ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GAËL MEIGNIEZ

Prolongement des homotopies, Q-variétés et cycles tangents

Annales de l'institut Fourier, tome 47, nº 3 (1997), p. 945-965

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1997__47_3_945_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
47, 3 (1997), 945–965

PROLONGEMENT DES HOMOTOPIES Q-VARIÉTÉS & CYCLES TANGENTS

par Gaël MEIGNIEZ

L'étude des espaces fibrés reposant sur le relèvement des homotopies, il est naturel de demander dans quelle mesure les variétés feuilletées jouissent d'une propriété analogue. C'était le sujet de la thèse de C. Godbillon [Go1]. Sa définition du *prolongement des homotopies* évite de faire intervenir l'espace des feuilles, dont la topologie est souvent tératologique :

Soit $(V, \mathcal{F})$ une variété paracompacte feuilletée, de classe C^0. Toute application est réputée continue. On dit que $f, g : X \to V$ sont équivalentes quand $f(x)$ est sur la même feuille que $g(x)$ pour tout x. Une homotopie de f est une application $F : X \times [0,1] \to V$ telle que $F(x, 0) = f(x)$ pour tout x. Il y a prolongement des homotopies si quels que soient le polytope X et le couple d'applications équivalentes $f, g : X \to V$, chaque homotopie de f est équivalente à une homotopie de g.

La liste des conditions nécessaires ou suffisantes connues jusqu'ici fera mieux sentir la propriété de prolongement des homotopies.

On remarque de fortes conditions nécessaires [Go1] : les feuilles doivent avoir toutes le même type d'homotopie; et ne peuvent avoir d'holonomie.

En particulier, si un feuilletage prolonge les homotopies et qu'il ait une feuille compacte, alors toutes sont compactes et sans holonomie; donc la variété feuilletée n'est qu'un espace fibré — théorème de stabilité de Reeb.

Mots-clés : Fibration – Prolongement des homotopies – Q-variété – Cycle évanouissant – Cycle apparent – Groupoïde d'holonomie – Piège.
Classification math. : 57R30

Quant aux conditions suffisantes, on sait que la propriété de prolongement des homotopies est vérifiée par tous les feuilletages du plan [Go1] ; par la suspension des actions de groupe sans point fixe [Go1] — ainsi le prolongement des homotopies n'est pas incompatible avec un minimal exceptionnel ; par les feuilletages de codimension 1 sans holonomie des variétés compactes [Sa] ; et par les feuilletages de Lie des variétés compactes [F]. Enfin tout flot géodésible sans orbite compacte prolonge les homotopies [H].

Cet article a trois objets. Le premier est d'*analyser* cette propriété, en la ramenant à une condition transverse, la condition Q de R. Barre, et deux conditions tangentielles : trivialité des cycles évanouissants et des cycles apparents. Nous ne ferons en fait qu'adapter au cadre des feuilletages le critère de relèvement des homotopies de [Me].

De ces trois conditions, la plus délicate à appréhender est la première. On sait qu'un Q-feuilletage est sans holonomie — et même sans holonomie transversale au sens de Godbillon. Notre deuxième objet est d'étudier la réciproque. Il est connu qu'elle n'est pas vraie en général, au moins sur les variétés ouvertes. Nous établirons que cette réciproque est vraie pour les feuilletages riemanniens, et pour les feuilletages géodésibles, mais non pour les feuilletages minimalisables, même lisses, même sur les variétés compactes.

Notre troisième objet est l'étude d'exemples. On sait qu'en insérant, dans des flots (feuilletages de dimension 1), les pièges apériodiques qu'ont construit à cet effet Wilson, Schweitzer, Kuperberg, on obtient des flots sans feuille compacte. Les feuilles étant contractiles, cycles évanouissants et cycles apparents sont conséquemment triviaux, si bien que le prolongement des homotopies équivaut pour ces flots à la propriété Q. Nous verrons qu'ils la vérifient ou non, suivant la géométrie du minimal contenu dans le piège et le lieu de l'insertion.

Je remercie R. Barre, J. Pradines et l'arbitre de cet article : leurs remarques ont contribué à en améliorer la présentation.

1. LA PROPRIÉTÉ Q

1.1. Définitions variées de cette propriété.

PROPOSITION 1 et DÉFINITION. — *Les propriétés* a, b, c, d, e *ci-après sont équivalentes (condition Q, ou Q-feuilletage).*

a) Prolongement des germes d'homotopie — Disons que deux homotopies $F : X \times [0,1] \to V$, $G : X \times [0,1] \to V$ ont même germe, quand $F = G$ sur un voisinage de $X \times \{0\}$. Le germe de F équivaut au germe de G si $F(x,t)$ est sur la même feuille que $G(x,t)$ pour tout t assez voisin de zéro et pour tout x.

La propriété *a*) est : quels que soient X, polytope, et $f, g : X \to V$, applications équivalentes, chaque germe d'homotopie de f est équivalent à un germe d'homotopie de g.

b) Prolongement des germes d'extensions — Quels que soient la paire de polytopes (X, Y) et les applications équivalentes f, $g : Y \to V$, chaque germe d'extension de f (on entend par là le germe au voisinage de Y d'une application $F : X \to V$ prolongeant f) est équivalent à un germe d'extension de g.

c) Existence de tubes locaux — On convient qu'une application à valeurs dans V est tangente si son image est contenue dans une feuille; et qu'une application définie sur un produit, $h : A \times B \to V$, est feuilletée si l'application $A \to V : a \mapsto h(a,b)$ est tangente quel que soit b.

La propriété *c*) est que pour chaque polytope pointé (X, x_0), chaque paire $f, g : X \to V$ d'applications équivalentes, et chaque chemin $c : ([0,1], 0, 1) \to (V, f(x_0), g(x_0))$ tangent, il existe un voisinage Y de x_0 dans X et une application feuilletée $h : [0,1] \times Y \to V$ telle que $h(0,y) = f(y)$, $h(1,y) = g(y)$ et $h(t, x_0) = c(t)$.

d) Quasi-plongement du groupoïde d'holonomie dans $V \times V$ — Considérons le groupoïde d'holonomie H (espace des chemins tangents, regardant deux d'entre eux comme égaux s'ils ont même origine, même extrémité et même holonomie), sa structure naturelle de variété (non séparée en général), et les submersions canoniques $\alpha, \beta : H \to V$. Voici la propriété *d*) :

L'immersion $\alpha \times \beta : H \to V \times V$ doit être injective, c'est-à-dire que le feuilletage doit être sans holonomie; de plus $\alpha \times \beta$ doit être un quasi-plongement en ce sens que, pour toute application (ensembliste)

$f : X \to H$, dont la source X est un polytope, f est continue si et seulement si $\alpha \circ f$ et $\beta \circ f$ le sont.

e) Quasi-ouverture de la diagonale — Quels que soient le polytope X et le couple $f, g : X \to V$ d'applications équivalentes à valeurs dans une même 'transversale' (boule ouverte de dimension égale à la codimension du feuilletage, plongée dans V transversalement à celui-ci), l'ensemble des x tels que $f(x) = g(x)$ est ouvert dans X.

C'est la définition originelle de [Ba], traduite en classe C^0.

f) Absence de pseudo-holonomie — Pour chaque couple $c, c' : [0,1] \to V$ de chemins équivalents à valeurs dans une même transversale, s'ils ont même origine $c(0) = c'(0)$, alors ils ont même germe en 0.

Plus précisément, étant donnée une feuille L, on fixe une transversale T la coupant, et on dira que L a de la pseudo-holonomie s'il existe dans T deux germes de chemins c, c' différents, équivalents et ayant même origine $c(0) = c'(0) \in L$. Bien sûr, cela ne dépend pas du choix de T.

g) Absence de pseudo-holonomie (variante) — Pour chaque couple $c, c' : [0,1] \to V$ de chemins équivalents à valeurs dans une même transversale, s'ils ont même origine $c(0) = c'(0)$, alors $c = c'$.

Nous verrons que les conditions (f), (g) sont les plus pratiques pour tester *concrètement* la propriété Q.

Démonstration de la proposition 1. — On se convainc aisément que (a) implique (b), qui implique (c), qui implique (d), qui implique (e), dont (f) n'est qu'un cas particulier, et que (f) implique (g).

L'équivalence de (d) avec (e) est déjà connue [P].

Montrons que (g) implique (a), par récurrence sur la dimension p de X.

Soient $f, g : X \to V$ deux applications équivalentes, et $F : X \times [0, \epsilon] \to V$ un germe d'homotopie de f. Pour chaque point x de X, on choisit un ouvert distingué Ω_x qui contient $f(x)$ et $g(x)$ dans une même plaque. Soit U_x la composante connexe de $f^{-1}(\Omega_x) \cap g^{-1}(\Omega_x)$ qui contient x. La propriété (g) peut être paraphrasée ainsi : soient $u, v : [0,1] \to \Omega_x$ deux chemins. S'ils sont équivalents et si $u(0)$ et $v(0)$ sont sur la même plaque, alors $u(t)$ et $v(t)$ sont sur la même plaque pour chaque t. Il en résulte que $f(y)$ et $g(y)$ appartiennent à la même plaque, pour chaque point y de U_x. Quitte à subdiviser X, chaque cellule est contenue dans un U_x.

En appliquant l'hypothèse de récurrence au $(p-1)$-squelette, on se ramène au cas où X est réduit à une seule cellule et où l'on a déjà un germe d'homotopie G de $g|_{\partial X}$ équivalent à $F|_{\partial X \times [0,\epsilon']}$. Il faut prolonger G en un germe d'homotopie de g, équivalent à F. Or c'est trivial, parce que $f(X)$ et $g(X)$ sont contenus dans un même ouvert distingué, et que $f(x)$ et $g(x)$ appartiennent à la même plaque pour chaque x. □

1.2. Caractère transverse ; fonctorialité.

Il est immédiat que les propriétés d'existence de tubes locaux, de quasi-ouverture de la diagonale, d'absence de pseudo-holonomie sont transverses au sens de Haefliger, c'est-à-dire appartiennent au pseudo-groupe d'holonomie.

De plus, si $(V, \mathcal{F})$ est un Q-feuilletage, W une variété, et $f : W \to V$ une application transverse à $\mathcal{F}$, alors (W, f^*F) est aussi un Q-feuilletage — en effet, de toute évidence, l'absence de pseudo-holonomie se transmet. En particulier, l'image inverse de $\mathcal{F}$ dans tout revêtement de V a la propriété Q.

1.3. Cas errant.

Rappelons qu'une feuille est errante si elle rencontre une transversale qui ne rencontre chaque feuille qu'au plus une fois ; et qu'un feuilletage est errant — certains auteurs disent : régulier — si chaque feuille l'est. En d'autres termes, l'espace des feuilles est une variété topologique, sans toutefois être nécessairement séparé, et la projection canonique de V sur $V/\mathcal{F}$ est une submersion topologique.

LEMME 2. — *Tout feuilletage errant a la propriété Q.*

Démonstration. — Il y a évidemment quasi-ouverture de la diagonale. □

1.4. Propriété Q et groupe d'holonomie transversale.

Les formes (e), (f), (g) montrent immédiatement qu'un Q-feuilletage est nécessairement sans holonomie, et même sans *holonomie transversale* [Go2]. Rappelons que Godbillon associe à chaque feuille L un groupe d'holonomie transversale H_L comme suit : soit T une transversale rencontrant L en un point x. On définit H_L comme l'ensemble des germes de difféomorphismes ϕ de la variété T au point x tels que pour chaque

$y \in T$ assez voisin de x, son image $\phi(y)$ appartient à la même feuille que y. C'est évidemment un groupe qui contient le groupe d'holonomie usuel (d'Ehresmann) comme sous-groupe. Si la diagonale est quasi-ouverte, alors H_L est nul quelle que soit L.

On va dans la suite de ce paragraphe discuter la réciproque.

1.5. Le flot de Pradines.

Un exemple élémentaire montre que la propriété Q est *strictement* plus forte que l'absence d'holonomie transversale [P] :

Soit $(S^3, \mathcal{F})$ la suspension de

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (a, b) \mapsto (2a, 2b).$$

Donc S^3 fibre sur le cercle, avec fibre $\mathbb{R}^2$, et pour groupe structurel le groupe des homothéties. Soient F une fibre, $D \subset F$ la droite $b = 0$, et $V = S^3 \setminus D$.

Le flot $\mathcal{F}|_V$ a de la pseudo-holonomie : choisissons dans une autre fibre F' un point p hors de la droite $b = 0$. Soient $c(t) = tp$, $c'(t) = 2tp$. Ces chemins sont bien équivalents et à valeurs dans une même transversale, et ne coïncident qu'en $t = 0$.

Mais $\mathcal{F}|_V$ est sans holonomie transversale. En effet, seule l'orbite $a = b = 0$ est non errante. Soit ϕ un germe de difféomorphisme de F' au point 0, tel que pour tout $q \in F'$ dans un voisinage connexe de 0, $\phi(q)$ est sur la même feuille que q. Donc $\phi(q)$ est de la forme $2^n q$. Par continuité de ϕ, l'entier n est indépendant de q. Soit q_0 un point de la droite $y = 0$ proche mais distinct de 0. Comme q_0 et $2^n q_0$ sont sur la même feuille, $n = 0$.

Cet exemple ne laisse rien à désirer, sauf la compacité de la variété : on peut se demander si sur les variétés compactes, tout feuilletage sans holonomie transversale, ou même plus généralement sans holonomie, a la propriété Q. La réponse est négative, comme nous le verrons au §3, et même pour les feuilletages C^∞, et même analytiques réels.

Il est donc naturel de soulever la même question pour des feuilletages ayant en plus des propriétés, tangentielles ou transversales, s'apparentant à de la rigidité : géodésibles, minimalisables, riemanniens, transversalement homogènes, holomorphes.

Dans le cadre holomorphe, nous ne savons rien.

1.6. Cas transversalement homogène et cas riemannien.

Un feuilletage est *développable* sur un espace topologique X s'il existe un homomorphisme ρ de $\pi_1 V$ sur un groupe Γ d'homéomorphismes de X («groupe d'holonomie») et une submersion D («application développante») de $\tilde{V}$ (revêtement universel de V) sur X, équivariante au sens où $D(\alpha x) = \rho(\alpha)D(x)$, telle que les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ (image inverse de $\mathcal{F}$ dans $\tilde{V}$) soient les composantes connexes des fibres de D.

Les feuilletages transversalement homogènes en sont des exemples : X est dans ce cas une variété homogène sous un groupe de Lie réel simplement connexe, dont Γ est un sous-groupe. Par exemple le flot de Pradines est transversalement homogène; $X = \mathbb{R}^2$, G est le groupe des homothéties-translations, et Γ est le groupe des homothéties du plan de rapport 2^n.

Un groupe opérant sur un ensemble est *sans point fixe* si tout élément qui fixe un point, fixe tous les points.

PROPOSITION 3. — *Supposons $\mathcal{F}$ développable sur un espace topologique* séparé. *Si le groupe d'holonomie est sans point fixe, alors $\mathcal{F}$ vérifie la condition Q.*

Démonstration de la proposition. — A deux chemins c, c' comme dans la proposition 1, e) correspondent, par relèvement dans $\tilde{V}$ et projection sur X, deux chemins u, u' dans X tels que $u(0) = u'(0)$ et, pour chaque t, $u(t)$ et $u'(t)$ appartiennent à la même orbite sous Γ. Comme dans ([Go1], théorème 3) on remarque que les ensembles $I_\gamma = \{t / \gamma(c(t)) = c'(t)\}$ forment une partition (parce que l'action est sans point fixe) fermée (parce que X est séparé) et dénombrable de l'intervalle. Une telle partition est nécessairement triviale, au sens où tous ces fermés sont vides sauf un, I_{γ_0}, qui est l'intervalle entier (théorème de Baire). En particulier γ_0 fixe le point $u(0)$: c'est donc l'identité de X, ce qui entraîne $u = u'$ et donc $c = c'$. □

Il est un peu frustrant que l'hypothèse de cette proposition porte sur les points fixes de Γ, plutôt que sur l'holonomie des feuilles de $\mathcal{F}$.

Question. Supposons $\mathcal{F}$ porté par une variété compacte, et transversalement homogène. Y a-t-il des équivalence parmi ces quatre propriétés : Γ est sans point fixe; Q; les feuilles de $\mathcal{F}$ sont sans holonomie transversale; les feuilles de $\mathcal{F}$ sont sans holonomie?

Elles sont évidemment équivalentes si l'on suppose de plus $\mathcal{F}$ "complet", au sens où les fibres de l'application développante sont connexes. Donc, à défaut de mieux :

Corollaire 4. — *Si $\mathcal{F}$ est développable sur un espace séparé, "complet" et sans holonomie alors il a la propriété Q.*

Au contraire du cadre transversalement homogène, dans le cadre riemannien on a un résultat satisfaisant :

Corollaire 5. — *Sur une variété compacte, tout feuilletage riemannien sans holonomie a la propriété Q.*

Démonstration. — Commençons par le cas parallélisable : alors il y a une fibration $p : V \to B$ telle que chaque fibre est réunion de feuilles, qui forment un feuilletage de Lie de la fibre (théorème de structure de Molino : [Mo].) Quel que soit l'ouvert contractile $U \subset B$, le feuilletage $\mathcal{F}|_{p^{-1}(U)}$ est développable sur une variété X fibrée en groupes de Lie au-dessus de U. Les fibres de l'application développante sont connexes. Comme $\mathcal{F}|_{p^{-1}(U)}$ est complet et sans holonomie, il vérifie la condition Q (corollaire 4). Comme les ouverts $p^{-1}(U)$ sont saturés et recouvrent V, il est clair au vu des formes (d), (e) de la proposition 1 que $\mathcal{F}$ est également un Q-feuilletage.

Dans le cas général, soit $\bar{V} \to V$ le fibré des repères orthonormés transverses à $\mathcal{F}$. Le feuilletage $\bar{\mathcal{F}}$, relevé de $\mathcal{F}$ dans $\bar{V}$, est transversalement parallélisable, donc un Q-feuilletage. $\mathcal{F}$ n'a pas d'holonomie, ce qui se traduit ainsi : chaque feuille de $\bar{\mathcal{F}}$ se projette homéomorphiquement sur une feuille de $\mathcal{F}$. On vérifie facilement que la condition Q descend de $\bar{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{F}$. □

1.7. Cas géodésible.

Voici d'abord une caractérisation métrique de la propriété Q. Supposez V, $\mathcal{F}$ de classe C^1 ; et munissez V d'une métrique riemannienne complète auxilliaire quelconque. La *distance tangentielle* entre deux points d'une même feuille est la borne inférieure des longueurs des chemins joignant ces points dans cette feuille.

Remarque essentielle. — Si f, $g : X \to V$ sont définies sur un même polytope X et équivalentes, alors il résulte du théorème d'Ascoli que la distance tangentielle de $f(x)$ à $g(x)$, considérée comme une application de X dans $[0, +\infty[$, est *de graphe fermé*, donc continue sur un ouvert dense, et tendant vers $+\infty$ aux bornes de cet ouvert.

Proposition 6. — *Un feuilletage de classe C^1 est un Q-feuilletage si et seulement si : d'une part, il est sans holonomie ; et de plus, pour chaque couple de chemins équivalents c, $c' : [0,1] \to V$, la distance tangentielle de $c(t)$ à $c'(t)$ est bornée.*

Démonstration. — Les conditions sont nécessaires : l'absence de pseudo-holonomie implique évidemment l'absence d'holonomie; et il existe des tubes locaux joignant c à c', c'est-à-dire des applications feuilletées du type $h : I\times]t_1, t_2[\to V$ avec $h(0,t) = c(t)$ et $h(1,t) = c'(t)$. Un tel tube $h(s,t)$ peut évidemment être perturbé en un autre qui admette une dérivée partielle $\partial h/\partial s$ continue par rapport à s et t. Donc la distance tangentielle de $c(t)$ à $c'(t)$ est localement bornée, donc bornée.

Réciproquement, si la condition de distance bornée est vérifiée mais pas la propriété Q, alors soient c, c' deux chemins équivalents contenus dans une même transversale et ayant même origine $c(0) = c'(0)$ mais n'ayant pas même germe : il y a une suite $t_n \to 0$ pour laquelle $c(t_n) \neq c'(t_n)$. Pour chaque n, on considère un chemin tangent de longueur minimale joignant $c(t_n)$ à $c'(t_n)$. Par le théorème d'Ascoli, quitte à extraire une sous-suite, ces chemins tendent vers un lacet tangent dont l'holonomie transforme évidemment, pour n assez grand, $c(t_n)$ en $c'(t_n)$, donc $\mathcal{F}$ a de l'holonomie. □

Voici trois variantes évidentes de cette caractérisation : on peut remplacer l'intervalle compact par tous les polytopes; on peut également changer 'bornée' en 'continue', puisque ces propriétés sont équivalentes pour une fonction de graphe fermé définie sur un compact; on peut enfin, plutôt que les chemins eux-mêmes, considérer leur germe au point $t = 0$.

COROLLAIRE 7. — *Tout feuilletage géodésible et sans holonomie, a la propriété Q.*

La géodésibilité signifie que V, $\mathcal{F}$ sont de classe C^2, et que V possède une métrique riemannienne complète telle que les feuilles de $\mathcal{F}$ sont totalement géodésiques.

Démonstration (cette preuve généralise directement celle de [H]). — Soient deux chemins équivalents c, c' ; notons $\ell(t)$ la distance tangentielle de $c(t)$ à $c'(t)$. Pour montrer qu'elle est bornée au voisinage de $t = 0$, on peut supposer c, c' orthogonaux au feuilletage, quitte à les restreindre à un voisinage de 0 et à leur appliquer de petites homotopies tangentes à $\mathcal{F}$. Or $\ell(t)$ est réalisée par un segment géodésique tangent γ_t, qui bien sûr n'a nulle raison de dépendre continûment de t. Parce que c, c' sont orthogonaux à γ_t, la formule de la variation première exprime que si γ_s, γ_t sont assez proches l'un de l'autre (dans l'espace des segments géodésiques), alors ils ont même longueur. Donc l'ensemble image $\ell([0,1]) \subset [0,+\infty[$ est discret. Or la fonction ℓ est de graphe fermé. Donc elle est constante, donc bornée. □

La réciproque est fausse : le flot horocyclique sur le fibré unitaire tangent à une surface fermée de courbure -1 n'est pas géodésible [Su] ; cependant nous verrons ci-dessous qu'il a la propriété Q.

1.8. Cas minimalisable.

Le paragraphe précédent incite à demander si les feuilletages minimalisables sans holonomie n'auraient pas, quelle que soit la dimension des feuilles, la propriété Q. Le contre-exemple que voici détruit tout espoir.

Soient S une surface fermée hyperbolique et $\Gamma = \pi_1 S \subset G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Choisissons $g \in G$ tel que $\Gamma \cap g\Gamma g^{-1} = 1$ (c'est le cas générique). Donc Γ opère librement sur $M = G/g\Gamma g^{-1}$. Soit par ailleurs une action de Γ sur le cercle $\mathbf{S}^1$ sans mesure invariante (de nouveau, le cas générique). Il en résulte une action de Γ sur $M \times \mathbf{S}^1$ libre et sans mesure invariante (s'il y avait une mesure Γ-invariante sur $M \times \mathbf{S}^1$, son image par la seconde projection serait une mesure Γ-invariante sur $\mathbf{S}^1$). Par suspension de cette action on obtient une variété feuilletée $(V^6, \mathcal{F})$ (de dimension 2 et codimension 4) sans holonomie ni mesure transverse invariante. Bien sûr, $\mathcal{F}$ a la propriété Q.

Soit par ailleurs $(V', \mathcal{F}')$ un flot sans holonomie et qui n'a pas la propriété Q, voir le §3. La variété feuilletée produit $(V'' = V \times V', \mathcal{F}'' = \mathcal{F} \times \mathcal{F}')$ n'a pas d'holonomie (puisque ni $\mathcal{F}$ ni $\mathcal{F}'$ n'en ont), ni de mesure transverse invariante (puisque $\mathcal{F}$ n'en a pas), ni la propriété Q (comme $\mathcal{F}'$ a de la pseudo-holonomie, $\mathcal{F}''$ en a évidemment aussi). Comme $\mathcal{F}''$ n'a pas de mesure transverse invariante, il est minimalisable [Su].

Notez que V'' est compacte et que toutes les feuilles sont difféomorphes à $\mathbb{R}^3$. Si de plus l'on a pris soin que $\mathcal{F}$ soit C^∞ et sans holonomie transversale (au sens de Godbillon), comme aux §3.1 et 3.3, alors il en est de même de $\mathcal{F}''$. Si l'on a pris soin que $\mathcal{F}$ soit C^ω, comme au §3.2, alors il en est de même de $\mathcal{F}''$.

2. PROLONGEMENT DES HOMOTOPIES

2.1. Cycles tangents.

Nous sommes convenus plus haut qu'une application $f : X \times Y \to V$ est *feuilletée* si pour chaque point y de Y, l'image de l'application $f_y : x \mapsto f(x, y)$ est contenue dans une feuille.

Un *q-cycle évanouissant* est une application feuilletée $f : \mathbf{S}^q \times [0, 1] \to V$ (où $\mathbf{S}^q$ désigne la sphère de dimension $q \geqslant 0$) telle que pour chaque

$t > 0$ l'application f_t est homotopiquement nulle dans sa feuille. Le cycle est *trivial* si f_0 aussi est homotopiquement nulle dans sa feuille.

Un *q-cycle apparent* est une application feuilletée $f : \mathbf{S}^q \times]0,1] \to V$ telle que $f(*,t)$ (ici $*$ est un point-base sur la sphère) a une limite quand $t \to 0$. Le cycle est *trivial* s'il existe une application feuilletée $g : \mathbf{S}^q \times [0,\epsilon] \to V$ avec $0 < \epsilon \leqslant 1$, telle que pour tout $0 < t \leqslant \epsilon$: on a $g(*,t) = f(*,t)$, et g_t est homotope à f_t, relativement au point $g(*,t)$, dans la feuille qui les contient.

Exemples. — 1. Il est bien connu que la feuille torique qui borde la composante de Reeb $\mathcal{R}$ contient un 1-cycle évanouissant non trivial.

2. Il y a un 1-cycle *apparent* non trivial f_t dans la feuille torique qui borde la *composante de Reeb avec genre* $\mathcal{R}'$, que l'on peut décrire ainsi :

Soit S la surface compacte orientable de genre 1 et de bord $\mathbf{S}^1$. On feuillette $S \times \mathbf{S}^1$ par la 1-forme fermée $\phi^2 ds + d\phi$ où ds désigne la forme-volume standard sur $\mathbf{S}^1$ et où $\phi : S \to \mathbb{R}$ est différentiable, $\phi^{-1}(0) = \partial S$ et $d\phi$ est non nulle en chaque point de ∂S. En d'autres termes $\partial S \times \mathbf{S}^1$ est une feuille ; et les autres feuilles sont le graphe de $1/\phi$ et ses translatés.

Choisissons un lacet $u : \mathbf{S}^1 = [0,1]/(0=1) \to S$ qui ne soit pas trivial dans $\pi_1(S, \partial S)$ et tel que $u^{-1}(\partial S) = \{0,1\}$ et que $u(\tau) = u(1-\tau)$ pour tout $\tau \in [0,1/3]$. Soit pour chaque $t \in]0,1]$ l'application continue $g_t : [0,1] \to [t/3, 1-t/3]$ qui sur l'intervalle $[0,t/3]$ est constante égale à $t/3$; sur l'intervalle $[1-t/3,1]$ est constante égale à $1-t/3$; et sur l'intervalle $[t/3, 1-t/3]$ est l'identité. On définit $f : \mathbf{S}^1 \times]0,1] \to S \times \mathbf{S}^1$ par :

$$f((\tau,t) = (u(g_t(\tau)), \phi(u(g_t(\tau)))^{-1} - \phi(u(t/3))^{-1}).$$

On vérifie que c'est un 1-cycle apparent non trivial.

2.2. Critère de prolongement des homotopies.

THÉORÈME 8. — *Un feuilletage prolonge les homotopies si et seulement si il vérifie la condition Q, chaque cycle évanouissant est trivial, et chaque cycle apparent est trivial.*

Démonstration. — Les conditions sont évidemment nécessaires. Réciproquement, soit $\mathcal{A}$ le feuilletage de H (proposition 1, c) par les fibres de α. De cette propriété c) résultent immédiatement trois équivalences : $\mathcal{F}$ prolonge les homotopies si et seulement si α est une fibration de Serre ; les cycles évanouissants de $\mathcal{F}$ sont triviaux si et seulement si ceux de $\mathcal{A}$ le sont ; les cycles apparents de $\mathcal{F}$ sont triviaux si et seulement si ceux de $\mathcal{A}$ le sont.

Notre théorème n'est donc qu'un avatar du critère de relèvement des homotopies de [Me] : une submersion à fibres connexes est une fibration de Serre sur son image si et seulement si dans le feuilletage qu'elle définit, tout cycle évanouissant ou apparent est trivial. □

COROLLAIRE 9. — *Soit un Q-feuilletage.*

Si chaque feuille est contractile, alors il y a prolongement des homotopies.

Si l'inclusion de chaque feuille dans la variété feuilletée est une équivalence d'homotopie, alors il y a prolongement des homotopies.

En effet, cycles évanouissants et cycles apparents sont alors évidemment triviaux. □

Exemples. — 1. Feuilletages mesurés (non singuliers) des surfaces (même non compactes). Ils sont développables et leur groupe d'holonomie est sans point fixe. Ils ont donc la propriété Q (proposition 3) ; donc ceux qui n'ont point de feuille compacte prolongent les homotopies. En particulier, chaque surface ouverte non planaire porte un flot minimal [Be] ; tous ces flots prolongent les homotopies.

2. Flots horocycliques. Soit V le quotient de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ par un sous-groupe discret cocompact. Son flot horocyclique est un Q-feuilletage (proposition 3). N'ayant pas d'orbite compacte, il prolonge les homotopies.

COROLLAIRE 10. — *Supposons V simplement connexe et $\mathcal{F}$ de codimension 1. Il y a prolongement des homotopies si et seulement si chaque feuille est à la fois sans holonomie (donc fermée), et rétract de V par déformation.*

Démonstration. — «Seulement si» est élémentaire [Go1]. Réciproquement, par le lemme de Haefliger, en l'absence d'holonomie, $\mathcal{F}$ est errant. Donc il vérifie la condition Q. Le corollaire 9 conclut. □

COROLLAIRE 11. — *La condition Q signifie que le classifiant de Haefliger de $\mathcal{F}$ a la propriété du prolongement des homotopies.*

Cela résulte du corollaire 9 et du caractère transverse de la propriété Q, car théorème et corollaire 9 s'étendent à des espaces feuilletés beaucoup plus généraux que les variétés topologiques — en particulier au classifiant de Haefliger de $\mathcal{F}$. □

2.3. Les trois conditions du théorème sont indépendantes, même dans le cadre des variétés compactes.

On verra au prochain paragraphe des feuilletages à feuilles contractiles — donc dont cycles évanouissants et cycles apparents sont triviaux — et qui n'ont pas la propriété Q.

Soit le *feuilletage de Schweitzer* $\mathcal{S}$ sur $V = \mathbf{S}^2 \times T^2$. De codimension 2, transversalement affine, il peut être défini par son application développante D. D'abord, le revêtement universel de V est $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, étant entendu que $\pi_1 V = \mathbb{Z}^2$ opère par :

$$(p, q) \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0 + p, 2^q x_1, 2^q x_2, 2^q x_3)$$

D est la submersion :

$$\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^2 : (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_0 - \ln(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), x_1).$$

Le groupe d'holonomie est $\mathbb{Z}^2$ opérant sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(p, q) \cdot (u, v) = (u + p - q \ln 4, 2^q v)$$

donc sans point fixe. La propriété Q s'ensuit (proposition 3).

On peut aussi regarder $\mathcal{S}$ ainsi : T^2 est muni du feuilletage linéaire $\mathcal{L}$ de pente $\ln 4$, et pour chaque feuille L, le produit $\mathbf{S}^2 \times L$ est saturé pour $\mathcal{S}$, et $\mathcal{S}|_{\mathbf{S}^2 \times L}$ est la réunion de deux *composantes de Reeb infinies.* Sous cette forme, il est immédiat que $\mathcal{S}$ contient des 1-cycles évanouissants non triviaux, mais que tout cycle apparent est trivial.

Le second exemple est une variante du premier. Il consiste à ajouter du genre à chaque composante de Reeb infinie, c'est-à-dire que l'on ôte un voisinage tubulaire de l'axe de la composante pour le remplacer par $S \times \mathbb{R}$, où S est le disque muni d'une anse. C'est encore un Q-feuilletage, parce que le pseudogroupe d'holonomie n'a pas changé. Tout cycle évanouissant est trivial, mais, tout comme dans l'exemple 2.1.2, il y a dans le bord de chaque composante de Reeb infinie avec genre, un 1-cycle apparent non trivial.

3. EXEMPLES

La technique des pièges fournit sur les variétés fermées de dimension $\geqslant 3$ des flots sans orbite compacte : voir [W], [S], [H], [K] ; et [Gh] pour une introduction. On va examiner si ces flots ont la propriété Q, qui comme nous l'avons montré équivaut pour eux au prolongement des homotopies.

3.1. Avec le piège de Schweitzer.

Rappelons d'abord sa construction. Soit un difféomorphisme de Denjoy du cercle, de classe C^1. Par suspension, on munit le tore T^2 d'un champ de vecteurs X sans orbite compacte présentant un minimal exceptionnel M. Les points de M sont de première ou de seconde espèce suivant que leur feuille est ou n'est pas demi-propre. Soit S la surface compacte à bord obtenue en ôtant à T^2 un disque ouvert dont la fermeture ne rencontre pas M. Le piège est la variété à bords et coins $P = S \times [-1, +1]$. Il porte un premier champ évident $\partial/\partial t$.

Soit une fonction ψ définie sur $S \times [0,1]$, de classe C^∞, à valeurs dans $[0,1]$, nulle au voisinage du bord de $S \times [0,1]$, et telle que $\psi^{-1}(1) = M \times \{1/2\}$. On étend ψ à P en posant $\psi(x,-t) = \psi(x,t)$ et on munit P du champ de vecteurs X_P défini par

$$X_P = (\psi X, (1-\psi)\partial/\partial t)$$

dans $P \times [0,1]$ et

$$X_P = (-\psi X, (1-\psi)\partial/\partial t)$$

dans $P \times [-1,0]$. Ce champ X_P coïncide donc avec $\partial/\partial t$ au voisinage de ∂P. Rappelons ses propriétés dynamiques fondamentales :

Ce flot admet $M \times \{-1/2\}$ et $M \times \{+1/2\}$ comme ensembles minimaux.

Pour tout point m de la surface S appartenant au minimal M, la demi-orbite entrant dans P au point $(m,-1)$ a pour ω-limite le minimal $M \times \{-1/2\}$; la demi-orbite sortant de P au point $(m,1)$ a pour α-limite le minimal $M \times \{1/2\}$; l'orbite passant par $(m,0)$ est contenue dans P et admet $M \times \{+1/2\}$ pour ω-limite et $M \times \{-1/2\}$ pour α-limite.

La réflexion $(x,t) \mapsto (x,-t)$ transforme X_P en son opposé $-X_P$. En conséquence, pour tout point x de S qui n'appartient pas au minimal M, l'orbite entrant dans P au point $(x,-1)$ en ressort au point $(x,1)$ (symétrie de Wilson).

En relevant l'immersion bien connue de S dans $\mathbb{R}^2$, on trouve un plongement de P dans $\mathbb{R}^3$ envoyant $\partial/\partial t$ sur un champ constant. Donc on peut plonger $(P, \partial/\partial t)$ dans toute 3-variété munie d'un flot, et même choisir l'image d'un point de P.

Donnons-nous une surface fermée Σ et un difféomorphisme lisse h errant, sauf un nombre fini d'orbites périodiques. On considère sa suspension. C'est donc une 3-variété fermée V munie d'un flot $\mathcal{S}$ et contenant Σ comme transversale totale. On note encore $h : V \to \Sigma$ l'application de premier retour ; et C_i les orbites compactes, dont la réunion est l'ensemble non errant du flot.

Sur chacune on fixe un point x_i et l'on choisit un plongement lisse p_i de P dans V, envoyant $\partial/\partial t$ sur un champ tangent à $\mathcal{S}$. Puis on remplace, dans $p_i(P)$, ce champ par $p_{i*}X_P$. L'on prend soin que chaque x_i soit l'image d'un point du type $(m_i, -1)$, où m_i, que nous appellerons point d'insertion, appartient au minimal M. Cela donne sur V un nouveau flot $\mathcal{F}$, de classe C^1. Grâce à la propriété de symétrie de Wilson, la relation d'équivalence $\mathcal{F}$ restreinte à l'extérieur des pièges est *moins fine* que $\mathcal{S}$.

En particulier $\mathcal{F}$ est sans orbite compacte. Nous allons voir que la propriété Q pour ce flot dépend de l'espèce des points d'insertion. Pour simplifier nous ferons l'hypothèse que l'intersection de $p_i(M \times [-1, +1])$ avec les orbites compactes de $\mathcal{S}$ est réduite à $p_i(\{m_i\} \times [-1, +1])$, ce qui est d'ailleurs le cas générique.

THÉORÈME 12. — *Le flot $\mathcal{F}$ obtenu par insertion des pièges de Schweitzer est sans holonomie transversale. Il a la propriété Q si, et seulement si, tous les points d'insertion sont de seconde espèce.*

Démonstration. — On notera $P_t = S \times \{t\}$. Fixons dans $\mathcal{F}$ une feuille F et voyons si elle a de la pseudo-holonomie, ou de l'holonomie de Godbillon. Il y a dans $\mathcal{F}$ trois types de feuilles, d'où trois cas.

1. La feuille F passe par le point $x_i = p_i(m_i, -1)$.

Montrons d'abord que F a de la pseudo-holonomie si m_i est de première espèce. Elle rencontre au point x_i la transversale $p_i(P_{-1})$. On note $r : p_i(P_{-1}) \to p_i(P_{-1})$ l'application de premier retour par le flot originel $\mathcal{S}$. Le point m_i de M est accessible, c'est-à-dire qu'il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \to S$ tel que $\gamma(0) = m_i$ et que $\gamma(t)$ n'appartient pas à M pour $t > 0$. Notons $c_i(t) = p_i(\gamma(t), -1)$. Pour $t > 0$, du fait de la symétrie de Wilson, l'orbite de $c_i(t)$ par le flot $\mathcal{F}$ ressort de P au point symétrique $p_i(\gamma(t), +1)$. Il en résulte que cette orbite revient sur la transversale $p_i(P_{-1})$ au même point $r(c_i(t))$ qu'elle le faisait par le flot $\mathcal{S}$. Pour $t = 0$, le point $c_i(0)$ n'est autre que x_i donc coïncide avec son image $r(c_i(0))$. En conclusion, les chemins c_i et $r(c_i)$ sont équivalents pour le nouveau feuilletage $\mathcal{F}$ comme ils l'étaient pour $\mathcal{S}$. Ils sont différents puisque C_i est une orbite compacte isolée de $\mathcal{S}$. Donc F a de la pseudo-holonomie.

Montrons maintenant que F n'a pas de pseudo-holonomie si m_i est de seconde espèce.

Soient deux chemins $c, c' : [0,1] \to p_i(P_{-1})$ équivalents pour $\mathcal{F}$ et de même origine $c(0) = c'(0) = x_i$. Il faut montrer que c, c' ont même germe en 0. Quitte à se restreindre à un voisinage de 0, on peut supposer que les images $c([0,1])$ et $c'([0,1])$ ne rencontrent pas les orbites compactes de $\mathcal{S}$ autres que C_i. On va alors montrer que $c = c'$. On peut évidemment supposer que $c^{-1}(C_i)$ et $c'^{-1}(C_i)$ sont réduits à $\{0\}$.

Puisqu'ils sont équivalents pour $\mathcal{F}$, ils le sont à plus forte raison pour le champ originel $\mathcal{S}$. Comme $\mathcal{S}$ privé de ses feuilles compactes est la suspension d'un difféomorphisme sans point fixe, c' est l'image de c par un itéré de l'application premier retour : $c' = r^n(c)$. Il s'agit de montrer que $n = 0$. Par l'absurde, supposons $n \neq 0$. Quitte à échanger c et c', on peut supposer que $n > 0$.

Puisque m_i n'est pas accessible, il existerait $t > 0$ tel que $c(t)$ appartienne à $p_i(M \times \{-1\})$. La feuille de $\mathcal{S}$ qui contient $c(t)$ et $c'(t)$ aurait donc été coupée entre $c(t)$ et $c'(t)$ par l'insertion du piège, donc ils ne seraient pas sur la même feuille de $\mathcal{F}$. Cette contradiction montre que $n = 0$, c'est-à-dire que F est sans pseudo-holonomie.

Enfin, F est sans holonomie transversale, et ceci quelle que soit l'espèce de m_i. En effet, soit ϕ un germe d'homéomorphisme de $p_i(P_{-1})$ au point x_i, tel que x et $\phi(x)$ soient toujours sur la même feuille de $\mathcal{F}$. Alors ils sont également sur la même feuille du champ originel $\mathcal{S}$. Comme $\mathcal{S}$ est la suspension d'un difféomorphisme errant sauf un nombre fini d'orbites périodiques, ϕ est un itéré de l'application premier retour : $\phi = r^n$. Il s'agit de montrer que $n = 0$. Par l'absurde, supposons $n \neq 0$. Quitte à remplacer ϕ par ϕ^{-1}, on peut supposer que $n > 0$. Comme m_i n'est pas un point isolé de M, il y a dans M un point m très proche mais distinct de m_i. On considère les points $x = p_i(m, -1)$ et $\phi(x) = r^n(x)$. Ils sont dans la même feuille de $\mathcal{S}$, mais cette feuille ayant été coupée entre x et $r(x)$ par l'insertion du piège, ils ne le sont plus pour $\mathcal{F}$, contradiction. Donc $n = 0$, c'est-à-dire que F est sans holonomie transversale.

2. La feuille F ne passe par aucun des x_i, mais n'est contenue dans aucun piège. Soit x un point de F hors des pièges. Grâce à la propriété

de symétrie de Wilson, x, parce qu'il est errant pour $\mathcal{S}$, l'est encore pour $\mathcal{F}$. Donc F est errante, et en particulier n'a ni holonomie transversale, ni pseudo-holonomie.

3. La feuille F est entièrement contenue dans un piège $p_i(P)$. Nous allons montrer qu'elle est sans pseudo-holonomie — donc en particulier sans holonomie transversale, et ceci quelle que soit l'espèce de m_i.

Elle est contenue soit dans l'un des deux minimaux $p_i(M \times \{\pm 1/2\})$, soit dans $p_i(M \times]-1/2, +1/2[$, auquel cas elle a ces minimaux pour ensemble limite. Soit un cercle plongé $T \subset S$, transverse au flot de Denjoy, et rencontrant toute feuille de ce flot. Soit $\Delta t > 0$ un réel assez petit pour que le cylindre compact $C = T \times [1/2 - \Delta t, 1/2 + \Delta t]$ soit transverse au flot X_P. La feuille F s'accumule sur le minimal $p_i(M \times \{+1/2\})$, donc rencontre l'intérieur de $p_i(C)$ en un point $x_0 = p_i(m_0, t_0)$ où $m_0 \in M$ et $1/2 - \Delta t \leqslant t_0 \leqslant 1/2$.

Soient donc deux chemins γ, γ' : $[0,1] \to C$ de même origine $\gamma(0) = \gamma'(0) = (m_0, t_0)$. On suppose $p_i(\gamma)$ et $p_i(\gamma')$ équivalents pour $\mathcal{F}$, et on va montrer que γ et γ' ont même germe en 0. Notre tâche principale sera de montrer que γ et γ' sont déjà équivalents dans le piège.

Un cas immédiat est celui où $\gamma(\tau) \in M \times [1/2 - \Delta t, 1/2]$: alors $\gamma'(\tau)$ aussi et la feuille qui les contient est bien incluse dans le piège.

Le cas sérieux est celui où $\gamma(\tau)$ et $\gamma'(\tau)$ appartiennent à l'ouvert complémentaire $\Omega = S \times [1/2 - \Delta t, 1/2 + \Delta t] \setminus M \times [1/2 - \Delta t, 1/2]$. Soit $J =]\tau_1, \tau_2[$, ou $]\tau_1, 1]$, la composante connexe de τ dans $\gamma^{-1}(\Omega) = \gamma'^{-1}(\Omega)$. Soient c, c' les images de $\gamma|_J$ et $\gamma'|_J$ par l'application de premier retour $\Omega \to P_1$, qui est continue. Nous allons en fait montrer que $c = c'$.

On va d'abord établir que l'ensemble limite de $c(\tau)$ pour $\tau \to \tau_1^+$ égale $M \times \{1\}$. Comme $\gamma(\tau_1) \in M \times [-1, +1]$, il est évident que cet ensemble limite est contenu dans $M \times \{1\}$. Pour se convaincre de l'inclusion inverse, on fixe un point $m_1 \in M$ et un petit intervalle $I \subset S$ de centre m_1, transverse au flot de Denjoy, et dont les extrémités n'appartiennent pas à M ; il faut montrer que $c(\tau)$ rencontre $I \times \{1\}$ une infinité de fois, quand $\tau \to \tau_1^+$.

On considère dans la surface S, munie du flot opposé au flot de Denjoy, l'application π de premier retour sur T, qui est définie sur un voisinage de M. Pour une infinité d'entiers $j \geqslant 0$, l'image par π^j de l'intérieur de I contient m_0. De même, soit dans le piège P muni du champ opposé à X_P, l'application Π de premier retour sur C, qui est définie sur un voisinage de $M \times [1/2, 1]$, et relève π. L'orbite par $-X_P$ de chaque point (y, t) revient indéfiniment sur C si $y \in M$ et $t \geqslant 1/2$; sinon elle finit par s'échapper par $P_{1/2-\Delta t}$. Donc pour chaque j assez grand, l'image de $I \times \{1\}$ par Π^j est une réunion finie disjointe d'arcs $A_{j,k}$ dont le bord est contenu dans $P_{1/2-\Delta t}$. En particulier $C \setminus A_{j,k}$ a deux composantes connexes; on note $C_{j,k}$ la 'petite', i.e. celle qui ne contient pas $T \times \{1/2 + \Delta t\}$.

Si j est l'un de ceux qui ont été choisis plus haut, alors le point $(m_0, 1/2)$ appartient à l'une des composantes C_{j,k_j}. L'intersection décroissante de toutes ces composantes coïncide avec le segment $\{m_0\} \times [1/2 - \Delta t, 1/2]$, donc contient (m_0, t_0).

Parce que $\gamma(\tau) \to (m_0, t_0)$ quand $\tau \to {\tau_1}^+$, il est clair que $\gamma(\tau)$ rencontre successivement tous les arcs A_{j,k_j}, pour j assez grand, quand $\tau \to \tau_1^+$. En d'autres termes c rencontre une infinité de fois $I \times \{1\}$. On a bien montré que l'ensemble limite égale $M \times \{1\}$. De même, l'ensemble limite de $c'(\tau)$ pour $\tau \to \tau_1+$ égale $M \times \{1\}$.

Considérons maintenant les chemins $p_i(c), p_i(c')$ dans la variété V. Ils sont équivalents pour $\mathcal{F}$, donc grâce au principe de symétrie de Wilson, ils le sont déjà pour $\mathcal{S}$. On peut supposer, quitte à appliquer une isotopie, que chaque piège $p_i(P)$ est disjoint de la surface transverse Σ. Donc $h(p_i(c))$ et $h((p_i(c'))$ sont dans Σ deux chemins équivalents par l'homéomorphisme h.

Comme nous avons supposé l'intersection de $p_i(M \times [-1, +1])$ avec $C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ réduite à $p_i(\{m_i\} \times [-1, +1])$, quitte à remplacer γ, γ' par leur restriction à un voisinage de 0, les chemins $h(p_i(c))$ et $h(p_i(c'))$ sont disjoints des points périodiques de h. Donc les ensembles $I_n = \{\tau / h(p_i(c'(\tau))) = h^n(p_i(c(\tau)))\}$ forment une partition fermée et dénombrable de l'intervalle. Par le théorème de Baire, tous ces ensembles sont vides sauf un. En d'autres termes il existe un entier n tel que $h(p_i(c')) = h^n(p_i(c))$. Comme h est une application continue propre de $p_i(P_1)$ dans Σ, il s'ensuit que $h(p_i(c(\tau)))$ et $h((p_i(c'(\tau)))$ ont quand $\tau \to \tau_1^+$ même ensemble limite $K = h(p_i(M \times \{1\}))$. Donc $h^{n-1}(K) = K$. Comme h est errant sauf un nombre fini d'orbites périodiques, cela n'est possible que si $n = 1$, ou si $K = \Sigma$, ou si K est formé de points périodiques de h. Ces deux derniers cas sont impossibles puisque K, étant l'image de $M \times \{1\}$ par le difféomorphisme local $h|_{T_1}$ de T_1 dans Σ, est infini mais d'intérieur vide. Donc $n = 1$, c'est-à-dire que $h(p_i(c)) = h(p_i(c'))$. Mais, toujours grâce à notre hypothèse simplificatrice, le point $h(x_i)$ ne peut avoir qu'un antécédent dans $p_i(M \times \{1\})$, donc pour $c(\tau)$ assez proche de $(m_i, 1)$, son image $h(p_i(c(\tau)))$ ne peut avoir qu'un antécédent proche de $p_i(M \times \{1\})$, donc $p_i(c'(\tau)) = p_i(c(\tau))$. Comme $h|_{T_1}$ est un difféomorphisme local, l'égalité pour un seul τ entraîne l'égalité pour tous les $\tau \in J$, c'est-à-dire : $c_i = c'_i$. Donc γ et γ' sont bien déjà équivalents dans le piège P.

On se restreint de nouveau au piège P muni du flot X_P. De toute évidence aucune orbite ne rencontre l'intérieur de C, puis son bord, puis de nouveau son intérieur. Il en résulte que l'application de premier retour $\Pi|_C : C \to C$ est définie sur un ouvert de C, et y est continue. Donc les ensembles $I_n = \{\tau/\gamma'(\tau) = \Pi^n(\gamma(\tau))\}$ forment une partition fermée et dénombrable de l'intervalle. Par le théorème de Baire, tous ces ensembles sont vides sauf un. Comme $\gamma(0) = \gamma'(0)$, c'est I_0 qui est plein : $\gamma = \gamma'$. □

Ce théorème suggère une question : *Soit V une variété compacte. On considère l'espace des flots sans orbite compacte. Le sous-ensemble des Q-flots y est-il générique en quelque sens ?*

Voici enfin quelques suggestions de variantes du théorème 12. Les détails sont laissés au lecteur.

3.2. Avec le piège de Kuperberg.

Le théorème 12 laisse à désirer en ceci que les exemples produits ne sont que de classe C^1. Soit V une variété fermée de dimension trois. On la munit d'abord d'un flot quelconque. Puis on y insère des pièges de Wilson pour obtenir un flot errant, sauf un nombre fini d'orbites périodiques. Enfin, on coupe chaque orbite compacte en insérant un piège de Kuperberg. Le flot obtenu est analytique réel [KK] et sans orbite compacte. La dynamique de ce piège étant moins simple que celle du piège de Schweitzer, ne permet pas une analyse aussi poussée. Toutefois, désignant par K l'ensemble des points du bord du piège dont l'orbite est piégée, le bord de K est lisse — en particulier tout point de ∂K est accessible. Le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 12 montre que, si l'on prend soin que le point d'insertion appartienne à ∂K, ce flot n'a pas la propriété Q. Retenons : *Toute 3-variété fermée porte un flot analytique réel sans feuille compacte et qui n'a pas la propriété Q.*

En outre, comme ∂K n'a pas de point isolé, le même raisonnement qu'avec le piège de Schweitzer montre qu'aucune feuille n'a d'holonomie transversale de Godbillon, sauf peut-être celles qui sont internes au piège. Il est probable qu'en fait celles-ci sont également sans holonomie transversale.

3.3. En dimension supérieure.

On dispose en toute dimension $n \geqslant 4$ des pièges apériodiques de Wilson, à la dynamique simple, et de classe C^∞.

Dans le but d'appliquer les raisonnements précédents sans changement, nous considérerons plutôt des analogues du piège de Schweitzer : il suffit de partir, au lieu du difféomorphisme de Denjoy du cercle, d'un difféomorphisme lisse h du tore T^{n-2}, sans orbite périodique, dont l'ensemble errant soit non vide et complémentaire d'un seul minimal $Z \subset T^{n-2}$; et que h soit isotope à l'identité (pour être sûr que la suspension privée d'une boule ouverte s'immerge dans $\mathbb{R}^{n-1}$ par une immersion qui se relève en un plongement dans $\mathbb{R}^n$). Le théorème 12 et sa démonstration se généralisent immédiatement à ce cadre — mais cette fois les exemples produits sont C^∞ ; la propriété Q dépendra de ce que le point d'insertion m est accessible ou non comme élément du minimal Z ; le flot produit sera sans holonomie transversale car m n'est pas isolé dans Z.

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] R. BARRE, De quelques aspects de la théorie des Q-variétés différentielles et analytiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23-3 (1973), 227–312.

[Be] J.-C. BENIERE, thèse, en préparation.

[F] E. FEDIDA, Sur les feuilletages de Lie, C. R. Acad. Sci. Paris, 272 (1971), 999–1001.

[Gh] E. GHYS, Construction de champs de vecteurs sans orbite périodique, d'après Krystyna Kuperberg, Séminaire Bourbaki 785 (juin 1994).

[Go1] C. GODBILLON, Feuilletages ayant la propriété du prolongement des homotopies, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17-2 (1967), 219–260.

[Go2] C. GODBILLON, Holonomie transversale, C. R. Acad. Sci. Paris, 264 (1967), 1050–1052.

[H] J. C. HARRISSON, C^2 counterexamples to the Seifert conjecture, Topology, 27-3 (1988), 249–278.

[K] K. KUPERBERG, A smooth counterexample to the Seifert conjecture, Ann. of Math., 140-3 (1994), 723–732.

[KK] G. KUPERBERG, K. KUPERBERG, Generalized counterexamples to the Seifert conjecture, Ann. of Math., 144-2 (1996), 239–268.

[H] G. HECTOR, Tautness and Homotopy Prolongation Property for One-dimensionnal foliations, Preprint (1995).

[Me] Sur le relèvement des homotopies. C. R. Acad. Sci. Paris, 321, série I (1995), 1497–1500.

[Mo] P. MOLINO, Riemannian foliations, Progress in Mathematics 73, Birkhäuser (1988).

[P] J. PRADINES, Un feuilletage sans holonomie transversale dont le quotient n'est pas une Q-variété, C. R. Acad. Sci. Paris, 288 (1979), 245–248.

[Sa] R. SACKSTEDER, Foliations and pseudogroups, Amer. J. Math., 87 (1965), 79–102.

[Sc] P. A. SCHWEITZER, Counter-examples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations, Ann. of Math., 100 (1974), 386–400.

[Su] D. SULLIVAN, A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces, Comment. Math. Helvetici, 54 (1979), 218–223.

[W] F. W. WILSON, On the minimal sets of non singular vector fields, Ann. of Math., 84 (1966), 529–536.

Manuscrit reçu le 27 novembre 1995,
accepté le 11 juin 1996.

Gaël MEIGNIEZ,
Université Claude Bernard - Lyon I
Institut Girard Desargues
Bâtiment du Doyen Jean Braconnier
43 bd du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex (France).
meigniez@desargues.univ-lyon1.fr