ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LAURENT GUIEU

Nombre de rotation, structures géométriques sur un cercle et groupe de Bott-Virasoro

Annales de l'institut Fourier, tome 46, nº 4 (1996), p. 971-1009

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_4_971_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
46, 4 (1996), 971-1009

NOMBRE DE ROTATION, STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES SUR UN CERCLE ET GROUPE DE BOTT-VIRASORO

par Laurent GUIEU

Plan.

Mots-clés : Groupe de Bott-Virasoro – Représentation coadjointe – Structures projectives – Équation de Hill – Nombre de rotation.
Classification math. : 17B68 – 34A26 – 53A20 – 58D27 – 58F03.

1. Introduction.

Le groupe de Bott-Virasoro est une extension centrale non-triviale du groupe $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ des difféomorphismes du cercle par la droite réelle. C'est un groupe de Lie de dimension infinie intervenant notamment dans les modèles de cordes et les théories conformes. La classification de ses orbites coadjointes a été entreprise par A.A. Kirillov [16], G.B. Segal [24] et E. Witten [31]. Il a été remarqué par les deux premiers auteurs que ce problème est équivalent à celui de la classification, modulo $\mathrm{Diff}^+(S^1)$, des structures projectives sur le cercle ([18]) et aussi à celui de la classification, modulo reparamétrage, des opérateurs de Hill ([20]). Dans ce papier, nous mettons à profit ces équivalences pour préciser les points laissés en suspens par ces différents auteurs. L'approche choisie est géométrique et fait notamment appel à l'application nombre de rotation de H. Poincaré. Les résultats nouveaux sont regroupés dans six théorèmes indexés de A à G.

Une structure projective sur le cercle est la donnée d'un atlas maximal de cartes sur S^1 dont les changements de coordonnées sont des homographies. Un opérateur de Hill est un opérateur différentiel linéaire sur $\mathbf{R}$ de la forme $L = \frac{d^2}{dt^2} + u(t)$, la fonction u étant de classe C^∞ et $\mathbf{Z}$-périodique. L'espace $\mathfrak{P}$ des structures projectives sur S^1 est isomorphe, comme $\mathrm{Diff}^+(S^1)$-module, à l'espace $\mathfrak{L}$ des opérateurs de Hill.

Le théorème A (chap.3) établit que les opérateurs de Hill oscillants (ceux dont les solutions de l'équation différentielle associée s'annulent une infinité de fois) correspondent aux structures projectives de première espèce (celles dont l'application développante est un revêtement). Il existe sur l'espace $\mathfrak{P}$ un invariant numérique de type dynamique, le nombre de rotation de l'holonomie relevée (cette dernière est une classe de conjugaison dans le revêtement universel du groupe $\mathrm{SL}(2;\mathbf{R})$). Sur l'espace $\mathfrak{L}$ sont définis deux autres nombres de rotation : l'invariant de Moser ([22]) et l'invariant de Lazutkin-Pankratova ([20]). Nous montrons dans le théorème B (chap. 4) que ces trois invariants sont essentiellement les mêmes.

La classification des orbites coadjointe du groupe de Bott-Virasoro revient à dresser la liste des sous-groupes d'isotropie de l'action coadjointe. Par la remarque de A.A. Kirillov et G.B. Segal, cela se réduit à classifier les groupes d'automorphismes des structures projectives sur S^1. Le chapitre 5 est consacré à cette classification. Le théorème C (chap. 5) permet d'identifier le groupe des automorphismes d'une structure projective à un quotient du centralisateur de son holonomie. La classification proprement dite est l'objet du théorème D (chap. 5) :

THÉORÈME D. — *Soit σ une structure projective sur S^1, L l'opérateur de Hill associé et $M \in \mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$ l'holonomie de σ. Le groupe G_σ des automorphismes de σ est isomorphe, comme groupe topologique, à un des trois groupes suivants :*

(i) $\mathbf{R}/a\mathbf{Z}$,

(ii) $(\mathbf{R}/a\mathbf{Z})\bigoplus(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$,

(iii) $\widetilde{\mathrm{PSL}}^{(n)}(2;\mathbf{R})$.

Le cas (i) se présente si M est elliptique ou si L est non-oscillant. Le cas (ii) se présente si L est oscillant et si M est soit parabolique et non-triviale, soit hyperbolique. Le cas (iii) se présente lorsque $M = \mathrm{id}$. Dans les deux derniers cas $\frac{n}{2}$ est le nombre de rotation de l'holonomie relevée.

La démonstration est de type géométrique ; elle fournit directement le groupe des automorphismes sans avoir à considérer son algèbre de Lie, ce qui évite des problèmes techniques liés à l'intégration des sous-algèbres de Lie de dimension finie de l'algèbre des champs de vecteurs sur S^1. Remarquons que la liste des groupes d'automorphismes que nous obtenons comprend, outre les cas connus que sont S^1 et les revêtements finis de $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$, des sous-groupes non-connexes de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ de la forme $S^1 \times \mathbf{Z}_n$.

Le but des théorèmes E et F (chap. 6) est d'interpréter les propriétés des structures affines du cercle en termes d'opérateurs de Hill. Plus précisément, le théorème E montre qu'une structure projective σ sur S^1 est réductible à une structure affine si et seulement si l'opérateur de Hill associé L est factorisable, c'est-à-dire de la forme $\left(\frac{d}{dt} + v(t)\right)\left(\frac{d}{dt} - v(t)\right)$, où la fonction v est périodique. Le théorème F relie le nombre de factorisations distinctes de L à la géométrie de σ : ce nombre est égal au nombre de points fixes de l'holonomie de σ. Enfin, le théorème G (chap. 6) interprète la transformation de Miura

$$\omega = v(t)dt \in \Omega^1(S^1) \longmapsto L = \left(\frac{d}{dt} + v(t)\right)\left(\frac{d}{dt} - v(t)\right) \in \mathfrak{L}$$

des opérateurs de Hill comme une application moment pour l'action du groupe $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ sur la variété de Poisson des structures affines sur le cercle.

2. Le groupe de Bott-Virasoro et ses orbites coadjointes.

Ce chapitre constitue une introduction au groupe de Bott-Virasoro et à la géométrie de ses orbites coadjointes. Nous rappelons la construction des cocycles de Bott-Thurston et de Gel'fand-Fuks, la formule explicite de la représentation coadjointe du groupe de Bott-Virasoro et celle de la forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau. On trouvera aussi l'énoncé du théorème de A.A. Kirillov concernant la dimension des stabilisateurs coadjoints.

L'objet de base est le groupe $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ des difféomorphismes du cercle isotopes à l'identité. Equipé de la topologie C^∞, c'est un groupe de Lie modelé sur l'espace de Fréchet $\mathrm{Vect}(S^1)$ des champs de vecteurs sur le cercle. Ce dernier espace, muni du crochet de Lie(1) des champs de vecteurs, constitue l'algèbre de Lie de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ (cf [13], [21]). Nous adopterons tout au long de cet article les notations et les conventions suivantes :

1. Tous les êtres géométriques différentiables sur le cercle unité S^1 seront supposés de classe C^∞ et l'adjectif "périodique" signifiera toujours "**Z**-périodique".

2. On fixe une fois pour toutes un paramètre t sur le cercle S^1 : celui qui est fourni par la forme de Maurer-Cartan $\varpi = 2\pi dt = dz/iz$. Le lecteur vérifiera que toutes les constructions qui suivent sont géométriques, c'est-à-dire indépendantes de ce choix.

3. Le revêtement universel de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ s'identifie au groupe $\mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R})$ des difféomorphismes $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ préservant l'orientation et vérifiant la condition de **Z**-équivariance :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t+1) = f(t) + 1. \tag{1}$$

Si $p_*: \mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R}) \to \mathrm{Diff}^+(S^1)$ désigne la projection de ce revêtement et si $p: \mathbf{R} \to S^1 : t \mapsto e^{2i\pi t}$ est le revêtement universel du cercle, on a la relation :

$$p_*(f) \circ p = p \circ f. \tag{2}$$

4. Si f est un élément de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$, il existe une unique fonction sur le cercle, notée u_f, telle que : $f^*\varpi = u_f \varpi$. Au niveau infinitésimal, la construction est la suivante : à tout champ $\xi \in \mathrm{Vect}(S^1)$ est associé une

(1) Il s'agit en fait de l'opposé du crochet usuel.

fonction $\Delta_\xi \in C^\infty(S^1)$ vérifiant $L_\xi\varpi = \Delta_\xi\varpi$ (c'est la divergence de ξ par rapport à ϖ).

2.1. Le cocycle de Bott-Thurston.

On doit à R. Bott et W. Thurston (cf [3]) la construction d'un 2-cocycle non-trivial sur le groupe $\mathrm{Diff}^+(S^1)$, à valeurs dans le groupe additif $\mathbf{R}$:

$$\mathrm{BT} : \mathrm{Diff}^+(S^1) \times \mathrm{Diff}^+(S^1) \to \mathbf{R}.$$

Rappelons que la condition de cocycle s'écrit

$$\mathrm{BT}(f, g\circ h) + \mathrm{BT}(g,h) = \mathrm{BT}(f\circ g, h) + \mathrm{BT}(f,g) \quad \forall f,g,h \in \mathrm{Diff}^+(S^1).$$

DÉFINITION 2.1.1. — *Soient f et g deux difféomorphismes du cercle,*

$$\mathrm{BT}(f,g) = \int_{S^1} \mathrm{Log}(u_{f\circ g})d\mathrm{Log}(u_g). \tag{3}$$

À tout 2-cocycle c d'un groupe G (à valeurs dans $\mathbf{R}$) est canoniquement associée une extension centrale $\tilde{G}$ de G par $\mathbf{R}$, c'est-à-dire une suite exacte courte de la forme

$$0 \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{id}$$

où l'image de $\mathbf{R}$ est contenue dans le centre de $\tilde{G}$. La classe d'isomorphie de $\tilde{G}$ ne dépend que de la classe de cohomologie de c. Cette extension se construit explicitement de la manière suivante : $\tilde{G} = G \times \mathbf{R}$ (égalité entre ensembles) et, si (a,α) et (b,β) sont deux éléments de $\tilde{G}$, leur produit est défini par : $(a,\alpha)\cdot(b,\beta) = (ab, \alpha+\beta+c(a,b))$. Le lecteur intéressé par ces questions est renvoyé, par exemple, aux références [23] et [29].

DÉFINITION 2.1.2. — *On appelle* groupe de Bott-Virasoro, *et on note* Vir *l'extension centrale de* $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ *par* $\mathbf{R}$ *canoniquement associée au cocycle de Bott-Thurston.*

Cette extension n'est pas triviale (c'est-à-dire, non isomorphe au produit direct $\mathrm{Diff}^+(S^1) \times \mathbf{R}$) car le cocycle BT n'est pas un 1-cobord. Si on munit Vir de la structure de variété produit, on obtient un groupe de Lie-Fréchet modelé sur $\mathrm{Vect}(S^1) \oplus \mathbf{R}$, qui est l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre de Lie de Vir. Le crochet sur cette algèbre sera fourni par une version “perturbée” du crochet produit. Ceci est l'objet de la section suivante.

2.2. Le cocycle de Gel'fand-Fuks.

DÉFINITION 2.2.1. — *On appelle* algèbre de Virasoro, *et on note* $\mathfrak{vir}$, *l'algèbre de Lie du groupe de Bott-Virasoro.*

L'algèbre de Lie du groupe Vir est une extension centrale de l'algèbre de Lie de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ par l'algèbre abélienne $\mathbf{R}$. En d'autres termes, on a une suite exacte courte d'algèbres :

$$0 \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow \mathfrak{vir} \longrightarrow \mathrm{Vect}(S^1) \longrightarrow 0$$

telle que $\mathbf{R}$ s'injecte dans le centre de $\mathfrak{vir}$. Le crochet de Lie sur $\mathfrak{vir}$ est donné par un 2-cocycle d'algèbre $\omega : \mathrm{Vect}(S^1) \times \mathrm{Vect}(S^1) \to \mathbf{R}$,

$$\omega([\xi,\zeta],\eta) + \omega([\zeta,\eta],\xi) + \omega([\eta,\xi],\zeta) = 0 \qquad \forall\ \zeta,\eta,\xi \in \mathrm{Vect}(S^1).$$

Explicitement :

$$[\xi \oplus \alpha, \zeta \oplus \beta]_{\mathfrak{vir}} = [\xi,\zeta] \oplus \omega(\xi,\zeta).$$

Le cocycle ω est une version infinitésimale du cocycle de groupe dont on est parti :

(4)

$$\omega(\xi,\zeta) = \frac{\partial^2}{\partial r \partial s}\left[\textsc{bt}\,(\exp(r\xi),\exp(s\zeta)) - \textsc{bt}\,(\exp(s\zeta),\exp(r\xi))\right]_{(r,s)=(0,0)}.$$

PROPOSITION 2.2.1 ([5]). — *Le 2-cocycle ω associé à l'algèbre de Virasoro est le cocycle de Gel'fand-Fuks* $\textsc{gf} : \mathrm{Vect}(S^1) \times \mathrm{Vect}(S^1) \to \mathbf{R}$ *défini par :*

$$\textsc{gf}(\xi,\zeta) = \int_{S^1} \Delta_\xi d\Delta_\zeta \tag{5}$$

où ξ et ζ sont deux champs de vecteurs sur le cercle. Ce cocycle n'est pas trivial et engendre la 2-cohomologie d'algèbre de Lie de $\mathrm{Vect}(S^1)$.

Remarque 2.2.1. — Le cocycle de Gel'fand-Fuks et le cocycle de Bott-Thurston sont des outils importants dans la théorie des classes caractéristiques de feuilletages. Par exemple, le 2-cocycle $\textsc{bt}$ permet de construire explicitement l'invariant de Godbillon-Vey d'un S^1-fibré feuilleté à groupe structural discret au-dessus d'une surface compacte (cf [6]).

2.3. Représentation coadjointe de Vir.

Tout groupe de Lie G est naturellement pourvu d'une représentation linéaire dans le dual de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, sa *représentation coadjointe* $\mathrm{Ad}^* : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$. Elle est caractérisée par l'égalité

$$\forall \quad (g,\xi,\mu) \in G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*, \quad \langle \mathrm{Ad}^*(g)(\mu) \mid \xi\rangle = \langle \mu \mid \frac{d}{ds}\left(g^{-1}\circ \exp(s\xi)\circ g\right)_{s=0}\rangle.$$

Dans le cas du groupe de Bott-Virasoro cette notion a encore un sens, à condition de considérer le dual *topologique* de l'algèbre de Virasoro. Cet espace s'identifie à $\mathcal{D}_2'(S^1)\oplus\mathbf{R}$, où $\mathcal{D}_2'(S^1)$ désigne l'espace des différentielles quadratiques à coefficients-distributions sur le cercle. Si $\xi \oplus \alpha \in \mathfrak{vir}$ et $\mu = T \oplus c \in \mathcal{D}_2'(S^1) \oplus \mathbf{R}$, cette dualité s'écrit

$$\langle \mu \mid \xi \oplus \alpha\rangle = \langle T \mid \xi\rangle \oplus c\alpha.$$

Remarque. — Les éléments du dual de l'algèbre de Lie s'appellent les *moments* du groupe. En Physique Mathématique, le nombre c est appelé *charge centrale*.

On se restreindra, dans la suite, à la partie dite *régulière* de ce dual. Il s'agit du sous-espace $\mathfrak{g}_r^* := \mathfrak{Q} \oplus \mathbf{R}$, où $\mathfrak{Q}$ désigne l'espace des différentielles quadratiques réelles sur S^1. Si $\mu = u(t)dt^2 \oplus c$ est un élément de $\mathfrak{g}_r^*$, on a :

$$\langle \mu \mid \xi \oplus \alpha\rangle = \int_{S^1} u(t)\xi(t)dt + c\alpha.$$

Le calcul de l'action coadjointe de Vir requiert la notion de *dérivée de Schwarz.*

Définition 2.3.1. — *La* dérivée de Schwarz *d'un difféomorphisme* $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *est la différentielle quadratique :*

$$\mathbf{S}(g) = \left(\frac{g'''}{g'} - \frac{3}{2}\frac{g''^2}{g'^2}\right)(t)dt^2. \tag{6}$$

C'est un 1-cocycle $\mathbf{S}\colon \mathrm{Diff}^+(\mathbf{R}) \to \mathfrak{Q}(\mathbf{R})$ sur le groupe des difféomorphismes de la droite, à valeurs dans les différentielles quadratiques. La propriété de cocycle s'écrit :

$$\mathbf{S}(h\circ g) = g^*\mathbf{S}(h) + \mathbf{S}(g), \quad \forall h, g \in \mathrm{Diff}^+(\mathbf{R}). \tag{7}$$

Le groupe $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R})$ des homographies $t \mapsto \dfrac{at+b}{ct+d}$ de la droite projective réelle est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}P^1)$. La dérivée de Schwarz s'interprète alors comme un invariant différentiel projectif complet :

$$\forall h \in \mathrm{PGL}(2;\mathbf{R}), \forall g \in \mathrm{Diff}(\mathbf{R}P^1), \quad \mathbf{S}(h \circ g) = \mathbf{S}(g); \tag{8}$$

$$g \in \mathrm{PGL}(2;\mathbf{R}) \Leftrightarrow \mathbf{S}(g) = 0. \tag{9}$$

Remarque 2.3.1. — Géométriquement, si $g : \mathbf{R} \cup \{\infty\} \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ est un difféomorphisme de la droite projective, $\mathbf{S}(g)(t_0)$ mesure l'écart entre g et son homographie osculatrice[(2)] en t_0 (cf [7] et [8]).

Une explication géométrique des liens qu'entretient la dérivée de Schwarz avec le cocycle de Bott-Thurston et le cocycle de Gel'fand-Fuks est exposée dans la référence [15]. L'étude de la dérivée de Schwarz en tant qu'invariant différentiel et son interprétation par la théorie du repère mobile sont faites en détail dans les premières pages de [4].

Proposition 2.3.1 ([16]). — *Le dual régulier $\mathfrak{g}_r^*$ est invariant par la représentation coadjointe. Cette dernière est de la forme :*

$$\mathrm{Ad}^*(g^{-1})(u \oplus c) = (g^* u + c\mathbf{S}(g)) \oplus c, \tag{10}$$

où le difféomorphisme $g : S^1 \to S^1$ est identifié avec un de ses relèvements dans $\mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R})$.

Remarquons que la charge centrale est invariante par l'action coadjointe. Les orbites de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ dans $\mathfrak{g}_r^*$ sont donc contenues dans les hyperplans affines $\{c = \mathrm{Cst}\}$. Il sera commode, pour la suite, de considérer la représentation coadjointe du groupe de Bott-Virasoro plutôt comme une famille d'actions affines $\{\mathrm{Ad}_c^*\}_{c \in \mathbf{R}}$ de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ sur $\boldsymbol{\Omega}$ paramétrée par la charge centrale.

Corollaire 2.3.1. — *Chaque représentation Ad_c^* admet une représentation infinitésimale :*

$$\mathrm{ad}_c^* : \mathrm{Vect}(S^1) \times \boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{\Omega} : \left(\xi(t)\frac{d}{dt}, u(t)dt^2\right) \mapsto -(D_{u,c} \cdot \xi)(t)dt^2 \tag{11}$$

où $D_{u,c}$ désigne l'opérateur différentiel $c\dfrac{d^3}{dt^3} + u\dfrac{d}{dt} + \dfrac{d}{dt}u$.

---

(2) L'unique homographie ayant le même jet d'ordre 2 que g au point t_0.

2.4. Orbites, stabilisateurs et formes symplectiques.

Soit $\mu = u \oplus c$ un moment régulier, $G_\mu \subset \mathrm{Diff}^+(S^1)$ son groupe d'isotropie pour l'action coadjointe et $\mathfrak{g}_\mu \subset \mathrm{Vect}(S^1)$ l'algèbre de Lie associée. Cette dernière est composée des champs $\xi(t)\frac{d}{dt}$ vérifiant $D_{u,c}\cdot\xi = 0$. Par conséquent, le problème de la détermination de $\mathfrak{g}_\mu$ se réduit à la recherche des solutions *périodiques* $t \mapsto \xi(t)$ de l'équation différentielle linéaire :

$$c\xi''' + 2u\xi' + u'\xi = 0. \tag{12}$$

Remarque 2.4.1. — Si $c = 0$ l'équation (12) n'est pas résolue en la dérivée d'ordre supérieur, rendant ainsi possible la présence de stabilisateurs discrets ou de dimension infinie. L'étude d'une telle situation a été amorcée dans [11]. Nous n'en parlerons pas dans cet article;

nous supposerons qu'à partir de cette section : $c \neq 0$.

L'algèbre $\mathfrak{g}_\mu$ est donc un sous-espace de l'espace vectoriel de dimension 3, noté E_μ, des solutions de l'équation (12). Dans [16], A.A. Kirillov montre que l'espace E_μ est une sous-algèbre de Lie, isomorphe à $\mathfrak{sl}(2;\mathbf{R})$, de l'algèbre des champs de vecteurs sur la droite réelle. Plus précisément, nous avons le :

THÉORÈME ([16]). — *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\mu$ est isomorphe soit à $\mathfrak{sl}(2;\mathbf{R})$, soit à une sous-algèbre de dimension 1 de $\mathfrak{sl}(2;\mathbf{R})$.*

Exemple 2.4.1. — Considérons un moment régulier $\mu = adt^2 \oplus c$ où a est une constante réelle. Si $\dfrac{a}{c} = 2(\pi n)^2$ avec $n \in \mathbf{N}$, l'algèbre $\mathfrak{g}_\mu$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2;\mathbf{R})$. Dans le cas contraire, elle est isomorphe à $\mathfrak{so}(2;\mathbf{R})$.

Nous ne donnerons pas ici le théorème de classification des orbites coadjointes du groupe de Bott-Virasoro due à A.A. Kirillov (que l'on peut consulter dans [16]) : nous retrouverons cette classification par des techniques différentes et directement au niveau des groupes d'isotropie (i.e., sans avoir recours à l'intégration des algèbres $\mathfrak{g}_\mu$; cf section 5).

COROLLAIRE 2.4.1. — *Le sous-groupe de* $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ *qui stabilise un moment régulier du groupe de Bott-Virasoro est de dimension 1 ou 3.*

L'espace homogène $\mathrm{Diff}^+(S^1)/G_\mu$ est isomorphe, via l'application orbitale $\widehat{\mu}\,:\,\mathrm{Diff}^+(S^1) \to \mathfrak{g}_r^*\,:\,g \mapsto \mathrm{Ad}_c^*(g)(\mu)$, à l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_\mu \subset \mathfrak{g}_r^*$. Sur cette dernière existe une forme (faiblement) symplectique, la

2-forme canonique Ω_μ de Kirillov-Kostant-Souriau. Soit $\nu = v \oplus c \in \mathcal{O}_\mu$ et $\delta v, \delta' v \in \mathrm{T}_v\mathcal{O}_\mu$, on peut trouver deux champs ξ et ζ tels que $\delta v = \mathrm{ad}_c^*(\xi)(v)$ et $\delta' v = \mathrm{ad}_c^*(\zeta)(v)$. L'évaluation de la forme Ω_μ sur cette paire de vecteurs est donnée par :

$$\Omega_\mu(\delta v, \delta' v) := -\int_{S^1} (D_{v,c} \cdot \xi)(t)\zeta(t)dt. \tag{13}$$

Cette définition est indépendante du choix des deux champs ξ et ζ.

3. Lien avec les structures projectives et les opérateurs de Hill.

Le but des chapitres 3 et 4 est la mise en place d'un dictionnaire traduisant les propriétés des opérateurs de Hill en termes de structures projectives. On trouvera dans les références [9] et [28] une exposition plus détaillée de la théorie des structures projectives (et affines) sur une variété.

3.1. Structures projectives sur S^1.

DÉFINITIONS 3.1.1. — *Une* carte projective *sur S^1 est un plongement d'un ouvert du cercle dans la droite projective réelle. Un* atlas projectif *est la donnée d'une famille couvrante de telles cartes, dont les changements de coordonnées sont des restrictions d'éléments de* PGL(2;**R**). *Une* structure projective *sur S^1 est un atlas projectif maximal.*

Le groupe des difféomorphismes du cercle opère, par transport de structure, sur l'espace $\mathfrak{P}$ des structures projectives sur S^1. Une telle structure est entièrement déterminée par la donnée d'un *développement*, c'est-à-dire une immersion $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}P^1$ assujettie à la condition d'équivariance

$$\varphi(t+1) = M \cdot \varphi(t), \forall t \in \mathbf{R} \tag{14}$$

où M est un élément de PSL(2;**R**). Notons que **R** doit être considéré ici comme le revêtement universel de S^1. Lorsque le développement φ est donné, l'homographie M est unique; on l'appelle l'*holonomie* du développement. Le groupe PGL(2;**R**) opère naturellement à gauche sur l'espace $\mathfrak{D}$ des développements et par conjugaison sur les holonomies. Deux développements φ et ψ définissent alors la même structure σ si et seulement si ils sont dans la même PGL(2;**R**)-orbite. On note : $\sigma = [\varphi]$.

Le revêtement universel de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ opère à droite sur $\mathfrak{D}$, par reparamétrage. Cette action laisse invariante l'holonomie et se projette sur le quotient $\mathfrak{P} = \mathfrak{D}/\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R})$ pour redonner l'action de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$. L'espace $\mathfrak{M}$ des classes d'isomorphie des structures projectives sur S^1 est le quotient $\mathfrak{P}/\mathrm{Diff}^+(S^1)$ (espace des déformations).

Remarque 3.1.1. — La théorie des structures projectives sur la droite se présente de la même manière, à ceci près qu'il n'y a pas d'holonomie et que l'on doit remplacer $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ par $\mathrm{Diff}^+(\mathbf{R})$. Quant à la théorie des structures affines, il suffit de remplacer la géométrie $(\mathbf{R}P^1, \mathrm{PGL}(2;\mathbf{R}))$ par le couple $(\mathbf{R}, \mathrm{GA}(1;\mathbf{R}))$, où $\mathrm{GA}(1;\mathbf{R})$ désigne le groupe des transformations affines $t \mapsto at + b \quad (a, b) \in \mathbf{R}^* \ \times \mathbf{R}$.

Exemple 3.1.1. — La structure projective *canonique* σ_0 sur la droite réelle est déterminée par le revêtement universel $q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}P^1 = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$: $t \mapsto \mathrm{cotg}(2\pi t)$.

Soit $\sigma = [\varphi]$ une structure projective sur S^1 et M l'holonomie de φ. La classe de conjugaison de M ne dépend que de σ. D'où la :

DÉFINITION 3.1.1. — *La* trace *de la structure σ est le nombre $\tau(\sigma) := |\mathrm{Tr}(\widehat{M})|$ où $\widehat{M}$ désigne un relevé quelconque de M dans* $\mathrm{SL}(2;\mathbf{R})$. *On dira que σ est de type* elliptique, parabolique ou hyperbolique *suivant que $\tau(\sigma)$ est inférieur, égal ou supérieur à 2.*

PROPOSITION 3.1.1. — *L'application trace*

$$\tau \colon \mathfrak{P} \to \mathbf{R}_+$$

est un invariant pour l'action des difféomorphismes du cercle.

Remarque 3.1.2. — Dans ce qui suit, *invariant* signifiera toujours *invariant relativement à l'action de* $\mathrm{Diff}^+(S^1)$.

Nous venons de voir que la subdivision de l'espace $\mathfrak{P}$ en structures elliptiques, paraboliques et hyperboliques constitue une partition $\mathrm{Diff}^+(S^1)$-invariante. Il existe une autre partition bien utile de cet espace. Avant de la décrire, notons tout d'abord qu'une structure projective σ sur S^1 se relève de manière canonique le long du revêtement $p \colon \mathbf{R} \to S^1$ en une unique structure projective $\tilde{\sigma}$ sur $\mathbf{R}$. La structure $\tilde{\sigma}$ sera appelée le *revêtement* de la structure σ. Une telle structure est nécessairement isomorphe (comme structure projective sur $\mathbf{R}$) à l'une des trois suivantes (cf [27]) :

- la structure projective canonique σ_0,

- la structure canonique *restreinte* à l'intervalle $]0, \frac{1}{4}[$, notée σ_1,
- la structure canonique *restreinte* à l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$, notée σ_2.

Remarque. — Ces trois structures sont deux-à-deux non-isomorphes.

DÉFINITION 3.1.2. — *On dira que la structure σ sur S^1 est de* première, seconde *ou* troisième espèce, *suivant que son revêtement $\tilde{\sigma}$ est isomorphe (comme structure sur $\mathbf{R}$) à σ_0, σ_1 ou σ_2.*

Exemple 3.1.2. — Toute structure de seconde espèce est hyperbolique. Toute structure de troisième espèce est parabolique (cf [10] et [27]).

PROPOSITION 3.1.2 ([27]). — La subdivision de l'espace $\mathfrak{P}$ en structures de première, seconde et troisième espèce constitue une partition $\mathrm{Diff}^+(S^1)$-invariante.

LEMME 3.1.1. — *Soit $\sigma = [\varphi]$ une structure projective sur S^1 et M l'holonomie de φ :*

(i) *si σ est de première espèce, φ est un revêtement;*

(ii) *si σ est de seconde espèce, φ est un plongement sur un intervalle ouvert de $\mathbf{R}P^1$ dont les bornes sont les deux points fixes de M;*

(iii) *si σ est de troisième espèce, φ est un plongement sur l'intervalle ouvert $\mathbf{R}P^1 - \{\xi\}$, où ξ est l'unique point fixe de M.*

Preuve. — Si σ est de première espèce, le développement φ est dans la même $\mathrm{Diff}^+(\mathbf{R})$-orbite que le revêtement universel $q: \mathbf{R} \to \mathbf{R}P^1$ et φ est donc un revêtement. Si σ est de seconde espèce et quitte à composer φ avec une homographie, on peut toujours supposer l'existence d'un relevé $\widetilde{\varphi}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ le long de q qui soit un difféomorphisme sur l'intervalle $]0, \frac{1}{4}[$. Il s'ensuit que l'application φ réalise un plongement sur un intervalle ouvert. La relation d'équivariance (14) montre alors que les bornes $\lim_{-\infty} \varphi$ et $\lim_{+\infty} \varphi$ de cet intervalle sont les deux points fixes de M. Le cas des structures de troisième espèce se traite de manière similaire. □

3.2. Opérateurs de Hill.

DÉFINITIONS 3.2.1. — *Un* opérateur de Hill *est un opérateur de Sturm-Liouville :*

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + u(t)$$

où $u \in C^\infty(\mathbf{R})$ *est une fonction périodique. Une* équation de Hill *est l'équation différentielle associée :*

$$y''(t) + u(t)y(t) = 0.$$

La fonction u *est le* potentiel *de l'équation.*

Remarque 3.2.1. — Quitte à multiplier toutes ses solutions par une fonction adéquate, une équation différentielle linéaire du second ordre se ramène toujours à une équation de Hill.

Les solutions d'une équation de Hill forment un espace vectoriel symplectique E de dimension 2. La forme volume est fournie par le *Wronskien* de deux solutions. En effet, pour de telles équations différentielles, la fonction

$$t \quad \longmapsto \quad \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

est une intégrale première. L'opérateur de E qui associe à une solution y sa translatée $t \mapsto y(t+1)$ est un élément M de $\mathrm{SL}(E)$ appelé *monodromie* de l'opérateur L.

PROPOSITION 3.2.1 (Schwarz). — *Si* $\{y_1, y_2\}$ *est un système fondamental de solutions de l'équation* $Ly = 0$, *on a :*

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{S}(y_1/y_2)(t), & \forall t \in \mathbf{R} - y_2^{-1}(0) \\ \frac{1}{2}\mathbf{S}(y_2/y_1)(t), & \forall t \in \mathbf{R} - y_1^{-1}(0). \end{cases} \tag{15}$$

Le problème de l'action des difféomorphismes de $\mathbf{R}$ sur les potentiels des équations de Hill (ou plus généralement du type Sturm-Liouville) fut initialement posé par Kummer en 1834 (cf [2]).

PROPOSITION 3.2.2 (Kummer-Schwarz). — *À tout opérateur de Hill* $L = \frac{d^2}{dt^2} + u(t)$ *et à tout difféomorphisme* $f \in \mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R})$, *est associé un unique opérateur de Hill* $L' = \frac{d^2}{ds^2} + U(s)$ *tel que l'application*

$$f^*\colon \mathrm{Ker}(L) \to \mathrm{Ker}(L')\colon y \mapsto Y$$

définie par

$$Y(s) := y(f(s)) \cdot (f'(s))^{-\frac{1}{2}} \tag{16}$$

soit un isomorphisme préservant le volume. Le potentiel U de l'opérateur L' est alors donné par la formule

$$U(s) := u(f(s)) \cdot (f'(s))^2 + \frac{1}{2}\mathbf{S}(f)(s). \tag{17}$$

Remarquons que le potentiel U ne change pas si l'on modifie f par par une translation d'amplitude entière. C'est donc bien $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ qui agit sur les potentiels, tandis que son revêtement agit sur les solutions de l'équation de Hill, solutions qui se comportent comme des densités de poids $-\frac{1}{2}$ sur $\mathbf{R}$. Nous venons donc de retrouver l'action coadjointe du groupe de Bott-Virasoro sur ses moments réguliers de charge centrale $\frac{1}{2}$. Ce fait a été découvert assez récemment par A.A. Kirillov et G.B. Segal ([16] ; [24]).

De même que dans le cas des structures projectives, on peut distinguer dans l'espace $\mathfrak{L}$ des opérateurs de Hill deux partitions $\mathrm{Diff}^+(S^1)$-invariantes. Nous verrons dans la prochaine section de quelle manière ces deux paires de partitions se relient.

DÉFINITIONS 3.2.2. — *Une équation de Hill sera dite* stable *si toutes ses solutions sont bornées,* instable *si toutes ses solutions non-triviales sont non-bornées. Les autres équations seront appelées* semi-stables. *Une équation de Hill sera dite* oscillante *si au moins une de ses solutions non-triviales possède une infinité de zéros ; dans le cas contraire, elle sera dite* non-oscillante.

Remarque 3.2.2. — 1. Si une équation de Hill est oscillante, *toutes* ses solutions s'annulent une infinité de fois. Si une équation de Hill est non-oscillante, *toutes* ses solutions non-triviales s'annulent au plus une fois. Ces deux faits sont une conséquence immédiate des théorèmes de Sturm.

2. Toute équation stable est nécessairement oscillante.

PROPOSITION 3.2.3 ([20]). — *La partition de $\mathfrak{L}$ en opérateurs stables, instables et semi-stables est* $\mathrm{Diff}^+(S^1)$*-invariante. Il en est de même pour la partition en opérateurs oscillants et non-oscillants.*

Exemple 3.2.1 ([20]). — Tout opérateur de Hill non-oscillant se ramène à la forme normale $L_a = \frac{d^2}{dt^2} - a^2$, où a est une constante réelle. Les opérateurs non-oscillants et semi-stables constituent une seule $\mathrm{Diff}^+(S^1)$-orbite : celle de L_0. Les opérateurs $\frac{d^2}{dt^2} + a^2$ avec $a \neq \pi n, \forall n \in \mathbf{Z}$ sont stables. Les opérateurs $\frac{d^2}{dt^2} + (\pi n)^2$ $(n \in \mathbf{N})$ sont oscillants et semi-stables.

CONJECTURE (Lazutkin et Pankratova [20]). — *Tout opérateur de Hill se ramène à la forme normale de Mathieu :* $\frac{d^2}{dt^2} + (a\cos(2\pi nt) + b)$ *(cf [1] pour une étude locale).*

3.3. Trois géométries de dimension infinie.

Notons $\widehat{\mathfrak{Q}}$ l'espace des différentielles quadratiques réelles sur le cercle, muni de l'action affine $\mathrm{Ad}^*_{1/2}$ (i.e., l'hyperplan $\mathfrak{Q}\oplus\{1/2\} \subset \mathfrak{g}_r^*$) et $\mathfrak{L}$ l'espace des opérateurs de Hill. Nous disposons de trois espaces $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{L}$ et $\widehat{\mathfrak{Q}}$ sur lesquels le groupe des difféomorphismes du cercle opère, c'est-à-dire trois géométries au sens de F. Klein.

THÉORÈME 3.3.1 ([16], [24]). — Ces trois géométries sont équivalentes.

Autrement dit, il existe une paire de bijections équivariantes entre ces trois $\mathrm{Diff}^+(S^1)$-espaces :

$$\mathfrak{P} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{L} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathfrak{Q}}.$$

La flèche de droite est : $\frac{d^2}{dt^2} + u(t) \mapsto u(t)dt^2$, l'équivariance étant assurée par la formule (17). Explicitons la flèche de gauche : $\sigma \mapsto L_\sigma$. Pour cela, faisons le choix d'un développement φ de la structure σ et considérons les relevés $\widehat{\varphi}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2\backslash\{0\}$ de φ le long de la fibration canonique $\mathbf{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbf{R}P^1$. On peut toujours trouver des relevés qui jouissent de la propriété suivante : $\det(\widehat{\varphi}(t), \widehat{\varphi}'(t)) = \mathrm{Cst}$; on les appelle des relevés *normaux* de φ. Il existe donc une fonction $u \in C^\infty(S^1)$ telle que $\widehat{\varphi}''(t)+u(t)\widehat{\varphi}(t) = 0$. On pose alors : $L_\sigma := \frac{d^2}{dt^2}+u(t)$. Il est aisé de vérifier que cette construction de L_σ est indépendante du choix de φ et du relevé normal $\widehat{\varphi}$. Passons maintenant à la bijection réciproque $L \mapsto \sigma_L$. Un opérateur de Hill L étant donné, on choisit un système fondamental $B = \{y_1, y_2\}$ pour l'équation de Hill $Ly = 0$. On construit une immersion $\varphi_B : \mathbf{R} \to \mathbf{R}P^1$ en associant au réel t la droite vectorielle du plan passant par le point $(y_1(t), y_2(t))$. On pose : $\sigma_L := [\varphi_B]$. Notons que l'holonomie de φ_B est l'opérateur de monodromie de L lu dans la base B et qu'un changement de base n'affecte φ_B que par l'action d'une homographie. Il reste à vérifier l'équivariance. Soit $g \in \mathrm{Diff}^+(S^1)$,

$\tilde{g} \in \mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R})$ un de ses relevés et $B = \{y_1, y_2\}$ un système fondamental de solutions de $Ly = 0$. Notons B' le système fondamental de solutions associé à l'opérateur $L' = g^*L$ et formé des solutions $\tilde{g}^*y_1$ et $\tilde{g}^*y_2$; il vient :

$$g^*\sigma_L = [\varphi_B \circ \tilde{g}] = [\varphi_{B'}] = \sigma_{L'}.$$

Remarque 3.3.1. — 1. Le fait de s'intéresser uniquement aux moments réguliers de charge centrale 1/2 ne constitue pas une restriction. En effet, pour tout $c \neq 0$, l'application $A_c \colon \mathbf{\Omega} \oplus \{c\} \to \widehat{\mathbf{\Omega}} \colon u \oplus c \mapsto \dfrac{u}{2c} \oplus \dfrac{1}{2}$ est un isomorphisme affine $\mathrm{Diff}^+(S^1)$-équivariant.

2. Le sous-groupe d'isotropie du moment régulier $\mu = u \oplus \dfrac{1}{2}$ est égal au groupe des automorphismes de la structure projective associée. De plus, l'opérateur de monodromie associé à L définit une classe de conjugaison dans $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$ qui n'est autre que la classe d'holonomie de la structure σ.

3 (cf [24]). Il est possible d'associer à tout opérateur de Hill L un développement “canonique” $\varphi_L \colon \mathbf{R} \to P(E^*)$, E désignant l'espace des solutions de l'équation $Ly = 0$. On pose $\varphi_L(t) := [\delta_t]$, où δ_t est la forme linéaire de E définie par $\langle \delta_t, y \rangle = y(t)$. L'application φ_L est une immersion et vérifie la relation $\varphi_L(t+1) = M_L \cdot \varphi_L(t)$, où $M_L \in \mathrm{PSL}(E^*)$ désigne le transposé de l'opérateur de monodromie de notre équation. Tous les développements φ_B se déduisent de φ_L par le choix d'une base de E.

THÉORÈME A. — *Soit L un opérateur de Hill et $\sigma = [\varphi]$ la structure projective sur S^1 associée. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L est oscillant ;*

(ii) *$\varphi \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}P^1$ est un revêtement.*

Preuve. — Par le lemme 3.1.1, φ est un revêtement si et seulement si une de ses fibres est de cardinalité infinie. Choisissons un système fondamental de solutions $B = \{y_1, y_2\}$ pour l'équation de Hill $Ly = 0$. Le développement associé φ_B s'écrit, modulo l'identification $\mathbf{R}P^1 \cong \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, $\varphi_B(t) = y_1(t)/y_2(t)$. La fibre ${\varphi_B}^{-1}(\infty)$ est l'ensemble des zéros de la solution non-triviale y_2. Donc, pour que l'opérateur L soit oscillant, il faut et il suffit que ${\varphi_B}^{-1}(\infty)$ soit de cardinalité infinie. □

Avec les mêmes hypothèses, nous avons également

COROLLAIRE 3.3.1. — *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(j) *L est non-oscillant;*

(jj) *σ est réductible à une structure affine;*

(jjj) *$\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}P^1$ est un plongement.*

Remarque 3.3.2. — Les structures euclidiennes sur S^1 sont les structures de troisième espèce.

Le groupe $G_\sigma \subset \mathrm{Diff}^+(S^1)$ des automorphismes de la structure projective $\sigma = [\varphi]$ admet pour revêtement universel le groupe $\widetilde{G}_\sigma := p_*^{-1}(G_\sigma)$. Il est caractérisé par la propriété :

$$(18)\quad f \in \widetilde{G}_\sigma \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R}) \quad \textit{et} \quad \exists A \in \mathrm{PGL}(2;\mathbf{R}), \quad \varphi\circ f = A\circ\varphi.$$

Remarquons, au passage, que l'homographie A est toujours, dans la relation ci-dessus, un élément de $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$, car φ est une immersion et f préserve l'orientation. En faisant la restriction $A = \mathrm{id}$ dans la relation (18), on définit un sous-groupe discret, noté π_σ, du groupe $\widetilde{G}_\sigma$. Le groupe π_σ est trivial si σ est de seconde ou troisième espèce. Dans le cas où σ est de première espèce, il s'identifie au groupe des automorphismes du revêtement φ (mais il n'en dépend que par l'intermédiaire de σ) et on a donc $\pi_\sigma \cong \mathbf{Z}$.

3.4. Espace des orbites et holonomie relevée.

Nous aurons besoin, dans les sections suivantes, de la notion d'holonomie relevée pour une structure projective sur S^1. Il s'agit d'une classe de conjugaison dans le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})$ du groupe $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$, qui relève l'holonomie classique et qui est canoniquement associée à la structure projective considérée. Nous allons en profiter pour exposer une application essentielle de cet objet : la détermination de l'espace $\mathfrak{M}$ des orbites de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ dans $\mathfrak{P}$ (et donc dans $\mathfrak{L}$ et $\widehat{\mathfrak{Q}}$).

Rappelons que le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})$ ne s'identifie pas à un groupe de matrices. En revanche, un modèle explicite peut être construit dans $\mathrm{Diff}^+(\mathbf{R})$. Plus précisément, le groupe $\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})$ est isomorphe au groupe des automorphismes préservant l'orientation de la structure projective canonique de $\mathbf{R}$. Ainsi, $\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})$ s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{Diff}^+(\mathbf{R})$ constitué par les relevés à $\mathbf{R}$ des homographies $h \in \mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$, via le revêtement $q\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}P^1$. Ces relevés $\tilde{h}$ satisfont en outre à la condition : $\tilde{h}\left(t + \frac{1}{2}\right) = \tilde{h}(t) + \frac{1}{2}$; ils forment donc un sous-groupe de $\mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R})$.

Soit, à présent, une structure $\sigma = [\varphi] \in \mathfrak{P}$ et $\widetilde{\varphi}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un relevé à $\mathbf{R}$ du développement φ. Ce relevé réalise un difféomorphisme de $\mathbf{R}$ sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbf{R}$. Le difféomorphisme $\widetilde{\varphi} \circ T \circ \widetilde{\varphi}^{-1} : I \to I$ se prolonge de manière unique en un élément $\widetilde{M} \in \widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})$ qui relève l'holonomie M du développement φ. Notons alors $c(\widetilde{M})$ la classe de $\widetilde{M}$ modulo l'action de $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R}) \cong \mathrm{Aut}\left(\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})\right)$. Il vient :

THÉORÈME 3.4.1 ([18], [27]). — *L'application*

$$\mathfrak{P} \to \widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})/\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R}) : \sigma \mapsto c(\widetilde{M})$$

est un invariant complet.

Soit $\mathcal{C}(\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R}))$ l'ensemble des classes de conjugaison dans $\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})$, on a aussi le :

COROLLAIRE 3.4.1 ([16]). — *L'espace $\mathfrak{M}$ des classes d'isomorphie des structures projectives sur le cercle s'identifie à l'espace $\mathcal{C}\left(\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})\right)/\mathbf{Z}_2$.*

Remarque. — Le groupe $\mathbf{Z}_2$ désigne ici le groupe des automorphismes extérieurs de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})$.

On obtient ainsi un modèle de l'espace des orbites coadjointes du groupe de Bott-Virasoro de charge centrale $\dfrac{1}{2}$.

4. Nombres de rotation attachés à une orbite.

La trace de l'holonomie n'est pas un invariant complet. Il est nécessaire, pour cela, de lui adjoindre un autre invariant numérique, de type dynamique cette fois. Nous donnons trois constructions distinctes de cet invariant. La première s'inspire des travaux de N. Kuiper (cf [18]) et C. Slaheddine (cf [27]), la seconde est due à V.F. Lazutkin et T.F. Pankratova (cf [20]) et la troisième à J. Moser (cf [22]). Ces trois approches nécessitent la notion de nombre de rotation d'un difféomorphisme du cercle. À ce titre, nous rappelons ci-dessous quelques définitions et propriétés élémentaires.

Si f un élément du revêtement $\mathrm{Diff}^{+}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R})$ et t_0 un réel, on peut montrer (cf [14]) que la limite

$$\theta(f) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f^n(t_0)}{n}$$

existe toujours et qu'elle est indépendante du choix de t_0. C'est le *nombre de translation* du difféomorphisme f. L'application $\theta : \mathrm{Diff}^{+}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$

est continue pour la topologie C^0 et descend le long des revêtements $p_*\colon \mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R}) \to \mathrm{Diff}^+(S^1)$ et $p\colon \mathbf{R} \to S^1$ en une application C^0-continue $\varrho\colon \mathrm{Diff}^+(S^1) \to S^1$. C'est l'application *nombre de rotation* de H. Poincaré.

Le nombre de rotation est le principal invariant dynamique du groupe $\mathrm{Diff}^+(S^1)$. C'est un invariant de conjugaison et même de semi-conjugaison : deux difféomorphismes ont le même nombre de rotation si et seulement si ils sont entrelacés par une application continue de degré 1. De plus, soit $T_a\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}\colon t \mapsto t + a$ et $R_a\colon S^1 \to S^1\colon z \mapsto e^{2i\pi a}z$ les translations sur $\mathbf{R}$ et S^1 d'amplitude a. Alors, $\theta(T_a) = a$ et $\varrho(R_a) = e^{2i\pi a}$.

4.1. Nombre de rotation d'une structure projective.

Soit σ une structure projective sur le cercle et $m \in \widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R}) \subset \mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R})$ un représentant de son holonomie relevée. Puisque le nombre de translation est invariant par conjugaison, le nombre positif $|\theta(m)|$ ne dépend que de la structure σ.

Définition 4.1.1. — *Le nombre $\theta(\sigma) := |\theta(m)|$ est appelé le* nombre de translation *de la structure σ.*

L'action de $\mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R})$ sur les développements n'affecte pas l'holonomie relevée. L'application

$$\theta\colon \mathfrak{P} \to \mathbf{R}_+$$

est par conséquent un invariant. Celui-ci peut se calculer à partir de la donnée d'un développement de la structure σ.

Lemme 4.1.1. — *Si φ est un développement de la structure σ et $\widetilde{\varphi}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un de ses relèvements à $\mathbf{R}$, on a :*

$$\theta(\sigma) = \lim_{t\to+\infty} \left|\frac{\widetilde{\varphi}(t)}{t}\right|.$$

Preuve. — Notons m l'holonomie relevée associée au développement φ. La relation (14) entraîne

$$\forall t \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N} \quad \widetilde{\varphi}(t+n) = m^n \cdot \widetilde{\varphi}(t).$$

Il s'ensuit que

$$\theta(m) = \lim_{n\to+\infty} \frac{m^n \cdot \widetilde{\varphi}(t_0)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\widetilde{\varphi}(t_0+n)}{n}. \qquad \square$$

PROPOSITION 4.1.1. — *Pour qu'une structure projective σ soit de première espèce, il faut et il suffit que son nombre de translation soit non-nul. Deux cas se présentent alors :*

(i) *soit σ est parabolique ou hyperbolique et :* $\theta(\sigma) = \dfrac{n}{2}$ $, n \in \mathbf{N} - 0$;

(ii) *soit σ est elliptique et :* $2\,|\cos(2\pi\theta(\sigma))| = \tau(\sigma)$.

Preuve. — Soit φ un développement de la structure σ, m son holonomie relevée et $\widetilde{\varphi}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un relèvement le long de $q\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}P^1$. Si σ est de seconde ou troisième espèce, $\widetilde{\varphi}$ prend ses valeurs dans un intervalle ouvert à bornes finies. Ce relèvement est donc borné et $\theta(\sigma) = 0$ par le lemme ci-dessus. Supposons maintenant que la structure soit de première espèce. Si $\theta(m)$ était nul, l'holonomie relevée admettrait un point fixe $s_0 \in \mathbf{R}$ et, en notant t_0 le réel $\widetilde{\varphi}^{-1}(s_0)$, on aurait : $\widetilde{\varphi}(t_0 + n) = m^n \cdot \widetilde{\varphi}(t_0) = s_0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$, ce qui contredit le fait que $\widetilde{\varphi}$ est un difféomorphisme. Supposons à présent que σ soit de première espèce, de type parabolique ou hyperbolique, et notons M le projeté de l'holonomie relevée par le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{SL}(2;\mathbf{R})$. Ce dernier peut être vu comme image réciproque par l'inclusion du revêtement $\mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{Diff}^+(S^1)$, le plongement $\mathrm{SL}(2;\mathbf{R}) \hookrightarrow \mathrm{Diff}^+(S^1)$ étant obtenu en faisant opérer le groupe spécial linéaire sur les droites vectorielles orientées de $\mathbf{R}^2$. Dès lors, l'élément M s'identifie au difféomorphisme $f_M\colon S^1 \to S^1$ défini par $f_M(z) := \dfrac{M \cdot z}{|M \cdot z|}$. Comme $|\mathrm{Tr}(M)| \geqslant 2$, M possède au moins une valeur propre réelle et un des deux difféomorphismes f_M ou f_{-M} admet un point fixe. Le nombre de rotation $\varrho(f_M)$ est donc égal à -1 ou 1 et la relation $\varrho(f_M) = \exp(2i\pi\theta(m))$ implique que $\theta(m) = \dfrac{n}{2}$, $\quad n \in \mathbf{Z}$. Reste le cas où σ est de première espèce elliptique. Quitte à faire agir sur φ une homographie, on peut toujours supposer que M est une rotation :

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi\alpha) & -\sin(2\pi\alpha) \\ \sin(2\pi\alpha) & \cos(2\pi\alpha) \end{pmatrix}.$$

Il vient : $\theta(m) = \alpha + n \quad (n \in \mathbf{Z})$ et on conclut en utilisant la relation : $\tau(\sigma) = |\mathrm{Tr}(M)|$. □

4.2. Invariant de Lazutkin et Pankratova.

Dans leur étude des formes normales des équations de Hill (cf [20]), V.F. Lazutkin et T.F. Pankratova ont été amenés à construire un invariant sur l'espace $\mathfrak{L}_\infty$ des opérateurs de Hill oscillants. Une première étape consiste à associer à un opérateur $L \in \mathfrak{L}_\infty$ un difféomorphisme du cercle g_L et ce, de manière équivariante (le groupe $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ opérant sur lui-même par conjugaison).

Soit donc L un opérateur oscillant et t_0 un réel. Faisons le choix d'une solution non-triviale y de l'équation $Ly = 0$ qui s'annule en t_0 et notons t_1 le zéro de y qui succède à t_0 (dans le sens des réels positifs). Le réel t_1 est indépendant du choix de la solution y : les solutions s'annulant en t_0 forment en effet une droite vectorielle dans l'espace des solutions de $Ly = 0$. Nous pouvons alors définir une application :

$$\tilde{g}_L\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}\colon t_0 \mapsto t_1.$$

Pour la même raison que celle évoquée plus haut, cette application est injective. La surjectivité provient du théorème d'existence des solutions des équations différentielles linéaires. Enfin, le théorème de dépendance C^∞ des solutions par rapport aux conditions initiales montre que $\tilde{g}_L$ est de classe C^∞, tandis que la périodicité du potentiel de L nous assure de la relation : $\tilde{g}_L(t+1) = \tilde{g}_L(t) + 1$. L'application $\tilde{g}_L$ est donc un élément du groupe $\mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R})$.

Notons $g_L = p_*(\tilde{g}_L)$ le difféomorphisme de S^1 associé à $\tilde{g}_L$.

PROPOSITION 4.2.1 ([20]). — *L'application*

$$\Pi\colon \mathfrak{L}_\infty \to \mathrm{Diff}^+(S^1)\colon L \mapsto g_L$$

est $\mathrm{Diff}^+(S^1)$*-équivariante.*

DÉFINITION 4.2.1. — *On appelle* invariant de Lazutkin-Pankratova *l'application :*

$$\beta\colon \mathfrak{L}_\infty \to \mathbf{R}\colon L \mapsto \theta(\tilde{g}_L).$$

Remarque. — L'invariant effectivement utilisé dans [LP] est en fait :

$$\mathfrak{L}_\infty \to S^1\colon L \mapsto \varrho(g_L).$$

Le difféomorphisme $\tilde{g}_L$ était dejà utilisé par O. Boruvka dès 1967 pour l'étude algébrique de l'action de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ sur les équations de Hill (cf [2]). Dans la terminologie de O. Boruvka, $\tilde{g}_L$ est la *dispersion centrale basique* associée à l'opérateur L et les puissances $\tilde{g}_L^k$ constituent ses *dispersions centrales d'ordre k*. La théorie de Sturm de l'équation $Ly = 0$ (c'est-à-dire l'étude de la répartition des zéros de ses solutions) se retrouve encodée dans la dynamique du difféomorphisme g_L, via l'application Π.

4.3. Nombre de rotation de Moser.

Nous rappelons ici la construction de l'invariant de Moser d'un opérateur de Hill telle qu'elle est décrite dans [22]. Soit $L \in \mathfrak{L}$ et y une solution non-triviale de l'équation associée. On s'intéresse alors à la courbe intégrale $t \mapsto (y(t), y'(t))$ dans l'espace des phases. En munissant ce dernier des coordonnées polaires, on obtient deux fonctions r et α telles que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} y(t) &= r(t)\sin(2\pi\alpha(t)) \\ y'(t) &= r(t)\cos(2\pi\alpha(t)). \end{cases}$$

J. Moser montre alors que la limite

$$\alpha(L) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\alpha(t)}{t} \tag{19}$$

existe et est indépendante du choix de la solution y.

Définition 4.3.1. — *Le nombre réel* $\alpha(L)$ sera appelé le nombre de rotation de Moser *de l'opérateur* L.

Il existe une autre caractérisation de ce nombre. Soit $t \geqslant 0$ et notons $N_{L,y}(t)$ le nombre de zéros que possède la solution y sur l'intervalle $[0, t]$, on a la :

Proposition 4.3.1 ([22]).

$$\alpha(L) = \frac{1}{2} \lim_{t \to +\infty} \frac{N_{L,y}(t)}{t}.$$

Nous verrons lors de la démonstration du théorème B pourquoi l'application $\alpha \colon \mathfrak{L} \to \mathbf{R}$ est un invariant.

4.4. Démonstration du théorème B.

Nous nous proposons de montrer que les trois invariants décrits plus haut sont essentiellement les mêmes. Fixons une fois pour toutes, dans ce paragraphe, un opérateur de Hill L. La structure projective associée sera notée σ. Remarquons, avant toutes choses, que si L est non-oscillant, σ est de seconde ou troisième espèce et les résultats précédents nous apprennent que :

- $\theta(\sigma) = 0$;
- $\beta(L)$ n'est pas défini ;
- $\alpha(L) = 0$ (puisque $N_{L,y}(t)$ est borné).

Ainsi, nous supposerons que L est oscillant, donc que σ est de première espèce. A présent, énonçons le :

THÉORÈME B. — *Soit L un opérateur de Hill oscillant et σ la structure projective d'espèce I associée,*

$$\theta(\sigma) = \alpha(L) = \frac{1}{2\beta(L)}. \tag{20}$$

Nous aurons besoin de deux lemmes.

LEMME 4.4.1. — *Le difféomorphisme $\tilde{g}_L$ est un des générateurs du groupe π_σ.*

Preuve. — Soit $\varphi_L : \mathbf{R} \to P(E^*)$ le développement canonique associé à l'opérateur L (voir remarque (3.3.1) numéro 3). Modulo l'isomorphisme $P(E) \cong P(E^*)$, $\varphi_L(t)$ est la droite vectorielle $D_t \subset E$ formée par les solutions de $Ly = 0$ s'annulant au point t. Soit alors $t \in \mathbf{R}$ et $y \in D_t$. Comme $y(t) = 0$, on a également $y(\tilde{g}_L(t)) = 0$. Donc, pour tout réel t, $D_{\tilde{g}_L(t)} = D_t$. C'est-à-dire que $\varphi_L \circ \tilde{g}_L = \varphi_L$ et le difféomorphisme $\tilde{g}_L$ est dans le groupe π_σ. Il reste à montrer que $\tilde{g}_L$ engendre π_σ. Pour nous en assurer, il suffit de vérifier que les puissances de $\tilde{g}_L$ opèrent transitivement sur les fibres de φ_L. Soient donc $t, t' \in \mathbf{R}$ tels que $\varphi_L(t) = \varphi_L(t')$. Comme $D_t = D_{t'}$, on a $y(t) = y(t') = 0$ et il existe un entier relatif k tel que $t' = \tilde{g}_L^k(t)$ (l'entier $|k-1|$ est le nombre de zéros de y strictement compris entre t et t'). □

LEMME 4.4.2. — *La distance entre deux zéros consécutifs d'une solution de l'équation $Ly = 0$ est bornée par une constante indépendante du choix de la solution et des zéros.*

Preuve. — Le difféomorphisme $\tilde{g}_L$ étant équivariant, il peut s'écrire sous la forme $\mathrm{id} + v$ où v est une fonction périodique. Si t_0 et t_1 sont les deux zéros en question ($t_0 \leqslant t_1$), on a : $|t_1 - t_0| = |\tilde{g}_L(t_0) - t_0| = |v(t_0)|$ et v est bornée car périodique. □

Preuve du théorème.

Affirmation 1 : $\beta(L) \cdot \theta(\sigma) = \dfrac{1}{2}$.

Soit φ un développement de σ, m son holonomie relevée et $\widetilde{\varphi}$ un relèvement de φ le long du revêtement universel $q\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}P^1$. On peut toujours supposer que la dérivée du difféomorphisme $\widetilde{\varphi}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est positive, sinon on fait agir l'homographie $t \mapsto -t$ sur le développement φ. Ce relèvement définit donc un isomorphisme préservant l'orientation du revêtement φ sur le revêtement q. On en déduit, grace au lemme 4.4.1 que $\widetilde{\varphi} \circ \tilde{g}_L \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ est la translation de revêtement $S : t \mapsto t + \dfrac{1}{2}$ associée à q. Il vient alors

$$\theta(\tilde{g}_L) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\widetilde{\varphi}^{-1} \circ S^n \circ \widetilde{\varphi}\right)(t_0)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\widetilde{\varphi}^{-1}\left(\widetilde{\varphi}(t_0) + \frac{n}{2}\right)}{n}.$$

Enfin, en choisissant t_0 de façon à annuler $\widetilde{\varphi}(t_0)$ et par le changement de variable $u := \widetilde{\varphi}^{-1}\left(\dfrac{n}{2}\right)$, on obtient :

$$\theta(\tilde{g}_L) = \lim_{u \to +\infty} \frac{u}{2\widetilde{\varphi}(u)} = \frac{1}{2\theta(m)}.$$

Affirmation 2 : $\alpha(L) \cdot \beta(L) = \dfrac{1}{2}$.

Notons $N(t)$ la fonction $N_{L,y}(t)$ définie en (4.3). Comme la limite $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{N(t)}{t}$ est indépendante de la solution y choisie, on peut toujours supposer que $y(0) = 0$. Soient $t_1 = 0 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ les zéros de y sur l'axe positif. Ils vérifient la relation : $t_{N(t)+1} = \tilde{g}_L^{N(t)}(0)$. Le lemme 4.4.2 nous assure alors de l'existence d'une constante $K > 0$ ne dépendant que de L et telle que : $\left|t_{N(t)+1} - t_{N(t)}\right| < K, \quad \forall t \in \mathbf{R}$. Le réel t étant toujours situé entre les deux zéros $t_{N(t)}$ et $t_{N(t)+1}$, la fonction $\eta(t) := t_{N(t)+1} - t$ est bornée et il vient

$$\beta(L) = \theta(\tilde{g}_L) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\tilde{g}_L^{N(t)}(0)}{N(t)} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t}{N(t)} + \frac{\eta(t)}{N(t)}\right) = \frac{1}{2\alpha(L)}. \quad \square$$

Remarque. — Quitte à élargir le domaine des valeurs de l'invariant β à $\mathbf{R}P^1 = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ et à poser $\beta(L) := \infty$ si L est non-oscillant, le théorème est valable pour tout $L \in \mathfrak{L}$.

5. Classification des stabilisateurs.

Nous nous proposons ici de déterminer et de classer les stabilisateurs des moments réguliers de $\widehat{\mathfrak{Q}}$. L'approche choisie (celle des structures projectives sur le cercle) ainsi que les outils (trace et nombre de rotation) nous permettrons d'éviter le passage par les algèbres de Lie de ces stabilisateurs.

5.1. Les homomorphismes r_φ et R_φ.

Soit σ une structure projective sur S^1 et φ un développement de cette structure. Nous nous proposons de construire deux représentations du groupe $\widetilde{G}_\sigma$ des automorphismes relevés de σ, l'une dans $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$, l'autre dans $\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})$.

Tout d'abord, la relation (18) définit une application :

$$R_\varphi : \widetilde{G}_\sigma \longrightarrow \mathrm{PSL}(2;\mathbf{R}) : f \longmapsto A.$$

On vérifie ensuite que cette application est un homomorphisme de groupes qui envoie la translation $T : t \mapsto t+1$ sur l'holonomie M du développement. Il est également clair que $\mathrm{Ker}(R_\varphi) = \pi_\sigma$. De plus, comme tous les difféomorphismes $f \in \widetilde{G}_\sigma$ commutent à la translation T, l'homomorphisme R_φ prend ses valeurs dans le centralisateur de l'holonomie, noté $\mathrm{Cent}(M)$.

PROPOSITION 5.1.1. — *L'homomorphisme R_φ se relève (de manière unique) le long du revêtement $\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$ en un monomorphisme*

$$r_\varphi : \widetilde{G}_\sigma \longrightarrow \widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R}).$$

Si m désigne l'holonomie relevée associée au développement φ, on a aussi :

(i) $r_\varphi(T) = m$;

(ii) $\mathrm{Im}(r_\varphi) \subset \mathrm{Cent}(m)$.

Preuve. — Soit $\widetilde{\varphi}$ un relèvement de φ le long du revêtement universel $q{:}\,\mathbf{R} \to \mathbf{R}P^1$. C'est un difféomorphisme $\widetilde{\varphi}{:}\,\mathbf{R} \to I$ sur un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$. Pour tout $f \in \widetilde{G}_\sigma$, l'application $\widetilde{\varphi}\circ f\circ\widetilde{\varphi}^{-1}$ est alors un difféomorphisme de I qui se projette, via le revêtement q, sur la restriction de l'homographie $R_\varphi(f)$ à l'ouvert $q(I) \subset \mathbf{R}P^1$. L'application $\widetilde{\varphi}\circ f\circ\widetilde{\varphi}^{-1}$ est donc un automorphisme local de la structure projective canonique de la droite réelle. Ce faisant, il s'étend de façon unique en un automorphisme global, c'est-à-dire un élément de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})$. Nous noterons ce dernier $r_\varphi(f)$:

$$r_\varphi(f)_{|I} = \widetilde{\varphi}\circ f\circ\widetilde{\varphi}^{-1}. \tag{21}$$

Il est clair que $r_\varphi\colon \widetilde{G}_\sigma \to \widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})$ est un homomorphisme. L'injectivité provient directement de l'égalité

$$\widetilde{\varphi}\circ f = r_\varphi(f)\circ\widetilde{\varphi}. \tag{22}$$

Cette égalité, appliquée à $f = T$, donne $r_\varphi(T) = m$ et la condition $f\circ T = T\circ f$ permet de vérifier la dernière propriété. □

Si nous faisons le choix d'un autre développement ψ (pour la même structure σ), les homomorphismes associés R_ψ et r_ψ seront conjugués par rapport aux anciens. Plus précisément, si A désigne l'homographie transformant φ en $\psi = A\circ\varphi$, on aura :

$$R_\psi = A\cdot R_\varphi\cdot A^{-1} \quad \text{et} \quad r_\psi = \underline{A}\cdot r_\varphi$$

où $A \longmapsto \underline{A}$ désigne l'isomorphisme : $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R}) \cong \mathrm{Aut}(\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R}))$ (automorphismes du groupe $\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})$).

5.2. Centralisateurs de l'holonomie.

Nous nous proposons de montrer que les homomorphismes $R_\varphi\colon \widetilde{G}_\sigma \to \mathrm{Cent}(M)$ et $r_\varphi\colon \widetilde{G}_\sigma \to \mathrm{Cent}(m)$ construits dans la section précédente permettent d'identifier le groupe G_σ, suivant les cas, à un quotient du centralisateur de M ou du centralisateur de m. Notons $\langle m\rangle$ le groupe monogène engendré par l'élément m :

THÉORÈME C. — *Soit $\sigma = [\varphi]$ une structure projective sur le cercle, M l'holonomie de φ et m son holonomie relevée :*

- $G_\sigma \cong \mathrm{Cent}(m)/\langle m\rangle$ *si σ est de première espèce;*
- $G_\sigma \cong \mathrm{Cent}(M)/\langle M\rangle$ *si σ est de seconde ou troisième espèce.*

Puisque l'homomorphisme R_φ (resp. r_φ) envoie le sous-groupe $\langle T\rangle \cong \mathbf{Z}$ de $\widetilde{G}_\sigma$ sur le sous-groupe $\langle M\rangle \subset \mathrm{Cent}(M)$ (resp. $\langle m\rangle \subset \mathrm{Cent}(m)$), il suffira en fait de montrer le

LEMME 5.2.1. — *Le groupe $\widetilde{G}_\sigma$ est isomorphe à $\mathrm{Cent}(m)$ si la structure σ est de première espèce ou bien à $\mathrm{Cent}(M)$ si σ est de seconde ou troisième espèce.*

Preuve. — Soit $\widetilde{\varphi}$ un relèvement de φ le long du revêtement universel de $\mathbf{R}P^1$.

Cas 1 : La structure est de première espèce.

Le seul travail est d'établir la surjectivité du monomorphisme $r_\varphi: \widetilde{G}_\sigma \to \mathrm{Cent}(m)$. Soit donc a un élément de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})$ commutant à m. L'application $f := \widetilde{\varphi} \circ a \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ est dans $\mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R})$. En effet, puisque σ est de première espèce, $\widetilde{\varphi}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est un difféomorphisme, et la condition $f \circ T = T \circ f$ est la traduction de l'égalité $am = ma$. Enfin, si $A \in \mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$ désigne le projeté de a par le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R}) \to \mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$, on vérifie que $\varphi \circ f = A \circ \varphi$, donc que $a = r_\varphi(f)$.

Cas 2 : La structure est de seconde ou troisième espèce.

Nous devons montrer que $R_\varphi: \widetilde{G}_\sigma \to \mathrm{Cent}(M)$ est un isomorphisme. Il s'agit d'établir la trivialité de π_σ et la surjectivité de R_φ. Si $f \in \pi_\sigma$, il existe un entier k tel que : $\widetilde{\varphi} \circ f = S^k \circ \widetilde{\varphi}$, où $S(t) = t + \dfrac{1}{2}$ désigne la translation du revêtement $q: \mathbf{R} \to \mathbf{R}P^1$. La translation S^k doit laisser invariant l'intervalle ouvert $\widetilde{\varphi}(\mathbf{R})$. Or, ce dernier est à bornes finies car σ est d'espèce II ou III, d'où : $k = 0$ et $f = \mathrm{id}$. Soit maintenant A un élément de $\mathrm{Cent}(M)$. Comme $AMA^{-1} = M$, les deux développements φ et $A \circ \varphi$ ont la même holonomie M, donc le même ensemble de valeurs $\Omega \subset \mathbf{R}P^1$ (cf. lemme 3.1.1). De plus, la structure σ étant d'espèce II ou III, l'application $\varphi: \mathbf{R} \to \Omega$ est un difféomorphisme sur un intervalle ouvert de la droite projective. L'application $f := \varphi^{-1} \circ (A \circ \varphi)$ est donc un difféomorphisme de $\mathbf{R}$. L'égalité $AM = MA$ donne directement la condition d'équivariance $f \circ T = T \circ f$ et nous avons trouvé $f \in \mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R})$ vérifiant $\varphi \circ f = A \circ \varphi$, ce qu'il fallait montrer. □

Remarque 5.2.1. — 1. Les isomorphismes mis en jeu ci-dessus sont tous des isomorphismes de groupes de Lie.

2. Le groupe $\mathrm{Cent}(m)$ est une extension centrale de $\mathrm{Cent}(M)$ par $\mathbf{Z}$. On en déduit, dans tous les cas, que la dimension du groupe de Lie G_σ est égale à celle du centralisateur de l'holonomie M.

5.3. Théorème D : classification.

Nous allons établir la classification des groupes d'isotropie $G_\sigma \subset \mathrm{Diff}^+(S^1)$. Une partie des résultats contenus dans le théorème D est connue (cf [7], [16], [18], [24] et [27]) : ce sont les groupes isomorphes à S^1 et aux revêtements finis de PSL(2;**R**). Le cas des stabilisateurs isomorphes à $S^1 \times \mathbf{Z}_n$ est nouveau. La preuve comporte quatre lemmes et utilise de manière décisive la trace $\tau: \mathfrak{P} \to \mathbf{R}_+$ et le nombre de rotation $\theta: \mathfrak{P} \to \mathbf{R}$. Nous supposerons donnés une fois pour toutes une structure projective σ sur le cercle, un développement $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}P^1$ de cette structure et un relèvement $\widetilde{\varphi}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. L'holonomie de φ sera notée M et son holonomie relevée m. Nous utiliserons également les conventions suivantes. Si a, b et α sont trois réels ($a \neq 0$), on notera :

$$H_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

$$T_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\alpha & -\sin 2\pi\alpha \\ \sin 2\pi\alpha & \cos 2\pi\alpha \end{pmatrix}$$

ces matrices étant vues comme éléments de PSL(2;**R**). Nous aurons également besoin des trois sous-groupes suivants de PSL(2;**R**) :

- le groupe H(1;**R**) des homothéties $t \mapsto \lambda t$ ($\lambda > 0$),
- le groupe SO(2;**R**) des rotations $t \mapsto \dfrac{\cos 2\pi\alpha \cdot t - \sin 2\pi\alpha}{\sin 2\pi\alpha \cdot t + \cos 2\pi\alpha}$,
- le groupe E(1;**R**) des translations $t \mapsto t + b$.

Enfin, le symbole $\sim$ dénotera la conjugaison par PGL(2;**R**).

THÉORÈME D. — *Le groupe G_σ des automorphismes de la structure σ est isomorphe, comme groupe topologique, à un des trois groupes suivants :*

(i) $\mathbf{R}/a\mathbf{Z}$,

(ii) $(\mathbf{R}/a\mathbf{Z}) \bigoplus (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$,

(iii) $\widetilde{\mathrm{PSL}}^{(n)}(2;\mathbf{R})$.

Le cas (i) se présente lorsque σ est d'espèce I-elliptique avec $\theta(\sigma) = a$, d'espèce II avec $M \sim H_{e^a}$ ou bien d'espèce III avec $a = 1$ et $M \sim T_1$. Le *cas (ii) se présente lorsque σ est d'espèce I-hyperbolique avec $M \sim H_{e^a}$ et $\theta(\sigma) = \frac{n}{2}$ ou I-parabolique avec $a = 1$, $M \sim T_1$ et $\theta(\sigma) = \frac{n}{2}$. Le cas (iii) se présente lorsque σ est d'espèce I-parabolique avec $M = \mathrm{id}$ et $\theta(\sigma) = \frac{n}{2}$.*

COROLLAIRE 5.3.1. — *Si σ est une structure projective sur S^1 de première espèce parabolique ou hyperbolique et d'holonomie non-triviale, alors le nombre de composantes connexes de son groupe d'automorphismes est égal à $2\theta(\sigma)$.*

COROLLAIRE 5.3.2. — *On a le même résultat si L est un opérateur de Hill oscillant, non- stable et à monodromie non-triviale.*

LEMME 5.3.1. — *Modulo conjugaison par* $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R})$, *l'holonomie M peut toujours s'écrire :*

(i) R_α *avec* $\alpha \neq \frac{n}{2}, \forall n \in \mathbf{Z}$, *si σ est d'espèce I-elliptique;*

(ii) H_a *avec* $a > 1$, *si σ est d'espèce I-hyperbolique ou d'espèce II;*

(iii) $T_0 = \mathrm{id}$ *ou* T_1, *si σ est d'espèce I-parabolique;*

(iv) T_1, *si σ est d'espèce III.*

Preuve. — Dans le cas (i), la condition sur σ équivaut à $\tau(\sigma) < 2$ et M admet deux valeurs propres complexes conjuguées $e^{2i\pi\alpha}$ et $e^{-2i\pi\alpha}$ sur S^1. L'holonomie M est donc $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$-conjuguée à une rotation R_α différente de l'identité, d'où la condition sur α. Dans le second cas, $\tau(\sigma) > 2$. M admet donc deux valeurs propres réelles distinctes et est $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$-conjugué à l'élément $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Comme on peut aussi conjuguer par l'antihomographie $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, il est toujours possible de choisir $a > 1$. Dans le cas (iii), la trace de σ vaut 2. La valeur propre est 1 avec une multiplicité égale à 2. Il y a 3 classes de $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$-conjugaison : celles de T_{-1}, T_0 et T_1. Il n'y a que 2 classes de $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R})$-conjugaison, T_0 et T_1, car on peut conjuguer par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dans le dernier cas, si M était l'identité, on aurait également $m = \mathrm{id}$ (puisque le nombre de rotation de σ est nul) et $\widetilde{\varphi} \circ T = \widetilde{\varphi}$, ce qui est contradictoire avec le fait que le relèvement $\widetilde{\varphi}$ est un difféomorphisme. Comme $\tau(\sigma) = 2$ et $M \neq \mathrm{id}$, il ne reste qu'une seule classe : celle de T_1. □

Notons $\widetilde{G}$ la préimage par le revêtement $q_*\colon \widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R}) \to \mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$ du sous-groupe $G \subset \mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$.

LEMME 5.3.2. — *Si A et B sont deux éléments de* $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$ *et a, b deux relevés respectifs dans* $\widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})$, *alors :*

$$AB = BA \Leftrightarrow ab = ba.$$

Preuve. — L'implication $\Leftarrow$ est triviale. Puisque $q_*(ab) = q_*(ba)$, il existe un entier k tel que $aba^{-1} = S^k b$. En prenant le nombre de translation des deux membres de cette égalité, il vient : $k = 0$. □

Par conséquent si G est un sous-groupe abélien de $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$, $\widetilde{G}$ le sera également. On a aussi la relation importante : $\widetilde{\mathrm{Cent}(M)} = \mathrm{Cent}(m)$.

LEMME 5.3.3. — *On a les isomorphismes suivants :*

(j) $\mathrm{Cent}(m) \cong \widetilde{\mathrm{SO}}(2;\mathbf{R})$ *si σ est d'espèce I-elliptique,*

(jj) $\mathrm{Cent}(m) \cong \widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})$ *si σ est d'espèce I-parabolique et* $M = \mathrm{id}$,

(jjj) $\mathrm{Cent}(m) \cong \widetilde{\mathrm{E}}(1;\mathbf{R})$ *si σ est d'espèce I-parabolique et* $M \neq \mathrm{id}$,

(jv) $\mathrm{Cent}(m) \cong \widetilde{\mathrm{H}}(1;\mathbf{R})$ *si σ est d'espèce I-hyperbolique,*

(v) $\mathrm{Cent}(M) \cong \mathrm{H}(1;\mathbf{R})$ *si σ est d'espèce II,*

(vj) $\mathrm{Cent}(M) \cong \mathrm{E}(1;\mathbf{R})$ *si σ est d'espèce III.*

Preuve. — Si $a > 1$ et $\alpha \neq \frac{n}{2}, \forall n \in \mathbf{Z}$, un calcul direct nous donne :

- $\mathrm{Cent}(H_a) = \mathrm{H}(1;\mathbf{R})$
- $\mathrm{Cent}(R_\alpha) = \mathrm{SO}(2;\mathbf{R})$
- $\mathrm{Cent}(T_1) = \mathrm{E}(1;\mathbf{R})$
- $\mathrm{Cent}(T_0) = \mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$.

Il suffit ensuite d'utiliser les résultats du lemme 5.3.1. □

LEMME 5.3.4. — $\widetilde{\mathrm{H}}(1;\mathbf{R}) \cong \mathrm{H}(1;\mathbf{R}) \oplus \mathbf{Z}$ *et* $\widetilde{\mathrm{E}}(1;\mathbf{R}) \cong \mathrm{E}(1;\mathbf{R}) \oplus \mathbf{Z}$.

Preuve. — Le revêtement universel $q_*\colon \widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R}) \to \mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$ et le nombre de rotation $\theta\colon \mathrm{Diff}^+_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ permettent de construire l'application

$$\Phi : \widetilde{\mathrm{H}}(1;\mathbf{R}) \to \mathrm{H}(1;\mathbf{R}) \oplus \mathbf{Z} : h \mapsto q_*(h) \oplus 2\theta(h).$$

On vérifie que le nombre $\theta(h)$ est un demi-entier exactement de la même manière que dans la preuve 4.1.1. Le groupe $\widetilde{\mathrm{H}}(1;\mathbf{R})$ est abélien comme préimage d'un groupe abélien par q_*. Le nombre de rotation étant additif sur les difféomorphismes commutants, Φ est un homomorphisme. Le noyau de q_* est engendré par la translation $S(t) = t + \frac{1}{2}$ et θ ne s'annule que sur les difféomorphismes fixant un point : Φ est donc injective. La surjectivité et la continuité de Φ sont claires. Φ est un homomorphisme continu et bijectif entre deux groupes de Lie de même dimension ; c'est donc un isomorphisme de groupes de Lie. La preuve est rigoureusement identique dans le cas du groupe $\mathrm{E}(1;\mathbf{R})$. □

Preuve du théorème. — Réutilisons la numérotation en cas du lemme 5.3.3. Le groupe G_σ est isomorphe à $\widetilde{\mathrm{Cent}}(M)/\langle m\rangle$ si la structure σ est d'espèce I et à $\mathrm{Cent}(M)/\langle M\rangle$ sinon (cf Th. C).

Cas (j) : L'holonomie M est $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R})$-conjuguée à une rotation différente de l'identité et d'angle $\alpha = \theta(\sigma)$. L'holonomie relevée m est alors $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R})$-équivalente à la translation $t \mapsto t + \alpha$. On obtient $\langle m\rangle \cong \alpha\mathbf{Z}$ et $G_\sigma \cong \mathbf{R}/\alpha\mathbf{Z}$.

Cas (jj) : L'holonomie relevée est $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R})$-équivalente à la translation S^n, avec $n = 2\theta(\sigma)$. L'isomorphisme r_φ envoit $\langle T\rangle$ sur $\langle S^n\rangle \cong n\mathbf{Z}$ et

$$G_\sigma \cong \widetilde{\mathrm{SL}}(2;\mathbf{R})/n\mathbf{Z} \cong \widetilde{\mathrm{PSL}}^{(n)}(2;\mathbf{R}).$$

Cas (jjj) : M est $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R})$-conjuguée à T_1. Posons $n = 2\theta(\sigma)$. L'holonomie relevée $m \in \widetilde{\mathrm{E}}(1;\mathbf{R})$ est $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R})$-équivalente à $T_1 \oplus n$, d'où

$$G_\sigma \cong (\mathrm{E}(1;\mathbf{R}) \oplus \mathbf{Z})/\langle T_1 \oplus n\rangle \cong \mathbf{R}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

Cas (jv) : M est $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R})$-conjuguée à H_a, avec $a > 1$ et $m \in \widetilde{\mathrm{H}}(1;\mathbf{R})$ est $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R})$-équivalente à $H_a \oplus n$ ($n = 2\theta(\sigma)$). Donc

$$G_\sigma \cong (\mathrm{H}(1;\mathbf{R}) \oplus \mathbf{Z})/\langle H_a \oplus n\rangle \cong \mathbf{R}/\alpha\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/n\mathbf{Z},$$

où $\alpha = \mathrm{Log}(a)$.

Cas (v) : M est $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R})$-conjuguée à H_a, avec $a > 1$ et

$$G_\sigma \cong \mathrm{H}(1;\mathbf{R})/\langle H_a\rangle \cong \mathbf{R}/\alpha\mathbf{Z}, \quad (\alpha = \mathrm{Log}(a)).$$

Cas (vj) : M est $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R})$-conjuguée à T_1 et

$$G_\sigma \cong \mathrm{E}(1;\mathbf{R})/\langle T_1\rangle \cong \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$ □

Remarque 5.3.1. — 1. Contrairement à l'application nombre de rotation, la fonctionnelle de trace $\tau\colon \mathfrak{P} \to \mathbf{R}_+$ est différentiable. Les sauts de la fonction $\sigma \mapsto \dim(G_\sigma)$ correspondent à la traversée des points critiques de la trace. Ces points sont les structures projectives d'holonomie triviale (ou encore les équations de Hill dont les solutions sont toutes périodiques ou toutes anti-périodiques) ; ce sont les seules à posséder un groupe d'automorphismes de dimension 3. Les structures telles que $\dim(G_\sigma) = 1$ peuvent donc être qualifiées de génériques.

2. L'application nombre de rotation, $\varrho_\sigma : G_\sigma \to S^1$, restreinte au groupe des automorphismes de σ est un caractère si l'holonomie de σ n'est pas triviale (en effet, dans ce cas G_σ est toujours abélien). Si, de plus, la structure est de première espèce elliptique, ce caractère est un monomorphisme (tout élément du noyau de ϱ_σ doit nécessairement fixer un point du cercle). Nous disposons ainsi d'une construction naturelle permettant d'associer à tout moment régulier du groupe de Bott-Virasoro un caractère de son stabilisateur coadjoint.

6. Interprétation des structures affines.

Nous revenons, dans ce dernier chapitre, aux liens existant entre les équations de Hill et les structures projectives sur S^1.

6.1. Structures affines sur S^1.

Une structure affine sur S^1 se définit de la même manière qu'en 3.1 (voir aussi la remarque 3.1.1), en remplaçant $\mathbf{R}P^1$ par $\mathbf{R}$, l'holonomie prenant ses valeurs dans le sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{R})$ constitué des homographies

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $a \neq 0$. Ce sous-groupe est l'image du plongement naturel

$$\mathrm{GA}(1;\mathbf{R}) \hookrightarrow \mathrm{PGL}(2;\mathbf{R}).$$

Toute structure affine sur le cercle définit aussi une structure projective : sa structure projective sous-jacente. Cette correspondance se traduit en termes de développements par l'application d'induction :

$$\nu : \mathfrak{A} \to \mathfrak{P} : [\gamma] \mapsto [\varphi] \tag{23}$$

où $\mathfrak{A}$ désigne l'espace des structures affines du cercle et $\varphi(t)$ la droite vectorielle de $\mathbf{R}^2$ définie par le vecteur $(\gamma(t), 1)$. L'application ν est $\mathrm{Diff}^+(S^1)$-équivariante. Elle n'est ni surjective, ni injective : il existe des structures projectives ne provenant pas d'une structure affine et deux structures affines peuvent être projectivement équivalentes sans être affinement équivalentes. La fibre de ν au-dessus d'un point σ est formée des structures affines projectivement équivalentes à σ.

L'analogue affine de la dérivée de Schwarz est un 1-cocycle non-trivial N sur le groupe $\mathrm{Diff}^+(S^1)$, à valeurs dans $\Omega^1(S^1)$. Explicitement :

$$N\colon \mathrm{Diff}^+(S^1) \to \Omega^1(S^1)\colon g \mapsto d\mathrm{Log}(u_g). \tag{24}$$

Soit n_g la fonction sur S^1 telle que $N(g) = n_g(t)dt$, on remarque que

$$\mathbf{S}(g) = \left({n_g}'(t) - \frac{1}{2}{n_g}^2(t) \right) dt^2.$$

Le 1-cocycle N permet de construire une famille à 1 paramètre $\lambda \in \mathbf{R}$ d'actions affines de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ sur $\Omega^1(S^1)$:

$$\forall g \in \mathrm{Diff}^+(S^1), \forall \omega \in \Omega^1(S^1), \quad g \cdot \omega = g^*\omega + \lambda N(g). \tag{25}$$

On notera $\widehat{\Omega}^1_\lambda(S^1)$ l'espace des 1-formes sur le cercle muni de l'action ci-dessus.

Proposition 6.1.1. — *Il existe une bijection* $\mathrm{Diff}^+(S^1)$*-équivariante de* $\widehat{\Omega}^1_\lambda(S^1)$ *sur l'espace* $\mathfrak{A}$ *des structures affines sur le cercle.*

Preuve. — Soit $\omega = v(t)dt$ une 1-forme sur S^1. Notons σ_ω la structure affine sur S^1 dont un développement $\gamma_\omega\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est

$$\gamma_\omega(t) = \int_{t_0}^t \exp\left(\frac{V(s)}{\lambda}\right) ds$$

où la fonction V désigne une primitive quelconque de w (la définition de γ_ω requiert donc le choix de 2 constantes arbitraires). On vérifie que γ_ω est bien une immersion. L'holonomie affine (a, b) est donnée par :

$$a = \exp\left(\frac{1}{\lambda}\int_{S^1}\omega\right) \qquad b = \int_{t_0}^{t_0+1} \exp\left(\frac{V(s)}{\lambda}\right) ds.$$

L'application $[\gamma] \mapsto \omega := \lambda d\mathrm{Log}\,|\gamma'|$ est bien définie et constitue la bijection réciproque de $\omega \mapsto \sigma_\omega$. Reste l'équivariance : si g est un difféomorphisme du cercle, il faut vérifier que la structure $\sigma_1 = \sigma_{g\cdot\omega}$ admet pour développement

$\gamma_\omega \circ g$. De la relation $d(g^*V + \lambda \mathrm{Log}(g')) = g \cdot \omega$, on tire un développement γ_1 de σ_1 :

$$\gamma_1(u) = \int_{u_0}^{u} \exp\left(\frac{V(g(s))}{\lambda}\right) g'(s)ds = \gamma_\omega(g(u))$$

en posant $u_0 = g^{-1}(t_0)$. □

Remarque 6.1.1. — Le paramètre λ étant fixé, la fonctionnelle $\sigma \in \mathfrak{A} \mapsto \left|\int_{S^1} \omega\right|$ est un invariant complet (cf [26]).

Dans la suite, nous ne considérerons plus que l'action affine associée à $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. En conséquence, nous simplifierons la notation $\widehat{\Omega}^1_{-1/2}(S^1)$ par : $\widehat{\Omega}^1(S^1)$.

6.2. Géométrie de l'application de Miura.

DÉFINITION 6.2.1. — On appelle *transformation de Miura* l'application :

$$\mu : \widehat{\Omega}^1(S^1) \longrightarrow \mathfrak{L} : v(t)dt \longmapsto \left(\tfrac{d}{dt} + v(t)\right)\left(\tfrac{d}{dt} - v(t)\right).$$

Un opérateur de Hill sera dit *factorisable* si il est dans l'image de μ.

Autrement dit, $L = \dfrac{d^2}{dt^2} + u(t)$ est factorisable si l'équation de Ricatti associée :

$$v' + v^2 + u = 0 \tag{26}$$

admet une solution $v(t)$ réelle, globale et périodique. La transformation de Miura peut se généraliser au cas des opérateurs différentiels linéaires d'ordre n. C'est un outil important pour l'étude des systèmes complètement intégrables de dimension infinie, et plus particulièrement pour l'équation de Korteweg-deVries.

LEMME 6.2.1. — *La transformation de Miura est* $\mathrm{Diff}^+(S^1)$*-équivariante.*

Preuve. — Soit $\omega = v(t)dt$ une 1-forme et notons $\dfrac{d^2}{dt^2} + u(t)$ son image $\mu(\omega)$ par la transformation de Miura. Soit g un difféomorphisme du cercle, on a $\mu(g \cdot \omega) = \dfrac{d^2}{dt^2} + (-w' - w^2)(t)$, où $w(t)dt = g \cdot \omega = g^*\omega - \dfrac{1}{2}N(g)$. Un calcul direct montre alors que : $-w' - w^2 = u \circ g \cdot g'^2 + \dfrac{1}{2}\mathbf{S}(g)$, donc que $\mu(g \cdot \omega) = g^*\mu(\omega)$. □

THÉORÈME E. — *Modulo les isomorphismes* $\mathfrak{A} \cong \widehat{\Omega}^1(S^1)$ *et* $\mathfrak{P} \cong \mathfrak{L}$, *l'application d'induction n'est autre que la transformation de Miura.*

Preuve. — Il faut établir la cohérence du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \widehat{\Omega}^1(S^1) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "F"', "\cong"] & \mathfrak{L} \arrow[d, "G", "\cong"'] \\ \mathfrak{A} \arrow[r, "\nu"'] & \mathfrak{P} \end{tikzcd}$$

où F et G sont les isomorphismes décrits respectivement dans la proposition 6.1.1 et le théorème 3.3.1. Soit $\omega = v(t)dt$ une 1-forme et γ le développement affine associé : $-\frac{1}{2}d\mathrm{Log}\,|\gamma'| = \omega$. Il vient :

$$G^{-1} \circ \nu \circ F(\omega) = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\mathbf{S}(\gamma)(t) = \frac{d^2}{dt^2} + (-v' - v^2)(t) = \mu(\omega). \qquad \square$$

COROLLAIRE 6.2.1. — *Soit* $\sigma \in \mathfrak{P}$ *et* $L \in \mathfrak{L}$ *l'opérateur associé, les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) σ *est réductible à une structure affine;*

(ii) L *est non-oscillant;*

(iii) L *est factorisable.*

Preuve. — Eu égard au corollaire 3.3.1, il suffit de montrer que σ est réductible à une structure affine si et seulement si l'opérateur L est factorisable. Mais ceci est évident :

$$\sigma \in \mathrm{Im}(\nu) \quad \Leftrightarrow \quad L \in \mathrm{Im}(\mu). \qquad \square$$

LEMME 6.2.2. – *Si L est un opérateur de Hill non-oscillant, le nombre de solutions périodiques de l'équation de Ricatti associée est égal au nombre de points fixes de l'opérateur de monodromie de L.*

Preuve. — Notons $\mathcal{V}$ l'espace de toutes les solutions réelles et globales de l'équation de Ricatti (26), E l'espace vectoriel des solutions de l'équation de Hill $y'' + uy = 0$ et $P(E)$ sa droite projective associée. On peut vérifier que l'on construit bien une injection $j\colon \mathcal{V} \to P(E)$ en posant : $j(v) := [e^V]$, la fonction $V(t)$ désignant une primitive quelconque de $v(t)$. L'espace des solutions périodiques de (26) est $\mathcal{V} \cap C^\infty(S^1)$. Soit $M \in \mathrm{PSL}(2;\mathbf{R})$ l'opérateur de monodromie de L, on a : $M \cdot j(v) = j(v), \forall v \in \mathcal{V}$ et $j\left(\mathcal{V} \cap C^\infty(S^1)\right) \subset \mathrm{Fix}(M)$. Réciproquement, si $\xi = [y]$ est un point fixe de M, la solution y ne s'annule jamais (L est non-oscillant) et $\xi = j(v)$ avec $v = \dfrac{y'}{y}$ périodique. Donc $\mathrm{Fix}(M) = j\left(\mathcal{V} \cap C^\infty(S^1)\right)$. $\square$

THÉORÈME F. — *Soit σ la structure projective associée à un opérateur de Hill L, le nombre de factorisations distinctes de L est égal à :*

- *0, si σ est de première espèce;*
- *1, si σ est de troisième espèce;*
- *2, si σ est de seconde espèce.*

Preuve. — Reprenons les notations du lemme ci-dessus. Si L est non-oscillant, le nombre de factorisations distinctes de L est égal à la cardinalité de la fibre $\mu^{-1}(L)$. Ce nombre k est égal à $\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(M))$, toujours d'après le lemme précédent. Ainsi, si σ est d'espèce II, M est hyperbolique et $k = 2$ et, si σ est d'espèce III, M est parabolique et $k = 1$. Dans le cas oscillant, la structure σ est de première espèce et n'admet aucune structure affine sous-jacente par 3.3.1, d'où $k = 0$. □

L'espace $\widehat{\Omega}^1(S^1)$ admet une structure de Poisson naturelle : le crochet de Gardner-Zakharov-Fadeev (cf [12], [10] et [17]). Pour le définir, il suffit de se restreindre au dual régulier de $\widehat{\Omega}^1(S^1)$, c'est-à-dire, l'espace $C^\infty(S^1)$ des fonctions. On identifiera $u \in C^\infty(S^1)$ avec la fonctionnelle

$$\underline{u} : \Omega^1(S^1) \longrightarrow \mathbf{R} : \omega \longmapsto \int_{S^1} u\omega. \tag{27}$$

Le crochet s'écrit alors

$$\{\underline{u}, \underline{v}\}(\omega) = -\frac{1}{2}\int_{S^1} v du. \tag{28}$$

Remarquons que le crochet de deux fonctionnelles linéaires est une fonctionnelle constante : les $\underline{u}$ sont les analogues des coordonnées de Darboux. Nous allons voir que les $\mathrm{Diff}^+(S^1)$-orbites dans $\widehat{\Omega}^1(S^1)$ (ie : les classes d'isomorphie de structures affines sur S^1) sont en fait des sous-variétés symplectiques de la variété de Poisson $\widehat{\Omega}^1(S^1)$. L'action infinitésimale de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ sur $\widehat{\Omega}^1(S^1)$ s'écrit

$$\forall \omega = v(t)dt \in \Omega^1(S^1), \quad \forall \xi \in \mathrm{Vect}(S^1), \quad \delta_\xi \omega = d\left(v\xi - \frac{1}{2}\xi'\right). \tag{29}$$

Soit $\widehat{\mathcal{O}}$ une $\mathrm{Diff}^+(S^1)$-orbite et $\omega \in \widehat{\mathcal{O}}$, on a :

$$\delta_\xi \omega \in \mathrm{T}_\omega \widehat{\mathcal{O}} = \left\{\delta\omega \in \Omega^1(S^1) \mid \int_{S^1} \delta\omega = 0\right\} \tag{30}$$

et

$$\int_{S^1} \omega = \mathrm{Cst}. \tag{31}$$

Si α est une 1-forme sur S^1, nous noterons $\partial^{-1}(\alpha)$ une primitive quelconque de cette 1-forme.

LEMME 6.2.3 ([12]). — *On définit bien une 2-forme Σ sur l'orbite $\widehat{\mathcal{O}}$ en posant, $\forall \omega \in \Omega^1(S^1)$, $\forall \delta_1\omega, \delta_2\omega \in \mathrm{T}_\omega\widehat{\mathcal{O}}$:*

$$\Sigma(\delta_1\omega, \delta_2\omega) := -2\int_{S^1} \partial^{-1}(\delta_1\omega)\delta_2\omega. \tag{32}$$

Cette 2-forme est l'image réciproque par la transformation de Miura de la 2-forme de Kirillov-Kostant-Souriau sur l'orbite coadjointe $\mathcal{O} = \mu(\widehat{\mathcal{O}})$ et le groupe $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ *opère par symplectomorphismes sur $\widehat{\mathcal{O}}$.*

Preuve. — Tout d'abord, l'arbitraire dans le choix de la primitive $\partial^{-1}(\delta_1\omega)$ est compensé par le fait que $\int_{S^1} \delta_2\omega = 0$, ce qui permet de tuer la constante. Posons $\mu(\omega) = \dfrac{d^2}{dt^2} + u(t)$ et faisons le choix de 2 champs ξ et $\zeta \in \mathrm{Vect}(S^1)$. Un calcul direct montre que $\Sigma(\delta_\xi\omega, \delta_\zeta\omega) = \Omega(\delta_\xi u, \delta_\zeta u)$, où Ω désigne la forme de Kirillov-Kostant-Souriau sur l'orbite $\mathcal{O}$ et $\delta_\xi u$ est l'action infinitésimale de l'algèbre de Virasoro. On en déduit que $\Sigma = \mu^*\Omega$ et $d\Sigma = 0$. Supposons à présent que $\Sigma(\delta_1\omega, \delta_2\omega) = 0$, $\forall \delta_2\omega \in \mathrm{T}_\omega\widehat{\mathcal{O}}$. La fonction $\partial^{-1}(\delta_1\omega)$ est alors constante et $\delta_1\omega = 0$: Σ est régulière. Il reste à montrer l'invariance de Σ sous l'action d'un difféomorphisme $g \in \mathrm{Diff}^+(S^1)$. Notons $\underline{g} : \widehat{\Omega}(S^1) \longrightarrow \widehat{\Omega}(S^1)$ la transformation associée. On a : $\underline{g}(\omega) = g^*\omega - \dfrac{1}{2}N(g)$ et $\mathrm{T}_\omega\underline{g}(\delta\omega) = g^*\delta\omega$, puis

$$\underline{g}^*\Sigma(\delta_1\omega, \delta_2\omega) = -2\int_{S^1} g^*\left(\partial^{-1}(\delta_1\omega)\delta_2\omega\right) = \Sigma(\delta_1\omega, \delta_2\omega). \qquad \square$$

THÉORÈME G. — *Soit $\widehat{\mathcal{O}}$ une* $\mathrm{Diff}^+(S^1)$*-orbite dans $\widehat{\Omega}^1(S^1)$. Le groupe* $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ *opère hamiltoniennement sur cette orbite et l'application moment associée $\Psi : \widehat{\mathcal{O}} \to \mathfrak{vir}^*$ est la restriction à $\widehat{\mathcal{O}}$ de l'application de Miura.*

Preuve. — Utilisons l'isomorphisme $\widehat{\Omega}(S^1) \cong \mathfrak{A}$ décrit dans la proposition 6.1.1. L'application ψ s'écrit $i_0 \circ \mu_0$, où $i_0 : \mathcal{O} \hookrightarrow \mathfrak{vir}^*$ est l'inclusion de l'orbite coadjointe $\mathcal{O} = \mu(\widehat{\mathcal{O}})$ et $\mu_0 : \widehat{\mathcal{O}} \to \mathcal{O}$ désigne la restriction bilatérale de la transformation de Miura. Cette application μ_0 est $\mathrm{Diff}^+(S^1)$-équivariante et vérifie : ${\mu_0}^*\Omega = \Sigma$. De plus, i_0 est l'application moment naturelle pour l'action coadjointe du groupe de Bott-Virasoro sur l'orbite $\mathcal{O}$. On en déduit alors, par un théorème classique de géométrie symplectique, que ψ est une application moment pour l'action de $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ sur $\widehat{\mathcal{O}}$. $\square$

Si l'orbite $\widehat{\mathcal{O}}$ contient une structure affine σ_ω réductible à une structure euclidienne, c'est-à-dire, si ω est une 1-forme exacte, alors toute structure affine isomorphe à σ_ω est encore réductible à une structure euclidienne et $\mathcal{O}$ est contenue dans les structures projectives d'espèce III. Il s'ensuit (Th. F) que μ_0 et ψ sont injectives. Si $\widehat{\mathcal{O}}$ ne contient pas de structure sous-jacente à une structure euclidienne, alors $\mathcal{O}$ est composée de structures projectives d'espèce II et chaque moment dans $\mathcal{O}$ a 2 antécédents par ψ (Th. F). On a donc le :

COROLLAIRE 6.2.2. — *On reprend les notations et hypothèses du théorème G ci-dessus. Si $\widehat{\mathcal{O}}$ contient une structure affine réductible à une structure euclidienne, l'application moment Ψ est une bijection de $\widehat{\mathcal{O}}$ sur une orbite coadjointe de $\mathfrak{vir}^*$. Dans le cas contraire, l'application Ψ est à "deux feuillets".*

BIBLIOGRAPHIE

[1] G.M. BEFFA, A transverse structure for the Lie-Poisson bracket on the dual of the Virasoro algebra, Pacific J. Math., 163-1 (1994), 43–72.

[2] O. BORUVKA, Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung, Hochschulbücher für Mathematik, Band 67, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967.

[3] R. BOTT, On the characteristic classes of groups of diffeomorphisms, Enseign. Math., 23-3, 4 (1977), 209–220.

[4] E. CARTAN, Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective, Paris, Gauthiers-Villars, 1937.

[5] I.M. GEL'FAND et D.B. FUKS, The cohomologies of the Lie algebra of the vector fields in a circle, Functional Anal. Appl., 2-4 (1968), 342–343.

[6] E. GHYS, L'invariant de Godbillon-Vey, Séminaire Bourbaki, Astérisque (SMF), 177-178 - 706 - 41ème année (1988/1989), 155–181.

[7] E. GHYS, Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsiens, Ann. Inst. Fourier, 42-1, 2 (1992), 209–247

[8] E. GHYS, Rigidité différentiable des groupes fuchsiens, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 78 (1993), 163–185.

[9] W.M. GOLDMAN, Projective geometry on manifolds, Lecture Notes at U. Maryland, 1988

[10] L. GUIEU, Sur la géométrie des orbites de la représentation coadjointe du groupe de Bott-Virasoro, Thèse de Doctorat - U. Aix-Marseille I, Marseille, France, Mars 1994.

[11] L. GUIEU, Stabilisateurs cycliques pour la représentation coadjointe du groupe des difféomorphismes du cercle, à paraître au Bull. Sci. Math. (Preprint CPT-93/P.2936), Sept. 1993.

[12] L. GUIEU et V. YU OVSIENKO, Structures symplectiques sur les espaces de courbes projectives et affines, J. Geom. Phys., 16 (1995), 120–148

[13] R.S. HAMILTON, The inverse function theorem of Nash and Moser, Bull. Am. Math. Soc., 7-1 (1982), 65–222.

[14] M.R. HERMAN, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 49 (1979), 5–234.

[15] P. IGLESIAS, La trilogie du moment, Ann. Inst. Fourier, 45-3 (1995), 825–857.

[16] A.A. KIRILLOV, Infinite dimensional Lie groups : their orbits, invariants and representations. The geometry of moments, Lecture Notes in Math., 970, Springer-Verlag (1982), 101–123.

[17] A.A. KIRILLOV et D.V. YURIEV, Kähler geometry of the infinite dimensional homogeneous space $M = \mathrm{Diff}^+(S^1)/Rot(S^1)$, Functional Anal. Appl., 21-4 (1987), 284–294.

[18] N. KUIPER, Locally projective spaces of dimension one, Michigan Math. J., 2 (1954), 95–97.

[19] N. KUIPER, Sur les surfaces localement affines, Actes Coll. Geom. Diff. Strasbourg, Ed. C.N.R.S. Paris (1953), 79–87.

[20] L.P. LAZUTKIN et T.F. PANKRATOVA, Normal forms and versal deformations for Hill's equations, Functional Anal. Appl., 9-4 (1975), 306–311.

[21] J. MILNOR, Remarks on infinite dimensional groups, Ecole d'été des Houches : Relativité, groupes et topologie II, B.S. DeWitt et R. Stora, Eds, XL, Elsevier Sci. Publishers, 1984, 1007–1057.

[22] J. MOSER, An example of a Schrœdinger equation with almost periodic potential and nowhere dense spectrum, Comment. Math. Helvetici, 56 (1981), 198–224.

[23] C. ROGER, Extensions centrales d'algèbres et de groupes de Lie de dimension infinie, algèbre de Virasoro et généralisations, Reports Math. Phys., 35-2/3 (1995), 225-266.

[24] G.B. SEGAL, Unitary representations of some infinite dimensional groups, Comm. Math. Phys., 80-3 (1981), 301–342.

[25] G.B. SEGAL, The geometry of the KdV equation, Proc. of the Trieste conf. on topological methods in QFT theory (june, 1990), W. Nahm et al., Eds, World Scientific, 93–106.

[26] B. SEKE, Sur les structures transversalement affines des feuilletages de codimension 1, Ann. Inst. Fourier, 30-1 (1980), 1–29.

[27] C. SLAHEDDINE, Sur les feuilletages de codimension 1 transversalement homographiques, Thèse de 3ème cycle, Publ. IRMA, Strasbourg, Juin 1979.

[28] D. SULLIVAN et W. THURSTON, Manifolds with canonical coordinate charts : some examples, Enseign. Math., 29 (1983), 15–25.

[29] G.M. TUYNMAN et W.J. WIEGERINCK, Central extensions and physics, J. Geom. Phys., 4 (1987), 207–258.

[30] E.J. WILCZYNSKI, Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, Teubner, Leipzig, 1906.

[31] E. WITTEN, Coadjoint orbits of the Virasoro group, Comm. Math. Phys., 114-1 (1988), 1–53.

Manuscrit reçu le 11 janvier 1996,
accepté le 26 avril 1996.

Laurent GUIEU,
GETODIM, Département de Mathématiques
Université de Montpellier II
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex 5 (France).
guieu@math.univ-montp2.fr