

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

J. EELLS

JOSEPH H. SAMPSON

## Énergie et déformations en géométrie différentielle

*Annales de l'institut Fourier*, tome 14, n° 1 (1964), p. 61-69

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1964\\_\\_14\\_1\\_61\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_1_61_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## ÉNERGIE ET DÉFORMATIONS EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE <sup>(1)</sup>

par James EELLS, Jr. et J. H. SAMPSON  
(Columbia University et Strasbourg.)

---

### 1. Introduction.

De même qu'une fonction réelle définie sur une variété entraîne une décomposition (cf. théorie de Morse) de son domaine (sous certaines hypothèses, bien entendu), une fonctionnelle définie sur un espace d'applications peut donner lieu à une décomposition agréable de celui-ci moyennant certains systèmes différentiels associés à la fonctionnelle. Les méthodes principales sont la théorie des variétés différentiables de dimension infinie et la théorie des semi-groupes dans les espaces hilbertiens. Ici nous voulons donner une brève description de ces méthodes telles qu'elles se présentent dans l'étude de certains problèmes géométriques du calcul des variations sur les variétés riemanniennes. Pour notre formulation nous avons profité de plusieurs conversations avec MM. S. Smale et A. H. Taub.

### 2. Un problème général.

Dans ce paragraphe nous voulons esquisser une formulation du calcul des variations adaptée à une classe très étendue de problèmes qui font intervenir des dérivés d'ordre supérieur d'inconnues dont le domaine est une variété différentiable

<sup>(1)</sup> Ce travail a été financé partiellement par la National Science Foundation (U.S.A.) et l'U.S. Army Research Office (Durham).

donnée. Parmi les problèmes que nous envisageons certains sont obtenus par un procédé d'itération, donc forcément des problèmes d'ordre supérieur. Le langage des espaces fibrés est le plus naturel pour notre formulation.

Soit  $X$  une variété riemannienne compacte. Pour écarter des complications nous la supposons orientée, sans bord, et de classe  $C^\infty$ . Soit  $\xi: V \rightarrow X$  un fibré différentiable sur  $X$  ayant comme fibre une variété différentiable, et notons  $J^k(\xi) \rightarrow \xi$  le fibré des  $k$ -jets de sections de  $\xi$  (on écrira  $\xi$  tantôt pour  $V$ , tantôt pour l'espace fibré tout entier). Par *densité variationnelle d'ordre  $k$  sur  $\xi$*  nous entendons une fonction différentiable  $f: J^k(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ . Une section suffisamment différentiable  $\varphi$  du fibré  $\xi$  détermine d'une façon évidente une section  $\varphi'$  de  $J^k(\xi)$ ; et en appliquant à celle-ci la densité  $f$  on obtient une fonction réelle  $f(\varphi')$  sur la variété  $X$ . L'intégrale de cette fonction, étendue sur  $X$  moyennant sa structure riemannienne, sera notée  $I_f(\varphi)$ .

Donc  $I_f$  peut être considéré comme fonctionnelle sur une classe donnée  $\Gamma$  de sections suffisamment différentiables de  $\xi$ . Le choix de  $\Gamma$  joue un rôle important. Avec un choix convenable et sous des hypothèses raisonnables sur la densité  $f$  (convexité, par exemple), la fonctionnelle  $I_f$  déterminera par ses variétés-niveau une décomposition de son domaine  $\Gamma$ , décomposition cependant beaucoup plus délicate dans le cas des espaces fonctionnels que dans le cas des variétés ordinaires. Il n'est guère besoin d'insister sur sa relation étroite avec la théorie de M. Marston Morse. Les fonctionnelles  $I_f$  que l'on vient de décrire ont une grande importance pour plusieurs problèmes de l'analyse globale et de la géométrie différentielle. Nous en verrons quelques exemples plus loin.

Précisons maintenant les espaces fonctionnels que nous voulons considérer. Pour chaque entier  $k(0 \leq k < \infty)$  notons  $C^k(\xi)$  l'espace des sections de classe  $C^k$  du fibré  $\xi$ , et notons  $H^r(\xi)$  l'espace des sections de  $\xi$  dont les dérivées d'ordre  $\leq r$  (par rapport à un système de cartes sur  $X$ ) sont de carré sommable. On munit ces espaces des topologies évidentes. Si  $r > n/2 + k$ ,  $n$  désignant la dimension de  $X$ , chaque élément de  $H^r(\xi)$  est une section de classe  $C^k$ , et on démontre que l'application canonique  $H^r(\xi) \rightarrow C^k(\xi)$  est continue (lemme de Sobolev; voir [10, Lemme 3.2] ou bien [5]).

On sait le résultat suivant depuis quelque temps; voir [3] pour les idées essentielles :

**THÉORÈME.** — *Pour  $0 \leq k < \infty$  l'espace  $C^k(\xi)$  est une variété différentiable, localement un espace de Banach, de dimension infinie en général. Pour  $n/2 < r < \infty$  l'espace  $H^r(\xi)$  est une variété différentiable et les espaces de vecteurs tangents admettent une structure hilbertienne.*

Comme choix de  $\Gamma$ , les espaces  $H^r(\xi)$  semblent présenter certains avantages sur les  $C^k(\xi)$ . En particulier, nous utilisons l'existence sur  $H^r(\xi)$  d'une structure riemannienne afin de construire le champ  $\nu_f$  d'Euler-Lagrange pour la fonctionnelle  $I_f$ , ce qui nous met à même d'étudier les lignes de plus rapide décroissance de  $I_f$ . Or notre problème général est bien l'étude de ces trajectoires de  $\nu_f$ , c'est-à-dire des applications

$$\Phi : \mathbf{R} \times H^r(\xi) \rightarrow H^r(\xi)$$

satisfaisant à l'équation

$$\partial\Phi/\partial t = \nu_f(\Phi).$$

Il sera surtout question de leur convergence vers des points critiques de  $I_f$  lorsque le paramètre  $t$  tend vers l'infini. Mais il convient de noter que même l'existence et l'unicité des trajectoires voulues présentent de grandes difficultés en général.

La construction du champ  $\nu_f$  peut se faire aussi pour des valeurs de  $r$  inférieures à  $n/2$ , bien que  $H^r(\xi)$  ne soit probablement pas une variété alors. Par exemple, pour  $r = 0$  et  $\xi$  un fibré riemannien, le champ  $\nu_f$  est une application de  $H^0(\xi)$  dans  $H^0(T\xi)$ , où  $T\xi$  est le fibré des vecteurs tangents à  $\xi$ ; et cette application est caractérisée par la formule

$$\langle \nu_f(\varphi), u \rangle = (I_f)_* \varphi u = \nabla_u I_f,$$

où  $\varphi \in H^0(\xi)$ , où  $u$  est un élément de  $H^0(T\xi)$ , et où  $(I_f)_*$  est la différentielle formelle de  $I_f$ .

### 3. Quelques exemples de déformations.

**A. DENSITÉS QUADRATIQUES.** — Si  $\xi : V \rightarrow X$  est un fibré à fibre vectorielle, il en est de même de l'espace  $J^k(\xi)$ , des  $k$ -jets, et  $H^r(\xi)$  est un espace vectoriel admettant une struc-

ture hilbertienne. Dans ce cas on peut considérer les densités variationnelles  $f: J^k(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont quadratiques dans chaque fibre. Le champ  $\nu_f$  d'Euler-Lagrange associé à une telle densité définit à chaque point  $\varphi \in H^r(\xi)$  un opérateur linéaire, discontinu en général.

*Exemple 1.* — Prenons pour  $\xi$  le fibré  $T^{(*)}(X) \rightarrow X$  les formes différentielles extérieures sur  $X$ , et posons

$$f(\varphi) = 1/2 \{ |d\varphi|^2 + |d^*\varphi|^2 \},$$

où  $d^*$  est la codifférentielle pour la structure riemannienne donnée sur  $X$ . Alors  $I_f: H^1(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$  n'est autre que l'intégrale de Dirichlet pour les formes différentielles. Munissant  $H^1(\xi)$  du produit scalaire de  $H^0(\xi)$ , on obtient  $\nu_f(\varphi) = \Delta\varphi$ ,  $\Delta$  désignant l'opérateur de Laplace (au sens de la théorie des distributions). L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Delta \Phi$$

étudiée par Milgram-Rosenbloom [7] fournit un semi-groupe à un paramètre de déformations

$$(\mathbb{R} \geq 0) \times H^r(\xi) \rightarrow H^r(\xi),$$

à partir d'une forme  $\varphi$  donnée.

Mais si  $H^r(\xi)$  est muni du produit scalaire déduit de l'intégrale de Dirichlet, le champ  $\nu_f$  est, à chaque point de  $H^r(\xi)$ , un opérateur *borné*; et l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nu_f(\Phi)$$

définit un groupe à un paramètre de déformations d'une forme  $\varphi$  donnée. Cette théorie fut utilisée par Morrey-Eells [10] dans leur démonstration du théorème de Hodge.

*Exemple 2.* — Chaque opérateur linéaire  $D: C^\infty(\xi) \rightarrow C^\infty(\eta)$  d'ordre  $k$  défini pour des fibrés riemanniens  $\xi$  et  $\eta$  sur  $X$  détermine une densité variationnelle  $f_D$  d'ordre  $k$ ,

$$f_D(\varphi) = 1/2 |D\varphi|_\eta^2;$$

et le champ d'Euler-Lagrange est  $\nu_D(\varphi) = D^*D\varphi$ . On trouve dans Lax-Milgram [6] une étude de ce cas.

B. LE CAS D'UN FIBRÉ PRODUIT. — Ici nous considérons le fibré trivial  $\xi: X \times Y \rightarrow X$ , où  $Y$  est une variété riemannienne, que nous supposons compacte et sans bord. Une section  $\varphi \in H^r(\xi)$  s'identifie alors à un élément  $\varphi \in H^r(X, Y)$ , espace des applications de  $X$  dans  $Y$  munies de dérivées de carré sommable d'ordre  $\leq r$ .

Chaque application différentiable  $\varphi: X \rightarrow Y$  définit un endomorphisme  $\tilde{\varphi}$  de  $TX$ , le fibré des vecteurs tangents à  $X$ . Car la structure riemannienne sur  $X$  est définie par un isomorphisme  $i_X$  de  $TX$  dans le fibré  $T^*X$  des vecteurs cotangents, et de même on a  $i_Y: TY \rightarrow T^*Y$ . D'autre part,  $\varphi$  induit les applications différentielles

$$T\varphi: TX \rightarrow TY \quad \text{et} \quad T'\varphi: T^*Y \rightarrow T^*X.$$

On pose alors  $\tilde{\varphi} = i_X^{-1} \circ T'\varphi \circ i_Y \circ T\varphi$ . La restriction de  $\tilde{\varphi}$  à la fibre de  $TX$  au-dessus d'un point  $x$  de  $X$  est un endomorphisme  $\tilde{\varphi}(x)$  d'un espace vectoriel de dimension  $n$ , donc a  $n$  valeurs propres. Si  $\sigma$  est une fonction symétrique et différentiable de  $n$  variables, on obtient une densité variationnelle  $f_\sigma$  d'ordre 1 en posant  $f_\sigma(\varphi) =$  la  $\sigma$ -fonction des valeurs propres de  $\tilde{\varphi}(x)$ .

*Exemple 1.* — Prenons pour  $\sigma$  la fonction  $\sqrt{\sigma_n}$ , où  $\sigma_n$  est la  $n$ -ième fonction symétrique élémentaire. Les points critiques de la fonctionnelle  $I_\sigma$  qui en résulte sont les soi-disant « sous-variétés minimales », bien que celles-ci ne soient ni variétés ni minimales en général.

Désormais nous nous bornerons au cas  $\sigma = 1/2\sigma_1$ , où  $\sigma_1$  désigne la première fonction symétriques élémentaire. La densité  $f_\sigma$  qui lui correspond peut s'écrire sous la forme locale

$$f_\sigma(\varphi) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \varphi_i^\alpha \varphi_j^\beta h_{\alpha\beta},$$

où  $g$  (resp.  $h$ ) est la métrique sur  $X$  (resp. sur  $Y$ ). L'intégrale de  $f_\sigma(\varphi)$  considéré comme fonction sur  $X$  sera notée simplement  $E(\varphi)$ . Donc  $E$  est une application  $E: H^1(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ . C'est la fonctionnelle d'énergie; elle est très importante en géométrie différentielle. Ses points critiques sont les applications  $X \rightarrow Y$  dites *harmoniques*. Ces applications sont pré-

cisément les zéros de l'opérateur non linéaire elliptique du deuxième ordre

$$\nu(\varphi)^\gamma = \Delta\varphi^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(Y) \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j} g^{ij} \quad (1 \leq \gamma \leq m),$$

où les  $x^i$  (resp. les  $\varphi^\alpha$ ) sont des coordonnées locales sur  $X$  (resp. sur  $Y$ ), où  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $X$ , et où les  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(Y)$  sont les symboles de Christoffel de  $Y$ ,  $m$  étant la dimension de  $Y$ .

Pour  $H^1(X, Y)$  muni de la structure métrique de  $H^0$ , les solutions de l'opérateur non linéaire de la chaleur

$$(1) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \nu_\sigma(\varphi)$$

sont les analogues des lignes de plus rapide décroissance.

Nous avons utilisé la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur  $X$  pour démontrer [12] que l'équation (1) a une solution unique pour un certain intervalle de temps se réduisant à une application donnée de classe  $C^1$  pour  $t = 0$ .

Certaines majorations des dérivées d'une solution éventuelle de (1), obtenues par une méthode géométrique due à Bochner dans un autre contexte, nous permirent d'établir le

**THÉORÈME.** — Soient  $X$  et  $Y$  des variétés riemanniennes fermées, et supposons que la courbure riemannienne de  $Y$  soit non positive. Alors il existe dans chaque classe d'homotopie d'applications  $\Phi: X \rightarrow Y$  une représentante harmonique qui est un point de minimum absolu pour l'énergie  $E$ .

*Exemple 2.* — Dans le cas d'une variété  $X$  de dimension 1 (l'intervalle fermé ou le cercle), on sait que l'énergie

$$E: H^1(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction différentiable qui détermine une bonne décomposition de l'espace  $H^1(X, Y)$ , dont on obtient les estimations de Morse des nombres de Betti de l'espace des lacets de  $Y$ . On en trouve un exposé élégant dans Palais [11].

Le théorème énoncé ci-dessus peut être établi dans le cadre de la théorie de la fonction différentiable  $E$  sur la variété

$H^r(X, Y)$ , pour  $r > n/2$  ( $n$  étant toujours la dimension de  $X$ ). Mais il convient de signaler qu'à défaut de la condition requise sur la courbure de  $Y$ , la fonction  $E$  peut ne pas donner une bonne théorie de Morse. Par exemple, si nous prenons

$$X = Y = S_n,$$

la sphère euclidienne ( $n \geq 3$ ), alors  $E$  n'a aucun point de valeur minimum sur les composantes de  $H^r(S_n, S_n)$  des applications de degré  $\neq 0$ . En effet, on peut trouver une famille à un paramètre  $\Psi_t: S_n \rightarrow S_n$  d'applications  $C^\infty$  et de degré un telle que  $\lim E(\Psi_t) = 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ). Mais bien entendu il n'existe pas d'application de degré un dont l'énergie s'annule.

C. ÉNERGIES D'ORDRE SUPÉRIEUR. — S. Smale et R. Palais ont étudié le principe de Dirichlet dans l'espace euclidien à  $n$  dimensions; S. Smale a pu démontrer l'existence d'un extremum pour une classe de fonctionnelles quadratiques du  $k^{\text{ième}}$  ordre, avec  $k > n/2$ . Ce résultat souligne l'importance d'une étude de ce que nous appellerons *énergie du  $k^{\text{ième}}$  ordre*  $E^{(k)}$ . Donc si  $T^k X = T(T^{k-1} X)$  est l'espace fibré itéré de vecteurs tangents, chaque application  $\varphi: X \rightarrow Y$  de classe  $C^k$  induit sa  $k^{\text{ième}}$  différentielle  $T^k \varphi: T^k X \rightarrow T^k Y$ , et l'on peut s'en servir, comme nous l'avons fait dans le cas  $k = 1$ , pour définir une énergie  $E^{(k)}(\varphi)$ . Le laplacien itéré apparaît comme partie principale du champ d'Euler-Lagrange associé à  $E^{(k)}$ .

Il y a lieu de croire que des méthodes analogues à celles qui nous servent dans la démonstration du théorème cité au n° 3B permettront une généralisation de ce théorème pour les  $E^{(k)}$ , sans hypothèse sur la courbure de  $Y$  si  $k$  est suffisamment grand. Et l'on peut espérer trouver une théorie de Morse pour  $E^{(k)}: H^k(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k > n/2$ ).

D. QUELQUES REMARQUES. — La notion de  $\sigma$ -énergie peut être appliquée à d'autres situations. Par exemple, si  $\rho(g) = (R_{ij}(g))$  est le tenseur de Ricci de la métrique  $g$  sur  $X$ , alors  $\sigma_1(\rho(g)) = g^{ij} R_{ij} = R$ , la courbure scalaire. Son intégrale est la courbure totale de  $X$ , considérée comme fonction de  $g$ ; notons-la  $T(g)$ . Hilbert a montré [4] que ses extrema satisfont à l'équation

$$R^{ij} - g^{ij} R/2 = 0.$$



Voir aussi Taub [3]1, où est décrite une méthode par laquelle on peut normaliser la fonctionnelle  $T(g)$  afin d'obtenir pour ses extrema les métriques dites d'Einstein :  $R^j - g^j R/n = 0$ .

Nous ne connaissons pas de conditions raisonnables sur  $X$  qui garantissent l'existence d'un extremum de  $T$ . Pourtant la nature des estimations figurant dans la démonstration du théorème du n° 3 suggère l'existence d'une déformation de  $g$  dans une métrique d'Einstein sur  $X$  si  $g$  est à courbure riemannienne *strictement positive*. (Cf. Berger [1]).

Pour la validité de cette assertion il est clair que certaines restrictions topologiques sont nécessaires. Par exemple,  $S^1 \times S^2$  et  $(S^1 \times S^3) \# (S^1 \times S^3)$  (somme connexe) n'admettent pas de métrique d'Einstein.

Remarquons, pour terminer, que la conjecture de Poincaré dit que  $T$  (normalisé convenablement) a un extremum si  $X$  est simplement connexe et de dimension 3.

Pour d'autres problèmes relatifs à la déformation de métriques, voir Calabi [2] et Yamabe [14].

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BERGER, Les sphères parmi les variétés d'Einstein, *C.R.* 254 (1962), 1564-1566.
- [2] E. CALABI, The space of Kahler metrics, *Proc. Inter. Congress. Math.*, 1954.
- [3] J. EELLS, On the geometry of function spaces, *Symp. Inter. de Top., Alg.* (1958), 303-308.
- [4] D. HILBERT, Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung), *Nachr. Ges. Wiss. Gött.*, (1915), 395-407.
- [5] J. L. LIONS, Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, Springer, 1961.
- [6] P. LAX and J. A. MILGRAM, Parabolic equations and semigroup, *Annals of Math. Studies*, 33.
- [7] A. MILGRAM and P. C. ROSENBLOOM, Heat conduction on Riemannian manifolds I, *Proc. N.A.S.*, 37 (1951).
- [8] C. B. MORREY, The problem of Plateau on a Riemannian manifold, *Annals of Math.* 49 (1948), 801-851.
- [9] C. B. MORREY, Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics, *Ann. Scuola Nor. Sup. Pisa*, (1960), 1-61.
- [10] C. B. MORREY et J. EELLS, A variational method in the theory of harmonic integrals I, *Annals of Math.* 63 (1956), 91-128.
- [11] R. S. PALAIS, Lectures on Morse theory; *Mimeo. Notes. Brandeis Univ.*, 1963.

- [12] J. EELLS et J. H. SAMPSON, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Am. Journ. of Math.* (à paraître).
  - [13] A. H. TAUB, Conversation laws and variational principles in general relativity, *Notes of a lecture at the Summer Symp. in Diff. Geometry*, Santa Barbara, (1962).
  - [14] H. YAMABE, On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Osaka Math. J.*, 12 (1960), 21-37.
-