ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BERTRAND LEMAIRE

Intégrales orbitales sur $GL(N)$ et corps locaux proches

Annales de l'institut Fourier, tome 46, nº 4 (1996), p. 1027-1056

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_4_1027_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
46, 4 (1996), 1027-1056

INTÉGRALES ORBITALES SUR $GL(N)$ ET CORPS LOCAUX PROCHES

par Bertrand LEMAIRE

Introduction.

Soient F un corps local non archimédien, ϖ_F une uniformisante de F et N un entier $\geqslant 2$. On note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F et $\mathcal{P}_F$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$. Soit $\underline{G} = GL(N)$ et soit $K_F = \underline{G}(\mathcal{O}_F)$ le sous-groupe ouvert compact maximal standard de $G = \underline{G}(F)$. Si Γ est un sous-groupe ouvert compact de G, on note $\mathcal{H}(G, \Gamma)$ l'algèbre de Hecke des fonctions complexes Γ-biinvariantes à support compact sur G munie du produit de convolution défini par la mesure de Haar $dg = dg_F$ sur G telle que $\mathrm{vol}(K_F, dg) = 1$. Soit $\mathcal{B}_F$ la sous-algèbre d'Iwahori de $M(N, \mathcal{O}_F)$ formée des matrices triangulaires supérieures modulo $\mathcal{P}_F$ et, pour chaque entier $i \geqslant 1$, soient $B_F^i = 1 + \varpi_F^i \mathcal{B}_F$ le sous-groupe de congruence modulo $\mathcal{P}_F^i$ de $B_F = \mathcal{B}_F^\times$ et $\mathcal{H}_F^i = \mathcal{H}(G, B_F^i)$. Soient F' un corps local non archimédien et r un entier $\geqslant 1$. Supposons donnés un isomorphisme d'anneaux $\lambda : \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r \to \mathcal{O}_{F'}/\mathcal{P}_{F'}^r$ et une uniformisante $\varpi_{F'}$ de F' telle que $\lambda(\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^r) = \varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r$. Alors la description explicite de $\mathcal{H}_F^r$ donnée par Howe [Ho] permet de définir un isomorphisme d'algèbres $\zeta : \mathcal{H}_F^r \to \mathcal{H}_{F'}^r$, cf. [Le] Chap. 1. La dépendance de ζ à l'égard des choix de λ, ϖ_F, $\varpi_{F'}$ est élucidée dans [HH] Appendix 1.

Soit $G_{\mathrm{e}} \subset G$ l'ouvert des éléments elliptiques (i.e. de polynôme caractéristique irréductible sur F). Pour $y \in G_{\mathrm{e}}$ et $f : G \to \mathbf{C}$ localement constante à support compact, soit

$$J^G(f, y) = \int_{F^\times \backslash G} f(g^{-1}yg) \frac{dg}{dz}$$

Mots-clés : Algèbre de Hecke – Intégrale orbitale – Corps locaux proches.
Classification math. : 22E50.

où $dz = dz_F$ est la mesure de Haar sur $F^\times$ telle que $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_F^\times, dz) = 1$. Pour chaque entier $i \geqslant 1$, soit $K_F^i = 1 + \varpi_F^i M(N, \mathcal{O}_F)$ le sous-groupe de congruence modulo $\mathcal{P}_F^i$ de K_F. Fixons un entier $n \geqslant 1$. Dans *A submersion principle and its applications* [HC2], Harish-Chandra, grâce à une ingénieuse formule pour les intégrales orbitales elliptiques sur G, prouve la constance locale de l'application

$$G_{\mathrm{e}} \to \mathcal{H}(G, K_F^n)^*,\ y \mapsto J^G(., y).$$

C'est cette formule que nous reprenons ici pour transporter les intégrales orbitales elliptiques de $\underline{G}(F)$ à $\underline{G}(F')$. Précisément, fixé un élément $\gamma \in G_{\mathrm{e}}$ *en position standard* (i.e tel que le sous-groupe parahorique H de G normalisé par $F[\gamma]^\times$ satisfait la double inclusion $B_F \subset H \subset K_F$), on produit un entier $r(\gamma, n) \geqslant n$ et un voisinage ouvert compact $B_F^{r(\gamma,n)}$-biinvariant $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\gamma, n)$ de γ dans G_{e} tels que si $r \geqslant r(\gamma, n)$, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$,

$$J^{\underline{G}(F')}(\zeta(f), \gamma') = J^{\underline{G}(F)}(f, \gamma)$$

pour tout $\gamma' \in \mathcal{V}' \subset \underline{G}(F')_{\mathrm{e}}$ où $\mathbf{1}_{\mathcal{V}'} = \zeta(\mathbf{1}_{\mathcal{V}})$. L'idée consiste à étudier localement, grâce aux techniques de [BK], la submersion $\zeta_P : G \times P \to G,\ (g, p) \mapsto g^{-1}\gamma g p$, où P est un sous-groupe parabolique de G. Injectée dans la formule d'Harish-Chandra, cette étude conduit à un calcul explicite des intégrales orbitales $J^G(f, \gamma)$, $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$.

Enfin, par un argument classique de descente des intégrales orbitales, on étend le résultat à tout élément $\gamma \in G$ semi-simple (au sens de [B] §9) régulier.

Un tel résultat est intéressant dans la mesure où il permet, suivant l'idée de Kazhdan [K], de comparer les corps locaux de caractéristique > 0 aux corps locaux non archimédiens de caractéristique nulle (si F est de caractéristique $p > 0$, toute extension finie F' du corps p-adique $\mathbf{Q}_p$ de même corps résiduel que F et d'indice de ramification $e(F'/\mathbf{Q}_p) \geqslant r$, est r-proche de F). On l'a déjà utilisé dans [Le] Chap. 4 pour montrer la conjecture de Howe pour $\underline{G}$ en caractéristique > 0, à partir de la preuve de Clozel en caractéristique nulle [C]. Plus généralement, tout énoncé relatif aux intégrales orbitales de fonctions dans une algèbre de Hecke de niveau n fixé (lemme fondamental par exemple) vrai en caractéristique nulle doit pouvoir, suivant ce principe, s'étendre à la caractéristique > 0 (et réciproquement).

L'article s'organise comme suit : dans la section 2, on reprend la submersion d'Harish-Chandra [HC2] pour établir, grâce à des lemmes de filtration montrés dans la section 1, une formule explicite pour les intégrales orbitales $J^G(f,\gamma)$ des fonctions $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$ (Lemmes 2.2.1 et 2.2.2). Cette formule implique la constance de l'application $G_{\mathrm{e}} \to \mathcal{H}(G, K_F^n)^*$, $y \mapsto J^G(.,y)$ au voisinage de γ dans G_{e} (Proposition 2.3). La notion de corps locaux proches est introduite dans la section 3 : on y prouve le théorème principal, d'abord dans le cas elliptique en position standard (Théorème 3.3) puis dans le cas semi-simple régulier (Théorèmes 3.5 et 3.6). On donne aussi une variante concrète du résultat (Remarque 3.6).

Je remercie J.-L. Waldspurger pour sa preuve du lemme 3.5.

1. Préparatifs techniques.

1.1. Rappelons quelques notations de [BK] 1.4. Soient $\gamma \in G_{\mathrm{e}}$, E/F la sous-extension de $M(N,F)$ engendrée par γ et $e = e(E/F)$ l'indice de ramification de E/F. Comme $[E:F] = N$, il existe un unique $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire $\mathcal{G}$ dans $M(N,F)$ normalisé par $E^\times$. Soit $J_{\mathcal{G}}$ le radical de Jacobson de $\mathcal{G}$ et soit $v_{\mathcal{G}} : M(N,F) \to \mathbf{Z}$ la "valuation" sur $M(N,F)$ définie par $v_{\mathcal{G}}(x) = \max\{i \in \mathbf{Z} : x \in J_{\mathcal{G}}^i\}$. On pose $v = v_{\mathcal{G}}(\gamma)$.

Pour chaque $k \in \mathbf{Z}$, soit $\mathcal{N}_k = \mathcal{N}_k(\gamma, \mathcal{G})$ l'$\mathcal{O}_F$-ordre (et sous-$(\mathcal{O}_E \times \mathcal{O}_E)$-bimodule) dans $M(N,F)$ défini par

$$\mathcal{N}_k = \{g \in \mathcal{G} : \gamma g - g\gamma \in J_{\mathcal{G}}^k\}.$$

Soit $k_0 = k_0(\gamma, \mathcal{G})$ *l'exposant critique* de γ dans $\mathcal{G}$ donné par

$$k_0 = \max\{k \in \mathbf{Z} : \mathcal{N}_k \not\subset \mathcal{O}_E + J_{\mathcal{G}}\}.$$

Soient $k_1 = k_0 - v \geqslant 0$ et $\overline{k_1} = \dfrac{1}{e} k_1$. Pour les notions de *strate*, *strate pure*, *strate simple*, on renvoie à [BK] 1.5.

Si Γ est un sous-groupe algébriquement fermé de G, on note $L(\Gamma)$ l'algèbre de Lie de Γ.

1.2. Soit P un sous-groupe parabolique de G. Comme E ne contient pas d'élément nilpotent non nul, l'application

$$\zeta = \zeta_P : G \times P \to G,\ (g,p) \mapsto g^{-1}\gamma g p,$$

est partout submersive, cf. [HC2] Theorem 1. On note

$$\pi = \pi_P : L(G) \times L(P) \to L(G),\ (x,p) \mapsto x - \gamma^{-1}x\gamma + p,$$

l'application linéaire tangente à ζ au point $(1,1)$.

Fixons un caractère $\psi_F : F \to \mathbf{C}^\times$ de conducteur $\mathcal{P}_F$ (i.e. trivial sur $\mathcal{P}_F$ mais pas sur $\mathcal{O}_F$). D'où une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\Psi_F = \psi_F \circ \mathrm{tr}_F$ sur $L(G)$, où tr_F dénote la trace usuelle. Si R est un $\mathcal{O}_F$-réseau dans $L(G)$, on note R^* l'$\mathcal{O}_F$-réseau dual $\{g \in L(G) : \Psi_F(gx) = 1, \forall x \in R\}$. Cette définition est indépendante du choix du caractère ψ_F de conducteur $\mathcal{P}_F$.

Soit $\Lambda = \Lambda_\gamma$ l'$\mathcal{O}_F$-réseau dans $L(G)$ défini par

$$\Lambda = (\mathcal{P}_E^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0})^*.$$

Comme $(J_{\mathcal{G}}^{1+i})^* = J_{\mathcal{G}}^{-i}$ ($i \in \mathbf{Z}$), la double inclusion $J_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{P}_E^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0} \subset J_{\mathcal{G}}^{1-k_1}$ entraîne la double inclusion $J_{\mathcal{G}}^{k_1} \subset \Lambda \subset \mathcal{G}$.

LEMME 1. — *L'application π induit, par restriction pour chaque $m \in \mathbf{Z}$, un morphisme surjectif de $\mathcal{O}_F$-modules*

$$\pi_m : J_{\mathcal{G}}^{me} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{me+k_1}) \to \varpi_F^m \Lambda.$$

Preuve. — Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, $J_{\mathcal{G}}^{me} = \varpi_F^m \mathcal{G}$. Il suffit donc de montrer la surjectivité de π_0. Comme γ normalise $\mathcal{G}$, l'image par π de l'$\mathcal{O}_F$-réseau $\mathcal{G} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{k_1})$ de $L(G) \times L(P)$ est contenue dans $\mathcal{G}$. Soit

$$\overline{\pi} : \mathcal{G} \times \Big((L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{k_1}) + J_{\mathcal{G}}^{e+k_1}\Big) \to \mathcal{G}$$

l'application déduite de π par restriction. On a

$$\begin{aligned}\Big((L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{k_1}) + J_{\mathcal{G}}^{e+k_1}\Big)^* &= \Big\{x \in J_{\mathcal{G}}^{1-(e+k_1)} : \Psi_F(x(L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{k_1})) = 1\Big\} \\ &= (L(N) + J_{\mathcal{G}}^{1-k_1}) \cap J_{\mathcal{G}}^{1-(e+k_1)} \\ &= (L(N) \cap J_{\mathcal{G}}^{1-(e+k_1)}) + J_{\mathcal{G}}^{1-k_1}\end{aligned}$$

car $L(P)^\perp = L(N)$; d'autre part

$$\begin{aligned}\Big((1 - \mathrm{Ad}_G(\gamma^{-1}))\mathcal{G} + J_{\mathcal{G}}^{e+k_1}\Big)^* &= \Big\{x \in J_{\mathcal{G}}^{1-(e+k_1)} : x - \gamma^{-1}x\gamma \in J_{\mathcal{G}}\Big\} \\ &= \mathcal{P}_E^{1-(e+k_1)}\mathcal{N}_{e+k_0} \\ &= \mathcal{P}_E^{1-(e+k_1)} + \mathcal{P}_E^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0}\end{aligned}$$

car $\mathcal{N}_{e+k_0} = \mathcal{O}_E + \mathcal{P}_E^e \mathcal{N}_{k_0}$, [BK] Lemma 1.4.8. Par suite

$$\begin{aligned}(\mathrm{Im}(\overline{\pi}))^* &= \left((L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{k_1}) + J_{\mathcal{G}}^{e+k_1}\right)^* \cap \left((1 - \mathrm{Ad}_G(\gamma^{-1}))\mathcal{G} + J_{\mathcal{G}}^{e+k_1}\right)^* \\ &= \left((L(N) \cap J_{\mathcal{G}}^{1-(e+k_1)}) + J_{\mathcal{G}}^{1-k_1}\right) \cap \left(\mathcal{P}_E^{1-(e+k_1)} + \mathcal{P}_E^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0}\right).\end{aligned}$$

Si $b + z = a + x$ pour des éléments $b \in L(N) \cap J_{\mathcal{G}}^{1-(e+k_1)}$, $z \in J_{\mathcal{G}}^{1-k_1}$, $a \in \mathcal{P}_E^{1-(e+k_1)}$ et $x \in \mathcal{P}_E^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0}$, alors $y = x - z \in J_{\mathcal{G}}^{1-k_1}$ et comme $\mathcal{P}_E^i\mathcal{G} = J_{\mathcal{G}}^i$ ($i \in \mathbf{Z}$) et $b = a + y$ est nilpotent, $a \in E \cap J_{\mathcal{G}}^{1-k_1} = \mathcal{P}_E^{1-k_1}$ donc $a + x \in \mathcal{P}_E^{1-k_1} + \mathcal{P}_E^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0} = \mathcal{P}_E^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0}$. D'où l'égalité

$$\mathrm{Im}(\overline{\pi})^* = \mathcal{P}_E^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0}$$

et par dualité

$$\mathrm{Im}(\overline{\pi}) = \Lambda.$$

En définitive,

$$\mathrm{Im}(\pi_0) + \varpi_F J_{\mathcal{G}}^{k_1} = \mathrm{Im}(\pi_0) + \varpi_F\Lambda = \Lambda$$

d'où

$$\mathrm{Im}(\pi_0) = \Lambda$$

grâce au lemme de Nakayama. □

Soit $H = \mathcal{G}^\times$ le groupe multiplicatif de $\mathcal{G}$ et pour chaque entier $i \geqslant 1$, soit H^i le sous-groupe distingué $1 + J_{\mathcal{G}}^i$ de H.

LEMME 2. — *Pour chaque entier $m \geqslant 1 + \overline{k_1}$, l'application ζ induit par restriction une application surjective*

$$\zeta_m : H^{me} \times (P \cap H^{me+k_1}) \to \gamma(1 + \varpi_F^m\Lambda),\ (g, p) \mapsto g^{-1}\gamma g p,$$

et il existe un système de coordonnées

$$\beta_m : H^{me} \times (P \cap H^{me+k_1}) \to J_{\mathcal{G}}^{me} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{me+k_1})$$

tel que $\pi_m \circ \beta_m = \lambda_m \circ \zeta_m$ où $\lambda_m : \gamma(1 + \varpi_F^m\Lambda) \to \varpi_F^m\Lambda$, $g \mapsto \gamma^{-1}g - 1$.

Preuve. — Soit un entier $m \geqslant 1 + \overline{k_1}$. Pour tout couple $(x, p) \in J_{\mathcal{G}}^{me} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{me+k_1})$,

$$\zeta_m(1 + x, 1 + p) = \gamma(1 + \pi_m(x, p) + \eta_m(x, p))$$

avec $\eta_m(x,p) = xp-(\gamma^{-1}x\gamma)(x+p+xp)+\left(\sum_{i=2}^{+\infty}(-1)^i\gamma^{-1}x^i\gamma\right)(1+x)(1+p)$.
Comme

$$\eta_m\left(J_{\mathcal{G}}^{me} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{me+k_1})\right) \subset J_{\mathcal{G}}^{2me} \subset \varpi_F^{m+1}\Lambda,$$

la surjectivité de ζ_m découle du lemme 1.2.1 et du lemme de Nakayama appliqué à l'égalité

$$\mathrm{Im}(\pi_m + \eta_m) + \varpi_F \mathrm{Im}(\pi_m) = \mathrm{Im}(\pi_m).$$

L'application π induit, par restriction et passage au quotient, un morphisme surjectif de k_F-espaces vectoriels où $k_F = \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$ (Lemme 1.2.1)

$$\overline{\pi_0} : (\mathcal{G} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{k_1}))/\varpi_F(\mathcal{G} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{k_1})) \to \Lambda/\varpi_F\Lambda.$$

Fixons un sous-$\mathcal{O}_F$-module $\mathcal{M}$ de $\mathcal{G} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{k_1})$ tel que l'espace quotient $\mathcal{M}/\varpi_F\mathcal{M}$ soit un supplémentaire de $\ker(\overline{\pi_0})$. Fixons aussi une famille (finie) $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$ de représentants des classes de $\mathcal{M} \bmod \varpi_F\mathcal{M}$. Ainsi, tout élément $z \in \Lambda$ possède un unique développement hensélien de la forme

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} \varpi_F^i \pi_0(x_i(z), p_i(z)), \quad (x_i(z), p_i(z)) \in \mathcal{I}.$$

On pose alors $\mu_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \varpi_F^i(x_i(z), p_i(z))$. Si maintenant z est un quelconque élément de $L(G)$, $\varpi_F^k z \in \Lambda$ pour un entier k suffisamment grand et l'on pose $\mu(z) = \varpi_F^{-k}\mu_0(\varpi_F^k z)$ (définition clairement indépendante du choix de k). Vérifions que l'application $\mu : L(G) \to L(G) \times L(P)$ ainsi définie est bien F-linéaire. Supposons par l'absurde qu'il existe un couple $(z, z') \in L(G) \times L(G)$ et un élément $\alpha \in F$ tels que $\mu(\alpha z + z') \neq \alpha\mu(z) + \mu(z')$. Soit $d_0 \in \mathbf{Z}$ le plus grand entier d tel que $\mu(\alpha z + z') - (\alpha\mu(z) + \mu(z')) \in J_{\mathcal{G}}^{de} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{de+k_1})$. Alors

$$(x_0, p_0) = \varpi_F^{-d_0}(\mu(\alpha z + z') - (\alpha\mu(z) + \mu(z'))) \in \mathcal{M} - \varpi_F\mathcal{M}$$

et

$$\pi(\mu(\alpha z + z') - (\alpha\mu(z) + \mu(z'))) = \varpi_F^{d_0}\pi_0((x_0, p_0)) \neq 0,$$

contradiction.

En définitive, on a construit une section linéaire $\mu : L(G) \to L(G) \times L(P)$ de l'application $\pi : L(G) \times L(P) \to L(G)$ telle que $\mu(\varpi_F^d \Lambda) \subset J_{\mathcal{G}}^{de} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{de+k_1})$ pour tout $d \in \mathbf{Z}$. Soit

$$\beta_m : H^{me} \times (P \cap H^{me+k_1}) \to J_{\mathcal{G}}^{me} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{me+k_1})$$

l'application définie par $\beta_m(1+x, 1+p) = (1 + \mu \circ \eta_m)(x,p)$. Pour tout couple $(x,p) \in J_{\mathcal{G}}^{me} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{me+k_1})$ on a bien

$$\begin{aligned} \pi_m \circ \beta_m(1+x, 1+p) &= (\pi_m + \eta_m)(x,p) \\ &= \lambda_m(\gamma(1 + (\pi_m + \eta_m)(x,p))) \\ &= \lambda_m \circ \zeta_m(1+x, 1+p), \end{aligned}$$

et la relation

$$\begin{aligned} &(x,p) \in J_{\mathcal{G}}^{de} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{de+k_1}) \\ &\qquad \Rightarrow \eta_m(x,p) \in \varpi_F^{d+1}\Lambda \\ &\qquad \Rightarrow \mu \circ \eta_m(x,p) \in J_{\mathcal{G}}^{(d+1)e} \times (L(P) \cap J_{\mathcal{G}}^{(d+1)e+k_1}) \end{aligned}$$

pour tout entier $d \geqslant m$ assure la bijectivité de β_m. □

COROLLAIRE — *Pour chaque entier $m \geqslant 1 + \overline{k_1}$ et pour tout couple $(x_i, p_j) \in N_G(\mathcal{G}) \times P$, l'application ζ induit par restriction une application surjective*

$$\zeta_m^i : H^{me}x_i \times (P \cap H^{me+k_1})p_j \to x_i^{-1}\gamma(1 + \varpi_F^m \Lambda)x_i p_j,\ (g,p) \mapsto g^{-1}\gamma g p,$$

et il existe un système de coordonnées

$$\beta_m^i : H^{me}x_i \times (P \cap H^{me+k_1})p_j \to J_{\mathcal{G}}^{me} \times (L(x_i P x_i^{-1}) \cap J_{\mathcal{G}}^{me+k_1})$$

tel que $\pi_m^i \circ \beta_m^i = \lambda_m^i \circ \zeta_m^i$ où

$$\begin{cases} \pi_m^i : J_{\mathcal{G}}^{me} \times (L(x_i P x_i^{-1}) \cap J_{\mathcal{G}}^{me+k_1}) \to \varpi_F^m \Lambda,\ (x,p) \mapsto x - \gamma^{-1}x\gamma + p \\ \lambda_m^i : x_i^{-1}\gamma(1 + \varpi_F^m \Lambda)x_i p_j \to \varpi_F^m \Lambda,\ g \mapsto \gamma^{-1}x_i g p_j^{-1} x_i^{-1} - 1. \end{cases}$$

Preuve. — Soient un entier $m \geqslant 1 + \overline{k_1}$ et un couple $(x_i, p_j) \in N_G(\mathcal{G}) \times P$. Comme $x_i \in N_G(H^{me+k_1}) = N_G(\mathcal{G})$, $x_i(P \cap H^{me+k_1})p_j = (x_i P x_i^{-1} \cap H^{me+k_1})x_i p_j$. Ainsi, en rappelant la notation $\zeta = \zeta_P$ introduite en 1.2, pour tout couple $(g,p) \in H \times P$, on a

$$\begin{aligned} \zeta_P(gx_i, pp_j) &= x_i^{-1}g^{-1}\gamma g x_i p p_j \\ &= x_i^{-1}(g^{-1}\gamma g)(x_i p x_i^{-1})x_i p_j \\ &= x_i^{-1}\zeta_{x_i P x_i^{-1}}(g, x_i p x_i^{-1})x_i p_j. \end{aligned}$$

Il suffit donc de remplacer dans le lemme 1.2.2 le sous-groupe parabolique P de G par son conjugué $x_iPx_i^{-1}$ et le corollaire 1.2.2 est prouvé. □

2. Principe de submersion et "calcul" des intégrales orbitales elliptiques.

2.1. Soient $\underline{P_0}$ le sous-groupe de Borel triangulaire supérieur de $\underline{G}$ et $\underline{A_0}$ le tore maximal diagonal de $\underline{G}$. Soient $P_0 = \underline{P_0}(F)$, $A_0 = \underline{A_0}(F)$ et $dp = dp_F$ la mesure de Haar sur P_0 telle que $\mathrm{vol}(P_0 \cap K_F, dp) = 1$. Il existe une unique application linéaire $C_c^\infty(G \times P_0) \to C_c^\infty(G)$, $a \mapsto \phi_{\gamma,a}$, telle que pour toute fonction $a \in C_c^\infty(G \times P_0)$,

$$\int_G \int_{P_0} a(g,p) f(g^{-1}\gamma g p) dg dp = \int_G \phi_{\gamma,a}(g) f(g) dg$$

pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, [HC1] Theorem 11. On fixe un entier $n \geqslant 1$. Soient κ la fonction caractéristique de $K_F \times (P_0 \cap K_F^n)$ et $\phi_\gamma = \phi_{\gamma,\kappa}$. Soit $\Delta(\varpi_F) \subset A_0$ l'ensemble des éléments de la forme $\mathrm{diag}(1, \varpi_F^{\alpha_2}, \ldots, \varpi_F^{\alpha_N})$, α_i entier, $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_N$. Comme $\mathrm{Ad}_G(\delta^{-1})$, $\delta \in \Delta(\varpi_F)$, contracte le radical unipotent de P_0, la décomposition de Cartan $G = \coprod_{\delta \in \Delta(\varpi_F)} F^\times K_F \delta K_F$ entraîne, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$, la formule d'intégration ([HC2] Theorem 3)

$$J^G(f,\gamma) = \sum_{\delta \in \Delta(\varpi_F)} \frac{\mathrm{vol}(F^\times K_F \delta K_F, \frac{dg}{dz})}{\mathrm{vol}(P_0 \cap K_F^n, dp)} \int_G \phi_\gamma(g) \overline{f}(\delta^{-1} g \delta) dg$$

où $\overline{f} \in C_c^\infty(G)$ est définie par $\overline{f}(x) = \int_{K_F} f(g^{-1}xg)dg$ $(x \in G)$. Puisque l'application $y \mapsto \phi_y$ est localement constante sur G_{e} ([HC2] Lemma 1), la formule ci-dessus implique la constance locale de l'application $G_{\mathrm{e}} \to \mathcal{H}(G, K_F^n)^*$, $y \mapsto J^G(y, .)$.

2.2. Dans ce numéro, on suppose que H est un sous-groupe parahorique standard de G, i.e. qu'il satisfait la double inclusion $B_F \subset H \subset K_F$. L'idée est de calculer la fonction ϕ_γ en terme du réseau Λ défini dans la section 1. Pour ce faire, on introduit une décomposition de G intermédiaire entre la décomposition de Cartan et la décomposition de Bruhat-Tits, adaptée à la filtration de H par les sous-groupes H^i, $i \geqslant 1$.

Pour $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, soit $s_{i,F} \in G$ la matrice de transposition échangeant les lignes i et $i+1$. Soit S_F le groupe engendré par les $s_{i,F}$,

$i = 1, \ldots, N-1$, et soit $D(\varpi_F) \subset A_0$ le groupe des éléments de la forme $\mathrm{diag}(\varpi_F^{\alpha_1}, \ldots, \varpi_F^{\alpha_N})$, $\alpha_i \in \mathbf{Z}$. Soit aussi l'ensemble $D^+(\varpi_F) = \langle \varpi_F \rangle \cdot \Delta(\varpi_F) \subset D(\varpi_F)$ où $\langle \varpi_F \rangle$ est identifié au groupe des éléments de la forme $\mathrm{diag}(\varpi_F^{\alpha}, \ldots, \varpi_F^{\alpha})$, $\alpha \in \mathbf{Z}$. Si $g \in G$, il existe un unique couple $(s, \delta) \in S_F \times D(\varpi_F)$ tel que $B_F g B_F = B_F s \delta B_F$ (décomposition de Bruhat-Tits) ; soit $s' \in S_F$ tel que $\delta' = s'^{-1} \delta s' \in D^+(\varpi_F)$; l'inclusion $S_F \subset K_F$ entraîne l'égalité $B_F g K_F = B_F s s' \delta' K_F$. On a donc montré que $G = \cup_{w \in S_F \Delta(\varpi_F)} F^\times B_F w K_F$ où $S_F \Delta(\varpi_F) = \{s\delta : s \in S_F,\, \delta \in \Delta(\varpi_F)\}$.

Fixons (arbitrairement) une partie $\Sigma \subset S_F \Delta(\varpi_F)$ telle que $G = \coprod_{w \in \Sigma} F^\times H w K_F$ et pour chaque $s \in S_F$, notons $\Delta(\varpi_F, s) \subset \Delta(\varpi_F)$ l'ensemble des $\delta \in \Delta(\varpi_F)$ tels que $s\delta \in \Sigma$.

Soit η la fonction caractéristique de $H \times (P_0 \cap K_F^n)$. Pour chaque $s \in S_F$, il existe une unique application linéaire $C_c^\infty(G \times P_0) \to C_c^\infty(G)$, $a \mapsto \phi_{\gamma,a}^s$ telle que pour toute fonction $a \in C_c^\infty(G \times P_0)$,

$$\int_G \int_{P_0} a(g,p) f(g^{-1} \gamma g s p s^{-1}) dg dp = \int_G \phi_{\gamma,a}^s(g) f(g) dg$$

pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, [HC1] Theorem 11 ; on pose $\phi_\gamma^s = \phi_{\gamma,\eta}^s$.

Lemme 1. — *Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$,*

$$J^G(f,\gamma) = \sum_{s \in S_F} \sum_{\delta \in \Delta(\varpi_F, s)} \frac{\mathrm{vol}(F^\times H \delta K_F, \frac{dg}{dz})}{\mathrm{vol}(P_0 \cap K_F^n, dp) \mathrm{vol}(H, dg)} \int_G \phi_\gamma^s(g) \overline{f}(\delta^{-1} s^{-1} g s \delta) dg.$$

Preuve. — On reprend les arguments de la preuve du théorème 3 de [HC2]. Soit $\delta \in \Delta(\varpi_F)$. Comme $\delta^{-1} p \delta \in K_F^n$ pour $p \in P_0 \cap K_F^n$, pour chaque $s \in S_F$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$,

$$\begin{aligned}
&\int_H f(\delta^{-1} s^{-1} g^{-1} \gamma g s \delta) dg \\
&\quad = \mathrm{vol}(P_0 \cap K_F^n, dp)^{-1} \int_H \int_{P_0 \times K_F^n} f(\delta^{-1} s^{-1} g^{-1} \gamma g s p \delta) dg dp \\
&\quad = \mathrm{vol}(P_0 \cap K_F^n, dp)^{-1} \int_G \phi_\gamma^s(g) f(\delta^{-1} s^{-1} g s \delta) dg.
\end{aligned}$$

Or, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$,

$$J^G(f,\gamma) = \sum_{s\in S_F}\sum_{\delta\in\Delta(\varpi,s)} \frac{\mathrm{vol}(F^\times H\delta K_F, \frac{dg}{dz})}{\mathrm{vol}(H,dg)} \int_H \overline{f}(\delta^{-1}s^{-1}g^{-1}\gamma gs\delta)dg$$

et comme K_F^n est distingué dans K_F, $f \in \mathcal{H}(G,K_F^n) \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{H}(G,K_F^n)$. D'où le lemme 2.2.1. □

Pour chaque $s \in S_F$, soit dp^s la mesure de Haar sur $P_0^s = sP_0s^{-1}$ image de la mesure dp par l'isomorphisme de variétés ϖ_F-adiques $P_0 \to P_0^s$, $p \mapsto sps^{-1}$. Ainsi $\mathrm{vol}(P_0^s \cap K_F, dp^s) = \mathrm{vol}(P_0 \cap K_F, dp) = 1$.

Lemme 2. — *Soit $m = m(\gamma,n)$ le plus petit entier $\geqslant \sup\{1+\overline{k_1},\, n-\overline{k_1}\}$. Pour chaque $s \in S_F$ et pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$,*

$$\int_G \phi_\gamma^s(g)f(g)dg = d(\gamma,s)\sum_{(i,j)}\int_{x_i^{-1}\gamma(1+\varpi_F^m\Lambda)x_ip_j^s} f(g)dg$$

avec

$$d(\gamma,s) = \frac{\mathrm{vol}(H^{me},dg)\mathrm{vol}(P_0^s\cap H^{me+k_1},dp^s)}{\mathrm{vol}(1+\varpi_F^m\Lambda,dg)},$$

les couples (x_i,p_j^s) parcourant un système de représentants dans $H\times(P_0^s\cap K_F^n)$ des classes de $H^{me}\backslash H\times(P_0^s\cap H^{me+k_1})\backslash(P_0^s\cap K_F^n)$.

Preuve. — Soient $s \in S_F$ et $f \in C_c^\infty(G)$. La condition sur m entraînant l'inclusion $H^{me+k_1} \subset K_F^n$ et puisque s normalise K_F^n, on a

$$\begin{aligned}\int_G \phi_\gamma^s(g)f(g)dg &= \int_H\int_{P_0\cap K_F^n} f(g^{-1}\gamma gp^s)dgdp^s\\ &= \sum_{(i,j)}\int_{H^{me}x_i}\int_{(P_0^s\cap H^{me+k_1})p_j^s} f(g^{-1}\gamma gp^s)dgdp^s,\end{aligned}$$

les couples (x_i,p_j^s) étant pris comme dans l'énoncé. On conclut grâce au corollaire 1.2.2 appliqué au sous-groupe parabolique P_0^s de G pour chaque couple (x_i,p_j^s). □

2.3. Le G-entrelacement $\{g\in G : g^{-1}(\gamma+J_{\mathcal{G}}^{1+k_0})g\cap(\gamma+J_{\mathcal{G}}^{1+k_0})\neq\varnothing\}$ de la strate simple $[\mathcal{G},-v,-(1+k_0),\gamma]$ coïncidant avec $E^\times(1+\mathcal{P}_E\mathcal{N}_{k_0})$ ([BK] Theorem 1.5.8), le centralisateur dans G de tout élément $y \in \gamma+J_{\mathcal{G}}^{1+k_0}$ est compact modulo $F^\times$ donc $\gamma+J_{\mathcal{G}}^{1+k_0} \subset G_{\mathrm{e}}$. Soit $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\gamma,n) \subset \gamma+J_{\mathcal{G}}^{1+k_0}$ le voisinage ouvert compact de γ dans G_{e} donné par $\mathcal{V} = \gamma(1 + \varpi_F^m \Lambda)$, l'entier $m = m(\gamma, n)$ étant défini dans l'énoncé du lemme 2.2.2.

PROPOSITION. — *Soit $y \in \mathcal{V}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K_F^n)$,*

$$J^G(f, y) = J^G(f, \gamma).$$

Preuve. — Quitte à conjuguer γ dans G, on peut supposer que H est un sous-groupe parahorique standard de G. Soit $E_1 = F[y]$ l'extension de F engendrée par y. Il est clair que $v_{\mathcal{G}}(y) = v$ et que $E_1^\times$ normalise l'$\mathcal{O}_F$-ordre $\mathcal{G}$. Comme les strates $[\mathcal{G}, -v, -(1 + k_0), y]$ et $[\mathcal{G}, -v, -(1 + k_0), \gamma]$ sont pures et équivalentes, $\mathcal{P}_{E_1}^d \mathcal{N}_k(y, \mathcal{G}) = \mathcal{P}_E^d \mathcal{N}_k(\gamma, \mathcal{G})$ pour tout $d \in \mathbf{Z}$ et tout entier $k \geqslant 1 + k_0$, [BK] Prop. 2.1.3. Par suite, $k_0(y, \mathcal{G}) = k_0$ car $\mathcal{O}_{E_1} \subset \mathcal{N}_{1+k_0}(\gamma, \mathcal{G}) \subset \mathcal{O}_E + J_{\mathcal{G}}$, donc $k_1(y, \mathcal{G}) = k_1$ et $\Lambda_y = \Lambda$. On conclut grâce aux lemmes 2.2.1 et 2.2.2 en remarquant que l'inclusion $(1 + \varpi_F^m \Lambda)^2 \subset 1 + \varpi_F^m \Lambda$ entraîne l'égalité $y(1 + \varpi_F^m \Lambda) = \gamma(1 + \varpi_F^m \Lambda)$. □

3. Corps locaux proches.

3.1. Rappel des résultats de Howe.

Fixons un entier $r \geqslant 1$. Si $(e_1, \ldots, e_N)$ désigne la base canonique de F^N, soient s_{ϖ_F} la matrice définie par $s_{\varpi_F}(e_1) = \varpi_F e_N$, $s_{\varpi_F}(e_N) = \varpi_F^{-1} e_1$, $s_{\varpi_F}(e_i) = e_i$ pour $2 \leqslant i \leqslant N - 1$, et t_{ϖ_F} la matrice définie par $t_{\varpi_F}(e_1) = \varpi_F e_N$, $t_{\varpi_F}(e_i) = e_{i-1}$ pour $2 \leqslant i \leqslant N$. Ainsi les $s_{i,F}$, s_{ϖ_F}, t_{ϖ_F} engendrent le groupe de Weyl affine $W(\varpi_F)$. Pour $x = s_{i,F}$ $(i = 1, \ldots, N-1)$, $x = s_{\varpi_F}$, t_{ϖ_F}, $t_{\varpi_F}^{-1}$ ou $x \in B_F$, on pose

$$f_x = \frac{1}{\mathrm{vol}(B_F^r x B_F^r, dg)} \mathbf{1}_{B_F^r x B_F^r}.$$

Ces fonctions f_x engendrent l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_F^r$, [Ho] Chap. 3, Theorem 2.1. De plus, Howe donne une liste de relations définissant $\mathcal{H}_F^r$, obtenues grâce au lemme suivant, que nous utiliserons (implicitement) très souvent par la suite.

LEMME [Ho] Chap. 3, Prop. 2.2. — *Soit Γ un sous-groupe ouvert compact de G. Pour $g \in G$, notons f_g^Γ la fonction caractéristique de $\Gamma g \Gamma$ divisée par le volume de $\Gamma g \Gamma$. Soient x, $y \in G$ tels que*

$$\frac{\mathrm{vol}(\Gamma x \Gamma, dg)\mathrm{vol}(\Gamma y \Gamma, dg)}{\mathrm{vol}(\Gamma, dg)} = \mathrm{vol}(\Gamma x y \Gamma, dg).$$

Alors $f_x^\Gamma * f_y^\Gamma = f_{xy}^\Gamma$.

3.2. On reprend les résultats du chapitre 1 de [Le] tels qu'ils ont été résumés et éclaircis par Henniart dans [HH] Appendix 1.

Soit F' un corps local non archimédien. Supposons donnés un isomorphisme d'anneaux $\lambda : \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r \to \mathcal{O}_{F'}/\mathcal{P}_{F'}^r$ et une uniformisante $\varpi_{F'}$ de F' vérifiant l'égalité $\lambda(\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^r) = \varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r$. Soit $\widetilde{\lambda} : \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{r+1} \to \mathcal{P}_{F'}/\mathcal{P}_{F'}^{r+1}$ l'isomorphisme de groupes défini par $\widetilde{\lambda}(\varpi_F x) = \varpi_{F'}\lambda(x)$ pour $x \in \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r$. Cet isomorphisme est compatible avec les structures de modules sur $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r$ et $\mathcal{O}_{F'}/\mathcal{P}_{F'}^r$ au sens où $\widetilde{\lambda}(ax) = \lambda(a)\widetilde{\lambda}(x)$ pour $(a,x) \in \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r \times \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{r+1}$. D'où un isomorphisme de groupes $\beta = \beta_{\lambda,\widetilde{\lambda}} : B_F/B_F^r \to B_{F'}/B_{F'}^r$ défini comme suit composante par composante : pour tout $b = (b_{i,j}) \in B_F$, $\beta(b \bmod B_F^r) = b' \bmod B_{F'}^r$ où $b' = (b'_{i,j}) \in B_{F'}$ est tel que $b'_{i,j} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r = \lambda(b_{i,j} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r)$ si $i \leqslant j$ et $b'_{i,j} \bmod \mathcal{P}_{F'}^{r+1} = \widetilde{\lambda}(b_{i,j} \bmod \mathcal{P}_{F'}^{r+1})$ si $i > j$.

Alors il existe un (unique) isomorphisme d'algèbres $\zeta : \mathcal{H}_F^r \to \mathcal{H}_{F'}^r$ tel que $\zeta(f_{s_{i,F}}) = f_{s_{i,F'}}$ $(i = 1, \ldots, N-1)$, $\zeta(f_{s_{\varpi_F}}) = f_{s_{\varpi_{F'}}}$, $\zeta(f_{t_{\varpi_F}}) = f_{t_{\varpi_{F'}}}$, $\zeta(f_{t^{-1}_{\varpi_F}}) = f_{t^{-1}_{\varpi_{F'}}}$ et pour tout $b \in B_F$, $\zeta(f_b) = f_{b'}$ où $b' \in B_{F'}$ est tel que $\beta(b \bmod B_F^r) = b' \bmod B_{F'}^r$, cf. [Le] pour les détails.

Plus précisément, soit $T_r(F) = (\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r, \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{r+1}, \epsilon_F)$ le triplet introduit par Deligne dans [D] §1, où $\epsilon_F : \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{r+1} \to \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^r$ est l'épimorphisme naturel. Un isomorphisme de triplets $T_r(F) \simeq T_r(F')$ est la donnée d'un isomorphisme d'anneaux $\tau : \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r \to \mathcal{O}_{F'}/\mathcal{P}_{F'}^r$ et d'un isomorphisme de groupes $\widetilde{\tau} : \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{r+1} \to \mathcal{P}_{F'}/\mathcal{P}_{F'}^{r+1}$ tels que $\widetilde{\tau}(ax) = \tau(a)\widetilde{\tau}(x)$ pour $(a,x) \in \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r \times \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{r+1}$ et $\epsilon_{F'} \circ \widetilde{\tau} = \tau \circ \epsilon_F$. Ainsi, les choix de λ, $\varpi_F, \varpi_{F'}$ induisent (via λ et $\widetilde{\lambda}$) un isomorphisme de triplets $T_r(F) \simeq T_r(F')$, la condition $\lambda(\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^r) = \varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r$ étant équivalente à l'égalité $\epsilon_{F'} \circ \widetilde{\lambda} = \lambda \circ \epsilon_F$ (1). Clairement, cet isomorphisme ne dépend pas vraiment de ϖ_F et $\varpi_{F'}$ (vérifiant la condition $\lambda(\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^r) = \varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r$) mais seulement de $\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^{r+1}$ et $\varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^{r+1}$. Mais pour tout couple d'uniformisantes $(\alpha_F, \alpha_{F'})$ induisant le même isomorphisme de triplets $(\lambda, \widetilde{\lambda}) : T_r(F) \simeq T_r(F')$, on obtient le même isomorphisme d'algèbres $\zeta : \mathcal{H}_F^r \to \mathcal{H}_{F'}^r$. En effet, soit $(\alpha_F, \alpha_{F'})$ un tel couple, donc de la forme $(\alpha_F, \alpha_{F'}) = (\varpi_F u_F, \varpi_{F'} u_{F'})$ avec $\lambda(u_F \bmod \mathcal{P}_F^r) = u_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r$, et soit

(1) Réciproquement, tout isomorphisme de triplets $(\tau, \widetilde{\tau}) : T_r(F) \simeq T_r(F')$ est de la forme $\widetilde{\tau}(a\alpha_F) = \alpha_{F'}\tau(a)$ $(a \in \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r)$ pour un choix d'uniformisantes α_F de F et $\alpha_{F'}$ de F' telles que $\widetilde{\tau}(\alpha_F \bmod \mathcal{P}_F^{r+1}) = \alpha_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^{r+1}$.

$\eta : \mathcal{H}_F^r \to \mathcal{H}_{F'}^r$ l'isomorphisme d'algèbres induit par λ, α_F, $\alpha_{F'}$. Il est clair que $\zeta(f_x) = \eta(f_x)$ pour $x = s_{i,F}$ $(i = 1, \ldots, N-1)$ et $x \in B_F$. Comme B_F normalise B_F^r, pour tout $x \in B_F$, on a l'égalité $f_{s_{\varpi_F}x} = f_{s_{\varpi_F}} * f_x$. Or $s_{\alpha_F} = s_{\varpi_F} b$ avec $b = \mathrm{diag}(u_F, 1, ..., 1, u_F^{-1}) \in B_F$, par conséquent

$$\zeta(f_{s_{\alpha_F}}) = \zeta(f_{s_{\varpi_F}} * f_b) = \zeta(f_{s_{\varpi_F}}) * \zeta(f_b) = f_{s_{\varpi_{F'}}} * f_{b'} = f_{s_{\varpi_{F'}}b'}$$

pour tout $b' \in B_{F'}$ tel que $b' \bmod B_{F'}^r = \beta(b \bmod B_F^r)$. Comme on peut prendre $b' = \mathrm{diag}(u_{F'}, 1, \ldots, 1, u_{F'}^{-1})$, on obtient

$$\zeta(f_{s_{\alpha_F}}) = f_{s_{\alpha_{F'}}} = \eta(f_{s_{\alpha_F}}).$$

De la même manière, on montre que ζ coïncide avec η sur $f_{t_{\alpha_F}}$ et $f_{t_{\alpha_F}^{-1}}$. En définitive, ζ et η coïncident sur tous les générateurs de $\mathcal{H}_F^r$, donc $\zeta = \eta$.

Mentionnons pour finir la remarque d'Henniart relative au cas $N = 1$, [HH] Appendix 1 : soient $U_F = \mathcal{O}_F^\times$ et $U_F^r = 1 + \mathcal{P}_F^r$. Les choix de λ, ϖ_F, $\varpi_{F'}$ induisent un isomorphisme de groupes $\lambda^\times : F^\times/U_F^r \to F'^\times/U_{F'}^r$ qui coïncide avec λ sur U_F et envoie ϖ_F sur $\varpi_{F'}$. Pour $N = 1$, $GL(N, F) = F^\times$ et l'isomorphisme d'algèbres $\zeta : \mathcal{H}_F^r \to \mathcal{H}_{F'}^r$ s'obtient à partir de $\lambda^\times$ en identifiant $\mathcal{H}_F^r$ avec $\mathbf{C}[F^\times/U_F^r]$ et $\mathcal{H}_{F'}^r$ avec $\mathbf{C}[F'^\times/U_{F'}^r]$. Or dans [D] 3.4.3, Deligne montre que l'isomorphisme de triplets $(\lambda, \bar{\lambda}) : T_r(F) \simeq T_r(F')$ induit un isomorphisme de groupes $F^\times/U_F^r \simeq F'^\times/U_{F'}^r$ qui n'est autre que $\lambda^\times$.

3.3. On montre dans ce numéro le théorème principal de l'article. Comme en 2.2, on suppose que H est un sous-groupe parahorique standard de G (i.e., quitte à conjuguer γ dans G, on suppose que γ est en position standard). Nous reviendrons en 3.6 sur cette hypothèse.

Si Ω est une partie compacte B_F^r-biinvariante de $\underline{G}(F)$, on note (abusivement) $\zeta(\Omega)$ la partie de $\underline{G}(F')$ définie par $\mathbf{1}_{\zeta(\Omega)} = \zeta(\mathbf{1}_\Omega)$; on étend naturellement cette notation à toute partie Ω union infinie de doubles classes $B_F^r g B_F^r$, $g \in \underline{G}(F)$.

LEMME 1. — *Soit Γ un sous-groupe compact de $\underline{G}(F)$ contenant B_F^r. Alors $\Gamma' = \zeta(\Gamma)$ est un sous-groupe compact de $\underline{G}(F')$ contenant $B_{F'}^r$ et ζ induit par restriction un isomorphisme d'algèbres (et même d'anneaux) $\mathcal{H}(\underline{G}(F), \Gamma) \simeq \mathcal{H}(\underline{G}(F'), \Gamma')$.*

Preuve. — Il est clair que Γ' est une partie compacte $B_{F'}^r$-biinvariante de $\underline{G}(F')$, stable par multiplication (si $x' \in \Gamma'$, $y' \in \Gamma'$, alors $f_{x'} * f_{y'}$ est une fonction $\geqslant 0$ supportée par $B_{F'}^r x' B_{F'}^r y' B_{F'}^r$; or $\zeta^{-1}(\mathrm{Supp}(f_{x'} * f_{y'})) = \mathrm{Supp}(\zeta^{-1}(f_{x'}) * \zeta^{-1}(f_{y'})) \subset \Gamma$ donc $B_{F'}^r x' B_{F'}^r y' B_{F'}^r \subset \zeta(\Gamma) = \Gamma'$) et contenant $B^r_{F'}$. Quant à la structure de groupe, il reste à vérifier que $x' \in \Gamma' \Rightarrow x'^{-1} \in \Gamma'$. Soit $x' = b'_1 w_{\varpi_{F'}} b'_2 \in \Gamma'$, $b'_i \in B_{F'}$ $(i = 1, 2)$, $w_{\varpi_{F'}} \in W(\varpi_{F'})$, et pour $i = 1, 2$, soit $b_i \in \zeta^{-1}(b'_i B^r_{F'})$. Puisque B_F normalise B^r_F, on a

$$\zeta^{-1}(B^r_{F'} x' B^r_{F'}) = B^r_F b_1 w_{\varpi_F} b_2 B^r_F \subset \Gamma,$$

donc $b_2^{-1} w_{\varpi_F}^{-1} b_1^{-1} \in \Gamma$ et

$$x'^{-1} \in B^r_{F'} b_2'^{\,-1} w_{\varpi_{F'}}^{-1} b_1'^{\,-1} B^r_{F'} = \zeta(B^r_F b_2^{-1} w_{\varpi_F}^{-1} b_1^{-1} B^r_F) \subset \Gamma'.$$

Soit $e_\Gamma \in \mathcal{H}^r_F$ l'idempotent $\mathrm{vol}(\Gamma, dg_F)^{-1}\mathbf{1}_\Gamma$. Comme $\mathcal{H}(\underline{G}(F), \Gamma) = e_\Gamma * \mathcal{H}^r_F * e_\Gamma$,

$$\zeta(\mathcal{H}(\underline{G}(F), \Gamma)) = \zeta(e_\Gamma) * \mathcal{H}^r_{F'} * \zeta(e_\Gamma)$$

avec $\zeta(e_\Gamma) = \mathrm{vol}(\Gamma', dg_{F'})^{-1}\mathbf{1}_{\Gamma'}$. Donc $\zeta(\mathcal{H}(\underline{G}(F), \Gamma)) = \mathcal{H}(\underline{G}(F'), \Gamma')$. □

Soit $H' = \zeta(H)$ et soit $\mathcal{G}'$ l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire dans $M(N, F')$ tel que $\mathcal{G}'^\times = H'$. Soit $W(\varpi_F) \to W(\varpi_{F'})$, $w_{\varpi_F} \mapsto w_{\varpi_{F'}}$ l'isomorphisme de groupes défini par $s_{i,F} \mapsto s_{i,F'}$ $(i = 1, \dots, N-1)$, $s_{\varpi_F} \mapsto s_{\varpi_{F'}}$ et $t_{\varpi_F} \mapsto t_{\varpi_{F'}}$.

Les lemmes suivants nous permettront plus loin (cf. la preuve du théorème 3.3) de transporter les formules d'intégration des lemmes 2.2.1 et 2.2.2 de F à F'.

Lemme 2. — *Soient $d \in \{1, \dots, r\}$, $w_{\varpi_F} \in W(\varpi_F)$, $g \in \underline{G}(F)$ et une décomposition $K^d_F g K^d_F = \coprod_{\sigma \in I} K^d_F g_\sigma$. Il existe une décomposition $\zeta(K^d_F g K^d_F) = \coprod_{\sigma \in I} K^d_{F'} g'_\sigma$ telle que pour chaque $\sigma \in I$,*

$$\zeta(K^d_F g_\sigma w_{\varpi_F}^{-1} H^{re}) = K^d_{F'} g'_\sigma w_{\varpi_{F'}}^{-1} H'^{re}.$$

Preuve. — Soit une décomposition $g = k_1 \delta_{\varpi_F} k_2$, $k_i \in K_F$ $(i = 1, 2)$, $\delta_{\varpi_F} \in D^+(\varpi_F)$. Alors $K^d_F g K^d_F = k_1 K^d_F \delta_{\varpi_F} K^d_F k_2$ et l'on peut fixer un système de représentants $\{k_\sigma\}_{\sigma \in I}$ dans K^d_F des classes de $(K^d_F \cap \delta_{\varpi_F}^{-1} K^d_F \delta_{\varpi_F}) \backslash K^d_F$ tel que pour chaque $\sigma \in I$, $K^d_F g_\sigma = k_1 K^d_F \delta_{\varpi_F} k_\sigma k_2 = K^d_F k_1 \delta_{\varpi_F} k_\sigma k_2$. Fixons aussi un système de représentants $\{h_\mu\}_{\mu \in J}$ dans H^{re} des classes de $(H^{re} \cap w_{\varpi_F} K^d_F w_{\varpi_F}^{-1}) \backslash H^{re}$ et une décomposition

$$K^d_F \delta_{\varpi_F} K^d_F k_2 w_{\varpi_F}^{-1} H^{re} = \coprod_{\rho \in R} K^d_F x_\rho H^{re}.$$

Alors ([S] Prop. 3.1)

$$\mathbf{1}_{K_F^d\delta_{\varpi_F}K_F^d} * \mathbf{1}_{K_F^d k_2 w_{\varpi_F}^{-1}H^{re}} = \sum_{\rho\in R} m_\rho \mathbf{1}_{K_F^d x_\rho H^{re}}$$

où

$$m_\rho = |\{(\sigma,\mu)\in I\times J : K_F^d x_\rho = K_F^d\delta_{\varpi_F}k_\sigma k_2 w_{\varpi_F}^{-1}h_\mu\}|.$$

Pour chaque $\rho\in R$, la relation ([S] Prop. 3.2)

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(K_F^d x_\rho H^{re}, dg_F)m_\rho = |\{(\sigma,\mu)\in I\times J : K_F^d x_\rho H^{re}\\ = K_F^d\delta_{\varpi_F}k_\sigma k_2 w_{\varpi_F}^{-1}h_\mu H^{re}\}|\end{aligned}$$

entraîne l'égalité

$$m_\rho = \frac{\mathrm{vol}(K_F^d w_{\varpi_F}^{-1}H^{re}, dg_F)}{\mathrm{vol}(K_F^d x_\rho H^{re}, dg_F)}|\{\sigma\in I : K_F^d x_\rho H^{re} = K_F^d\delta_{\varpi_F}k_\sigma k_2 w_{\varpi_F}^{-1}H^{re}\}|.$$

Posons $\alpha_\rho = |\{\sigma\in I : K_F^d x_\rho H^{re} = K_F^d\delta_{\varpi_F}k_\sigma k_2 w_{\varpi_F}^{-1}H^{re}\}|$. On a $|I| = \sum_{\rho\in R}\alpha_\rho$.

Pour $i = 1, 2$, soit $k_i'\in\zeta(K_F^d k_i)$, et soit un système de représentants $\{k_\sigma'\}_{\sigma\in I}$ dans $K_{F'}^d$ des classes de $(K_{F'}^d\cap\delta_{\varpi_{F'}}^{-1}K_{F'}^d\delta_{\varpi_{F'}})\backslash K_{F'}^d$. Des relations

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{K_{F'}^d\delta_{\varpi_{F'}}K_{F'}^d} * \mathbf{1}_{K_{F'}^d k_2' w_{\varpi_{F'}}^{-1}H'^{re}} &= \zeta(\mathbf{1}_{K_F^d\delta_{\varpi_F}K_F^d}) * \zeta(\mathbf{1}_{K_F^d k_2 w_{\varpi_F}^{-1}H^{re}})\\ &= \sum_{\rho\in R} m_\rho\zeta(\mathbf{1}_{K_F^d x_\rho H^{re}})\end{aligned}$$

et

$$\frac{\mathrm{vol}(K_{F'}^d w_{\varpi_{F'}}^{-1}H'^{re}, dg_{F'})}{\mathrm{vol}(\zeta(K_F^d x_\rho H^{re}), dg_{F'})} = \frac{\mathrm{vol}(K_F^d w_{\varpi_F}^{-1}H^{re}, dg_F)}{\mathrm{vol}(K_F^d x_\rho H^{re}, dg_F)}\quad(\rho\in R),$$

on déduit, pour chaque $\rho\in R$, l'égalité

$$|\{\sigma\in I : K_{F'}^d\delta_{\varpi_{F'}}k_\sigma' k_2' w_{\varpi_{F'}}^{-1}H'^{re} = \zeta(K_F^d x_\rho H^{re})\}| = \alpha_\rho.$$

Par conséquent, quitte à permuter les éléments du système $\{k_\sigma'\}_{\sigma\in I}$, on peut supposer que pour chaque $\sigma\in I$,

$$\zeta(K_F^d\delta_{\varpi_F}k_\sigma k_2 w_{\varpi_F}^{-1}H^{re}) = K_{F'}^d\delta_{\varpi_{F'}}k_\sigma' k_2' w_{\varpi_{F'}}^{-1}H'^{re}.$$

Alors les $g_\sigma' = k_1'\delta_{\varpi_{F'}}k_\sigma' k_2'$ $(\sigma\in I)$ vérifient les propriétés voulues. □

LEMME 3. — *Soient $d \in \{1,\dots,r\}$, $w_{\varpi_F} \in W(\varpi_F)$, $g \in \underline{G}(F)$, et soit $g' \in \underline{G}(F')$ tel que $\zeta(K_F^d g w_{\varpi_F}^{-1} H^{re}) = K_{F'}^d g' w_{\varpi_{F'}}^{-1} H'^{re}$. Pour tout $h \in N_{\underline{G}(F)}(\mathcal{G})$,*

$$\mathrm{vol}(\zeta(hH^{re}) \cap w_{\varpi_{F'}}(K_{F'}^d g') w_{\varpi_{F'}}^{-1}, dg_{F'}) = \mathrm{vol}(hH^{re} \cap w_{\varpi_F}(K_F^d g) w_{\varpi_F}^{-1}, dg_F).$$

Preuve. — Pour tout $x \in \underline{G}(F)$, l'hypothèse $B_F \subset H \subset K_F$ et la condition $d \leqslant r$ assurent que $K_F^d x H^{re}$ est une partie H^{re}-biinvariante de $\underline{G}(F)$. Comme K_F^d normalise H^{re}, le lemme 3.1 entraîne l'égalité $\zeta(K_F^d w_{\varpi_F}^{-1} H^{re}) = K_{F'}^d w_{\varpi_{F'}}^{-1} H'^{re}$. De même, pour $h \in N_{\underline{G}(F)}(\mathcal{G}) = N_{\underline{G}(F)}(H^{re})$, l'hypothèse $\zeta(K_F^d g w_{\varpi_F}^{-1} H^{re}) = K_{F'} g' w_{\varpi_{F'}}^{-1} H'^{re}$ entraîne l'égalité $\zeta(K_F^d g w_{\varpi_F}^{-1} h H^{re}) = K_{F'} g' w_{\varpi_{F'}}^{-1} \zeta(hH^{re})$. Soit $h \in N_{\underline{G}(F)}(\mathcal{G})$ et soit $h' \in \zeta(hH^{re}) \subset N_{\underline{G}(F')}(\mathcal{G}')$. Alors $\zeta(hH^{re}) = h'H'^{re}$, $\zeta(h^{-1}H^{re}) = h'^{-1}H'^{re}$, et

$$\begin{aligned} hH^{re} \cap w_{\varpi_F}(K_F^d g) w_{\varpi_F}^{-1} \neq \varnothing &\Longleftrightarrow K_F^d w_{\varpi_F}^{-1} H^{re} \cap K_F^d g w_{\varpi_F}^{-1} h^{-1} H^{re} \neq \varnothing \\ &\Longleftrightarrow K_{F'}^d w_{\varpi_{F'}}^{-1} H'^{re} \cap K_{F'}^d g' w_{\varpi_{F'}}^{-1} h'^{-1} H'^{re} \neq \varnothing \\ &\Longleftrightarrow h'H'^{re} \cap w_{\varpi_{F'}}(K_{F'}^d g') w_{\varpi_{F'}}^{-1} \neq \varnothing. \end{aligned}$$

Si $hH^{re} \cap w_{\varpi_F}(K_F^d g) w_{\varpi_F}^{-1} = \varnothing$, alors

$$\mathrm{vol}(h'H'^{re} \cap w_{\varpi_{F'}}(K_{F'}^d g') w_{\varpi_{F'}}^{-1}, dg_{F'}) = \mathrm{vol}(hH^{re} \cap w_{\varpi_F}(K_F^d g) w_{\varpi_F}^{-1}, dg_F) = 0.$$

Sinon, il existe $h_1 \in hH^{re} \cap w_{\varpi_F}(K_F^d g) w_{\varpi_F}^{-1}$, $h_1' \in h'H'^{re} \cap w_{\varpi_{F'}}(K_{F'}^d g') w_{\varpi_{F'}}^{-1}$, et

$$\begin{cases} hH^{re} \cap w_{\varpi_F}^{-1}(K_F^d g) w_{\varpi_F} = (H^{re} \cap w_{\varpi_F} K_F^d w_{\varpi_F}^{-1}) h_1 \\ h'H'^{re} \cap w_{\varpi_{F'}}^{-1}(K_{F'}^d g') w_{\varpi_{F'}} = (H'^{re} \cap w_{\varpi_{F'}} K_{F'}^d w_{\varpi_{F'}}^{-1}) h_1'. \end{cases}$$

Or, clairement

$$\mathrm{vol}(H'^{re} \cap w_{\varpi_{F'}} K_{F'}^d w_{\varpi_{F'}}^{-1}, dg_{F'}) = \mathrm{vol}(H^{re} \cap w_{\varpi_F} K_F^d w_{\varpi_F}^{-1}, dg_F),$$

ce qui achève la démonstration du lemme 3.3.3. □

Soit $r(\gamma,n)$ le plus petit entier $\geqslant m(\gamma,n) + \overline{k_1}$ où (rappel) $m(\gamma,n)$ est le plus petit entier $\geqslant \sup\{1 + \overline{k_1}, n - \overline{k_1}\}$.

THÉORÈME — *Supposons $r \geqslant r(\gamma,n)$. Alors le voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\gamma,n)$ de γ dans $\underline{G}(F)_{\mathrm{e}}$ (cf. 2.3) est B_F^r-biinvariant, $\mathcal{V}' = \zeta(\mathcal{V})$ est contenu dans $\underline{G}(F')_{\mathrm{e}}$ et pour tout $\gamma' \in \mathcal{V}'$,*

$$J^{\underline{G}(F')}(\zeta(f),\gamma') = J^{\underline{G}(F)}(f,\gamma)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$.

Preuve. — Soit $m = m(\gamma, n)$. Comme $r \geqslant m + \overline{k_1}$,

$$B_F^r \subset H^{re} \subset H^{me+k_1} \subset 1 + \varpi_F^m \Lambda.$$

Par suite $H^{me+k_1}\mathcal{V}H^{me+k_1} = \gamma H^{me+k_1}(1 + \varpi_F^m\Lambda)H^{me+k_1} = \mathcal{V}$, donc a fortiori $B_F^r\mathcal{V}B_F^r = \mathcal{V}$ et la définition de $\mathcal{V}'$ a un sens. La démonstration du théorème 3.3 s'organise comme suit : (i) Relèvement de la strate simple $[\mathcal{G}, -v, -(1+k_0), \gamma]$ puis de l'$\mathcal{O}_F$-réseau Λ_γ ; (ii) Relèvement des formules d'intégration des lemmes 2.2.1 et 2.2.2.

(i) Soit $\mathcal{I} = \{g \in \underline{G}(F) : g^{-1}(\gamma + J_{\mathcal{G}}^{1+k_0})g \cap (\gamma + J_{\mathcal{G}}^{1+k_0}) \neq \varnothing\}$ le $\underline{G}(F)$-entrelacement de la strate simple $[\mathcal{G}, -v, -(1+k_0), \gamma]$. Comme $E^\times \subset N_{\underline{G}(F)}(\mathcal{G}) = N_{\underline{G}(F)}(H^{1+k_1})$, la formule $\mathcal{I} = E^\times(1 + \mathcal{P}_E\mathcal{N}_{k_0})$ ([BK] Theorem 1.5.8) entraîne l'égalité $H^{1+k_1}\mathcal{I}H^{1+k_1} = \mathcal{I}$. Par suite, $\mathcal{I}$ est l'union des doubles classes $H^{1+k_1}gH^{1+k_1} \subset \underline{G}(F)$ telles que

$$\gamma H^{1+k_1}gH^{1+k_1} \cap H^{1+k_1}gH^{1+k_1}\gamma \neq \varnothing,$$

donc $\zeta(\mathcal{I})$ est l'union des doubles classes $H'^{1+k_1}g'H'^{1+k_1} \subset \underline{G}(F')$ telles que

$$\zeta(\gamma H^{1+k_1})g'H'^{1+k_1} \cap H'^{1+k_1}g'\zeta(H^{1+k_1}\gamma) \neq \varnothing$$

et finalement

$$\zeta(\mathcal{I}) = \{g' \in \underline{G}(F') : g'^{-1}\zeta(\gamma H^{1+k_1})g' \cap \zeta(\gamma H^{1+k_1}) \neq \varnothing\}.$$

Ainsi $\zeta(\mathcal{I}) = \zeta(E^\times(1 + \mathcal{P}_E\mathcal{N}_{k_0}))$ est une partie compacte modulo $F'^\times$ qui contient le centralisateur dans $\underline{G}(F')$ de tout élément de $\zeta(\gamma H^{1+k_1})$. Par conséquent $\zeta(\gamma H^{1+k_1}) \subset \underline{G}(F')_{\mathrm{e}}$ donc $\mathcal{V}' \subset \underline{G}(F')_{\mathrm{e}}$.

Soit $y' \in \zeta(\gamma H^{1+k_1})$ et soit $E' = F'[y'] \subset M(N, F')$ l'extension (de degré N) de F' engendrée par y'. Comme $y'H'^{1+k_1} = \zeta(\gamma H^{1+k_1}) = \zeta(H^{1+k_1}\gamma) = H'^{1+k_1}y'$, $y' \in N_{\underline{G}(F')}(H'^{1+k_1}) = N_{\underline{G}(F')}(\mathcal{G}')$ donc $E'^\times$ normalise l'$\mathcal{O}_{F'}$-ordre $\mathcal{G}'$. D'autre part, $v_{\mathcal{G}'}(y') = v$ car $\zeta(\underline{G}(F) \cap (J_{\mathcal{G}}^v - J_{\mathcal{G}}^{v+1})) = \underline{G}(F') \cap (J_{\mathcal{G}'}^v - J_{\mathcal{G}'}^{v+1})$. Par conséquent, $[\mathcal{G}', -v, -(1+k_0), y']$ est une strate pure dans $M(N, F')$. L'étape suivante consiste à montrer que cette strate est simple, précisément à établir l'égalité $k_0(y', \mathcal{G}') = k_0$.

La donnée du triplet $T_r(F)$ équivaut à celle de la $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r$-algèbre $\mathbf{Z}$-graduée $A_r(F) = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathcal{P}_F^i/\mathcal{P}_F^{i+r}$, munie des morphismes $\epsilon_{F,i,j}$: $\mathcal{P}_F^{j+1}/\mathcal{P}_F^{j+r+1} \to \mathcal{P}_F^{i+1}/\mathcal{P}_F^{i+r}$ $(i \leqslant j)$ déduits par passage aux quotient des inclusions naturelles. Pour chaque $i \in \mathbf{Z}$, l'isomorphisme de groupes

$$\lambda_i : \mathcal{P}_F^i/\mathcal{P}_F^{i+r} \to \mathcal{P}_{F'}^i/\mathcal{P}_{F'}^{i+r},\ x \mapsto \varpi_{F'}^i\lambda(\varpi_F^{-i}x)$$

est compatible avec les structures de modules sur $\mathcal{P}_F^i/\mathcal{P}_F^{i+r}$ et $\mathcal{P}_{F'}^i/\mathcal{P}_{F'}^{i+r}$ au sens où $\lambda_i(ax) = \lambda(a)\lambda_i(x)$ pour $(a,x) \in \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r \times \mathcal{P}_F^i/\mathcal{P}_F^{i+r}$. De plus, pour tout couple $(i,j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $\lambda_{i+j}(xz) = \lambda_i(x)\lambda_j(z)$ pour $(x,z) \in \mathcal{P}_F^i/\mathcal{P}_F^{i+r} \times \mathcal{P}_F^j/\mathcal{P}_F^{j+r}$, et si $i \leqslant j$, la condition $\lambda(\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^r) = \varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r$ assure l'égalité $\epsilon_{F',i,j} \circ \lambda_j = \lambda_i \circ \epsilon_{F,i,j}$. Ainsi, les choix de λ, ϖ_F, $\varpi_{F'}$ induisent (via les morphismes λ_i, $i \in \mathbf{Z}$) un isomorphisme d'algèbres graduées $A_r(F) \simeq A_r(F')$ [(2)].

Soient $f = f(E/F)$ le degré résiduel de l'extension E/F. L'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire $\mathcal{G}$ est principal, d'$\mathcal{O}_F$-période $e(\mathcal{G} \mid \mathcal{O}_F) = e$ (cf. [BK] 1.1) et satisfait la double inclusion $\mathcal{B}_F \subset \mathcal{G} \subset M(N, \mathcal{O}_F)$. Donc $\mathcal{G}$ est l'ensemble des matrices $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant e} \in M(N,F)$ décomposées en blocs $f \times f$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} X_{i,j} \in M(f, \mathcal{O}_F) & \text{si } j \geqslant i \\ X_{i,j} \in \varpi_F M(f, \mathcal{O}_F) & \text{si } j < i, \end{cases}$$

et pour $k \in \mathbf{Z}$ de la forme $k = de+s$, $d \in \mathbf{Z}$, $0 \leqslant s \leqslant e-1$, $J_{\mathcal{G}}^k$ est l'ensemble des matrices $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant e} \in M(N,F)$ décomposées en blocs $f \times f$ vérifiant les conditions ([BK] 2.5.2)

$$\begin{cases} X_{i,j} \in \varpi_F^d M(f, \mathcal{O}_F) & \text{si } j - i \geqslant s \\ X_{i,j} \in \varpi_F^{d+2} M(f, \mathcal{O}_F) & \text{si } j - i < s - e \\ X_{i,j} \in \varpi_F^{d+1} M(f, \mathcal{O}_F) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $z_{\varpi_F} \in W(\varpi_F)$ la matrice $(Z_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant e}$ décomposée en blocs $f \times f$: $Z_{i,i+1} = 1_{f \times f}$ $(i = 1, \ldots, e-1)$, $Z_{e,1} = \varpi_F 1_{f \times f}$ et $Z_{i,j} = 0_{f \times f}$ si $j \not\equiv i + 1 \bmod e\mathbf{Z}$ (où $1_{f \times f}$ et $0_{f \times f}$ désignent respectivement les éléments diagonaux $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$ et $\mathrm{diag}(0, \ldots, 0)$ de $M(f,F)$). Le sous-groupe $\langle z_{\varpi_F} \rangle$ de $W(\varpi_F)$ engendré par z_{ϖ_F} normalise $\mathcal{G}$, on a $N_{\underline{G}(F)}(\mathcal{G}) = \langle z_{\varpi_F} \rangle \cdot H$ (produit semi-direct) et $J_{\mathcal{G}}^k = z_{\varpi_F}^k \mathcal{G}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Soit $\mu_k : J_{\mathcal{G}}^k / J_{\mathcal{G}}^{k+re} \to J_{\mathcal{G}'}^k / J_{\mathcal{G}'}^{k+re}$ l'isomorphisme de groupes défini composante par composante : pour tout $x = (x_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant N} \in J_{\mathcal{G}}^k$, $\mu_k(x +$

---

(2) Clairement, cet isomorphisme ne dépend pas vraiment de ϖ_F et $\varpi_{F'}$ (vérifiant la condition $\lambda(\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^r) = \varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^r$) mais seulement de $\varpi_F \bmod \mathcal{P}_F^{r+1}$ et $\varpi_{F'} \bmod \mathcal{P}_{F'}^{r+1}$, donc seulement de l'isomorphisme de triplets $T_r(F) \simeq T_r(F')$ donné par $\lambda = \lambda_0$ et $\widetilde{\lambda} = \lambda_1$.

$J_{\mathcal{G}}^{k+re}) = x' + J_{\mathcal{G}}^{k+re}$ où $x' = (x'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant N} \in J_{\mathcal{G}}^{k}$ est tel que

$$\begin{cases} x'_{i,j} + \mathcal{P}_{F'}^{d+r} = \lambda_d(x_{i,j} + \mathcal{P}_F^{d+r}) & \text{si } \left[\dfrac{j-1}{f}\right] - \left[\dfrac{i-1}{f}\right] \geqslant s \\ x'_{i,j} + \mathcal{P}_{F'}^{d+2+r} = \lambda_{d+2}(x_{i,j} + \mathcal{P}_F^{d+2+r}) & \text{si } \left[\dfrac{j-1}{f}\right] - \left[\dfrac{i-1}{f}\right] < s-e \\ x'_{i,j} + \mathcal{P}_{F'}^{d+1+r} = \lambda_{d+1}(x_{i,j} + \mathcal{P}_F^{d+1+r}) & \text{sinon,} \end{cases}$$

$[\,]$ désignant la partie entière. Pour tout couple $(k,t) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, $\mu_{k+t}(xz) = \mu_k(x)\mu_t(z)$ pour $(x,z) \in J_{\mathcal{G}}^{k}/J_{\mathcal{G}}^{k+re} \times J_{\mathcal{G}}^{t}/J_{\mathcal{G}}^{t+re}$. En particulier, pour $g \in N_{\underline{G}(F)}(\mathcal{G})$ décomposé en $g = z_{\varpi_F}^{k}h$, $k \in \mathbf{Z}$, $h \in H$, on a

$$\mu_k(g+J_{\mathcal{G}}^{k+re}) = \mu_k(z_{\varpi_F}^{k}H^{re})\mu_0(hH^{re}) = z_{\varpi_{F'}}^{k}H'^{re}\zeta(hH^{re}) = z_{\varpi_{F'}}^{k}\zeta(hH^{re})$$

d'où $\mu_k(g + J_{\mathcal{G}}^{k+re}) = \zeta(g + J_{\mathcal{G}}^{k+re})$.

Soit un couple $(k,t) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, $k \leqslant 1 + k_0$. Comme

$$\mathcal{P}_E^{t}\mathcal{N}_k = \{g \in J_{\mathcal{G}}^{t} : \gamma g - g\gamma \in J_{\mathcal{G}}^{t+k}\},$$

l'inégalité $k - v \leqslant 1 + k_1$ assure que $\mathcal{P}_E^{t}\mathcal{N}_k + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_1} = \mathcal{P}_E^{t}\mathcal{N}_k$. Or, pour tout $g \in J_{\mathcal{G}}^{t}$,

$$\begin{cases} \gamma g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_0} = \gamma(g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_1}) = (\gamma + J_{\mathcal{G}}^{1+k_0})(g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_1}) \\ g\gamma + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_0} = (g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_1})\gamma = (g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_1})(\gamma + J_{\mathcal{G}}^{1+k_0}) \end{cases}.$$

Comme $1 + k_1 \leqslant re$, les relations

$$\begin{cases} \mu_v(\gamma + J_{\mathcal{G}}^{1+k_0}) = \zeta(\gamma + J_{\mathcal{G}}^{1+k_0}) = y' + J_{\mathcal{G}'}^{1+k_0} \\ \left.\begin{array}{l} \mu_{v+t}(\gamma g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_0}) = \mu_v(\gamma + J_{\mathcal{G}}^{1+k_0})\mu_t(g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_1}) \\ \mu_{v+t}(g\gamma + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_0}) = \mu_t(g + J_{\mathcal{G}}^{t+1+k_1})\mu_v(\gamma + J_{\mathcal{G}}^{1+k_0}) \end{array}\right\} \text{pour tout } g \in J_{\mathcal{G}}^{t} \end{cases}$$

entraînent l'égalité

$$\begin{aligned} \mu_t(\mathcal{P}_E^{t}\mathcal{N}_k) &= \{g' \in J_{\mathcal{G}'}^{t} : y'g' - g'y' \in J_{\mathcal{G}'}^{t+k}\} \\ &= \mathcal{P}_{E'}^{t}\mathcal{N}_k(y',\mathcal{G}'). \end{aligned}$$

En particulier, $\mu_0(\mathcal{N}_{k_0}) = \mathcal{N}_{k_0}(y',\mathcal{G}')$ et $\mu_0(\mathcal{N}_{k_0+1}) = \mathcal{N}_{k_0+1}(y',\mathcal{G}')$. L'inclusion $E'^{\times} \subset \zeta(E^{\times}(1 + \mathcal{P}_E\mathcal{N}_{k_0}))$ impliquant l'égalité $\mu_0(\mathcal{O}_E + J_{\mathcal{G}}) = \mathcal{O}_{E'} + J_{\mathcal{G}'}$, on en déduit que $k_0(y',\mathcal{G}') = k_0$.

Quant au réseau $\Lambda = \Lambda_\gamma$, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} J_{\mathcal{G}}^{1-k_1}/J_{\mathcal{G}}^{1-k_1+re} & \times & J_{\mathcal{G}}^{k_1-re}/J_{\mathcal{G}}^{k_1} & \xrightarrow{tr_F} & \mathcal{P}_F^{1-r}/\mathcal{P}_F^{1} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ J_{\mathcal{G}'}^{1-k_1}/J_{\mathcal{G}'}^{1-k_1+re} & \times & J_{\mathcal{G}'}^{k_1-re}/J_{\mathcal{G}'}^{k_1} & \xrightarrow{tr_{F'}} & \mathcal{P}_{F'}^{1-r}/\mathcal{P}_{F'}^{1}, \end{array}$$

les flèches verticales désignant les isomorphismes de groupes $\mu_{1-k_1}\times\mu_{k_1-re}$ et λ_{1-r}. Comme $\mathcal{P}_E^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0}\subset J_{\mathcal{G}}^{1-k_1}$ et $\mathcal{P}_E^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0}+J_{\mathcal{G}}^{1-k_1+re}=\mathcal{P}_E^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0}$, on a par dualité $\Lambda=(\mathcal{P}_E^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0})^*\subset J_{\mathcal{G}}^{k_1-re}$ et $\Lambda+J_{\mathcal{G}}^{k_1}=\Lambda$. Le diagramme ci-dessus entraîne donc l'égalité

$$\begin{aligned}\mu_{k_1-re}(\Lambda)&=(\mu_{1-k_1}(\mathcal{P}_E^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0}))^*\\&=(\mathcal{P}_{E'}^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0}(y',\mathcal{G}'))^*\\&=\Lambda_{y'}.\end{aligned}$$

On pose $\Lambda'=\mu_{k_1-re}(\Lambda)$ $(=\mu_0(\Lambda))$.

(ii) Soit $\gamma'\in\mathcal{V}'\subset\zeta(\gamma H^{1+k_1})$. Comme $re-me\geqslant k_1$, $\mu_{-me}(\Lambda)=\mu_0(\Lambda)=\Lambda'$ et donc $\zeta(1+\varpi_F^m\Lambda)=1+\varpi_{F'}^m\mu_{-me}(\Lambda)=1+\varpi_{F'}^m\Lambda'$.

Soient $g\in\underline{G}(F)$ et χ la fonction caractéristique de la double classe $K_F^ngK_F^n$. Rappelons la notation $\overline{\chi}=\int_{K_F}\mathrm{Ad}_G^*(g)(\chi)dg$. Comme $\mathrm{vol}(K_F,dg)=1$,

$$\overline{\chi}=\frac{1}{[K_F:K_F^n]}\sum_{\tau\in T}\mathbf{1}_{k_\tau K_F^ngK_F^nk_\tau^{-1}},$$

les $k_\tau\in K_F$ parcourant un système de représentants des classes de $K_F \bmod K_F^n$. Soit $g'\in\underline{G}(F')$ tel que $\zeta(K_F^ngK_F^n)=K_{F'}^ng'K_{F'}^n$ et, pour chaque $\tau\in T$, soit $k'_\tau\in K_{F'}$ tel que $\zeta(k_\tau K_F^n)=k'_\tau K_{F'}^n$ (condition impliquant l'égalité $\zeta(k_\tau^{-1}K_F^n)=k_\tau'^{\,-1}K_{F'}^n$). Alors $K_{F'}=\coprod_{\tau\in I}k'_\tau K_{F'}^n$, et puisque K_F normalise K_F^n, pour chaque $\tau\in T$,

$$\zeta(k_\tau K_F^ngK_F^nk_\tau^{-1})=k'_\tau K_{F'}^ng'K_{F'}^nk_\tau'^{\,-1}.$$

Donc $\zeta(\overline{\chi})=\overline{\zeta(\chi)}$ et par linéarité $\zeta(\overline{f})=\overline{\zeta(f)}$ pour toute fonction $f\in\mathcal{H}(\underline{G}(F),K_F^n)$.

Continuons avec la fonction $\chi=\mathbf{1}_{K_F^ngK_F^n}$. Soit $w_{\varpi_F}\in\Sigma\subset W(\varpi_F)$. Fixons une décomposition $K_F^ngK_F^n=\coprod_{\sigma\in I}K_F^ng_\sigma$ et (grâce au lemme 3.3.2) une décompostion $\zeta(K_F^ngK_F^n)=\coprod_{\sigma\in I}K_{F'}^ng'_\sigma$ telle que pour chaque $\sigma\in I$,

$$\zeta(K_F^ng_\sigma w_{\varpi_F}^{-1}H^{re})=K_{F'}^ng'_\sigma w_{\varpi_{F'}}^{-1}H'^{re}.$$

Écrivons $w_{\varpi_F}=s\delta_{\varpi_F}$ avec $s\in S_F$, $\delta_{\varpi_F}\in\Delta(\varpi_F,s)$. Reprenons la notation $P_0^s=s\underline{P_0}(F)s^{-1}$ et posons $s'=w_{\varpi_{F'}}\delta_{\varpi_{F'}}^{-1}\in S_{F'}$, $P_0^{s'}=s'\underline{P_0}(F')s'^{-1}$. Soit un couple $(x,p)\in H\times(P_0^s\cap K_F^n)$ et soient $x'\in H'$, $p'\in P_0^{s'}\cap K_{F'}^n$ tels que $\zeta(xH^{re}) = x'H'^{re}$ et $\zeta(pH^{re}) = p'H'^{re}$. Fixons une décomposition $1+\varpi_F^m\Lambda = \coprod_{\rho\in R} h_\rho H^{re}$. Comme $xp \in N_{\underline{G}(F)}(H^{re})$,

$$x^{-1}\gamma(1+\varpi_F^m\Lambda)xp = \coprod_{\rho\in R} x^{-1}\gamma h_\rho xpH^{re},$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_{x^{-1}\gamma(1+\varpi_F^m\Lambda)xp} &\chi(w_{\varpi_F}^{-1} g_F w_{\varpi_F})dg_F \\ &= \sum_{\sigma,\rho}\int_{x^{-1}\gamma h_\rho xpH^{re}} \mathbf{1}_{K_F^n g_\sigma}(w_{\varpi_F}^{-1} g_F w_{\varpi_F})dg_F \\ &= \sum_{\sigma,\rho} v_{\sigma,\rho}\end{aligned}$$

avec

$$v_{\sigma,\rho} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{vol}(x^{-1}\gamma h_\rho xpH^{re}\cap w_{\varpi_F}(K_F^n g_\sigma)w_{\varpi_F}^{-1}, dg_F).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}x'^{-1}\gamma'(1+\varpi_{F'}^m\Lambda')x'p' &= \zeta(x^{-1}\gamma(1+\varpi_F^m\Lambda)xp) \\ &= \coprod_{\rho\in R}\zeta(x^{-1}\gamma h_\rho xpH^{re}),\end{aligned}$$

et pour chaque couple $(\sigma,\rho)\in I\times R$ (Lemme 3.3.3),

$$\mathrm{vol}(\zeta(h^{-1}\gamma h_\rho xpH^{re})\cap w_{\varpi_{F'}}(K_{F'}^n g'_\sigma)w_{\varpi_{F'}}^{-1}, dg_{F'}) = v_{\sigma,\rho}.$$

D'où l'égalité

$$\begin{aligned}\int_{x'^{-1}\gamma'(1+\varpi_{F'}^m\Lambda')x'p'} &\zeta(\chi)(w_{\varpi_{F'}}^{-1} g_{F'} w_{\varpi_{F'}})dg_{F'} \\ &= \int_{x^{-1}\gamma(1+\varpi_F^m\Lambda)xp}\chi(w_{\varpi_F}^{-1} g_F w_{\varpi_F})dg_F.\end{aligned}$$

Quand (x,p) parcourt une famille de représentants des classes de $H\times(P_0^s\cap K_F^n) \bmod H^{me}\times(P_0^s\cap H^{me+k_1})$, (x',p') parcourt une famille de représentants des classes de $H'\times(P_0^{s'}\cap K_{F'}^n) \bmod H'^{me}\times(P_0^{s'}\cap H'^{me+k_1})$. Quant à la constante $d(\gamma,s)$ définie dans l'énoncé du lemme 2.2.2, les relations $\zeta(H^{me}) = H'^{me}$, $\zeta(H^{me+k_1}) = H'^{me+k_1}$, $\zeta(1+\varpi_F^m\Lambda) = 1+\varpi_{F'}^m\Lambda'$ entraînent l'égalité $d(\gamma',s') = d(\gamma,s)$.

Pour chaque $\delta_{\varpi_F} \in \Delta(\varpi_F)$,

$$\frac{\mathrm{vol}(F'^{\times}H'\delta_{\varpi_{F'}}K_{F'}, \frac{dg_{F'}}{dz_{F'}})}{\mathrm{vol}(\underline{P_0}(F') \cap K^n_{F'}, dp_{F'})\mathrm{vol}(H', dg_{F'})} = \frac{\mathrm{vol}(F^{\times}H\delta_{\varpi_F}K_F, \frac{dg_F}{dz_F})}{\mathrm{vol}(\underline{P_0}(F) \cap K^n_F, dp_F)\mathrm{vol}(H, dg_F)}$$

car $\zeta(F^{\times}H\delta_{\varpi_F}K_F) = F'^{\times}H'\delta_{\varpi_{F'}}K_{F'}$, $\zeta(K^n_F) = K^n_{F'}$ et $\zeta(H) = H'$, et l'ensemble $\{w_{\varpi_{F'}} : w_{\varpi_F} \in \Sigma\} \subset W(\varpi_{F'})$ paramétrise les doubles classes $F'^{\times}H'\backslash\underline{G}(F')/K_{F'}$. En définitive, par linéarité de l'application $\mathcal{H}(\underline{G}(F), K^n_F) \to \mathbf{C}$, $f \mapsto J^{\underline{G}(F)}(f,\gamma)$, et compte tenu de la relation $\zeta(\overline{f}) = \overline{\zeta(f)}$ montrée plus haut, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K^n_F)$, les lemmes 2.2.1 et 2.2.2 impliquent l'égalité

$$J^{\underline{G}(F')}(\zeta(f),\gamma') = J^{\underline{G}(F)}(f,\gamma).$$

Fin de la démonstration du théorème 3.3. □

3.4. Soient $(\underline{P}, \underline{A})$ une paire parabolique de $\underline{G}$ définie sur F, $\underline{U}$ le radical unipotent de $\underline{P}$ et $\underline{M}$ le centralisateur de $\underline{A}$ dans $\underline{G}$. On pose $P = \underline{P}(F)$, $A = \underline{A}(F)$, $U = \underline{U}(F)$ et $M = \underline{M}(F)$. Soit K_P un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à (P, A), i.e. tel que $G = K_P P$ et $P \cap K_P = (M \cap K_P)(U \cap K_P)$. Soient dk_P et du les mesures de Haar sur K_P et U telles que $\mathrm{vol}(K_P, dk_P) = \mathrm{vol}(U \cap K_P, du) = 1$. Pour toute fonction $f \in C^\infty_c(G)$, on définit le *terme K_P-invariant* $f^P \in C^\infty_c(M)$ *de f suivant P* par la formule

$$f^P(m) = \delta_P^{1/2}(m) \int_{K_P}\int_U f(k_P^{-1}muk_P)dk_P du \quad (m \in M)$$

où $\delta_P^{1/2} : P \to \mathbf{Q}^\times$ est le caractère module sur P (si dp est une mesure de Haar à droite ou à gauche sur P, alors $\delta_P(p_1) = d(p_1pp_1^{-1})/dp$ pour tout $p_1 \in P$).

Soit $M_{\mathrm{e}} \subset M$ l'ouvert des éléments elliptiques dans M. Pour $y \in M_{\mathrm{e}}$ et $f \in C^\infty_c(M)$, soit

$$J^M(f,y) = \int_{A\backslash M} f(m^{-1}ym)\frac{dm}{da}$$

où dm et da sont les mesures de Haar sur M et A telles que $\mathrm{vol}(\underline{M}(\mathcal{O}_F), dm) = \mathrm{vol}(\underline{A}(\mathcal{O}_F), da) = 1$.

Soit $G_{\mathrm{r}} \subset G$ l'ouvert des éléments semi-simples réguliers (i.e. de polynôme caractéristique produit de polynômes unitaires irréductibles deux à deux distincts dans $F[T]$). Soit $|\ |_F$ la valeur absolue sur F normalisée par

$|\varpi_F|_F = q^{-1}$ où q est le cardinal du corps résiduel de F. Si $y \in M_{\mathrm{e}} \cap G_{\mathrm{r}}$, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$ et toute mesure de Haar dg_y sur le centralisateur $G_y = F[y]^\times$ de y dans G, on a la formule de descente (cf. [La] Prop. 4.3.11),

$$\int_{G_y\backslash G} f(g^{-1}yg)\,\frac{dg}{dg_y} = |D_{M\backslash G}(y)|_F^{-1/2} \int_{G_y\backslash M} f^P(m^{-1}ym)\,\frac{dm}{dg_y}$$

où $D_{M\backslash G}(y) = \det_{L(M)\backslash L(G)}(1 - \mathrm{Ad}_G(m^{-1}))$. En particulier, l'intégrale orbitale $J^M(f^P, y)$ ne dépend pas des choix de P, K_P. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on pose

$$J^G(f, y) = J^M(f^P, y).$$

La définition a un sens car M (en tant que centralisateur dans G de la sous-F-algèbre déployée maximale de $F[y]$) est l'unique sous-groupe de Levi de G tel que $y \in M_{\mathrm{e}}$.

3.5. Version du théorème 3.3 pour les éléments semi-simples réguliers (en position standard).

Soit $\gamma \in G_{\mathrm{r}}$. Quitte à remplacer γ par l'un de ses conjugués dans G, on suppose que le groupe multiplicatif A de la sous-F-algèbre déployée maximale de $F[\gamma]$ est un sous-tore standard de A_0, i.e. l'ensemble des matrices diagonales de la forme

$$\mathrm{diag}(\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{N_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{N_2}, \dots, \underbrace{a_d, \dots, a_d}_{N_d}) \quad (a_i \in F^\times)$$

pour une suite $N_1, \dots, N_d$ d'entiers > 0 tels que $\sum_{i=1}^{d} N_i = N$. Soient $\underline{A}$ le sous-tore de $\underline{A_0}$ tel que $A = \underline{A}(F)$, $\underline{M} = \prod_{i=1}^{d} GL(N_i) \subset \underline{G}$ le centralisateur de $\underline{A}$ dans $\underline{G}$ et $\underline{P}$ le sous-groupe parabolique de $\underline{G}$ de composante de Levi $\underline{M}$ contenant $\underline{P_0}$. Posons $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in M = \underline{M}(F)$. Soit $j \in \{1, \dots, d\}$. Si $N_j \geqslant 2$, $\gamma_j \in GL(N_j, F)_{\mathrm{e}}$ et l'on définit l'$\mathcal{O}_F$-ordre $\mathcal{G}_j$ dans $M(N_j, F)$, l'$\mathcal{O}_F$-réseau Λ_{γ_j} dans $M(N_j, F)$ et les entiers $m(\gamma_j, n)$, $r(\gamma_j, n)$, comme en 1.2, 2.2 et 3.3. Si $N_j = 1$, on pose $\mathcal{G}_j = \Lambda_{\gamma_j} = \mathcal{O}_F$ et $m(\gamma_j, n) = r(\gamma_j, n) = n$. Soit alors $m(\gamma, n)$ le plus petit entier m tel que $m \geqslant \sup\{m(\gamma_i, n) : i = 1, \dots, d\}$ et $\prod_{i=1}^{d} \gamma_i(1 + \varpi_F^m \Lambda_i) \subset M_{\mathrm{e}} \cap G_{\mathrm{r}}$, et soit $\mathcal{V}(\gamma, n) = \prod_{i=1}^{d} \gamma_i(1 + \varpi_F^{m(\gamma,n)} \Lambda_{\gamma_i})$. Enfin, soit $\overline{k_1}(\gamma) = \sup\{\overline{k_1}(\gamma_i) : i =$

$1, \ldots, d\}$ avec

$$\begin{cases} \overline{k_1}(\gamma_i) = \dfrac{1}{e(F[\gamma_i]/F)}(k_0(\gamma_i, \mathcal{G}_i) - v_{\mathcal{G}_i}(\gamma_i)) & \text{si } N_i \geqslant 2 \\ \overline{k_1}(\gamma_i) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quitte à remplacer (à nouveau) γ par l'un de ses conjugués dans M, on suppose que $M \cap B_F \subset \prod_{i=1}^{d} \mathcal{G}_i^\times \subset M \cap K_F$. Un tel γ est dit *en position standard.*

Soient $B^r_{F,\underline{M}} = \underline{M}(F) \cap B^r_F = \prod_{i=1}^{d} B^r_{F,i}$ et $\mathcal{H}^r_{F,\underline{M}} = \otimes_{i=1}^d \mathcal{H}^r_{F,i}$ l'algèbre de Hecke des fonctions complexes $B^r_{F,\underline{M}}$-biinvariantes à support compact sur $\underline{M}(F)$ munie du produit de convolution défini par la mesure de Haar dm_F sur $\underline{M}(F)$ telle que $\mathrm{vol}(\underline{M}(\mathcal{O}_F), dm_F) = 1$. L'isomorphisme de triplets $(\lambda, \widetilde{\lambda}) : T_r(F) \to T_r(F')$ induit comme en 3.2 un isomorphisme d'algèbres $\zeta_{\underline{M}} = \otimes_{i=1}^d \zeta_i : \mathcal{H}^r_{F,\underline{M}} \to \mathcal{H}^r_{F',\underline{M}}$.

Soit $\underline{U}$ le radical unipotent de $\underline{P}$ et soit du_F la mesure de Haar sur $\underline{U}(F)$ telle que $\mathrm{vol}(\underline{U}(\mathcal{O}_F), du_F) = 1$.

LEMME. — *Soit $w_{\varpi_F} \in W(\varpi_F)$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^r_F$,*

$$\int_{\underline{U}(F')} \zeta(f)(w_{\varpi_{F'}} u_{F'}) du_{F'} = \int_{\underline{U}(F)} f(w_{\varpi_F} u_F) du_F.$$

Preuve (Waldspurger). — Notons $\underline{P}^-$ le sous-groupe parabolique de $\underline{G}$ opposé à $\underline{P}$ et $\underline{U}^-$ son radical unipotent. Soit $\delta_{\varpi_F} \in \Delta(\varpi_F) \cap A$ l'élément diagonal

$$\mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{N_1}, \underbrace{\varpi_F, \ldots, \varpi_F}_{N_2}, \ldots, \underbrace{\varpi_F^{d-1}, \ldots, \varpi_F^{d-1}}_{N_d}).$$

Pour $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, $\mathrm{Ad}_G\, \delta^m_{\varpi_F}$ dilate $\underline{U}(F)$ et contracte $\underline{U}^-(F)$. Posons $B^r_{F,\underline{U}} = \underline{U}(F) \cap B^r_F$, $B^r_{F,\underline{P}^-} = \underline{P}^-(F) \cap B^r_F$ et

$$I^m_F(f) = \int_{\delta^m_{\varpi_F} B^r_{F,\underline{U}} \delta^{-m}_{\varpi_F}} f(w_{\varpi_F} u_F) du_F \quad (m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0},\ f \in C_c^\infty(G)).$$

Soit une fonction $f \in C_c^\infty(G)$. Comme $w_{\varpi_F}^{-1}\mathrm{Supp}(f) \cap \underline{U}(F)$ est une partie compacte de $\underline{U}(F)$, il existe un entier $m_0 = m_0(f) \geqslant 0$ tel que pour tout entier $m \geqslant m_0$, on a

$$\int_{\underline{U}(F)} f(w_{\varpi_F} u_F) du_F = I^m_F(f) = I^{m_0}_F(f).$$

L'élément $\mathrm{diag}(1,\ldots,1,\varpi_{F'},\ldots,\varpi_{F'},\ldots,\varpi_{F'}^{d-1},\ldots,\varpi_{F'}^{d-1})$ de $\underline{A}(F')$ coïncidant avec l'image $\delta_{\varpi_{F'}}$ de δ_{ϖ_F} par l'isomorphisme de groupes $W(\varpi_F)\to W(\varpi_{F'})$ défini en 3.3, il suffit donc de prouver que pour toute fonction $f\in\mathcal{H}_F^r$ et tout entier $m\geqslant 0$, $I_{F'}^m(\zeta(f))=I_F^m(f)$ où $I_{F'}^m$ est la distribution sur $\underline{G}(F')$ obtenue en remplaçant F par F' dans la définition de I_F^m. Fixons un entier $m\geqslant 0$ et soit $\varphi_{\delta_{\varpi_F}^m}$ la fonction caractéristique de la double classe $B_F^r\delta_{\varpi_F}^m B_F^r$. Puisque $B_F^r=B_{F,\underline{U}}^r B_{F,\underline{P}^-}^r$ et $\delta_{\varpi_F}^m B_{F,\underline{P}^-}^r\delta_{\varpi_F}^{-m}\subset B_F^r$, pour tout $x\in G$ et toute fonction $f\in C_c^\infty(G)$, on a

$$f*\varphi_{\delta_{\varpi_F}^m}(x\delta_{\varpi_F}^m)=\int_{x\delta_{\varpi_F}^m B_F^r\delta_{\varpi_F}^{-m}B_F^r}f(g)dg=\int_{\delta_{\varpi_F}^m B_{F,\underline{U}}^r\delta_{\varpi_F}^{-m}B_{F,\underline{P}^-}^r}f(xg)dg.$$

Sur l'ouvert (dense) $\underline{U}(F)\underline{P}^-(F)$ de G, la mesure $dg=dg_F$ se décompose en $dg_F=du_F dp_F^-$ où dp_F^- est la mesure de Haar à droite sur $\underline{P}^-(F)$ telle que

$$\mathrm{vol}(B_{F,\underline{P}^-},dp_F^-)=\mathrm{vol}(B_F,dg_F)$$

en posant $B_{F,\underline{P}^-}=\underline{P}^-(F)\cap B_F$. Ainsi, pour toute fonction $f\in\mathcal{H}_F^r$, on a

$$f*\varphi_{\delta_{\varpi_F}^m}(w_{\varpi_F}\delta_{\varpi_F}^m)=\mathrm{vol}(B_{F,\underline{P}^-}^r,dp_F^-)I_F^m(f)=\frac{\mathrm{vol}(B_F,dg_F)}{[B_{F,\underline{P}^-}:B_{F,\underline{P}^-}^r]}I_F^m(f)$$

et

$$\zeta(f)*\zeta(\varphi_{\delta_{\varpi_F}^m})(w_{\varpi_{F'}}\delta_{\varpi_{F'}}^m)=\zeta(f*\varphi_{\delta_{\varpi_F}^m})(w_{\varpi_{F'}}\delta_{\varpi_{F'}}^m)=f*\varphi_{\delta_{\varpi_F}^m}(w_{\varpi_F}\delta_{\varpi_F}^m).$$

Puisque $\zeta(\varphi_{\delta_{\varpi_F}^m})$ est la fonction caractéristique de la double classe $B_{F'}^r\delta_{\varpi_{F'}}^m B_{F'}^r$ et

$$\frac{\mathrm{vol}(B_{F'},dg_{F'})}{[B_{F',\underline{P}^-}:B_{F',\underline{P}^-}^r]}=\frac{\mathrm{vol}(B_F,dg_F)}{[B_{F,\underline{P}^-}:B_{F,\underline{P}^-}^r]},$$

le lemme 3.5 est prouvé. □

THÉORÈME. — *Supposons $r\geqslant m(\gamma,n)+\overline{k_1}(\gamma)$. Alors le voisinage $\mathcal{V}=\mathcal{V}(\gamma,n)$ de γ dans $\underline{M}(F)_{\mathrm{e}}\cap\underline{G}(F)_{\mathrm{r}}$ est $B_{F,\underline{M}}^r$-biinvariant, $\mathcal{V}'=\zeta_{\underline{M}}(\mathcal{V})$ est contenu dans $\underline{G}(F')_{\mathrm{r}}$, $\mathcal{V}'_*=\{g'^{-1}\gamma'g:g'\in\underline{G}(F'),\ \gamma'\in\mathcal{V}'\}$ est ouvert dans $\underline{G}(F')_{\mathrm{r}}$ et pour tout $\gamma'\in\mathcal{V}'_*$,*

$$J^{\underline{G}(F')}(\zeta(f),\gamma')=J^{\underline{G}(F)}(f,\gamma)$$

pour toute fonction $f\in\mathcal{H}(\underline{G}(F),K_F^n)$.

Preuve. — Pour $i = 1, \dots, d$, posons $e_i = e(F[\gamma_i]/F)$, $\mathcal{V}_i = \gamma_i(1 + \varpi_F^{m(\gamma,n)}\Lambda_{\gamma_i})$, $\mathcal{V}'_i = \zeta_i(\mathcal{V}_i)$ et pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant re_i$, $H_i^k = 1 + J_{\mathcal{G}_i}^k$, $H_i'^k = \zeta_i(H_i^k)$. Il est clair que $B_{F,\underline{M}}^r \mathcal{V} B_{F,\underline{M}}^r = \mathcal{V}$ et que $\mathcal{V}'$ est contenu dans $\underline{M}(F')_{\mathrm{e}}$. Pour que $\mathcal{V}'$ soit contenu dans $\underline{G}(F')_{\mathrm{r}}$, il faut et il suffit que pour tout couple d'entiers (i,j), $1 \leqslant i \neq j \leqslant d$ tel que $N_i = N_j$ et tout $g' \in GL(N_i, F')$, on ait $g'^{-1}\mathcal{V}'_i g' \cap \mathcal{V}'_j = \varnothing$. Supposons qu'il existe un couple d'entiers (i,j), $1 \leqslant i \neq j \leqslant d$ tel que $N_i = N_j$, et posons $N_\bullet = N_i$, $\underline{G_\bullet} = GL(N_\bullet)$ et $\zeta_\bullet = \zeta_i$. Comme $H_i'^{re_i}\mathcal{V}'_i H_i'^{re_i} = \mathcal{V}'_i$ et $H_j'^{re_j}\mathcal{V}'_j H_j'^{re_j} = \mathcal{V}'_j$, le $\underline{G_\bullet}(F')$-entrelacement

$$\mathcal{I}'_{i,j} = \{g' \in \underline{G_\bullet}(F') : g'^{-1}\mathcal{V}'_i g' \cap \mathcal{V}'_j \neq \varnothing\}$$

est une partie $(H_i'^{re_i}, H_j'^{re_j})$-biinvariante de $\underline{G_\bullet}(F')$ qui coïncide avec l'union des doubles classes $H_i'^{re_i} g' H_j'^{re_j} \subset \underline{G_\bullet}(F')$ telles que $\mathcal{V}'_i g' H_j'^{re_j} \cap H_i'^{re_i} g' \mathcal{V}'_j \neq \varnothing$. Supposons par l'absurde que $\mathcal{I}'_{i,j} \neq \varnothing$. Alors $e_i = e_j$, donc $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_j$ (puisque γ est en position standard) et $H_i^{re_i} = H_j^{re_j}$. Notons $\Gamma = H_i^{re_i}$ et $\Gamma' = H_i'^{re_i}$. Comme $\mathcal{V}'_i \subset N_{\underline{G}(F')}(\Gamma')$ et $\mathcal{V}'_j \subset N_{\underline{G}(F')}(\Gamma')$, pour $\gamma'_i \in \mathcal{V}'_i$, $\gamma'_j \in \mathcal{V}'_j$ et $g' \in \underline{G_\bullet}(F')$, on a

$$\begin{cases} \zeta_\bullet^{-1}(\Gamma'\gamma'_i g'\Gamma') = y_i \zeta_\bullet^{-1}(\Gamma' g'\Gamma') \\ \zeta_\bullet^{-1}(\Gamma' g'\gamma'_j\Gamma') = \zeta_\bullet^{-1}(\Gamma' g'\Gamma') y_j \end{cases}$$

pour tout $y_i \in \zeta_\bullet^{-1}(\gamma'_i\Gamma')$ et tout $y_j \in \zeta_\bullet^{-1}(\gamma'_j\Gamma')$; par conséquent

$$\varnothing \neq \zeta_\bullet^{-1}(\mathcal{I}'_{i,j}) \subset \{g \in \underline{G_\bullet}(F) : g^{-1}\mathcal{V}_i g \cap \mathcal{V}_j \neq \varnothing\}$$

ce qui contredit le fait que $\mathcal{V}$ est contenu dans $\underline{G}(F)_{\mathrm{r}}$. Donc $\mathcal{V}' \subset \underline{G}(F')_{\mathrm{r}}$.

Soit $F'[T]_N$ la variété $\varpi_{F'}$-adique des polynômes unitaires de degré N. L'application "polynôme caractéristique" $p_{F'} : \underline{G}(F') \to F'[T]_N$ induit une submersion $\underline{G}(F')_{\mathrm{r}} \to p_{F'}(\underline{G}(F')_{\mathrm{r}})$ de fibres les orbites de $\underline{G}(F')_{\mathrm{r}}$. Comme $p_{F'}(\mathcal{V}')$ est ouvert dans $F'[T]_N$, $\mathcal{V}'_*$ est ouvert $\underline{G}(F')_{\mathrm{r}}$. Il suffit de montrer le théorème 3.5 pour tout $\gamma' \in \mathcal{V}'$.

Comme $\mathcal{V} \subset \underline{M}(F)_{\mathrm{e}} \cap \underline{G}(F)_{\mathrm{r}}$, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\underline{G}(F))$,

$$J^{\underline{G}(F)}(f,\gamma) = J^{\underline{M}(F)}(f^{\underline{P}(F)},\gamma)$$

où $f^{\underline{P}(F)} \in C_c^\infty(\underline{M}(F))$ désigne le terme K_F-invariant de f suivant $\underline{P}(F)$. De même, pour tout $\gamma' \in \mathcal{V}'$ et toute fonction $f' \in C_c^\infty(\underline{G}(F'))$,

$$J^{\underline{G}(F')}(f',\gamma') = J^{\underline{M}(F')}(f'^{\underline{P}(F')},\gamma').$$

Soit $K_{F,\underline{M}}^n = \underline{M}(F) \cap K_F^n$. Comme $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n) \Rightarrow f^{\underline{P}(F)} \in \mathcal{H}(\underline{M}(F), K_{F,\underline{M}}^n)$ et pour tout $\gamma' \in \mathcal{V}'$ et toute fonction $\phi \in \mathcal{H}(\underline{M}(F), K_{F,\underline{M}}^n)$

(Théorème 3.3),

$$J^{\underline{M}(F')}(\zeta_{\underline{M}}(\phi),\gamma') = J^{\underline{M}(F)}(\phi,\gamma),$$

il suffit de montrer que $\zeta(f)^{\underline{P}(F')} = \zeta_{\underline{M}}(f^{\underline{P}(F)})$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$.

Soit $D_{\underline{M}}^+(\varpi_F) = \prod_{i=1}^{d} D_i^+(\varpi_F) \subset D(\varpi_F)$ où $D_i^+(\varpi_F)$ est défini comme en 2.2 en remplaçant $\underline{G}$ par le groupe $GL(N_i)$. Soit $m \in \underline{M}(F)$. Fixons une décomposition $m = k_1\delta_{\varpi_F}k_2$, $k_i \in \underline{M}(\mathcal{O}_F)$ pour $i = 1$, 2, $\delta_{\varpi_F} \in D_{\underline{M}}^+(\varpi_F)$. Comme $\delta_{\underline{P}(F)}(k_2) = 1$, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$,

$$\begin{aligned} f^{\underline{P}(F)}(m) &= \delta_{\underline{P}(F)}^{1/2}(m)\int_{\underline{U}(F)} \overline{f}(k_1\delta_{\varpi_F}k_2u_Fk_2^{-1}k_2)du_F \\ &= \delta_{\underline{P}(F)}^{1/2}(m)\int_{\underline{U}(F)} \overline{f}_{k_1,k_2}(\delta_{\varpi_F}u_F)du_F \end{aligned}$$

où $\overline{f}_{k_1,k_2}$ est la fonction définie par $\overline{f}_{k_1,k_2}(g) = \overline{f}(k_1gk_2)$ $(g \in \underline{G}(F))$. Pour $i = 1$, 2, soit $k_i' \in \underline{M}(\mathcal{O}_{F'})$ tel que $\zeta_{\underline{M}}(k_iK_{F,\underline{M}}^n) = k_i'K_{F',\underline{M}}^n$, et soit $\delta_{\varpi_{F'}} \in D_{\underline{M}}^+(\varpi_{F'})$ l'image de δ_{ϖ_F} par l'isomorphisme de groupes $W(\varpi_F) \to W(\varpi_{F'})$ défini en 3.3. Ainsi, $m' = k_1'\delta_{\varpi_{F'}}k_2' \in \zeta_{\underline{M}}(K_{F,\underline{M}}^n m K_{F,\underline{M}}^n)$ et

$$\delta_{\underline{P}(F')}(m') = \delta_{\underline{P}(F')}(\delta_{\varpi_{F'}}) = \delta_{\underline{P}(F)}(\delta_{\varpi_F}) = \delta_{\underline{P}(F)}(m).$$

De plus, comme K_F normalise K_F^n, pour $\phi \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$, la fonction ϕ_{k_1,k_2} est encore dans $\mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$ et $\zeta(\phi_{k_1,k_2}) = \zeta(\phi)_{k_1',k_2'}$. Par conséquent, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$, le lemme 3.5 entraîne l'égalité

$$\begin{aligned} &\delta_{\underline{P}(F')}^{1/2}(m')\int_{\underline{U}(F')} \zeta(\overline{f})_{k_1',k_2'}(\delta_{\varpi_{F'}}u_{F'})du_{F'} \\ &\qquad = \delta_{\underline{P}(F)}^{1/2}(m)\int_{\underline{U}(F)} \overline{f}_{k_1,k_2}(\delta_{\varpi_F}u_F)du_F. \end{aligned}$$

On conclut grâce à la relation $\zeta(\overline{f}) = \overline{\zeta(f)}$ (pour $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$), déjà montrée au cours de la preuve du théorème 3.3. □

3.6. On a travaillé, en 3.5 comme en 3.3, avec un élément $\gamma \in G_{\mathrm{r}}$ en position standard. Sans cette hypothèse sur γ, on a un résultat analogue au théorème 3.5, la précision sur r en moins.

THÉORÈME. — *Soit $\gamma \in G_{\mathrm{r}}$. Si r est suffisamment grand, $\zeta(B_F^r\gamma B_F^r) \subset \underline{G}(F')_{\mathrm{r}}$ et pour tout $\gamma' \in \zeta(B_F^r\gamma B_F^r)$,*

$$J^{\underline{G}(F')}(\zeta(f),\gamma') = J^{\underline{G}(F)}(f,\gamma)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$.

Preuve. — On se ramène à la situation de 3.5. Soit $g \in G$ tel que $\widetilde{\gamma} = g^{-1}\gamma g$ est en position standard. Supposons $r \geqslant \widetilde{r} = m(\widetilde{\gamma},n) + \overline{k_1}(\widetilde{\gamma})$ et que $g^{-1}B_F^r g \subset B_F^{\widetilde{r}}$ (condition vérifiée si r est suffisamment grand). Soient $\underline{M}$ le sous-groupe de Levi standard de $\underline{G}$ associé à $\widetilde{\gamma}$ en 3.5, $\widetilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V}(\widetilde{\gamma},n) \subset \underline{M}(F)_{\mathrm{e}} \cap \underline{G}(F)_{\mathrm{r}}$, $\widetilde{\mathcal{V}}' = \zeta_{\underline{M}}(\widetilde{\mathcal{V}})$ et $\widetilde{\mathcal{V}}'_* = \mathrm{Ad}_{\underline{G}(F')}(\widetilde{\mathcal{V}}')$. Grâce au théorème 3.5, il suffit de montrer que $\zeta(B_F^r\gamma B_F^r) \subset \widetilde{\mathcal{V}}'_*$.

Soient $\widetilde{\gamma}' \in \zeta(B_F^r\widetilde{\gamma}B_F^r)$ et $g' \in \zeta(B_F^r g B_F^r)$. Comme

$$\begin{aligned} B_{F'}^r g' B_{F'}^r \widetilde{\gamma}' B_{F'}^r g'^{-1} B_{F'}^r &= \mathrm{Supp}(f_{g'} * f_{\widetilde{\gamma}'} * f_{g'^{-1}}) \\ &= \zeta(\mathrm{Supp}(f_g * f_{\widetilde{\gamma}} * f_{g^{-1}})) \\ &= \zeta(B_F^r g B_F^r \widetilde{\gamma} B_F^r g^{-1} B_F^r), \end{aligned}$$

quitte à remplacer $\widetilde{\gamma}'$ par $x_1'\widetilde{\gamma}'x_2'$ pour des $x_i' \in B_{F'}^r$ $(i = 1, 2)$, on peut supposer que $B_{F'}^r g'\widetilde{\gamma}'g'^{-1}B_{F'}^r = \zeta(B_F^r g\widetilde{\gamma}g^{-1}B_F^r)$. Alors,

$$\zeta(B_F^r\gamma B_F^r) = \zeta(B_F^r g\widetilde{\gamma}g^{-1}B_F^r) = B_{F'}^r g'\widetilde{\gamma}'g'^{-1}B_{F'}^r.$$

Posons $g = b_1 w_{\varpi_F} b_2$ avec $b_i \in B_F$ $(i = 1, 2)$, $w_{\varpi_F} \in W(\varpi_F)$, et $g' = b_1' w_{\varpi_{F'}} b_2'$ avec $b_i' \in \zeta(b_i B_F^r)$ $(i = 1, 2)$. Puisque B_F normalise B_F^r, on a

$$\begin{aligned} g^{-1}B_F^r g \subset B_F^{\widetilde{r}} &\Leftrightarrow w_{\varpi_F}^{-1} B_F^r w_{\varpi_F} \subset B_F^{\widetilde{r}} \\ &\Leftrightarrow w_{\varpi_{F'}}^{-1} B_{F'}^r w_{\varpi_{F'}} \subset B_{F'}^{\widetilde{r}} \\ &\Leftrightarrow g'^{-1} B_{F'}^r g' \subset B_{F'}^{\widetilde{r}}, \end{aligned}$$

d'où
$$\zeta(B_F^r\gamma B_F^r) \subset g'^{-1}B_{F'}^{\widetilde{r}}\widetilde{\gamma}'B_{F'}^{\widetilde{r}}g' \subset \widetilde{\mathcal{V}}'_*$$

et le théorème 3.6 est prouvé. □

Remarque. — On peut reformuler le théorème 3.6 de manière plus concrète. Fixons un système de représentants $\mu_F^\times \subset \mathcal{O}_F^\times$ des classes de $\mathcal{O}_F^\times \bmod (1+\mathcal{P}_F)$ et soit $\mu_F = \mu_F^\times \cup \{0\}$ (si F est de caractéristique > 0, on peut prendre pour μ_F le corps de représentants dans $\mathcal{O}_F$ du corps résiduel de F). Alors, tout $x \in F$ possède un (unique) développement hensélien de la forme $x = \sum_{\nu\in\mathbf{Z}} \mu_\nu(x)\varpi_F^\nu$, $\mu_\nu(x) \in \mu_F$.

Soit $\gamma \in G_r$. Écrivons $\gamma = bw_{\varpi_F}c$ avec $b = (b_{i,j}) \in B_F$, $w_{\varpi_F} \in W(\varpi_F)$, $c = (c_{i,j}) \in B_F$, et $w_{\varpi_F} = \delta_{\varpi_F}s$ avec $\delta_{\varpi_F} = \mathrm{diag}(\varpi_F^{\alpha_1}, \dots, \varpi_F^{\alpha_N}) \in D(\varpi_F)$, $s \in S_F$. Soit $\sigma = \sigma_s$ la permutation de $\{1, \dots, N\}$ donnée par $se_i = e_{\sigma(i)}$ $(i = 1, \dots, N)$ où (rappel) $e_1, \dots, e_N$ désigne la base canonique de F^N. Posant $\gamma = (\gamma_{i,j})$, on a

$$\gamma_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} \varpi_F^{\alpha_k} b_{i,k} c_{\sigma^{-1}(k),j}.$$

Soient $(B_F^r \gamma B_F^r)_{i,j} = \{g_{i,j} : g = (g_{k,l}) \in B_F^r \gamma B_F^r\} \subset F$, $\nu_r(\gamma_{i,j}) = \sup\{\nu \in \mathbf{Z} : (B_F^r \gamma B_F^r)_{i,j} \subset \gamma_{i,j} + \mathcal{P}_F^\nu\}$ et $\nu_r(\gamma) = \inf\{\nu \in \mathbf{Z} : \gamma + \varpi_F^\nu M(N, \mathcal{O}_F) \subset B_F^r \gamma B_F^r\}$. Puisque B_F normalise B_F^r et $b^{-1}M(N, \mathcal{O}_F)c^{-1} = M(N, \mathcal{O}_F)$,

$$\begin{aligned} \nu_r(\gamma) &= \inf\{\nu \in \mathbf{Z} : w_{\varpi_F} + \varpi_F^\nu M(N, \mathcal{O}_F) \subset B_F^r w_{\varpi_F} B_F^r\} \\ &= \nu_r(w_{\varpi_F}). \end{aligned}$$

Pour chaque $\mu \in \mu_F^\times$, soit $\mu' \in \mathcal{O}_{F'}^\times$ tel que $\mu' \bmod \mathcal{P}_{F'}^r = \lambda(\mu \bmod \mathcal{P}_F^r)$. Posant $\mu' = 0$ si $\mu = 0$, soit $\mu_{F'} = \{\mu' : \mu \in \mu_F\}$. Soient $b' = (b'_{i,j}) \in \zeta(bB_F^r)$, $c' = (c'_{i,j}) \in \zeta(cB_F^r)$ et $\gamma' = b'w_{\varpi_{F'}}c'$. Posant $\gamma' = (\gamma'_{i,j})$, on a

$$\begin{aligned} \gamma'_{i,j} &= \sum_{k=1}^{N} \varpi_{F'}^{\alpha_k} b'_{i,k} c'_{\sigma^{-1}(k),j} \\ &\equiv \sum_{\nu \in \mathbf{Z}} \mu_\nu(\gamma_{i,j})' \varpi_{F'}^\nu \mod \mathcal{P}_{F'}^{\nu_r(\gamma_{i,j})}. \end{aligned}$$

Soit un entier $\widetilde{r} \geqslant 1$. Comme $\nu_r(\gamma_{i,j}) \to +\infty$ quand $r \to +\infty$, si r est suffisamment grand, pour chaque couple d'indices (i,j), on a $\nu_r(\gamma_{i,j}) \geqslant \nu_{\widetilde{r}}(\gamma)$. Dans ces conditions, posant $\beta = \nu_{\widetilde{r}}(\gamma)$, pour chaque couple d'indices (i,j), on a

$$\gamma'_{i,j} \equiv \sum_{\nu \in \mathbf{Z}} \mu_\nu(\gamma_{i,j})' \varpi_{F'}^\nu \mod \mathcal{P}_{F'}^\beta,$$

et puisque $\nu_{\widetilde{r}}(\gamma') = \nu_{\widetilde{r}}(w_{\varpi_{F'}}) = \beta$,

$$\gamma' + \varpi_{F'}^\beta M(N, \mathcal{O}_{F'}) \subset B_{F'}^{\widetilde{r}} \gamma' B_{F'}^{\widetilde{r}} = \zeta(B_F^{\widetilde{r}} \gamma B_F^{\widetilde{r}}).$$

D'où la variante suivante du théorème 3.6 : *soit $\gamma \in G_{\mathrm{r}}$. Il existe un entier β tel que si r est suffisamment grand, alors pour tout $\gamma' = (\gamma'_{i,j}) \in \underline{G}(F')$ tel que $\gamma'_{i,j} \equiv \sum_{\nu \in \mathbf{Z}} \mu_\nu(\gamma_{i,j})' \varpi_{F'}^\nu \mod \mathcal{P}_{F'}^\beta$, on a $\gamma' \in \underline{G}(F')_{\mathrm{r}}$ et*

$$J^{\underline{G}(F')}(\zeta(f), \gamma') = J^{\underline{G}(F)}(f, \gamma)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\underline{G}(F), K_F^n)$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[B] N. BOURBAKI, Éléments de mathématique : Algèbre VIII, Hermann, Paris, 1958.

[BK] C. BUSHNELL, P. KUTZKO, The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups, Ann. of Math. Studies, 129, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.

[Bo] A. BOREL, Linear algebraic groups (second enlarged edition), Graduate Texts in Math., 126, Springer, New York, 1991.

[C] L. CLOZEL, Orbital integrals on p-adic groups : a proof of the Howe conjecture, Ann. of Math., 129 (1989), 237-251.

[D] P. DELIGNE, Les corps locaux de caractéristique p, limites de corps locaux de caractéristique zéro, in Représentations des groupes réductifs sur un corps local, Hermann, Coll. Travaux en cours, Paris (1984), 119-157.

[HC1] HARISH-CHANDRA, Harmonic analysis on reductive p-adic groups, Lectures Notes in Math., 162, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[HC2] HARISH-CHANDRA, A submersion principle and its applications in Papers dedicated to the memory of V.K. Patodi, Indian Academy of Sciences, Bangalore, and the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1980), 95-102 (Collected papers IV, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1984, 439-446).

[HH] G. HENNIART, R. HERB, Automorphic induction for $GL(n)$ (over local non-archimedean fields), prépublication U. de Paris-Sud, à paraître dans Duke Math. J. (mais sans l'Appendix 1).

[Ho] R. HOWE, Harish-Chandra homomorphism for p-adic groups, Regional Conferences Series in Math., 59 (1985), Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[K] D. KAZHDAN, Representations of groups over close local fields, J. Analyse Math., 47 (1986), 175-179.

[La] G. LAUMON, Cohomology with compact supports of Drinfeld modular varieties, Cambridge Univ. Press, 1991.

[Le] B. LEMAIRE, Thèse, Univ. de Paris-Sud, 8 février 1994.

[S] G. SHIMURA, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Princeton U. Press, Princeton, 1971.

[V] M.-F. VIGNÉRAS, Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p-adique, J. Fac. Sci. U. of Tokyo, 28 (3) Sec. 14 (1982), 945-961.

Manuscrit reçu le 7 juillet 1995,
accepté le 20 novembre 1995.

Bertrand LEMAIRE,
URA D0752 du CNRS
Université de Paris-Sud
Mathématiques, bât. 425
91405 Orsay cedex (France).