V)$ est un ouvert connexe sans point de branchement dans M/\mathcal{F} . L'espace des feuilles étant une variété topologique de dimension 1, $\Pi(V)$ est homéomorphe à un intervalle. \square

Remarque. — Nous déduisons immédiatement de la preuve précédente que l'ensemble des points de branchement dans M/\mathcal{F} est fini et contenu dans l'ensemble des séparatrices. Ceci amène à s'interroger sur la nature des séparatrices. Nous n'abordons pas ce sujet qui a déjà été traité pour les feuilletages algébriques dans [Cha2]. Nous renvoyons donc le lecteur à cet article pour plus de détails. Il est également possible de montrer que la topologie des feuilles contenues dans les composantes connexes non bornées dans M/\mathcal{F} du complémentaire des séparatrices est liée à celle des hypersurfaces de niveau de Q . Ce résultat ne sera pas utilisé dans la suite de cet article. Nous ne donnons pas sa preuve qui est une simple transposition de celle donnée dans [Cha2] pour le cas des feuilletages algébriques.

2.3. Feuilletages analytiques de Rolle. Preuve du théorème 2.

Pour prouver le théorème 2, il suffit de montrer qu'il existe des fonctions tapissantes adaptées aux feuilletages de Rolle sur les variétés analytiques compactes. Pour cela nous construisons tout d'abord des fonctions tapissantes adaptées aux feuilletages de Rolle sur des ouverts semi-analytiques relativement compacts de \mathbb{R}^n . Commençons par rappeler brièvement quelques résultats classiques de géométrie analytique réelle et

de géométrie pfaffienne qui seront nécessaires dans la suite. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au cours de E. Bierstone et P.D. Milman [BiMil], par exemple, pour les ensembles semi-analytiques et à un article de R. Moussu et C. Roche [MoRo] pour les hypersurfaces pfaffiennes.

DÉFINITION. — Soit V une variété analytique réelle. Un sous-ensemble X de V est semi-analytique dans V si pour tout point $a \in V$, il existe un voisinage U de a tel que

$$X \cap U = \bigcup_{i=1}^p \bigcap_{j=1}^q X_{ij}$$

avec $X_{ij} = \{f_{ij} = 0\}$ ou $X_{ij} = \{f_{ij} > 0\}$, f_{ij} une fonction analytique réelle sur U .

Comme les ensembles semi-algébriques, les ensembles semi-analytiques possèdent les propriétés suivantes :

Soient V une variété analytique réelle et $X \subseteq V$ un sous-ensemble semi-analytique. Alors chaque composante connexe de X est semi-analytique et la famille des composantes connexes de X est localement finie. De plus, X est localement connexe, l'adhérence \bar{X} de X et l'intérieur de X sont semi-analytiques.

La construction de fonctions tapissantes sur des ouverts semi-analytiques de \mathbb{R}^n repose sur le théorème suivant, dû à S. Łojasiewicz (voir [Loj] et [BiMil], p. 40).

THÉORÈME [Loj]. — Soit M un sous-ensemble semi-analytique ouvert de \mathbb{R}^n . Chaque point de \mathbb{R}^n possède un voisinage semi-analytique U tel que

$$M \cap U = \bigcup_{i=1}^p \bigcap_{j=1}^q \{f_{ij} > 0\}$$

où les f_{ij} sont analytiques au voisinage de \bar{U} .

Nous utiliserons un résultat de finitude sur les hypersurfaces pfaffiennes pour montrer l'existence de fonctions tapissantes adaptées à un feuilletage de Rolle sur un ouvert semi-analytique. Rappelons maintenant la définition d'hypersurface pfaffienne de \mathbb{R}^n .

DÉFINITION. — Une hypersurface pfaffienne de \mathbb{R}^n est un triplet $\{V, \eta, M\}$ où M est un ouvert semi-analytique de \mathbb{R}^n , η une 1-forme analytique intégrable sur un voisinage de \overline{M} et V une feuille du feuilletage défini par l'équation $\eta = 0$.

Remarquons que cette définition d'hypersurface pfaffienne est un peu plus restrictive que celle donnée dans [MoRo]. Elle est cependant suffisante pour la suite de notre travail. Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R}^n et $\{V, \eta, M\}$ une hypersurface pfaffienne. Nous dirons que $\{V, \eta, M\}$ est de Rolle dans X si pour tout chemin analytique

$$\gamma : [0; 1] \rightarrow X \cap M, \quad t \mapsto \gamma(t), \quad \gamma(0) \in V \text{ et } \gamma(1) \in V,$$

il existe un réel $t \in [0; 1]$ tel que $\eta(\gamma'(t)) = 0$. R. Moussu et C. Roche prouvent le théorème de finitude suivant.

THÉORÈME [MoRo]. — Soit X un sous-ensemble semi-analytique de \mathbb{R}^n , relativement compact et soient η_i , $i = 1, \dots, q$, des 1-formes analytiques sur un voisinage de l'adhérence d'un ouvert semi-analytique M de \mathbb{R}^n . Il existe un entier b dépendant uniquement de M , X et des η_i tel que le nombre de composantes connexes de $X \cap V_1 \cap \dots \cap V_q$ soit fini et majoré par b si $\{V_i, \eta_i, M\}$ est une hypersurface pfaffienne de Rolle dans X pour $i = 1, \dots, q$.

Feuilletage de Rolle sur un ouvert semi-analytique relativement compact. — Soit M un ouvert semi-analytique de \mathbb{R}^n dont l'adhérence \overline{M} est compacte et soit \mathcal{F} un feuilletage analytique de Rolle sur M défini par une équation de Pfaff $\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n = 0$ où ω est une 1-forme différentielle intégrable, non singulière sur M et analytique sur un voisinage de \overline{M} . Le but de ce paragraphe est de prouver l'existence de fonctions tapissantes adaptées à \mathcal{F} sur M . Une variété analytique compacte étant recouverte par un nombre fini d'ouverts de cartes semi-analytiques, nous en déduirons sans difficulté la preuve du théorème 2.

PROPOSITION 2.6. — Il existe des fonctions tapissantes de classe C^∞ sur M adaptées au feuilletage \mathcal{F} .

On construit tout d'abord une famille de fonctions tapissantes de M dans \mathbb{R}^+ . D'après le théorème de Łojasiewicz [Loj], il existe une décomposition finie de M en ouverts semi-analytiques

$$M = \bigcup_{i=1}^m M_i$$

où chaque M_i est une composante connexe d'un ouvert $\{f_i > 0\}$, f_i analytique dans un voisinage de \overline{M}_i . Soit $\mathbf{1}_{M_i}$ la fonction constante égale à 1 sur M_i et nulle sur $\mathbb{R}^n \setminus M_i$. La fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{M_i}(x) \exp(-1/f_i^2(x))$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^n , strictement positive sur M et nulle sur $\mathbb{R}^n \setminus M$. Les fonctions $Q_\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$,

$$Q_\varepsilon(x) = \exp((x_1 + \varepsilon_1)^2 + \cdots + (x_n + \varepsilon_n)^2) (f(x))^{-1}$$

sont propres et possèdent la propriété suivante.

LEMME 2.7. — *Il existe un sous-ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ de mesure de Lebesgue nulle tel que, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus S$ fixé, l'ensemble $\Sigma_\varepsilon = \{x \in M : \omega \wedge dQ_\varepsilon = 0\}$ soit une union de courbes lisses disjointes.*

Preuve du lemme 2.7. — Soit

$$\tilde{\Sigma} = \{(x, \varepsilon) \in M \times \mathbb{R}^n : \omega \wedge dQ_\varepsilon = 0\}$$

et soit $\theta : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection définie par $\theta(x, \varepsilon) = \varepsilon$. Il suffit de prouver que $\tilde{\Sigma}$ est une sous-variété de classe C^∞ , de codimension $n - 1$ de $M \times \mathbb{R}^n$. En effet, si tel est le cas, il résulte du théorème de Sard que l'ensemble S des valeurs critiques de θ est de mesure nulle dans \mathbb{R}^n . Si ε est une valeur régulière de θ , l'ensemble $\theta^{-1}(\varepsilon) = \Sigma_\varepsilon$ est une union de courbes lisses disjointes dans M .

L'ensemble $\tilde{\Sigma}$ est défini par les $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations $E_{k,\ell}(x, \varepsilon) = 0$, $0 \leq k < \ell \leq n$, où

$$E_{k,\ell}(x, \varepsilon) = a_\ell \frac{\partial f}{\partial x_k} - a_k \frac{\partial f}{\partial x_\ell} + 2((x_\ell + \varepsilon_\ell)a_k - (x_k + \varepsilon_k)a_\ell)f.$$

Localement, $n - 1$ de ces équations sont indépendantes. En effet, si U_k est l'ouvert $(M \setminus a_k^{-1}(0)) \times \mathbb{R}^n$, nous avons $U_k \cap \tilde{\Sigma} = F_k^{-1}(0)$ avec

$$F_k = (E_{1,k}, \dots, E_{k-1,k}, E_{k,k+1}, \dots, E_{k,n}).$$

Nous déduisons immédiatement du calcul des dérivées partielles de F_k par rapport aux variables ε_j , $j \neq k$, que la différentielle de l'application F_k est de rang $n - 1$ sur l'ouvert U_k . L'ensemble $F_k^{-1}(0)$ est une sous-variété lisse de U_k de codimension $n - 1$. Les ouverts U_1, \dots, U_n recouvrant $M \times \mathbb{R}^n$, $\tilde{\Sigma}$ est une sous-variété lisse de codimension $n - 1$ de $M \times \mathbb{R}^n$. \square

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus S$ fixé et soit $Q = Q_\varepsilon$, $\Sigma = \Sigma_\varepsilon$. La proposition 2.6 est une conséquence du lemme suivant.

LEMME 2.8. — *L'ensemble Σ est une union finie de courbes lisses disjointes. Le sous-ensemble $T \subseteq \Sigma$ des points de tangence entre \mathcal{F} et Σ est une union finie de points et de courbes lisses compactes contenues dans des feuilles de \mathcal{F} .*

En effet, remarquons que l'ensemble Σ contient le lieu singulier de Q . La fonction Q étant constante sur chacune des composantes connexes de ce lieu singulier, l'ensemble des valeurs critiques de Q est fini. D'autre part, la fonction Q étant propre, c'est une fonction tapissante dans M . D'après le lemme précédent, elle est adaptée au feuilletage \mathcal{F} . Ceci termine la preuve de la proposition 2.6.

Preuve du lemme 2.8. — C'est essentiellement une conséquence du théorème de finitude pour les hypersurfaces pfaffiennes énoncé au paragraphe précédent. Montrons tout d'abord qu'il existe une décomposition finie de M en sous-ensembles ouverts sur lesquels Σ est la projection d'une intersection finie d'hypersurfaces pfaffiennes de Rolle. Rappelons qu'il existe des fonctions analytiques f_i , $i = 1, \dots, m$ et une décomposition de M en ouverts semi-analytiques $M = \bigcup_{i=1}^m M_i$ où M_i est une composante connexe de $\{f_i > 0\}$. Soit $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ et soit

$$M_J = \bigcap_{j \in J} M_j \setminus \bigcup_{j' \notin J} M_{j'}.$$

L'ouvert M est la réunion finie des ensembles M_J .

Fixons un sous-ensemble $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ et supposons pour simplifier les notations que $J = \{1, \dots, q\}$, $q \leq m$. Prouvons que $M_J \cap \Sigma$ possède un nombre fini de composantes connexes. Nous avons

$$M_J \cap \Sigma = M_J \cap \{\omega \wedge dQ = 0\} = M_J \cap \{(\omega \wedge dQ)F = 0\}$$

avec

$$F(x) = \prod_{j \in J} f_j^3(x).$$

Sur l'ouvert M_J l'ensemble $\{\omega \wedge dQ = 0\}$ est défini par $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations qui sont des combinaisons linéaires à coefficients analytiques des fonctions

$\exp(-1/f_1^2), \dots, \exp(-1/f_q^2)$ et de leurs dérivées partielles d'ordre 1. Ainsi il existe une fonction A analytique sur $U \times \mathbb{R}^q$, où U est un voisinage de \overline{M}_J , telle que

$$\begin{aligned} M_J \cap \{(\omega \wedge dQ)F = 0\} \\ = \{x \in M_J : A(x, \exp(-1/f_1^2(x)), \dots, \exp(-1/f_q^2(x)))\} = 0. \end{aligned}$$

Soit π la projection canonique de $\mathbb{R}^n \times]0; K[^q \times]0; 1[^q$ sur \mathbb{R}^n , où K est un réel strictement supérieur au maximum des fonctions f_j restreintes à \overline{M}_j , $j = 1, \dots, q$. Soient les sous-ensembles de $\pi^{-1}(U)$ suivants :

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y, z) \in \pi^{-1}(U) : y_j - f_j(x) = 0, j = 1, \dots, q\}, \\ Z &= \{(x, y, z) \in \pi^{-1}(U) : A(x, z) = 0\}, \\ V_j &= \{(x, y, z) \in \pi^{-1}(U) : z_j = \exp(-1/y_j^2)\}. \end{aligned}$$

Les sous-ensembles G , Z et $\pi^{-1}(M_J)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ sont semi-analytiques et relativement compacts, les variétés $(V_j, 2z_j dy_j - y_j^3 dz_j, \pi^{-1}(M))$ sont des hypersurfaces pfaffiennes de Rolle et nous avons l'égalité

$$\pi \left(\bigcap_{j \in J} V_j \cap G \cap Z \cap \pi^{-1}(M_J) \right) = \Sigma \cap M_J.$$

D'après le théorème de finitude du paragraphe précédent, le nombre de composantes connexes de $\bigcap_{j \in J} V_j \cap G \cap Z \cap \pi^{-1}(M_J)$ est fini. Il en est de même du nombre de composantes connexes de $\Sigma \cap M_J$. Les ouverts M_J recouvrant M , Σ est une union finie de courbes.

On montre, comme précédemment, qu'il existe une fonction B analytique sur $U \times \mathbb{R}^q$ telle que

$$M_J \cap T = \{x \in M_J : B(x, \exp(-1/f_1^2(x)), \dots, \exp(-1/f_q^2(x))) = 0\}$$

et on en déduit que le nombre de composantes connexes de T est fini, ce qui achève la preuve du lemme. \square

Feuilletages de Rolle sur une variété analytique compacte. — Soit M' une variété analytique compacte orientée de dimension n et soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \text{Sing}(\mathcal{F}))$ un feuilletage analytique de Rolle transversalement orientable sur $M = M' \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$. Pour prouver le théorème 2, montrons qu'il existe une fonction tapissante sur M adaptée à \mathcal{F} .

Le lieu singulier $\text{Sing}(\mathcal{F})$ du feuilletage \mathcal{F} est un sous-ensemble analytique de la variété compacte M' . D'après le théorème de S. Lojasiewicz [Loj], il existe un recouvrement fini de M' par des ouverts de cartes (U_i, ϕ_i) , $i = 1, \dots, k$, et des ouverts semi-analytiques M_i tels que

$$M_i \subseteq U_i \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}), \quad \overline{M_i} \subseteq U_i, \quad M = \bigcup_{i=1}^k M_i$$

et M_i est une composante connexe d'un ouvert $\{f_i > 0\}$, où f_i est analytique dans U_i .

Soit $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $D(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Les fonctions $Q_\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\varepsilon = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^k) \in (\mathbb{R}^n)^k$,

$$(Q_\varepsilon(x))^{-1} = \sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{M_i}(x) \exp(D(\phi_i(x) + \varepsilon^i)) \exp(-1/f_i^2(x))$$

sont de classe \mathcal{C}^∞ , strictement positives et propres. On prouve, comme au paragraphe précédent, en utilisant le théorème de Sard et le théorème de finitude de [MoRo], qu'il existe un sous-ensemble $S \subseteq (\mathbb{R}^n)^k$ de mesure de Lebesgue nulle tel que, pour $\varepsilon \in (\mathbb{R}^n)^k \setminus S$ fixé, Q_ε est une fonction tapissante adaptée à \mathcal{F} . \square

3. Étude locale des feuilletages analytiques de Rolle. Réalisation de germes.

Soit U un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \{0\})$ un feuilletage analytique de Rolle sur U possédant une singularité isolée en 0. Les feuilletages \mathcal{F}_V et $\mathcal{F}_{V'}$, induits par \mathcal{F} sur deux voisinages V et V' de l'origine, ont par définition même *type topologique* s'ils sont topologiquement conjugués, c'est-à-dire s'il existe un homéomorphisme h de V dans V' qui envoie les feuilles de \mathcal{F}_V sur celles de $\mathcal{F}_{V'}$ et tel que $h(0) = 0$. En général cette propriété n'est pas vérifiée pour deux voisinages V et V' quelconques, même lorsqu'ils sont homéomorphes. Le but de cette partie est d'étudier l'existence d'une base de voisinages de l'origine, bordés par les niveaux d'une fonction analytique propre, et sur lesquels le type topologique du feuilletage induit par \mathcal{F} est constant. Commençons par l'étude détaillée d'un exemple simple.

3.1. Étude d'un exemple.

L'équation de Pfaff

$$\omega = (x - 2y^2)dx + 2xydy = 0$$

définit un feuilletage de Rolle \mathcal{F} sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dont la fonction $g(x, y) = (y^2 - x)/x^2$ est une intégrale première. Les feuilles de \mathcal{F} sont des coniques passant par l'origine : les courbes de niveau $\{g = t\}$ sont des ellipses pour $t < 0$, une parabole pour $t = 0$ et des hyperboles pour $t > 0$ (voir Fig. 3).

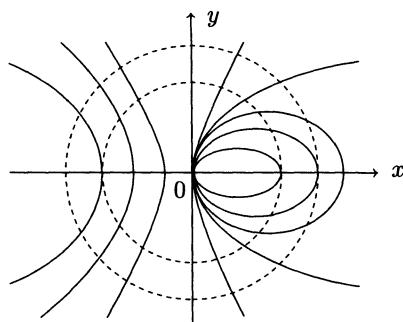


Figure 3

Étudions le feuilletage induit par \mathcal{F} sur les disques centrés en l'origine. Soit Q la fonction tapissante définie par $Q(x, y) = x^2 + y^2$. L'ensemble $\Sigma = \{\omega \wedge dQ = 0\}$ des points de tangence de \mathcal{F} aux sphères a pour équation $y(2y^2 + 2x^2 - x) = 0$. C'est donc la réunion de l'axe $\{y = 0\}$ et d'une ellipse passant par l'origine. Pour tout r , les intersections des demi-axes $\{x = 0, y > 0\}$ et $\{x = 0, y < 0\}$ avec le disque D_r de centre 0 et de rayon r sont des séparatrices de \mathcal{F}_r , le feuilletage induit par \mathcal{F} sur D_r . Ce sont des points de branchement de \mathcal{F}_r/D_r , leur réunion est l'ensemble α -limite du saturé de $\{y = 0, x < 0\}$. Les autres séparatrices de \mathcal{F}_r dépendent de la valeur de r . Pour $r \geq \frac{1}{2}$, la feuille $g^{-1}(-1/r)$ est une ellipse contenue dans le disque D_r , tangente au bord C_r de D_r en l'unique point de $C_r \cap \Sigma$. Les deux composantes connexes de $g^{-1}(-1/r) \cap D_r$ sont des séparatrices du feuilletage \mathcal{F}_r induit par \mathcal{F} sur D_r (voir Fig. 4 page suivante).

Pour $r < \frac{1}{2}$, $C_r \cap \Sigma$ contient trois points. Deux de ces points sont contenus dans la feuille $g^{-1}(2 - 1/2r^2)$. Les trois composantes connexes de l'intersection de cette feuille avec D_r sont des séparatrices de \mathcal{F}_r (voir Fig. 5 page suivante).

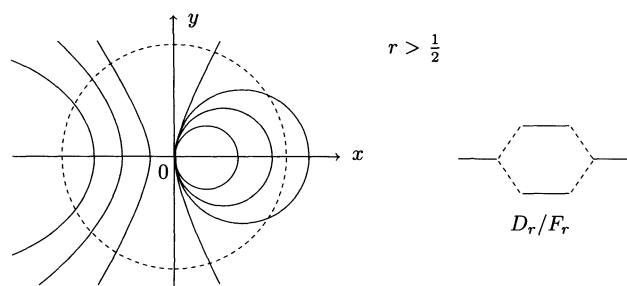


Figure 4

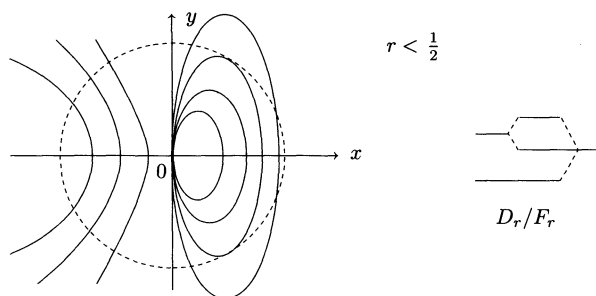


Figure 5

Il en résulte que pour $r \geq \frac{1}{2}$ et $r' < \frac{1}{2}$, les feuilletages \mathcal{F}_r et $\mathcal{F}_{r'}$ ne sont pas topologiquement conjugués (leurs espaces des feuilles ne sont même pas homéomorphes). De plus, il est facile de construire un voisinage V de l'origine tel que \mathcal{F}_V possède un nombre arbitraire de séparatrices (voir Fig. 6).

Bien que la notion de germe soit parfaitement définie il semble donc difficile de parler de «structure locale» ou de type topologique d'un germe de feuilletage analytique de Rolle \mathcal{F} au voisinage d'un point singulier. Cependant, en considérant non pas le feuilletage \mathcal{F} seul mais plutôt le couple feuilletage-fonction tapissante (\mathcal{F}, Q) , ces notions retrouvent un sens. En effet, si $r < \frac{1}{4}$ et $r' < \frac{1}{4}$, les feuilletages \mathcal{F}_r et $\mathcal{F}_{r'}$ induits par \mathcal{F} sur $\{Q < r\}$ et $\{Q < r'\}$ respectivement sont topologiquement conjugués. Le but des paragraphes suivants est de généraliser cette propriété à un feuilletage analytique de Rolle quelconque au voisinage d'un point singulier

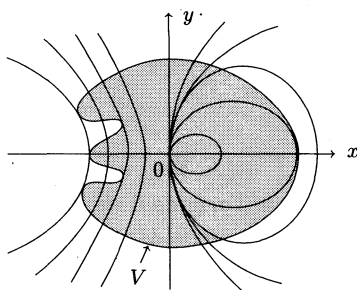


Figure 6

isolé. Bien que le théorème énoncé au paragraphe suivant se généralise au cas d'un feuilletage analytique de Rolle ayant un lieu singulier quelconque en 0, nous nous restreignons au cas d'une singularité isolée. Une étude dans un cadre plus général ne ferait que compliquer techniquement les preuves et n'apporterait pas d'idée nouvelle. De plus, dès que n est supérieur ou égal à trois et que U est simplement connexe, tout feuilletage analytique sur U à singularité isolée en 0 est de Rolle.

3.2. Les \mathcal{F} -fonctions de Morse et la réalisation des germes de feuilletages analytiques.

Soit U un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \{0\})$ un feuilletage analytique de Rolle sur $U \setminus \{0\}$ défini par une équation de Pfaff $\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n = 0$ où ω est une 1-forme différentielle analytique intégrable sur U telle que $\text{Sing}(\omega) = \{0\}$. Pour étudier \mathcal{F} au voisinage de l'origine $0 \in \mathbb{R}^n$, nous considérons encore un couple (\mathcal{F}, Q) où $Q : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction vérifiant les propriétés suivantes.

DÉFINITION 3.2. — Une fonction $Q : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ analytique, propre et telle que $\text{Sing}(dQ) = Q^{-1}(0) = \{0\}$ est une \mathcal{F} -fonction de Morse si la restriction $Q|_F$ de Q à chaque feuille F est une fonction de Morse : $Q|_F$ possède un nombre fini de singularités non dégénérées correspondant chacune à des valeurs critiques distinctes.

Nous n'abordons pas dans ce paragraphe le problème de l'existence de telles fonctions. C'est un problème délicat qui sera traité au paragraphe suivant. Signalons tout de même que la difficulté principale ne réside pas dans la construction d'une fonction telle que les singularités des

restrictions $Q|_F$ soient non dégénérées mais dans la preuve de la séparation des valeurs critiques de $Q|_F$. Cette dernière hypothèse joue un rôle essentiel dans la suite du chapitre. Sous réserve de l'existence de \mathcal{F} -fonctions de Morse on a le résultat suivant.

THÉOREME 3. — *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \{0\})$ un feuilletage analytique de Rolle sur un voisinage connexe U de l'origine 0 de \mathbb{R}^n possédant une singularité isolée en 0. Si Q est une \mathcal{F} -fonction de Morse sur U alors il existe $R > 0$ tel que pour tout $r, r' < R$ les feuilletages \mathcal{F}_r et $\mathcal{F}_{r'}$ induits par \mathcal{F} sur les ouverts $\{Q < r\}$ et $\{Q < r'\}$ respectivement sont topologiquement conjugués. Plus précisément, la conjugaison est de classe C^∞ sur $\{Q < r\} \setminus \{0\}$ et continue en 0.*

Ce théorème s'inspire encore de l'idée de R. Thom [Tho] explicitée dans l'introduction. Dans notre cas, les propriétés des \mathcal{F} -fonctions de Morse imposent à \mathcal{F}_r un type topologique constant. Avant de prouver le théorème précédent, quelques remarques sur les séparatrices des feuilletages \mathcal{F}_r s'imposent.

En restreignant éventuellement le voisinage U nous supposons que $U = \{Q < R_0\}$, $R_0 > 0$ et que la fonction Q est analytique dans un voisinage du compact \bar{U} . L'ensemble $\Sigma = \{x \in U : \omega \wedge d_x Q = 0\}$ est analytique dans U . Il possède un nombre fini de composantes connexes. Les singularités de la restriction de Q à chaque feuille de \mathcal{F} étant non dégénérées, $\Sigma \setminus \{0\}$ est une union finie de courbes analytiques C_1, \dots, C_ℓ transverses à \mathcal{F} contenant chacune 0 dans leur adhérence. Un réel $r > 0$ étant fixé, la fonction Q n'est pas tapissante et adaptée à \mathcal{F}_r dans $\{Q < r\} \setminus \{0\}$. En particulier, certaines feuilles de \mathcal{F}_r ne rencontrent pas Σ . Cependant on définit comme dans les chapitres précédents des séparatrices de \mathcal{F}_r relativement à Q et on montre facilement qu'elles satisfont aux conclusions du théorème 2 de fibration c'est-à-dire que \mathcal{F}_r possède une structure de produit sur les composantes connexes du complémentaire des ces séparatrices (voir Fig. 7). Signalons tout de même que la finitude du nombre des séparatrices du couple (\mathcal{F}, Q) résulte du théorème de fibration appliqué au feuilletage \mathcal{F}_r sur $\{Q < r\} \setminus \{0\}$. En effet, deux séparatrices de (\mathcal{F}, Q) associées à une même courbe C_j sont non séparées dans l'espace des feuilles et l'ensemble des feuilles non séparées de \mathcal{F}_r est fini. En notant O_r l'ouvert $O_r = \{x \in U : Q(x) < r\}$ et $H_r = \{x \in U : Q(x) = r\}$ son bord, le résultat suivant met en évidence l'existence de séparatrices de \mathcal{F} relativement à Q qui ne dépendent pas du voisinage sur lequel on étudie le feuilletage.

LEMME 3.2. — Il existe un réel $R > 0$ et un nombre fini de feuilles F_1, \dots, F_p de \mathcal{F} contenues dans l'ensemble des séparatrices de \mathcal{F} relativement à la fonction Q tels que :

(i) pour tout $0 < r \leq R$, les séparatrices de \mathcal{F} relativement à Q sont transverses aux hypersurfaces de niveau H_r ,

(ii) pour tout $0 < r \leq R$, $F_1 \cap O_r, \dots, F_p \cap O_r$ sont des séparatrices de \mathcal{F}_r relativement à Q et les autres séparatrices de \mathcal{F}_r relativement à Q sont tangentes à H_r .

Preuve du lemme 3.2. — L'ensemble des séparatrices de \mathcal{F} relativement à la fonction Q est la réunion des ensembles Λ_0 et Λ_{R_0} définis par

$$\Lambda_0 = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\text{Sat}(\Sigma \cap O_{1/n})}, \Lambda_{R_0} = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\text{Sat}(\Sigma \cap O_{R_0-1/n})}.$$

Soient F_1, \dots, F_p les feuilles contenues dans Λ_0 (voir Fig. 7).

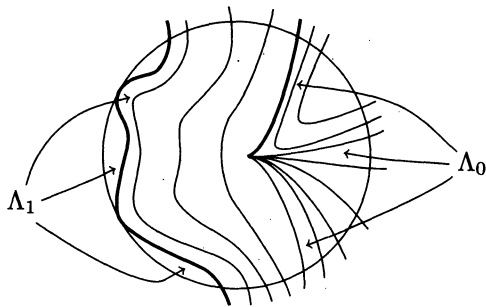


Figure 7

Les séparatrices de \mathcal{F} relativement à la fonction Q coupent au plus une fois chaque composante connexe de Σ . Il existe donc $0 < R < R_0$ tel que pour $r \leq R$, F_1, \dots, F_p soient transverses à H_r . De plus, un réel $r \leq R$ étant fixé, l'ensemble des séparatrices de \mathcal{F}_r relativement à Q est la réunion disjointe de $\Lambda_0 \cap O_r$ et de

$$\Lambda_r = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\text{Sat}(\Sigma \cap O_{r-1/n})}.$$

Ce dernier ensemble est exactement l'union des feuilles de \mathcal{F}_r contenant un point de $\Sigma \cap H_r$ dans leur adhérence. Les feuilles F_1, \dots, F_p et le réel R précédemment définis satisfont aux conclusions du lemme. \square

Après la mise en évidence de séparatrices du couple (\mathcal{F}, Q) qui ne dépendent pas du voisinage sur lequel on réalise \mathcal{F} , nous définissons un autre objet associé au germe du feuilletage \mathcal{F} à l'origine, c'est-à-dire indépendant de toute réalisation de \mathcal{F} sur un voisinage de 0. Son importance n'apparaîtra qu'au paragraphe suivant lors de l'étude de l'existence de \mathcal{F} -fonctions de Morse. Nous le définissons maintenant pour des raisons techniques : certaines notations introduites sont utilisées dans la preuve du théorème 3.

Le pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} en 0. — Le feuilletage \mathcal{F} étant analytique et de Rolle sur l'ouvert U , il possède un pseudo-groupe d'holonomie qui a été défini dans la première partie. Soit $\mathcal{H}(\mathcal{F}, 0)$ l'ensemble des éléments $h_{\gamma, \delta}$ du pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} tels que :

(i) $h_{\gamma, \delta}$ est le difféomorphisme d'holonomie entre deux courbes γ et δ transverses à \mathcal{F} paramétrées analytiquement, vérifiant $\gamma(0) = \delta(0) = 0$ et $h_{\gamma, \delta}$ est défini sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^+ .

(ii) Pour tout voisinage $V \subseteq U$ de 0, le difféomorphisme d'holonomie entre γ et δ du feuilletage \mathcal{F}_V induit par \mathcal{F} sur V coïncide avec $h_{\gamma, \delta}$ sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^+ .

Ce sous-ensemble est stable pour la loi de composition définie sur le pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} . Il dépend de U . La condition (ii) peut sembler étrange mais elle est nécessaire pour définir un objet associé au germe de feuilletage et non à une réalisation de ce germe. La figure 8 représente un exemple de difféomorphisme d'holonomie vérifiant la condition (i) mais pas la condition (ii).

DÉFINITION 3.3. — *Le pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} en 0, noté $\underline{\mathcal{H}}(\mathcal{F}, 0)$, est l'ensemble des germes en 0 de difféomorphismes appartenant à $\mathcal{H}(\mathcal{F}, 0)$. Il est muni de la loi de composition induite par celle de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, 0)$.*

D'après la condition (ii) vérifiée par les éléments de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, 0)$, le pseudo-groupe ainsi défini ne dépend plus du voisinage U de l'origine. Ses éléments sont des germes en 0 de difféomorphismes de \mathbb{R}^+ dans lui-même, continus en 0 et analytiques en dehors de 0. Dans toute la suite, la notation $\underline{h}_{\gamma, \delta}$ désigne l'élément de $\underline{\mathcal{H}}(\mathcal{F}, 0)$ qui est le germe du difféomorphisme d'holonomie entre deux courbes paramétrées γ et δ . Remarquons que la définition de $\underline{h}_{\gamma, \delta}$ dépend d'une paramétrisation des courbes γ et δ . Lorsque cela ne pose pas de problème, nous ne précisons pas cette paramétrisation. On associe à $\Sigma \setminus \{0\} = C_1 \cup \dots \cup C_\ell$ les éléments $\underline{h}_{i, j}$ de $\underline{\mathcal{H}}(\mathcal{F}, 0)$ définis par : $\underline{h}_{i, j}$ est le germe d'application d'holonomie entre

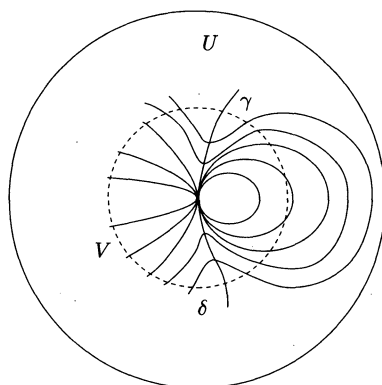


Figure 8

les demi-courbes analytiques C_i et C_j si i et j sont tels que ce germe soit bien défini et appartienne au pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} en 0. Les points singuliers des restrictions de Q aux feuilles de \mathcal{F} sont les points de $\Sigma \setminus \{0\}$. La propriété de séparation des valeurs critiques pour la \mathcal{F} -fonction de Morse Q est donc équivalente à la propriété suivante : les fonctions $Q \circ C_j \circ h_{i,j} - Q \circ C_i$ ne s'annulent qu'au point $0 \in \mathbb{R}^+$. L'étude des points fixes des éléments du pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} en 0 apparaît donc comme essentielle pour montrer l'existence de \mathcal{F} -fonctions de Morse. Nous détaillerons cette étude au paragraphe suivant dans le cas de la dimension 2.

Pour prouver le théorème 3, nous allons construire pour tout $r, r' < R$ un homéomorphisme h de O_r dans $O_{r'}$ qui conjugue les feuilletages \mathcal{F}_r et $\mathcal{F}_{r'}$ vérifiant $h(\Lambda_0 \cap O_r) = \Lambda_0 \cap O_{r'}$, $h(\Lambda_r) = \Lambda_{r'}$ et $h(0) = 0$. Nous construisons un champ de vecteurs X sur $O_R \setminus \{0\}$ préservant \mathcal{F} , tangent à Λ_0 et transverse à Λ_r dont le flot « réalise » la conjugaison désirée.

Preuve du théorème 3. — Dans la suite, \mathbb{R}^n est muni de la structure euclidienne usuelle et $(\cdot | \cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien. Soit $r \in]0, R[$ fixé et soit $A_\varepsilon = A_\varepsilon(r)$ l'ouvert $\{x \in O_R : r - \varepsilon < Q(x) < r + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Il suffit de prouver qu'il existe un intervalle I inclus dans \mathbb{R} et contenant 0 tel que pour $t \in I$, \mathcal{F}_r et \mathcal{F}_{r+t} sont topologiquement conjugués. Montrons tout d'abord l'affirmation suivante :

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute feuille F de \mathcal{F} rencontre $\Sigma \cap A_\varepsilon$ en au plus un point.

Q étant une \mathcal{F} -fonction de Morse, les fonctions $Q \circ C_j \circ h_{i,j} - Q \circ C_i$ ne s'annulent qu'au point $0 \in \mathbb{R}^+$. L'affirmation précédente se déduit alors immédiatement de la continuité des fonctions $Q \circ C_j \circ h_{i,j} - Q \circ C_i$ aux points t_i tels que $Q \circ C_i(t_i) = r$.

Construisons maintenant un champ de vecteurs X de classe \mathcal{C}^∞ sur $O_R \setminus \{0\}$ vérifiant les conditions suivantes :

- 1) X préserve le feuilletage \mathcal{F} ;
- 2) X est tangent aux séparatrices $F_1, \dots, F_p, F_{p+1}, \dots, F_k$ du couple (\mathcal{F}, Q) ;
- 3) $dQ(X) = 1$ sur $A_{\varepsilon/2}$ et X est tangent à $\Sigma \cap A_{\varepsilon/2}$;
- 4) l'ensemble $\{x \in U : dQ(X(x)) < Q(x)\}$ est un voisinage épointé de l'origine.

L'existence d'un tel champ repose sur les propriétés de la \mathcal{F} -fonction de Morse Q . En effet, si x est un point de $\Sigma \cap A_{\varepsilon/2}$, $X(x)$ est déterminé par la condition 3). D'après la condition 1), le champ X est alors déterminé sur toute la feuille passant par x . L'affirmation précédente, conséquence des hypothèses faites sur Q , est donc essentielle pour que les conditions 1) et 3) puissent être réalisées simultanément. La condition 4) permettra l'existence d'un intervalle I dans \mathbb{R} tel que le flot de X soit défini sur $(O_R \setminus \{0\}) \times I$. Sur chaque composante connexe du complémentaire des séparatrices du couple (\mathcal{F}, Q) , le feuilletage \mathcal{F} possède une structure de produit. On construit X sur chacune de ces composantes. On utilisera ensuite son flot pour réaliser les conjugaisons topologiques voulues.

Soit Y le champ de vecteurs tangent à \mathcal{F} défini sur $O_R \setminus \{0\}$ par : $Y(x)$ est la projection orthogonale de $\text{grad } Q(x)$ sur l'espace tangent à la feuille passant par x . Soit Z un champ de vecteurs défini sur $O_R \setminus \Sigma$, colinéaire à Y et tel que $Z = Y/(\text{grad } Q \mid Y)$ sur A_ε et $Z = QY/(\text{grad } Q \mid Y)$ sur un voisinage de l'origine disjoint de A_ε . Il vérifie $dQ(Z) = 1$ sur $A_{\varepsilon/2}$ et est tangent au feuilletage \mathcal{F} .

Les séparatrices F_1, \dots, F_k sont transverses aux hypersurfaces H_r , $0 < r \leq R$. La restriction de X à $(F_1 \cup \dots \cup F_k) \cap O_R$ est définie par $X = Z$. Elle vérifie clairement les conditions 1), 2), 3) et 4).

Soit V une composante connexe du complémentaire des séparatrices F_1, \dots, F_k . Supposons tout d'abord que $V \cap \Sigma \cap A_\varepsilon = \emptyset$. L'ensemble $V \cap \Sigma$ est alors vide. En effet, les séparatrices de \mathcal{F} relativement à Q étant transverses aux hypersurfaces H_r , $r \leq R$, si une courbe C_j rencontre V alors C_j est

contenue dans V . Cette courbe est analytique, transverse aux hypersurfaces de niveau de Q et contient 0 dans son adhérence. Elle coupe donc toutes les hypersurfaces H_r , $r \leq R$, ce qui contredit l'hypothèse $V \cap \Sigma \cap A_\varepsilon = \emptyset$. On définit alors X sur V par $X = Z$ (voir Fig. 9). La restriction de X à V vérifie bien les conditions 1), 2), 3) et 4).

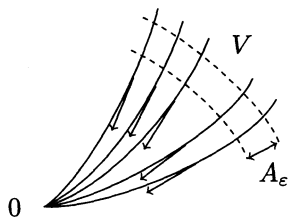


Figure 9

Supposons maintenant que $V \cap \Sigma \cap A_\varepsilon \neq \emptyset$. Il existe $J \subseteq \{1, \dots, \ell\}$ tel que $V \cap \Sigma \cap A_\varepsilon$ soit contenu dans l'union des courbes $C_j \cap A_\varepsilon$, $j \in J$. Les séparatrices de \mathcal{F} étant transverses aux hypersurfaces H_r , $r \leq R$, les courbes $C_j \cap O_r$, $j \in J$ sont contenues dans V . Chaque feuille de \mathcal{F} rencontre $\Sigma \cap A_\varepsilon$ en au plus un point et le feuilletage \mathcal{F} possède une structure de produit sur V . Il existe donc un champ de vecteurs \tilde{X} de classe \mathcal{C}^∞ sur V , préservant \mathcal{F} , tangent à $V \cap \Sigma \cap A_\varepsilon$ tel que pour tout $j \in J$, $dp_{C_j}(\tilde{X}) = 1$ sur $\text{Sat}_R(C_j \cap A_\varepsilon)$ et $dQ(\tilde{X}) = 1$ sur $\text{Sat}_R(C_j \cap A_\varepsilon) \cap A_\varepsilon$ (on utilise ici de manière essentielle l'affirmation faite au début de la preuve). L'intersection de $\text{Sat}_R(\Sigma \cap A_\varepsilon)$ avec Σ étant une union finie de courbes ne contenant pas 0 dans leur adhérence, on impose de plus à \tilde{X} d'être tangent aux hypersurfaces de niveau de Q dans l'intersection d'un voisinage de l'origine avec $\text{Sat}_R(\Sigma \cap A_\varepsilon)$. Soit $j \in J$ et soit ψ_j une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur C_j telle que $\psi_j = 1$ sur $C_j \cap A_{\varepsilon/2}$ et $\psi_j = 0$ sur $C_j \setminus A_\varepsilon$. Soit $\phi : V \rightarrow [0; 1]$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ telle que $\phi = 1$ sur $O_R \setminus \text{Sat}_R(V \cap \Sigma \cap A_\varepsilon)$ et $\phi = 0$ sur $\text{Sat}_R(V \cap \Sigma \cap A_{\varepsilon/2})$. On définit alors X sur V par

$$X = \sum_{j \in J} (\psi_j \circ p_{C_j}) \tilde{X} + \phi Z.$$

La restriction de X à V vérifie aussi les conditions 1), 2), 3) et 4) (voir Fig. 10 page suivante).

Le champ de vecteurs X ainsi défini sur $O_R \setminus \{0\}$ est de classe \mathcal{C}^∞ . Il est tangent aux séparatrices de \mathcal{F} et à $\Sigma \cap A_{\varepsilon/2}$. Il préserve le feuilletage \mathcal{F}_R .

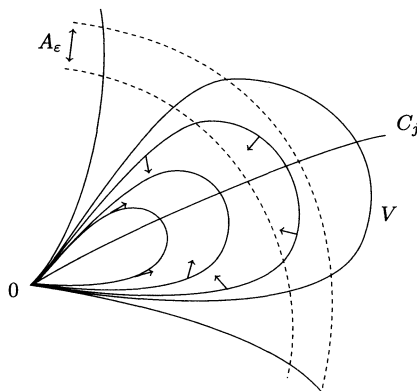


Figure 10

En effet, son flot

$$\Psi : W \rightarrow O_R, W \subseteq (O_R \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}, \Psi(x, t) = \Psi_x(t), \Psi_x(0) = x$$

satisfait à la propriété suivante : si x et y sont deux points d'une même feuille de \mathcal{F}_R et t un réel tel que $\Psi_x(t), \Psi_y(t) \in O_R$, alors $\Psi_x(t)$ et $\Psi_y(t)$ appartiennent à la même feuille de \mathcal{F}_R . Enfin le champ X vérifie $dQ(X) = 1$ sur $A_{\varepsilon/2}$. D'après la condition 4), pour toute trajectoire $t \mapsto \Psi_x(t)$ aboutissant à l'origine $0 \in \mathbb{R}^n$, il existe t_0 tel que $\Psi_x(t)$ soit contenu dans l'ouvert $\{x \in U : dQ(X(x)) < Q(x)\}$ pour $t > t_0$. L'intervalle de définition de cette trajectoire contient donc l'ouvert $]t_0; +\infty[$. Ainsi il existe un intervalle I de \mathbb{R} , contenant 0, tel que $(O_r \setminus \{0\}) \times I$ est inclus dans W . Pour $t \in I$, $\Psi_t : O_r \setminus \{0\} \rightarrow O_{r+t} \setminus \{0\}$ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme qui se prolonge par continuité en un homéomorphisme à l'origine et qui réalise une conjugaison topologique entre \mathcal{F}_r et \mathcal{F}_{r+t} . \square

Remarque. — La preuve précédente montre clairement pourquoi les conjugaisons obtenues sont topologiques mais non différentiables : le champ de vecteurs X ne se prolonge que par continuité en 0. Cependant, les conjugaisons obtenues sont différentiables en dehors de l'origine. La méthode employée pour prouver le théorème est à rapprocher des techniques utilisées par J. Milnor [Mil2] pour étudier la structure conique des singularités de fonctions holomorphes. Notre résultat met en évidence une «structure conique» des feuilletages analytiques de Rolle (possédant une \mathcal{F} -fonction de Morse) au voisinage d'une singularité isolée. D'autre part, l'analyticité de \mathcal{F} n'est utilisée que pour obtenir des propriétés de

finitude de Σ . Le théorème précédent se généralise immédiatement aux feuilletages de classe C^∞ possédant une \mathcal{F} -fonction de Morse de classe C^∞ telle que $\Sigma \setminus \{0\}$ ait un nombre fini de composantes connexes.

3.3. Existence des \mathcal{F} -fonctions de Morse.

Rappelons que $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \{0\})$ est un feuilletage analytique de Rolle sur un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{R}^n$, possédant une singularité isolée en 0 et défini par une équation de Pfaff à coefficients analytiques $\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n = 0$. On suppose de plus que U est semi-analytique, relativement compact et que ω est analytique dans un voisinage de \bar{U} . Ce paragraphe est consacré à l'étude de l'existence de \mathcal{F} -fonctions de Morse. Tout d'abord nous construisons facilement et « explicitement » une famille de fonctions dont les restrictions aux feuilles de \mathcal{F} ne possèdent que des singularités de Morse. Ensuite, nous étudions le problème beaucoup plus délicat de la séparation des valeurs critiques de ces restrictions.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ fixé et soit L_ε la forme linéaire définie par $L_\varepsilon(x) = \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n$. La fonction

$$Q_\varepsilon : U \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad Q_\varepsilon(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \exp(L_\varepsilon(x))$$

est analytique. Il existe un voisinage U_ε de l'origine tel que la restriction de Q_ε à U_ε soit propre et $\text{Sing}(dQ_\varepsilon) \cap U_\varepsilon = Q_\varepsilon^{-1}(0) = \{0\}$. La famille de fonctions Q_ε , $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, possède la propriété suivante.

LEMME 3.4. — *Il existe un sous-ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ de mesure de Lebesgue nulle tel que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus S$:*

(i) *l'ensemble $\Sigma_\varepsilon = \{x \in U \setminus \{0\} : \omega \wedge dQ_\varepsilon(x) = 0\}$ est une union finie de courbes analytiques lisses disjointes,*

(ii) *l'ensemble T_ε des points de tangence de \mathcal{F} à Σ_ε est une union finie de points et de courbes compactes contenues dans l'intersection d'une feuille et d'une hypersurface de niveau de Q ,*

(iii) *tout point $x \in \Sigma_\varepsilon \setminus T_\varepsilon$ est une singularité non dégénérée de la restriction de Q_ε à la feuille passant par x .*

Preuve du lemme 3.4. — La preuve du point (i) est exactement la même que celle du lemme 2.7. On montre que

$$\tilde{\Sigma} = \{(x, \varepsilon) \in U \times \mathbb{R}^n : \omega \wedge dQ_\varepsilon = 0\}$$

est un sous-ensemble analytique de codimension $n - 1$ de $U \times \mathbb{R}^n$ dont l'intersection avec $(U \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n$ est lisse et on applique le théorème de Sard à la projection $\theta : \bar{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\theta(x, \varepsilon) = \varepsilon$. Nous renvoyons le lecteur à la preuve de ce lemme pour plus de détails. Soit ε une valeur régulière de θ . La finitude du nombre de composantes connexes de Σ_ε ainsi que le point (ii) du lemme résultent des propriétés de finitude des ensembles analytiques rappelées avant la preuve du théorème 2. Enfin, soit $x \in \Sigma_\varepsilon \setminus T_\varepsilon$ et soit (V, ϕ) une carte du feuilletage \mathcal{F} au voisinage de x dans laquelle \mathcal{F} est défini par l'équation $dx_n = 0$. La courbe $\Sigma_\varepsilon \cap V$ est définie par les $n - 1$ équations indépendantes

$$\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x_{n-1}} = 0 \quad \text{où} \quad q_\varepsilon = Q_\varepsilon \circ \phi^{-1}.$$

L'ensemble Σ_ε étant transverse à \mathcal{F} au point x , la matrice

$$\begin{pmatrix} \partial^2 q_\varepsilon / \partial x_1^2 & \dots & \partial^2 q_\varepsilon / \partial x_1 \partial x_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial^2 q_\varepsilon / \partial x_{n-1} \partial x_1 & \dots & \partial^2 q_\varepsilon / \partial x_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

est non dégénérée en x . Ce point est donc une singularité non dégénérée de la restriction de Q_ε à la feuille passant par x , ce qui prouve (iii). \square

D'après le lemme précédent, si $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus S$ est fixé et si on restreint éventuellement le voisinage U , la restriction de Q_ε à U est analytique, propre, non singulière sur $U \setminus \{0\}$ et sa restriction à chaque feuille F possède un nombre fini de singularités non dégénérées. Maintenant, le problème est de savoir si ces singularités correspondent à des valeurs critiques distinctes. Reprenons les notations du paragraphe précédent. Le paramètre ε étant fixé, l'ensemble $\Sigma_\varepsilon \setminus \{0\}$ est une union finie de courbes analytiques transverses à \mathcal{F} au voisinage de 0 et pour $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$, $h_{i,j}$ est l'élément de $\underline{\mathcal{H}}(0, \mathcal{F})$ associé à C_i et C_j lorsqu'il est défini. Pour des raisons évidentes de lisibilité, nous ne faisons pas apparaître explicitement la dépendance de ℓ et des courbes C_i par rapport au paramètre ε . De plus, à chaque emploi de la notation $h_{i,j}$ nous sous-entendons que les indices i et j sont tels que le germe $h_{i,j}$ en 0 appartient bien au pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} en 0. Il faut répondre à l'une des deux questions suivantes :

Question 1. — Un paramètre $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus S$ étant fixé, les fonctions $Q_\varepsilon \circ C_j \circ h_{i,j} - Q_\varepsilon \circ C_i$ possèdent-elles un nombre fini de zéros ?

Question 2. — Existe-t-il des valeurs $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus S$ pour lesquelles les fonctions $Q_\varepsilon \circ C_j \circ h_{i,j} - Q_\varepsilon \circ C_i$ possèdent un nombre fini de zéros? Plus généralement, les fonctions analytiques propres de U dans \mathbb{R}^+ telles que $\text{Sing}(\text{d}Q) = \{0\}$ sont-elles «génériquement» des \mathcal{F} -fonctions de Morse?

Il est également intéressant d'étudier une propriété de zéros isolés plus générale.

Question 3. — Soit Q une fonction analytique propre de U dans \mathbb{R}^+ telle que $\text{Sing}(\text{d}Q) = \{0\}$ et $\Sigma = \{\omega \wedge \text{d}Q = 0\}$ est de dimension 1. La fonction $Q \circ \delta \circ h_{\gamma,\delta} - Q \circ \gamma$ possède-t-elle un nombre fini de zéros pour tout $h_{\gamma,\delta} \in \mathcal{H}(\mathcal{F}, \{0\})$?

En général, nous ne savons répondre à aucune de ces questions. Nous verrons que la difficulté essentielle réside dans la remarque suivante : «la condition d'appartenance de deux points quelconques à une même feuille ne peut généralement pas se traduire de manière analytique». De façon plus précise, le graphe du feuilletage \mathcal{F} ,

$$G_{\mathcal{F}} = \{(x, y) \in (U \setminus \{0\}) \times (U \setminus \{0\}) : \\ x \text{ et } y \text{ appartiennent à la même feuille}\},$$

n'est pas un sous-ensemble analytique de $U \times U$. On commence par contourner cette difficulté en répondant affirmativement à la seconde question dans le cas d'un feuilletage possédant une intégrale première. Ensuite on répond aux questions précédentes dans le cas où $n = 2$ en utilisant le théorème de Dulac. Ces questions restent ouvertes lorsque $n \geq 3$. Cependant nous pensons que dans ce dernier cas il est possible de se ramener à un problème en dimension 2 en utilisant des techniques de désingularisation et de répondre affirmativement à la première question.

Le lemme suivant, raffinement du lemme 3.4, facilite l'étude des deux cas que nous envisageons.

LEMME 3.5. — *Il existe un sous-ensemble $S' \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \subseteq S'$, de mesure de Lebesgue nulle tel que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus S'$ fixé, aucune des fonctions $Q_\varepsilon \circ C_j \circ h_{i,j} - Q_\varepsilon \circ C_i$ n'est identiquement nulle sur un voisinage de 0.*

Preuve du lemme 3.5. — Soit F une feuille de \mathcal{F} fixée. Il existe un sous-ensemble S_F de \mathbb{R}^n , de mesure de Lebesgue nulle, tel que pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus S_F$, la restriction de Q_ε à F est une fonction de Morse. En particulier les fonctions $Q_\varepsilon \circ C_j \circ h_{i,j} - Q_\varepsilon \circ C_i$ sont non nulles en un point t

tel que $C_i(t)$ appartient à F . Soit $(F_k)_{k>0}$ une famille dénombrable de feuilles de \mathcal{F} telle que $\bigcup_{k>0} F_k$ soit un sous-ensemble dense de U . Alors, l'ensemble $S' = \bigcup_{k>0} S_{F_k}$ convient. \square

Feuilletages possédant une intégrale première. — Supposons qu'il existe deux fonctions f et g analytiques sur U telles que $\omega \wedge d(f/g) = 0$. Cette condition est réalisée en dimension supérieure ou égale à 3 dès que 0 est une singularité algébriquement isolée de ω , d'après un théorème de B. Malgrange [Mal]. Deux points x et y appartenant à une même feuille de \mathcal{F} vérifient alors l'égalité $f(x)g(y) = f(y)g(x)$. Montrons que cette équation analytique sur l'ouvert U implique l'existence de \mathcal{F} -fonctions de Morse. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus S'$ fixé, où S' est l'ensemble du lemme 3.5. Le sous-ensemble $(\Sigma_\varepsilon \times \Sigma_\varepsilon) \setminus D$ de $U \times U$, où $D = \{(x, x) \in U \times U\}$ est la diagonale de $U \times U$, est semi-analytique et de dimension 2. D'après le lemme 3.4, les composantes connexes de $\Sigma_\varepsilon \setminus T_\varepsilon$ sont en nombre fini et transverses aux hypersurfaces de niveau de Q_ε . Un point $x \in \Sigma_\varepsilon$ étant fixé, l'ensemble des points y de Σ_ε tels que $Q_\varepsilon(x) = Q_\varepsilon(y)$ est fini. L'ensemble semi-analytique

$$\{(x, y) \in (\Sigma_\varepsilon \times \Sigma_\varepsilon) \setminus D : Q_\varepsilon(x) = Q_\varepsilon(y)\}$$

est donc de dimension 1. D'autre part, chaque feuille de \mathcal{F} coupe Σ_ε en un nombre fini de points et chaque hypersurface de niveau de f/g possède un nombre fini de composante connexes. Un point $x \in \Sigma_\varepsilon$ étant fixé, l'ensemble des points y de Σ_ε tels que $f(x)g(y) = f(y)g(x)$ est fini. L'ensemble semi-analytique

$$\{(x, y) \in (\Sigma_\varepsilon \times \Sigma_\varepsilon) \setminus D : f(x)g(y) = f(y)g(x)\}$$

est donc également de dimension 1. L'intersection de ces deux ensembles est donc un sous-ensemble semi-analytique de $(\Sigma_\varepsilon \times \Sigma_\varepsilon) \setminus D$ de dimension au plus 1. Mais, d'après le lemme 3.5, $(\Sigma_\varepsilon \times \Sigma_\varepsilon) \setminus D$ contient un sous-ensemble dense de points non contenus dans cette intersection. Elle est donc de dimension 0, c'est-à-dire réduite à un nombre fini de points. De plus, elle contient les couples $(x, y) \in (U \times U) \setminus D$ tels que x et y appartiennent à une même feuille F de \mathcal{F} et soient des singularités correspondant à une même valeur critique de la restriction de Q_ε à F . En restreignant éventuellement l'ouvert U , Q_ε est une \mathcal{F} -fonction de Morse. Ceci prouve la proposition suivante.

PROPOSITION 3.6. — *Si \mathcal{F} possède une intégrale première de la forme f/g où f et g sont deux fonctions analytiques sur un voisinage de l'origine*

de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire si $\omega \wedge d(f/g) = 0$, alors il existe des \mathcal{F} -fonctions de Morse.

Feuilletages en dimension 2. — Jusqu'à présent dans ce travail, notre démarche avait consisté à « ignorer » les singularités des feuilletages étudiés. Nous avons toujours favorisé une approche des problèmes à l'aide de fonctions tapissantes sur le complémentaire du lieu singulier au détriment d'une étude des singularités elles-mêmes. Pour montrer l'existence de \mathcal{F} -fonctions de Morse en dimension 2 et plus particulièrement pour comprendre le pseudo-groupe d'holonomie en 0, nous sommes obligés d'étudier la singularité de \mathcal{F} en 0. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^2 \setminus S'$ où S' est l'ensemble du lemme 3.5 et soient C_1 et C_2 deux composantes connexes de $\Sigma_\varepsilon \setminus \{0\}$ contenant 0 dans leur adhérence, paramétrées par Q_ε . On suppose qu'il existe un germe $\underline{h} = \underline{h}_{1,2}$ de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \{0\})$ correspondant à C_1 et C_2 et on note h une réalisation de ce germe sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^+$. Nous montrons tout d'abord la proposition suivante en effectuant la réduction de la singularité isolée de la forme ω définissant le feuilletage.

PROPOSITION 3.7. — *Le germe \underline{h} appartient au groupe de Dulac.*

L'ensemble des zéros de la fonction $Q_\varepsilon \circ C_1 - Q_\varepsilon \circ C_2 \circ h$ est l'ensemble des points fixes de h . Il résulte alors de la solution au problème de Dulac donnée par Écalé [Eca] et Il'Jashenko [Il'] que Q_ε est une \mathcal{F} -fonction de Morse. Afin d'éviter l'emploi de ce résultat difficile, nous montrons le résultat plus faible suivant. Sa preuve est due à J.-M. Lion.

PROPOSITION 3.8. — *Il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^2 \setminus S'$ tel que Q_ε soit une \mathcal{F} -fonction de Morse.*

Rappelons brièvement l'énoncé d'une version faible du théorème de Dulac [Dul] que nous utiliserons pour prouver la proposition 3.8. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [Mou] par exemple.

Soit

$$X = b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X(0) = 0,$$

un champ de vecteurs analytique au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^2$. La singularité $(X, 0)$ est dite de *type 2S-col* si les axes $x = 0$ et $y = 0$ sont des séparatrices du champ en 0 et si la partie linéaire en 0 de X possède deux valeurs propres réelles λ_1, λ_2 telles que $\lambda_1 \lambda_2 \leq 0$. On appelle *application de passage de coin* un germe d'application de Poincaré $g : (\mathbb{R}^+, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^+, 0)$ entre

deux courbes analytiques transverses à X et coupant les séparatrices $x = 0$ et $y = 0$. Le $2S$ -groupe de Dulac est le groupe des germes d'applications de $(\mathbb{R}^+, 0)$ dans lui-même engendré par les applications de passage de coin des singularités de type $2S$ -col. Remarquons que ce groupe contient tous les germes d'applications analytiques dans un voisinage de 0 dans \mathbb{R} qui préservent l'orientation. Le rôle du préfixe « $2S$ » dans les définitions précédentes est d'indiquer qu'on n'envisage pas le cas des singularités nœud-col ($\lambda_1 \lambda_2 = 0$) avec une variété centrale non analytique. Dulac montre le résultat suivant.

THÉORÈME de Dulac [Dul]. — *Un élément \underline{h} du $2S$ -groupe de Dulac vérifie l'alternative suivante : \underline{h} admet un contact plat avec l'identité ou \underline{h} a pour unique point fixe l'origine.*

Preuve de la proposition 3.7. — Appliquons le théorème de résolution des singularités de Seidenberg [Sei] à la forme ω . Soit $\pi : \hat{U} \rightarrow U$ le morphisme d'éclatement ainsi obtenu. Les singularités du feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ image réciproque de \mathcal{F} par π sont réduites et contenues dans le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$. En faisant éventuellement des éclatements supplémentaires, les transformées strictes \hat{C}_1 et \hat{C}_2 par π de C_1 et C_2 sont des courbes analytiques lisses disjointes et transverses au diviseur exceptionnel. De plus ces courbes étant analytiques et transverses au feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$, on peut supposer qu'elles ne rencontrent pas le diviseur exceptionnel en un point singulier de $\hat{\mathcal{F}}$. Elles sont paramétrées par $Q_\varepsilon \circ \pi$. Soit \hat{h} l'application d'holonomie entre \hat{C}_1 et \hat{C}_2 définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^+ par $h(t) = \hat{C}_2^{-1}(F_{\hat{C}_1(t)} \cap \hat{C}_2)$ où $F_{\hat{C}_1(t)}$ est la feuille de $\hat{\mathcal{F}}$ passant par $\hat{C}_1(t)$. Les courbes C_1 et C_2 étant paramétrées par Q_ε et les courbes \hat{C}_1 et \hat{C}_2 par $Q_\varepsilon \circ \pi$, on a $\hat{h} = h$.

Montrons que \hat{h} est une composée d'applications de passage de coin. Supposons que l'intervalle de définition de h contient le segment $[0, 1]$ et notons F le segment plongé dans U , d'extrémités $C_1(1)$ et $C_2(h(1))$ et contenu dans la feuille de \mathcal{F} passant par ces deux points. Les segments $C_1([0; 1])$, $C_2([0; h(1)])$ et F forment les arêtes d'un triangle T contenu dans U . Toute feuille rencontrant l'intérieur de T coupe chaque segment $C_1([0; 1])$ et $C_2([0; h(1)])$ en un unique point (voir Fig. 11). L'ensemble $\hat{T} = \pi^{-1}(T)$ est bordé par un polygone dont les arêtes sont $\hat{C}_1([0; 1])$, $\hat{F} = \pi^{-1}(F)$, $\hat{C}_2([0; h(1)])$ et des segments D_1, \dots, D_k contenus dans des composantes du diviseur exceptionnel. On suppose D_1, \dots, D_k ordonnés de sorte que $\hat{C}_1 \cap D_1 \neq \emptyset$, $\hat{C}_2 \cap D_k \neq \emptyset$, $D_i \cap D_j$ est non vide si $|i - j| \leq 1$ et

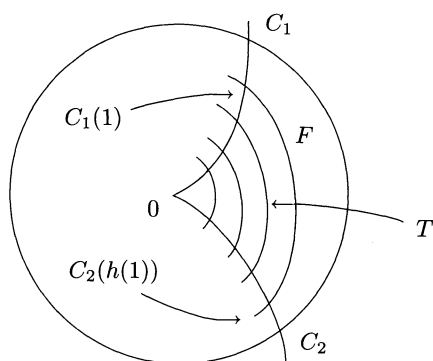


Figure 11

vide sinon (voir Fig. 12).

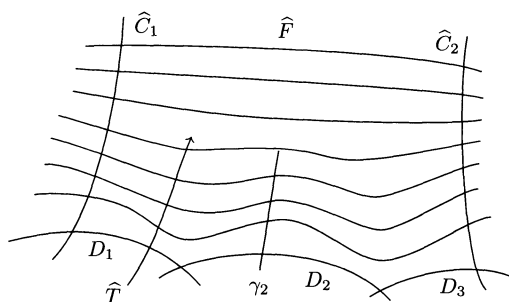


Figure 12

Toute feuille coupant \hat{T} rencontre le bord de \hat{T} en deux points contenus dans \hat{C}_1 et \hat{C}_2 . Ainsi aucune composante D_i , $i = 1, \dots, k$, du diviseur exceptionnel n'est dicritique. De plus, les seules singularités de $\hat{\mathcal{F}}$ (qui sont toutes réduites) sur $D_1 \cup \dots \cup D_k$ sont les points d'intersection $x_i = D_i \cap D_{i+1}$. Les composantes du diviseur contenant D_i et D_{i+1} sont deux séparatrices analytiques de $\hat{\mathcal{F}}$ au point x_i . Le secteur délimité par ces deux séparatrices et contenu dans \hat{T} est de «type col». Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ des courbes analytiques transverses à $\hat{\mathcal{F}}$, contenues dans \hat{T} , coupant D_1, \dots, D_k respectivement et telles que $\gamma_1 \subseteq \hat{C}_1$, $\gamma_k \subseteq \hat{C}_2$. Les applications d'holonomie h_i entre γ_i et γ_{i+1} appartiennent au $2S$ -groupe

de Dulac et vérifient $\hat{h} = h_{k-1} \circ \dots \circ h_1$. L'application \hat{h} appartient au $2S$ -groupe de Dulac. \square

Preuve de la proposition 3.8. — D'après le théorème de Dulac rappelé précédemment, il suffit de montrer qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^2 \setminus S'$ tel que pour toutes composantes C_1, C_2 de $\Sigma_\varepsilon \setminus \{0\}$, l'application \hat{h} définie dans la preuve de la proposition 3.7 admet un développement formel qui n'est pas l'identité. Montrons tout d'abord que la proposition est une conséquence du lemme technique suivant.

LEMME. — *Il existe un entier N , un morphisme de désingularisation π et un ouvert semi-analytique E inclus dans \mathbb{R}^2 tels que :*

(i) *pour $\varepsilon \in E \setminus S'$, $\Sigma_\varepsilon \setminus \{0\}$ possède N composantes connexes notées $C_{1,\varepsilon}, \dots, C_{N,\varepsilon}$ transverses à \mathcal{F} , paramétrées par Q_ε ,*

(ii) *pour $\varepsilon, \varepsilon' \in E \setminus S'$, les courbes $\hat{C}_{i,\varepsilon} = \pi^{-1}(C_{i,\varepsilon})$ et $\hat{C}_{i,\varepsilon'} = \pi^{-1}(C_{i,\varepsilon'})$ aboutissent dans une même composante du diviseur $D = \pi^{-1}(0)$ en des points non singuliers de $\hat{\mathcal{F}}$.*

Soit $\varepsilon \in E \setminus S'$ fixé et soient $i, j \in \{1, \dots, N\}$ tels que le germe d'application d'holonomie h entre $C_i = C_{i,\varepsilon}$ et $C_j = C_{j,\varepsilon}$ appartient à $\mathcal{H}(\mathcal{F}, 0)$. Supposons pour simplifier les notations que $i = 1$ et $j = 2$. Les composantes D_1 et D_2 du diviseur où aboutissent \hat{C}_1 et \hat{C}_2 sont non dicritiques. Supposons que l'application d'holonomie \hat{h} entre \hat{C}_1 et \hat{C}_2 a un développement formel égal à l'identité. Pour $\varepsilon' \in E \setminus S'$, l'application d'holonomie \hat{h}' entre les courbes $\hat{C}'_1 = \hat{C}_{1,\varepsilon'}$ et $\hat{C}'_2 = \hat{C}_{2,\varepsilon'}$, paramétrées par $Q_{\varepsilon'} \circ \pi$, est égale à

$$\hat{h}_2(\varepsilon, \varepsilon') \circ \hat{h} \circ \hat{h}_1(\varepsilon', \varepsilon)$$

où $\hat{h}_1(\varepsilon', \varepsilon)$ et $\hat{h}_2(\varepsilon, \varepsilon')$ sont respectivement les applications d'holonomie de \hat{C}'_1 à \hat{C}_1 et de \hat{C}_2 à \hat{C}'_2 . Les courbes \hat{C}'_1 et \hat{C}'_2 aboutissant dans les composantes non dicritiques D_1 et D_2 du diviseur, ces applications sont analytiques en 0. Le développement formel de \hat{h} étant égal à l'identité, celui de \hat{h}' coïncide avec celui de l'application analytique $\hat{h}_2(\varepsilon, \varepsilon') \circ \hat{h}_1(\varepsilon', \varepsilon)$. Montrons que pour presque tout $\varepsilon' \in E \setminus S'$ cette application n'est pas l'identité.

Soient \hat{V}_1 et \hat{V}_2 des ouverts connexes, disjoints de $\hat{U} \setminus D$, contenant respectivement un segment de D_1 et un segment de D_2 dans leur adhérence et vérifiant les propriétés suivantes :

(i) toute feuille du feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}_i$, $i = 1, 2$ induit par $\widehat{\mathcal{F}}$ sur \widehat{V}_i coupe \widehat{C}_i en exactement un point,

(ii) la fonction Q_ε prend les mêmes valeurs sur $\widehat{C}_1 \cap \widehat{V}_1$ et sur $\widehat{C}_2 \cap \widehat{V}_2$.

Pour tout entier k suffisamment grand, notons \widehat{F}_k la réunion de la feuille de $\widehat{\mathcal{F}}_1$ passant par le point de \widehat{C}_1 où Q_ε vaut $1/k$ et de la feuille de $\widehat{\mathcal{F}}_2$ passant par le point de \widehat{C}_2 où Q_ε vaut $1/k$. En reprenant un argument de Milnor [Mil1], on montre que pour presque tout $\varepsilon' \in E \setminus S'$, la restriction de $Q_{\varepsilon'}$ à $\pi(\widehat{F}_k)$ est de Morse. Dans ce cas, on a $\widehat{h}_2(\varepsilon, \varepsilon') \circ \widehat{h}_1(\varepsilon', \varepsilon)(1/k) \neq 1/k$ pour tout entier k suffisamment grand. Cette application analytique n'est donc pas l'identité. \square

Preuve du lemme. — Elle repose sur des propriétés des ensembles sous-analytiques (voir [BiMi2] par exemple). Il existe une décomposition de \mathbb{R}^2 en ensembles semi-analytiques E_1, \dots, E_n, \dots tels que pour tout $\varepsilon \in E_n$, le nombre de composantes connexes de $\Sigma_\varepsilon \setminus \{0\}$ soit égal à n . Il existe un entier N tel que E_N soit d'intérieur non vide. En restreignant éventuellement E_N , on obtient un ouvert semi-analytique vérifiant le point (i).

Le point (ii) résulte de la remarque suivante. Il existe un entier k tel que les courbes $C_{i,\varepsilon}$ admettent une paramétrisation de Puiseux de la forme $x = \pm t^k$, $y = \sum_{\ell} c_{\ell}^i(\varepsilon)t^{\ell}$ où les fonctions c_{ℓ}^i sont sous-analytiques. Pour chaque $i = 1, \dots, N$, lorsque ε varie, la famille $C_{i,\varepsilon}$ parcourt un ouvert semi-analytique qui contient l'origine dans son adhérence. Par conséquent, il existe des entiers ℓ_1, \dots, ℓ_N et un ouvert semi-analytique inclus dans E_N en restriction duquel les fonctions $c_{\ell_i}^i$ sont analytiques et sans singularité. Ainsi en éclatant suffisamment, le point (ii) est vérifié. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [BiMi1] E. BIERSTONE, P. MILMAN, The local geometry of analytic mappings, Università di Pisa, ETS Editrice, Pisa, 1988.
- [BiMi2] E. BIERSTONE, P. MILMAN, Semi-analytic and subanalytic sets, Publ. Math. I.H.E.S., 67 (1988), 5–42.
- [Cha1] F. CHAZAL, Un théorème de fibration pour les feuilletages algébriques de codimension 1 de \mathbb{R}^n , C.R. Acad. Sci. Paris, 321, Série I (1995), 327–330.
- [Cha2] F. CHAZAL, Sur les feuilletages algébriques de Rolle, à paraître dans Comment. Math. Helv., 72, 3 (1997), 411–425.
- [Dul] H. DULAC, Sur les cycles limites, Bull. Soc. Math. France, 51 (1923), 45–188.
- [Eca] J. ÉCALLE, Introduction aux fonctions analysables et preuve de la conjecture de Dulac, Hermann, 1992.

- [God] C. GODBILLON, Feuilletages, études géométriques, Progress in Math., 98 (1991).
- [Hae1] A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoides, Thèse, Comment. Math. Helv., 32 (1958), 248–329.
- [Hae2] A. HAEFLIGER, Sur les feuilletages des variétés de dimension n par des feuilles fermées de dimension $n-1$, Colloque de topologie de Strasbourg (juillet 1955).
- [Il'] J.S. IL'JASHENKO, Finiteness theorems for limit cycles, Transl. of Math. Monographs, Amer. Math. Soc., 94 (1991).
- [Kap] W. KAPLAN, Regular curve-families filling the plane, I, Duke Math. J., 7 (1940), 154–155; II, Duke Math. J., 8 (1941), 11–46.
- [Lio] J.-M. LION, Étude des hypersurfaces pfaffiennes, Thèse, Université de Bourgogne, 1991.
- [LiRo] J.-M. LION, J.-P. ROLIN, Homologie des ensembles semi-pfaffiens, Ann. Inst. Fourier, 46-3 (1996), 723–741.
- [Loj] S. ŁOJASIEWICZ, Ensembles semi-analytiques, preprint I.H.E.S. (1965).
- [Mal] B. MALGRANGE, Frobenius avec singularités I : codimension 1, Publ. Math. I.H.E.S., 46 (1976), 163–173.
- [Mil1] J. MILNOR, Morse theory, Princeton University Press, 51 (1963).
- [Mil2] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies, 61, Princeton University Press (1968).
- [Mou] R. MOUSSU, Sur la finitude du nombre de cycles limites, Séminaire Bourbaki, 38^e année, 655 (1985–86).
- [MoRo] R. MOUSSU, C.A. ROCHE, Théorèmes de finitude pour les variétés pfaffiennes, Ann. Inst. Fourier, 42-1 2 (1992), 393–420.
- [Nov] S.P. NOVIKOV, Topology of foliations, Trans. Moscow Math. Soc., (1965), 268–304.
- [Pal] C.F.B. PALMEIRA, Open manifolds foliated by planes, Annals of Math., 107 (1978), 109–131.
- [Ree1] G. REEB, Variétés feuilletées, feuilles voisines, C.R. Acad. Sci. Paris, 224 (1947), 1613–1614.
- [Ree2] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Actualités Scientifiques et Industrielles, 1183, Hermann, Paris, 1952.
- [Sei] A. SEIDENBERG, Reduction of singularities of the differential equation $Ady = Bdx$, Amer. J. Math., 90 (1968), 248–269.
- [Tho] R. THOM, Généralisation de la théorie de Morse aux variétés feuilletées, Ann. Inst. Fourier, 14-1 (1964), 173–190.

Manuscrit reçu le 15 octobre 1997,
révisé le 18 novembre 1997,
accepté le 13 janvier 1998.

Frédéric CHAZAL,
Université de Bourgogne
Laboratoire de Topologie, UMR 5584
UFR des Sciences et Techniques
9 avenue Alain Savary
B.P. 400
21011 Dijon Cedex (France).
fchazal@u-bourgogne.fr