ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

OLIVIER GUÈS

Perturbations visqueuses de problèmes mixtes hyperboliques et couches limites

Annales de l'institut Fourier, tome 45, nº 4 (1995), p. 973-1006

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_4_973_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 4 (1995), 973-1006

PERTURBATIONS VISQUEUSES DE PROBLÈMES MIXTES HYPERBOLIQUES ET COUCHES LIMITES

par Olivier GUÈS

Introduction.

On s'intéresse au problème mixte avec conditions aux limites de Dirichlet, pour des problèmes paraboliques qui sont de petites perturbations «visqueuses» de systèmes hyperboliques multidimensionnels ($t \in \mathbf{R},\ x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbf{R}^n$) :

$$\text{(0.1)} \qquad \begin{cases} \mathcal{H}u^\varepsilon = \ F(t,x,u^\varepsilon) \ + \ \varepsilon \mathcal{E} u^\varepsilon \quad \text{dans} \quad [0,T] \times \Omega, \\ \\ \qquad\qquad u^\varepsilon_{|\partial\Omega} = 0, \quad u^\varepsilon_{|\{0\}\times\Omega} = 0. \end{cases}$$

Dans le système (0.1), $\mathcal{H}$ est l'opérateur hyperbolique symétrique

$$A_0(t,x)\ \partial/\partial t \ + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} A_j(t,x)\ \partial/\partial x_j + B(t,x)$$

et $\mathcal{E}$ un opérateur du second ordre elliptique en espace

$$\mathcal{E} \ \equiv \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \partial/\partial x_i \ E_{i,j}(t,x)\ \partial/\partial x_j,$$

les matrices $E_{i,j}$ étant symétriques. Dans cet article $\Omega = \{x_n > 0\}$ mais les résultats s'étendent au cas où Ω est un ouvert connexe situé d'un seul côté de son bord C^∞. Les solutions que l'on considère sont C^∞ et locales en temps.

Mots-clés : Perturbations visqueuses – Couches limites – Problèmes mixtes hyperboliques non linéaires.
Classification math : 34B15 – 34E20 – 35L50 – 35K50.

Notre but est de décrire le comportement de la solution $u^\varepsilon(t,x)$ lorsque le paramètre de viscosité ($\varepsilon > 0$) tend vers zéro. Il s'agit là d'un problème de perturbation singulière pour lequel une «couche limite» se forme au voisinage du bord $[0,T] \times \partial\Omega$.

Le résultat principal affirme d'une part que la solution existe pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ sur un domaine $[0,T] \times \Omega$ indépendant de ε, et d'autre part que u^ε admet sur ce domaine un développement asymptotique de la forme

$$u^\varepsilon(t,x) = \sum_{j=0}^{j=k} (\sqrt{\varepsilon}\,)^j\, \mathcal{U}^j(t,x;\varphi/\varepsilon;\varphi/\sqrt{\varepsilon}\,) + (\sqrt{\varepsilon}\,)^{k+1} O(1), \tag{0.2}$$

pour tout $k \in \mathbf{N}$. Dans cette formule, les profils $\mathcal{U}^j(t,x;z;\theta)$ sont des fonctions C^∞ admettant une limite à l'infini en z et θ notée $\underline{\mathcal{U}}^j(t,x)$ et $\varphi(t,x) \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1};\mathbf{R})$ est telle que $\Omega = \{\varphi > 0\}$, $\partial\Omega = \{\varphi = 0\}$. On obtient ainsi une description très précise de la couche limite. En particulier si l'on note $u^0 := \underline{\mathcal{U}}^0$ la limite à l'infini du *premier* profil, il résulte du développement (0.2) que :

$$u^\varepsilon \quad \text{converge} \quad \text{vers} \quad u^0 \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0, \tag{0.3}$$

la suite u^ε restant bornée dans $H^{1/2}([0,T] \times \Omega) \cap L^\infty([0,T] \times \Omega)$ et la convergence (0.3) ayant lieu dans $H^s([0,T] \times \Omega)$ pour tout $s < 1/2$ et dans $L^p_{\mathrm{loc}}([0,T] \times \overline{\Omega})$ si $1 \leqslant p < \infty$. On obtient également des estimations optimales sur les vitesses de ces convergences.

La démonstration du résultat principal comporte essentiellement deux étapes. La première consiste à construire les profils $\mathcal{U}^j$ de manière à ce que les sommes partielles

$$a^\varepsilon(t,x) \;=\; \sum_{j=0}^{j=\ell} (\sqrt{\varepsilon}\,)^j\, \mathcal{U}^j(t,x;\varphi/\varepsilon;\varphi/\sqrt{\varepsilon}\,),$$

forment des solutions approchées de (0.1). On doit pour cela résoudre une cascade d'équations de profils d'un type original, présentant des analogies avec celle des équations B.K.W de l'optique géométrique semilinéaire ([JR]). On doit aussi résoudre des équations de type hyperbolique-parabolique en contrôlant la décroissance (rapide) à l'infini dans les variables rapides. La deuxième étape consiste à montrer que la solution exacte est bien de la forme $a^\varepsilon + O(\varepsilon^k)$ pour un certain k inférieur à ℓ. On utilise alors les méthodes d'estimations *conormales* des systèmes hyperboliques combinées aux estimations paraboliques.

Les équations des profils $\mathcal{U}^j$ montrent en particulier que $\underline{\mathcal{U}}^{\mathrm{o}}(t,x)$ est solution d'un *problème mixte hyperbolique semilinéaire*

$$
(0.4) \qquad \begin{cases} \mathcal{H}\,\underline{\mathcal{U}}^{\mathrm{o}} \;=\; F(t,x,\underline{\mathcal{U}}^{\mathrm{o}}) \quad \text{dans} \quad [0,T]\times\Omega, \\ \\ \mathcal{B}\,\underline{\mathcal{U}}^{\mathrm{o}}{}_{\,|\,\partial\Omega} = 0, \quad \underline{\mathcal{U}}^{\mathrm{o}}{}_{\,|\,\{0\}\times\Omega} = 0 \end{cases}
$$

où la matrice $\mathcal{B}$ définit des conditions aux limites *maximales dissipatives*. Nous traitons les cas où le bord $\partial\Omega$ est *non caractéristique* pour $\mathcal{H}$ et le cas où $\partial\Omega$ est *caractéristique de multiplicité constante.*

Dans le cas *linéaire* on retrouve en le précisant un théorème de C. Bardos et J. Rauch ([BR], 1982) affirmant la convergence de u^ε vers u^{o} dans H^s, pour $s < 1/2$. Dans un travail antérieur C. Bardos, D. Brézis et H. Brézis ([BBB], 1973) avaient identifié les conditions aux bord pour le problème hyperbolique limite et établi la convergence faible dans L^2 de u^ε vers u^{o}. Cette question est également exposée dans l'ouvrage de J.-L. Lions ([L], 1973, chap.5). Néanmoins, même dans le cas linéaire, le développement (0.2) et ses corollaires, comme le fait que u^ε soit bornée dans $H^{1/2}$ et L^∞, la convergence L^p_{loc} ainsi que les estimations sur $u^\varepsilon - u^{\mathrm{o}}$, sont des résultats nouveaux.

Bien entendu, si les références qui précèdent concernent strictement le problème (0.1), les travaux concernant des problèmes voisins de perturbations singulières ou de couches limites sont extrêmement nombreux. Outre le livre déjà cité de J.-L. Lions, on dispose par exemple pour le cas scalaire des résultats de N. Levinson [Lev] (1950), M. I. Vishik, L. A. Lyusternik [VL1], [VL2] (1957), O. Oleinik [O] (1967), C. Bardos [Ba] (1970), A. M. Il'in [I] (1992).

1. Exposé des résultats.

Notations préliminaires. — On désigne par (t,x) la variable de $\mathbf{R}^{1+n}$ où $t \in \mathbf{R}$ et $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. On note $y = (x_1, \cdots, x_{n-1})$. Pour tout réel $T > 0$ nous noterons $\Omega_T = \{(t,x) \in \mathbf{R}^{1+n} \mid 0 < t < T,\ x_n > 0)$ et $\Gamma_T = \{(t,x) \in \mathbf{R}^{1+n} \mid 0 < t < T,\ x_n = 0)$.

Considérons dans $\mathbf{R}^{1+n}$ un opérateur hyperbolique dans la direction du temps,

$$
\mathcal{H} \equiv A_0(t,x)\ \partial_t + \sum_1^n A_j(t,x)\ \partial_j + B(t,x).
$$

Les matrices $A_j, j = 0, \cdots, n$ et B sont de taille $N \times N$, C^∞ de leurs arguments, constantes hors d'un compact de $\mathbf{R}^{1+n}$, les matrices A_j étant symétriques, A_0 définie positive. On se donne une fonction $F(t,x,u)$ dépendant de façon C^∞ de ses arguments $(t,x,u) \in \mathbf{R}^{1+n} \times \mathbf{R}^N$, à valeurs dans $\mathbf{R}^N$ et telle que $F(t,x,0)$ est dans l'espace de Sobolev $H^\infty(\mathbf{R}^{1+n})$. On s'intéresse au problème de Dirichlet dans le demi-espace $\{x_n > 0\}$ pour une perturbation parabolique de $\mathcal{H}$. De façon précise on se donne un opérateur différentiel linéaire du second ordre, elliptique en les variables d'espace

$$\mathcal{E} \equiv \sum_1^n \partial_i \; E_{i,j}(t,x) \; \partial_j,$$

où les matrices $E_{i,j}$ sont de taille $N \times N$, C^∞ constantes hors d'un compact, réelles symétriques et vérifient pour tout $(t,x) \in \mathbf{R}^{1+n}$

$$\sum_{i,j} \xi_i \; \xi_j \; E_{i,j} \;\geqslant\; \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^N}, \quad \forall \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n, \; |\xi| = 1.$$

Le problème est de décrire le comportement, lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers zéro, de la solution u^ε (C^∞, locale en temps) du problème mixte semilinéaire

$$\mathbf{PM}(\varepsilon, T) \qquad \begin{cases} -\varepsilon \mathcal{E} u^\varepsilon + \mathcal{H} u^\varepsilon = F(t,x,u^\varepsilon) \quad \text{dans} \quad \Omega_T, \\ \\ \qquad\qquad u^\varepsilon_{|\Gamma_T} = 0, \quad u^\varepsilon_{|t=0} = 0. \end{cases}$$

Pour que de telles solutions régulières puissent exister, on doit faire des hypothèses de compatiblité sur les données du problème. Pour cela nous supposerons que

$$F_{|t<0} \equiv 0, \tag{1.1}$$

de sorte que les conditions de compatibilité sont automatiquement vérifiées. Le problème $\mathbf{PM}(\varepsilon, T)$ est alors celui de l'évolution dans le futur de la solution nulle dans le passé, perturbée par un terme de source qui «s'allume» à l'instant 0.

Dans ces conditions, la théorie des problèmes mixtes paraboliques ([LSU], [KL]) assure que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un unique $u^\varepsilon \in H^\infty(\Omega_{T^\varepsilon})$ pour un $T^\varepsilon \in]0, \infty]$ maximal, solution de de $\mathbf{PM}(\varepsilon, T^\varepsilon)$. On note $H^\infty(\Omega_{T^\varepsilon})$ l'espace de Sobolev usuel. On se pose alors les questions

Q1 : *existe-t-il un réel $T > 0$ tel que $T^\varepsilon \geqslant T$, $\forall \varepsilon \in]0,1]$?*

Q2 : *peut-on décrire le comportement de u^ε lorsque $\varepsilon \to 0$, ($\varepsilon > 0$) au moins pour des temps petits ?*

Afin de décrire les résultats nous devons introduire quelques notations. Nous noterons $R(t,y) = E_{n,n}^{1/2}(t,y,0)$ et $\Lambda(t,y) \equiv R^{-1}A_n(t,y,0)R^{-1}$. Les sous-espaces suivants jouent un rôle important,

$$\mathbb{E}_+(t,y) = \sum_{\lambda>0} \ker\big(\Lambda(t,y) - \lambda \mathrm{Id}\big)$$

$$\mathbb{E}_-(t,y) = \sum_{\lambda<0} \ker\big(\Lambda(t,y) - \lambda \mathrm{Id}\big)$$

$$\mathbb{E}_0(t,y) = \ker \Lambda(t,y),$$

de sorte que $\mathbb{E}_+(t,y)$, $\mathbb{E}_-(t,y)$, $\mathbb{E}_0(t,y)$ sont deux à deux orthogonaux et que pour tout $(t,y) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbb{E}_+(t,y) \oplus \mathbb{E}_-(t,y) \oplus \mathbb{E}_0(t,y) = \mathbf{R}^N$. On appelle $P_+(t,y)$ (respectivement P_- et P_0) les projecteurs orthogonaux de $\mathbf{R}^N$ sur $\mathbb{E}_+(t,y)$ (respectivement $\mathbb{E}_-(t,y)$ et $\mathbb{E}_0(t,y)$). Nous faisons l'hypothèse de multiplicité constante sur le bord :

HYPOTHÈSE 1.1. — *Les espaces vectoriels $\mathbb{E}_+(t,y)$, $\mathbb{E}_-(t,y)$, $\mathbb{E}_0(t,y)$ sont des fibrés C^∞ sur $\mathbf{R}^n$. Nous noterons respectivement d_+, d_-, d_0 leurs dimensions, qui sont indépendantes de $(t,y) \in \mathbf{R}^n$.*

On fait dans [G1] l'hypothèse plus restrictive de multiplicité constante dans l'espace entier ce qui permet quelques simplifications. Une observation de base est la suivante :

LEMME 1.2 ([BBB]). — *Les conditions aux limites $P_+R\ u_{|_{x_n=0}} = 0$ sont maximales dissipatives pour l'opérateur $\mathcal{H}$ dans $\{x_n > 0\}$.*

Rappelons que cela signifie que la forme quadratique $\langle A_n\ ,\ \rangle$ est négative sur $\ker P_+R$, et que $\ker P_+R$ est un sous-espace de $\mathbf{R}^N$ maximal pour cette propriété. Il résulte du lemme 1.2 que le problème mixte hyperbolique semilinéaire avec les conditions aux limites $P_+R\ u_{|_{x_n=0}} = 0$ est bien posé, localement en temps :

THÉORÈME 1.3 ([G2]). — *Il existe $T_0 > 0$ et un unique $u^0 \in H^\infty(\Omega_{T_0})$ solution du problème mixte hyperbolique semilinéaire $\mathcal{H}\ u^0 = F(t,x,u^0)$ dans Ω_{T_0}, $P_+R\ u^0_{|\Gamma_{T_0}} = 0$, $u^0_{|t=0} = 0$.*

On fixe pour toute la suite $T_0 > 0$ et u^0 comme dans le théorème 1.3. Le théorème suivant, qui est l'un des résultats principaux de cet article, répond (*oui*) à la question **Q1** et donne une réponse partielle à **Q2**. On note $H^s(\Omega_T)$ l'espace de Sobolev usuel.

THÉORÈME 1.4. — *Il existe $T \in]0, T_0]$, et $\varepsilon_0 > 0$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1) Pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, le problème mixte $\mathbf{PM}(\varepsilon, T)$ *possède une unique solution $u^\varepsilon \in H^\infty(\Omega_T)$.*

2) La famille u^ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, est bornée uniformément dans $H^{1/2}(\Omega_T)$ et u^ε converge vers u^0, lorsque $\varepsilon \to 0$, dans $H^s(\Omega_T)$ pour tout $s < 1/2$. On a en outre les estimations suivantes :

$$(1.2)_a \qquad \| u^\varepsilon - u^0 \|_{H^s(\Omega_T)} \leqslant c_s\ \varepsilon^{1/2-s}, \quad \forall s \in [0, 1/2] \quad si \quad d_0 = 0,$$

$$(1.2)_b \qquad \| u^\varepsilon - u^0 \|_{H^s(\Omega_T)} \leqslant c_s\ \varepsilon^{1/4-s/2}, \quad \forall s \in [0, 1/2] \quad si \quad d_0 \neq 0,$$

le réel c_s étant indépendant de ε. En géneral u^ε ne converge pas dans $H^{1/2}(\Omega_T)$.

3) La famille u^ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, est bornée uniformément dans $L^\infty(\Omega_T)$. Pour tout compact K de $\overline{\Omega}_T$, u^ε converge vers u^0, lorsque $\varepsilon \to 0$, dans $L^p(K)$ pour $1 \leqslant p < \infty$ avec les estimations : $\| u^\varepsilon - u^0 \|_{L^p(K)} \leqslant c_{K,p}\ \varepsilon^{1/p}$ si $d_0 = 0$, et $\leqslant c_{K,p}\ \varepsilon^{1/2p}$ si $d \geqslant 1$.

Remarque. — La démonstration du théorème 1.4 montre que les estimations de $u^\varepsilon - u^0$ dans H^s ou L^p sont optimales.

Il est intéressant de comparer le résultat du théorème 1.4 avec ce qui se passe dans le cas du problème sans bord, c'est-à-dire dans le cas du problème de Cauchy. Les travaux de T. Kato [Ka], S. Klainerman et A. Majda [KM], montrent que dans le cadre du problème de Cauchy, la réponse à la question analogue à **Q1** est «*oui* ». Pour la question analogue à **Q2** la réponse est que, si l'on introduit la solution u^0 du problème de Cauchy hyperbolique $\mathcal{H}\ u^0 = F(t, x, u^0)$ et $u^0_{|t=0} = 0$, alors il existe $T > 0$ tel que $u^\varepsilon \to u^0$ dans $H^s([0, T] \times \mathbf{R}^n)$ *pour tout réel s*. En outre ces résultats sont valables dans le cas plus général où le système hyperbolique $\mathcal{H}$ est quasilinéaire. Au contraire, dans le cas du problème mixte $\mathbf{PM}(\varepsilon, T)$ la situation est différente : la convergence forte est limitée à $s < 1/2$. L'interprétation «pratique» de l'obstruction à la convergence dans $H^{1/2}(\Omega_T)$ est qu'il se forme une couche limite au voisinage du bord lorsque $\varepsilon \to 0$, dans laquelle la différence $u^\varepsilon - u^0$ reste «importante» et empêche la convergence.

Dans le cas *linéaire*, c'est-à-dire lorsque F ne dépend pas de u, et sous l'hypothèse que A_n est de multiplicité constante au voisinage du bord, le fait que u^ε converge vers u^0 dans $H^s(\Omega_T)$ pour tout $s < 1/2$ est un résultat connu, dû à C. Bardos et J. Rauch ([BR], 1982). Le théorème de C. Bardos et J. Rauch complète des travaux antérieurs de C. Bardos, D. Brézis et H. Brézis ([BBB], 1973) qui ont identifié les conditions au bord pour le problème hyperbolique limite (Lemme 1.2) et établi la convergence faible dans L^2 de u^ε vers u^0. Cet aspect de la question est également exposé dans l'ouvrage de J.-L. Lions ([L], 1973), chap.5 (voir également l'exemple du paragraphe 2.2 page 366). Signalons qu'un raisonnement analogue à celui de C. Bardos et J. Rauch est utilisé dans le travail de M. Bézard ([Bé], 1992) pour la perturbation visqueuse $-\varepsilon(\Delta_x)^3$ du système de Maxwell linéaire. Néanmoins, même pour le problème *linéaire*, le fait que u^ε reste borné dans $H^{1/2}(\Omega_T)$ et dans $L^\infty(\Omega_T)$, ainsi que la convergence dans L^p_{loc} pour $1 \leqslant p < \infty$ et les estimations de $u^\varepsilon - u^0$, en norme $\| \quad \|_{H^s}$ ou $\| \quad \|_{L^p}$, sont des résultats nouveaux.

Le théorème 1.4 est en fait une conséquence d'un théorème plus précis qui décrit le comportement de u^ε «*dans la couche limite*» et qui constitue le résultat principal de cet article. Il s'agit d'un développement asymptotique à trois échelles de u^ε : l'échelle «lente» des variables (t, x), une échelle «rapide» en x_n/ε et une échelle «intermédiaire» en $x_n/\sqrt{\varepsilon}$. Le développement fait intervenir des fonctions (les profils) qui dépendent des variables t, x et de deux variables rapides notées $z \in [0, +\infty[$ et $\theta \in [0, +\infty[$ correspondant respectivement à x_n/ε et $x_n/\sqrt{\varepsilon}$.

Pour tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^{1+n}$, nous désignons par $\mathcal{P}\ (\Omega)$ l'espace des fonctions $\mathcal{U} : \Omega \times \mathbf{R}_z \times \mathbf{R}_\theta \to \mathbf{R}^N$, qui admettent une décomposition de la forme

$$\mathcal{U}(t,x;z;\theta) = a(t,x) + b(t,x;\theta) + c(t,x;z) + d(t,x;z;\theta) \tag{1.3}$$

où

$$a \in H^\infty(\Omega)\ ,\ b \in H^\infty\big(\Omega : \mathcal{S}(\mathbf{R}^+_\theta)\big)\ ,\ c \in H^\infty\big(\Omega : \mathcal{S}(\mathbf{R}^+_z)\big)\ ,$$
$$d \in H^\infty\big(\Omega : \mathcal{S}(\mathbf{R}^+_z \times \mathbf{R}^+_\theta)\big),$$

la notation $\mathcal{S}$ désignant l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide à l'infini. L'espace $\mathcal{P}\ (\Omega)$ s'identifie à l'espace de Fréchet $H^\infty(\Omega) \oplus H^\infty\big(\Omega : \mathcal{S}(\mathbf{R}^+_\theta)\big) \oplus H^\infty\big(\Omega : \mathcal{S}(\mathbf{R}^+_z)\big) \oplus H^\infty\big(\Omega : \mathcal{S}(\mathbf{R}^+_z \times \mathbf{R}^+_\theta)\big)$ et dans la décomposition (1.3) les fonctions a, b, c, d sont déterminées de manière unique et s'expriment en fonction des limites en z ou θ en $+\infty$ de $\mathcal{U}$. En particulier la fonction $a(t,x)$ de la décomposition (1.3) s'obtient comme la limite de $\mathcal{U}$ lorsque $z \to \infty$ et $\theta \to \infty$. Nous la noterons $\underline{\mathcal{U}}$ au lieu de a, et nous noterons $\mathcal{U}^*$ la «fluctuation» $\mathcal{U} - \underline{\mathcal{U}}$:

$$\underline{\mathcal{U}} := \lim_{(z,\theta)\to(\infty,\infty)} \mathcal{U} \quad , \quad \mathcal{U}^* := \mathcal{U} - \underline{\mathcal{U}} \, .$$

À la différence de [G1], nous incluons ici la décroissance rapide à l'infini (en les variables z et θ) dans la définition des profils.

Le résultat principal de cet article est le suivant :

THÉORÈME 1.5. — *Il existe $T \in]0, T_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ ainsi qu'une suite $\mathcal{U}^j, j \in \mathbf{N}$, d'éléments de $\mathcal{P}\,(\Omega_T)$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, le problème mixte $\mathbf{PM}(\varepsilon, T)$ possède une unique solution $u^\varepsilon \in H^\infty(\Omega_T)$, et celle-ci admet le développement asymptotique suivant, pour tout entier k et en tout point (t,x) de Ω_T :*

$$u^\varepsilon(t,x) = \sum_{j=0}^{j=k} (\sqrt{\varepsilon}\,)^j\, \mathcal{U}^j(t,x; x_n/\varepsilon; x_n/\sqrt{\varepsilon}\,) + (\sqrt{\varepsilon}\,)^{k+1} R_\varepsilon(t,x), \tag{1.4}$$

avec $\| R_\varepsilon \|_{L^\infty(\Omega_T)} \leqslant cte$, $\| R_\varepsilon \|_{H^m(\Omega_T)} \leqslant c_m(1 + \varepsilon^{-m+1/2})$, $\forall m \in \mathbf{N}$. De plus, le premier profil $\mathcal{U}^0$ vérifie $\underline{\mathcal{U}}^0(t,x) = u^0(t,x)$ où u^0 est donnée par le théorème 1.3.

Début de la preuve du théorème 1.4.— Le premier point du théorème 1.4 est explicitement contenu dans le théorème 1.5. Nous déduisons aussi les points 2) et 3) du théorème 1.5, dans le cas $d_0 \neq 0$. Soit $\mathcal{U}$ un élément de $\mathcal{P}\,(\Omega_T)$, et $v^\varepsilon := \mathcal{U}\,(t,x; x_n/\varepsilon; x_n/\sqrt{\varepsilon}\,)$. Suivant la décomposition (1.3), $\mathcal{U}$ s'écrit $a+b+c+d$ et pour estimer $v^\varepsilon - \underline{\mathcal{U}}$ dans H^s on estime chacun des termes $b^\varepsilon := b(t,x; x_n/\sqrt{\varepsilon}\,), c^\varepsilon := c(t,x; x_n/\varepsilon)$ et $d^\varepsilon := d(t,x; x_n/\sqrt{\varepsilon}; x_n/\varepsilon)$ dans H^s. Traitons par exemple le dernier cas. La fonction d est un élément de $H^\infty(\Omega \times \mathbf{R}_\theta^+ \times \mathbf{R}_z^+)$ qui pour tout réel s est contenu dans $L^2\big(\Gamma_T \times \mathbf{R}_\theta^+ : H^s(\mathbf{R}_{x_n}^+ \times \mathbf{R}_z^+)\big)$. En prenant $s > 1$ on voit que d est dans $L^2\big(\Gamma_T \times \mathbf{R}_\theta^+ : L^\infty(\mathbf{R}_{x_n}^+ \times \mathbf{R}_z^+)\big)$. Le changement de variable $x_n/\varepsilon \to z$ montre alors que

$$\| d^\varepsilon \|_{L^2(\Omega_T)} \leqslant cte\ \varepsilon^{1/2} \ \| d \|_{L^2\left(\Gamma_T \times \mathbf{R}_\theta^+ : L^\infty(\mathbf{R}_{x_n}^+ \times \mathbf{R}_z^+)\right)} .$$

Lorsque l'on dérive une fois d^ε, le même calcul montre cette fois que $\| d^\varepsilon \|_{H^1(\Omega_T)} \leqslant cte\ \varepsilon^{-1}\ \varepsilon^{1/2} = cte\ \varepsilon^{-1/2}$. On en déduit par interpolation entre L^2 et H^1 que $\| d^\varepsilon \|_{H^s(\Omega_T)} \leqslant c_s\ \varepsilon^{1/2-s}$, pour tout $s \in [0, 1/2]$. On trouve la même estimation pour la fonction c^ε. Pour estimer b^ε on procède de manière analogue mais avec le changement de variable $x_n/\sqrt{\varepsilon} \to \theta$, ce qui donne l'estimation

$$\| b^\varepsilon \|_{L^2(\Omega_T)} \leqslant \text{ cte } \varepsilon^{1/4} \quad \| b \|_{L^2\left(\Gamma_T \times \mathbf{R}^+_\theta : L^\infty(\mathbf{R}^+_{x_n})\right)},$$

la norme H^1 étant majorée par cte $\varepsilon^{-1/4}$. L'interpolation conduit cette fois à l'estimation $\| b^\varepsilon \|_{H^s(\Omega_T)} \leqslant c_s \ \varepsilon^{1/4-s/2}$. En appliquant ces majorations au premier terme du développement (1.4) on obtient les estimations $(1.2)_b$. Les mêmes changements de variable (et la décroissance rapide à l'infini qui assure cette fois l'intégrabilité L^1) montrent que

$$\| c^\varepsilon \|_{L^1(K)} + \| d^\varepsilon \|_{L^1(K)} \leqslant \text{ cte } \varepsilon \ , \quad \| b^\varepsilon \|_{L^1(K)} \leqslant \text{ cte } \varepsilon^{1/2},$$

et par interpolation avec L^∞ on en déduit les estimations L^p du théorème 1.4, dans le cas $d_0 \neq 0$. Ces calculs montrent aussi que pour $\mathcal{U} \in \mathcal{P}\ (\Omega_T)$, on a la majoration $\| v_\varepsilon \|_{H^m(\Omega_T)} \leqslant$ cte $(1+\varepsilon^{-m+1/2})$, ce qui est précisément l'estimation vérifiée par le reste R_ε. □

Cependant le développement (1.4) ne suffit pas pour déduire les estimations données dans le théorème 1.4 dans le cas où $d_0 = 0$. C'est une analyse plus détaillée des profils $\mathcal{U}^j$ (et en particulier de $\mathcal{U}^\circ$) qui permet de compléter la preuve du théorème 1.5. Nous terminons donc cette section en explicitant le calcul de $\mathcal{U}^\circ$ ce qui permettra en outre de préciser le réel T du théorème 1.5 (ou 1.4).

Pour cela, introduisons la fonction $\mathcal{V}\ (t, x; z) = R^{-1}(t, y)\mathbf{S}(t, x; z)$ dépendant de la variable $z \in [0, +\infty[$, où $\mathbf{S}$ est l'unique solution telle que $\lim_{z \to +\infty} \mathbf{S} = 0$ du système différentiel linéaire

$$(1.5)_a \qquad \partial_z^2 \mathbf{S} = \Lambda \partial_z \mathbf{S} \quad \text{dans } \Omega_{T_\circ} \times \mathbf{R}^+_\theta,$$

$$(1.5)_b \qquad \mathbf{S}_{|z=0} = -P_- R\, u^\circ.$$

Pour écrire explicitement $\mathcal{V}$ fixons une base $\big(r_1(t, y), \ldots, r_{d_-}(t, y)\big)$ de $E_-(t, y)$ constituée de vecteurs propres C^∞ de $\Lambda(t, y)$ associés respectivement à des valeurs propres strictement négatives $\lambda_1(t, y), \ldots, \lambda_{d_-}(t, y)$:

$$\Lambda r_j = \lambda_j r_j, \quad \forall j \in \{1, \ldots, d_-\}, \quad \forall (t, y) \in \mathbf{R}^n.$$

La projection de $Ru^\circ(t, x)$ sur $E_-(t, y)$ s'écrit

$$\big(P_- R\, u^\circ\big)(t, x) = \sum_1^{d_-} \alpha_j(t, x)\ r_j(t, y)$$

où les α_j sont des applications C^∞ de Ω_T dans $\mathbf{R}$. Alors :

$$\mathcal{V}\,(t,x;z) = -R^{-1}.\sum_1^d \alpha_j e^{z\lambda_j} r_j\ . \tag{1.6}$$

THÉORÈME 1.6. — *Si le bord $\{x_n = 0\}$ est non caractéristique pour $\mathcal{H}$ c'est-à-dire si $d_0 = 0$, on peut prendre $T = T_o$ dans le théorème 1.5. De plus, $\mathcal{U}^o = u^o(t,x)+\mathcal{V}(t,x;z)$ dans $\mathcal{P}\,(\Omega_{T_o})$ et seule l'échelle rapide en x_n/ε intervient dans le développement asymptotique (1.4) de u^ε, c'est-à-dire que $(\forall j \in \mathbf{N}), \mathcal{U}^j$ ne dépend pas de $\theta, \mathcal{U}^{2j+1} = 0$ et pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_o]$, $k \in \mathbf{N}$:*

$$u^\varepsilon(t,x) = \sum_{j=0}^{j=k} \varepsilon^j\ \mathcal{U}^{2j}(t,x;x_n/\varepsilon) + \varepsilon^{k+1} Q_\varepsilon(t,x), \tag{1.7}$$

avec $\| Q_\varepsilon \|_{L^\infty(\Omega_{T_o})} \leqslant$ cte, $\| Q_\varepsilon \|_{H^m(\Omega_{T_o})} \leqslant c_m(1+\varepsilon^{-m+1/2}), \forall m \in \mathbf{N}$.

En particulier le comportement principal de u^ε dans le cas non caractéristique est donné par le développement (1.7) au premier ordre, qui s'écrit :

$$u^\varepsilon(t,x) = u^o(t,x) + \mathcal{V}\,(t,x;x_n/\varepsilon) + \varepsilon Q_\varepsilon(t,x) \tag{1.8}$$

où $\| Q_\varepsilon \|_{L^\infty(\Omega_{T_o})} \leqslant c,\quad \| Q_\varepsilon \|_{L^2(\Omega_{T_o})} \leqslant c\, \varepsilon^{1/2},\quad \| Q_\varepsilon \|_{H^1(\Omega_{T_o})} \leqslant c\, \varepsilon^{-1/2}$.

Fin de la preuve du théorème 1.4. — Le théorème 1.6 permet de compléter la preuve du théorème 1.4 en montrant les estimations H^s et L^p dans le cas où $d_0 = 0$. En effet les profils ne dépendent plus que de la variable θ et les calculs déja effectués montrent que dans ce cas $\mathcal{U}(t,x;x_n/\varepsilon) - \underline{\mathcal{U}}$ est majoré en norme $L^2(\Omega_T)$ par cte $\varepsilon^{1/2}$ et en norme $H^1(\Omega_T)$ par cte $\varepsilon^{-1/2}$. Les estimations $(1.2)_a$ s'en déduisent par interpolation et grâce au développement (1.7). On procède de manière identique pour les estimations $L^p(K)$. □

Lorsque le bord du domaine est caractéristique pour $\mathcal{H}$ la description de la solution fait intervenir un profil supplémentaire que nous allons définir. La formule de Taylor entraîne que $A_n(t,x) = A_n(t,y,0) + x_n\ A_n^\flat(t,x)$ où $A_n^\flat$ est une matrice à coefficients C^∞ bornés, ayant toutes leurs dérivées bornées. Notons (lorsque $d_0 \neq 0$) $K := P_0\ R^{-1}\ A_n^\flat\ R^{-1}\ P_0$ et $\mathbb{H}$ l'opérateur

$$\mathbb{H}\ (t,x,\theta;\partial_t,\partial_y,\partial_\theta) \equiv P_0\ R^{-1}\ \mathcal{H}\ \ R^{-1}\ P_0\ +\ K\ \theta\partial_\theta.$$

L'opérateur $\mathbb{H}$ est tangent à l'hypersurface $\{x_n = 0\}$ puisque la matrice $P_0 R^{-1}\ A_n\ R^{-1}\ P_0$ s'annule identiquement sur $\{x_n = 0\}$. Soit $F_R(t,x,u) :=$

$R^{-1}F(t,x,R^{-1}u)$ et $G(t,x,u,v) := F_R(t,x,u+v) - F_R(t,x,u)$. On a alors le résultat d'existence qui suit :

THÉORÈME 1.7. — *Supposons $d_0 \geqslant 1$. Il existe $T_1 \in]0,T_0]$ et une unique solution $\Psi(t,x;\theta)$ appartenant à $H^\infty(\Omega_{T_1}\times\mathcal{S}([0,+\infty[))$ du problème*

$$(P_0 - Id\ )\ \Psi = 0, \tag{1.9}$$

$$(-\partial_\theta^2 + \mathbb{H}\ )\ \Psi = P_0 G(t,x,Ru^\circ,\Psi\ ) \quad \text{dans } \Omega_{T_1}\times[0,+\infty[, \tag{1.10}$$

$$\Psi_{|\theta=0} = -P_0 Ru^\circ\ , \quad \Psi_{|t=0} = 0. \tag{1.11}$$

Remarque. — Dans [G1] on introduit un opérateur analogue à $\mathbb{H}$ mais qui ne contient pas de termes en $\theta\partial_\theta$ ni en ∂_n. Ceci est rendu possible grâce à une hypothèse renforcée de multiplicité constante (Lax-Phillips [LP]) faite dans [G1], (ainsi que dans les travaux [BBB] et [BR]). Une conséquence de cette différence est que dans [G1], les profils sont à décroissance *exponentielle* à l'infini (en z et θ), comme on le voit en cherchant $\mathcal{W}$ de la forme $e^{-\theta}\tilde{\mathcal{W}}$, $\tilde{\mathcal{W}} \in H^\infty$, ([G1]). Dans le cas présent, à cause des termes en $\theta\partial_\theta$ contenus dans $\mathbb{H}$, nous démontrons seulement la décroissance *rapide* des profils.

Notons $\mathcal{W} := R^{-1}\Psi$. On montre le résultat suivant qui d'une part précise le réel T du théorème 1.5 dans le cas caractéristique, et d'autre part explicite le premier profil $\mathcal{U}^\circ$:

Théorème 1.8. — *Si le bord est caractéristique pour $\mathcal{H}$, c'est-à-dire si $d_0 \neq 0$, alors on peut prendre $T = T_1$ dans le théorème 1.5 et $\mathcal{U}^\circ = u^\circ(t,x) + \mathcal{V}\ (t,x;z) + \mathcal{W}\ (t,x;\theta)$ dans $\mathcal{P}\ (\Omega_{T_1})$.*

Lorsque $k = 0$ la formule (1.4) décrit le comportement principal de u^ε. En vertu du théorème 1.7 elle s'écrit dans ce cas :

$$u^\varepsilon(t,x) = u^\circ(t,x) + \mathcal{V}\ (t,x;x_n/\varepsilon) + \mathcal{W}(t,x;x_n/\sqrt{\varepsilon}\ ) + \sqrt{\varepsilon}R_\varepsilon(t,x) \tag{1.12}$$

où $\| R_\varepsilon \|_{L^\infty(\Omega_T)} \leqslant c$, $\quad \| R_\varepsilon \|_{L^2(\Omega_T)} \leqslant c\ \varepsilon^{1/4}$, $\quad \| R_\varepsilon \|_{H^1(\Omega_T)} \leqslant c\ \varepsilon^{-1/4}$.

Structure de la couche limite. — Le premier profil $\mathcal{U}^\circ$ s'écrit $u^\circ + \mathcal{V}\ (t,x;z) + \mathcal{W}\ (t,x;\theta)$ et $u^\varepsilon(t,x) = u^\circ(t,x) + \mathcal{V}\ (t,x;x_n/\varepsilon) + \mathcal{W}\ (t,x;x_n/\sqrt{\varepsilon}\ ) + O(\sqrt{\varepsilon}\ )$ dans L^∞. Les équations des profils montrent (formules (1.6) et (1.9)) que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont polarisés au sens où $\mathcal{V}\ (t,x;z) \in R^{-1}\mathbb{E}_-(t,y)$ et $\mathcal{W}\ (t,x;\theta) \in R^{-1}\mathbb{E}_0(t,y)$ pour tous $(t,x;z;\theta)$. En outre les équations de $\mathcal{V}$ sont linéaires alors que celles de $\mathcal{W}$ sont non linéaires. Les fluctuations de $\mathcal{V}\,(t,x;x_n/\varepsilon)$ décrivent une couche limite *non caractéristique*, à comportement *linéaire* et d'épaisseur caractéristique ε. Les fluctuations de $\mathcal{W}\,(t,x;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,)$ décrivent une couche limite *caractéristique* dont l'évolution est *non linéaire* et dont l'épaisseur caractéristique est $\varepsilon^{1/2}$.

Commentaire. — En rappelant les résultats connus, nous n'avons fait référence qu'aux travaux concernant *strictement* le problème considéré. Bien entendu, les travaux concernant des problèmes voisins de couches limites et de perturbations singulières sont très nombreux et nous renvoyons par exemple le lecteur aux travaux de N. Levinson [Lev] (1950), O. Oleinik [O] (1967), M. I. Vishik, L. A. Lyusternik [VL1], [VL2] (1957, 1960), C. Bardos [B] (1970), J-L. Lions [L] (1973), A. M. Il'in [I] (1992), ainsi qu'aux bibliographies de ces ouvrages.

2. La solution approchée.

Dans toute la suite nous noterons parfois ∂_0 au lieu de ∂_t.

2.1. Preuve du théorème 1.7.

Nous démontrons un théorème de prolongement qui entraîne le théorème 1.7. Pour $T \geqslant 0$ on note $\omega_T = \{(t,x) \in \mathbf{R}^{1+n} \mid -1 < t < T,\ x_n > 0)$ et $\gamma_T = \{(t,x) \in \mathbf{R}^{1+n} \mid -1 < t < T,\ x_n = 0)$. Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^{1+n}$ on note $\mathcal{N}(\Omega;\mathbf{R}^+_\theta)$ l'espace des fonctions $b(t,x,\theta) \in H^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^+_\theta)$ telles que

$$\theta^k\ \partial^\alpha_{t,x,\theta}\ b \in L^2(\Omega \times \mathbf{R}^+_\theta), \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}^{n+2}. \tag{2.1.1}$$

Le théorème de plongement de Sobolev entraîne que les éléments de $\mathcal{N}(\Omega;\mathbf{R}^+_\theta)$ sont à décroissance rapide en θ à l'infini et que $\mathcal{N}(\Omega;\mathbf{R}^+_\theta)$ coïncide avec $H^\infty\big(\Omega : \mathcal{S}(\mathbf{R}^+_\theta)\big)$, la notation $\mathcal{S}(\mathbf{R}^+_\theta)$ désignant l'espace de Schwartz des fonctions de $C^\infty([0,+\infty[;\mathbf{R})$ à décroissance rapide en $+\infty$.

Soit $f(t,x,p,W) \in C^\infty(\mathbf{R}^{1+n} \times \mathbf{R}^{N'} \times \mathbf{R}^N)$ à valeurs dans $\mathbf{R}^N$ telle que $f(t,x,0,0) \equiv 0$ et $p(t,x,\theta) \in \mathcal{N}(\omega_{T_0};\mathbf{R}^+_\theta)$ à valeurs dans $\mathbf{R}^{N'}$. On suppose que $f_{|_{t<0}} \equiv 0$. L'objet de cette section est de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Il existe $T \in]0, T_o]$ et un unique $W \in \mathcal{N}(\omega_T; \mathbf{R}^+_\theta)$ à valeurs dans $\mathbf{R}^N$ tel que*

$$(2.1.2) \qquad \begin{cases} (P_0 - Id\,)\, W = 0, \\ (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H}\,)\, W = P_0 f(t,x,p,W) \quad \textit{dans} \quad \omega_T \times \mathbf{R}^+_\theta, \\ W_{|\{\theta=0\}} = 0, \quad W_{|\omega_0 \times \mathbf{R}^+_\theta} = 0, \end{cases}$$

et si f est linéaire par rapport à W on peut prendre $T = T_o$.

Preuve du théorème 1.7. — Avant de démontrer le théorème 2.1 montrons comment on en déduit le théorème 1.7. Comme $F_{|_{t<0}} \equiv 0$, u^o se prolonge par 0 dans $t < 0$ en $\tilde{u}^o \in H^\infty(\omega_{T_o})$ solution de $\mathcal{H}\,\tilde{u}^o = F(t, x, \tilde{u}^o)$ dans ω_{T_o}, $P_+ R\ \tilde{u}^o_{|\gamma_{T_o}} = 0$. Notons $q(t,x,\theta) = -P_0 R \tilde{u}^o e^{-\theta}$ qui vérifie $P_0 q = q$ et $q \in \mathcal{N}(\omega_{T_o}; \mathbf{R}^+_\theta)$. On cherche alors Ψ sous la forme $q + W$ où W doit vérifier $(P_0 - \mathrm{Id})W = 0$, $(-\partial_\theta^2 + \mathbb{H}\,)\ W = P_0 G(t, x, R\tilde{u}^o, q + W) + \partial_\theta^2 q - \mathbb{H}\ q, W_{|\theta=0} = 0$, $W_{|\omega_0} = 0$. On résoud ce système de façon unique grâce au théorème 2.1 où la fonction paramètre p est $p = (\partial^\alpha_{t,x,\theta}\ q\ ;\ |\ \alpha\ | \leqslant 1) \in \mathcal{N}(\omega_{T_o}; \mathbf{R}^+_\theta)$. □

Nous démontrons maintenant le théorème 2.1. Intoduisons une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel) de $\mathbf{R}^N$, $\big(e_1(t,x), \dots, e_N(t,x)\big)$ où les $e_j(t,x)$ sont des fonctions C^∞ telles que $(e_i; 1 \leqslant i \leqslant d_0)$ est une base de $\mathbb{E}_0(t,y)$ et $(e_i; d_0 + 1 \leqslant i \leqslant N)$ une base de $\mathbb{E}_-(t,y) + \mathbb{E}_+(t,y)$. Soit Q la matrice $N \times N$ orthogonale dont les colonnes sont les $e_i, 1 \leqslant i \leqslant N$: $Q = [e_1, \dots, e_N] \in C^\infty\big(\mathbf{R}^{1+n} : \mathbb{O}(\mathbf{R}^N)\big)$. Considérons la nouvelle inconnue $\tilde{W}(t,x)$ définie par $W(t,x) = Q(t,x)\tilde{W}(t,x)$, soit $\tilde{W} = Q^t W$. Notons $\tilde{W}_I := (\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_{d_0}) \in \mathbf{R}^{d_0}$ et $\tilde{W}_{II} := (\tilde{W}_{d_0+1}, \dots, \tilde{W}_N) \in \mathbf{R}^{N-d_0}$. La condition $(P_0 - \mathrm{Id})W = 0$ s'écrit $\tilde{W}_{II} = 0$ ou encore $\tilde{W} = (\tilde{W}_I, 0)$. Le système $(-\partial_\theta^2 + \mathbb{H})W = P_0 f(t,x,p,W)$ est alors équivalent après multiplication à gauche par Q^t, à un système $d_0 \times d_0$ que l'on écrit $(-\partial_\theta^2 + \mathbb{X})\tilde{W}_I = g(t,x,p,\tilde{W}_I)$. L'opérateur $\mathbb{X}$ est un opérateur *hyperbolique symétrique* qui s'écrit

$$\mathbb{X} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} C_j(t,x)\partial_j \ + \ C_{n+1}(t,x)\theta\partial_\theta.$$

Les matrices $C_j(t,x)$ sont symétriques de taille $d_0 \times d_0$, extraites respectivement des matrices $Q^t P^0 R^{-1} A_j R^{-1} P_0 Q$ (si $j \leqslant n$) et $Q^t C_{n+1} Q$ (si $j = n+1$), $C_0(t,x)$ étant définie positive. De plus C_n vérifie $C_n(t,y,0) = 0$, c'est-à-dire que $(-\partial_\theta^2 + \mathbb{X})$ est *tangent* à l'hypersurface

$\{x_n = 0\}$. Tout revient donc à démontrer l'existence et l'unicité d'une solution dans $\mathcal{N}(\omega_T;\mathbf{R}_\theta^+)$ à valeurs dans $\mathbf{R}^{d_0}$ du problème

$$\text{(2.1.3)} \qquad \begin{cases} (-\partial_\theta^2+\mathbb{X})U = g(t,x,p,U) \quad \text{dans} \quad \omega_T, \\ \\ U_{|\{\theta=0\}} = 0, \quad U_{|\omega_0\times\mathbf{R}_\theta^+} = 0. \end{cases}$$

Nous commençons par les estimations L^2 pour le problème linéaire. Pour $\lambda \geqslant 1$ on introduit les normes à poids $\| U \|_{L^2_\lambda(\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)} := \| e^{-\lambda t}U \|_{L^2(\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)}$ et l'on note $\langle .,.\rangle_{L^2_\lambda(\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)}$ le produit scalaire dans l'espace $L^2(\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)$ muni de la mesure $e^{-2\lambda t}\, dt\, dx\, d\theta$.

PROPOSITION 2.2. — *Il existe $c>0$ tel que pour tout $T\in[0,T_0]$, pour tout $h\in L^2(\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)$, $h_{|\omega_0\times\mathbf{R}_\theta^+}=0$, il existe un unique $U\in L^2(\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)$ tel que $\partial_\theta U\in L^2(\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)$ vérifiant*

$$\text{(2.1.4)} \qquad \begin{cases} (-\partial_\theta^2+\mathbb{X})U = h \quad \textit{dans} \quad \omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+, \\ \\ U_{|\{\theta=0\}} = 0, \quad U_{|\omega_0\times\mathbf{R}_\theta^+} = 0. \end{cases}$$

De plus pour $\lambda\geqslant c$ on a

$$\text{(2.1.5)} \quad \| \partial_\theta U \|^2_{L^2_\lambda(\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)} + \lambda \ \| U \|^2_{L^2_\lambda(\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)} \leqslant c\ \langle h,U\rangle_{L^2_\lambda(\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)}.$$

Démonstration. — Soit $\chi\in C^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R})$, $\chi(\theta)=\theta$ si $\theta\leqslant 1$, $\chi(\theta)=2$ si $\theta\geqslant 2$ et $|\ \chi'\ |\leqslant 1$. Pour $\sigma>0$ notons $\chi_\sigma(\theta)=\chi(\theta-\sigma)+\sigma$ et $\mathbb{X}_\sigma := \sum_0^n C_j\partial_j + C_{n+1}\ \chi_\sigma(\theta)\ \partial_\theta$. L'opérateur $\mathbb{P}_\sigma := -\partial_\theta^2 + \mathbb{X}_\sigma$ est à coefficients C^∞ constants hors d'un compact et est de type hyperbolique-parabolique. Notons $h_\sigma\in C_0^\infty(\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)$, $h_{\sigma|\omega_0\times\mathbf{R}_\theta^+}=0$, une famille de fonctions régulières telles que $h_\sigma\to h$ dans $L^2(\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)$ quand $\sigma\to\infty$. Soit $\tilde\omega_T=\{(t,x)\ \mathbf{R}^{n+1}/-1<t<T\}$ et $\tilde h_\sigma$ le prolongement de h_σ à $C_0^\infty(\tilde\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)$ par 0 dans $\{x_n<0\}$. Le problème $\mathbb{P}_\sigma\tilde U_\sigma=\tilde h_\sigma$ dans $\tilde\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+$, $\tilde U_{\sigma|\{\theta=0\}}=0$, $\tilde U_{\sigma|\tilde\omega_0\times\mathbf{R}_\theta^+}=0$ possède une unique solution $\tilde U_\sigma\in L^2(\tilde\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)$ telle que $\partial_\theta\tilde U_\sigma\in L^2(\tilde\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+)$ ([L], [KL]). La restriction $U_\sigma:=\tilde U_{\sigma|\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+}$ est solution de $\mathbb{P}_\sigma U_\sigma=h_\sigma$ dans $\omega_T\times\mathbf{R}_\theta^+$, $U_{\sigma|\{\theta=0\}}=0$, $U_{\sigma|\omega_0\times\mathbf{R}_\theta^+}=0$. Posons $V_\sigma:=e^{-\lambda t}U_\sigma$, alors V_σ vérifie :

$$\text{(2.1.6)} \qquad -\partial_\theta^2 V_\sigma + \mathbb{X}V_\sigma + \lambda C_0 V_\sigma = e^{-\lambda t}h.$$

Soit $c_0 > 0$ tel que $\langle C_0 u, u\rangle_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \geqslant c_0 \parallel u \parallel^2_{\mathbf{R}^N}$, $\forall u \in \mathbf{R}^N$. En effectuant le produit scalaire de (2.1.6) avec V_σ et en intégrant par parties, les termes de bord sur $\{x_n = 0\}$ étant nuls car $C_n(t,y,0) = 0$, on obtient l'inégalité (2.1.7)

$$\parallel \partial_\theta V_\sigma \parallel^2_{L^2} + \left(\lambda c_0 - \frac{1}{2} \parallel \sum_0^n \partial_j C_j \parallel_{L^\infty} - \frac{1}{2} \parallel C_{n+1} \parallel_{L^\infty}\right) \parallel V_\sigma \parallel^2_{L^2}$$

$$\leqslant \langle e^{-\lambda t} h_\sigma, V_\sigma\rangle_{L^2},$$

où $\parallel\ .\ \parallel_{L^2}$ désigne $\parallel\ .\ \parallel_{L^2(\omega_T\times\mathbf{R}^+_\theta)}$ et $\langle .,.\rangle_{L^2}$ le produit scalaire associé. En fixant $c > 0$ suffisamment grand, on trouve que pour $\lambda \geqslant c$, U_σ vérifie l'estimation (2.1.5) pour tout $\sigma > 0$. Par conséquent la famille $(U_\sigma)_{\sigma>0}$ est bornée dans $L^2(\omega_T \times \mathbf{R}^+_\theta)$ et il en est de même pour la famille $(\partial_\theta U_\sigma)_{\sigma>0}$. On peut donc extraire une suite U_{σ_k}, $\sigma_k \to +\infty$, qui converge faiblement vers $U \in L^2(\omega_T \times \mathbf{R}^+_\theta)$ tel que $\partial_\theta U \in L^2(\omega_T \times \mathbf{R}^+_\theta)$ et vérifiant l'inégalité (2.1.5). Enfin le passage à la limite $\sigma \to \infty$ dans l'équation $\mathbb{P}_\sigma U_\sigma = h_\sigma$ donne l'équation $(-\partial^2_\theta + \mathbb{X})U = h$, ce qui démontre la partie *existence* de la proposition. La solution U ainsi construite vérifie en outre l'inégalité d'énergie (2.1.5) par passage à la limite ($\sigma \to \infty$) dans (2.1.5). Pour l'*unicité* il suffit de montrer l'inégalité (2.1.5) pour toute solution U du système (2.1.4) telle que U et $\partial_\theta U$ sont dans $L^2(\omega_T \times \mathbf{R}^+_\theta)$. Grâce au lemme de Friedrichs ([CP],[H]) il suffit de démontrer l'inégalité (2.1.5) lorsque U est dans $C_0^\infty(\omega_T \times \mathbf{R}^+_\theta)$, et l'intégration par parties analogue à celle qui fait passer de (2.1.6) à (2.1.7) démontre l'inégalité (2.1.5), le point essentiel étant que $\partial_\theta(\theta C_{n+1}) = C_{n+1} \in L^\infty$. □

La proposition qui suit donne des estimations sur les dérivées de U pour des normes à poids convenables. Si $U \in \mathcal{N}(\omega_T; \mathbf{R}^+_\theta)$ et $m \in \mathbf{N}$ on note

$$\parallel U \parallel_{m,\lambda,T} := \sum_{|\alpha|\leqslant m} \lambda^{m-|\alpha|} \parallel \partial_0^{\alpha_0}\dots\partial_n^{\alpha_n}(\theta\partial_\theta)^{\alpha_{n+1}} U \parallel_{L^2_\lambda(\omega_T\times\mathbf{R}^+_\theta)},$$

et

$$| U |_{m,\lambda,T} := \sum_{|\alpha|\leqslant m} \lambda^{m-|\alpha|} \parallel \partial_0^{\alpha_0}\dots\partial_n^{\alpha_n}\partial_\theta^{\alpha_{n+1}} U \parallel_{L^2_\lambda(\omega_T\times\mathbf{R}^+_\theta)},$$

PROPOSITION 2.3. — *$\forall T \in [0, T_0]$, $\forall h \in \mathcal{N}(\omega_T; \mathbf{R}^+_\theta)$, $h_{|\omega_0\times\mathbf{R}^+_\theta} = 0$, il existe un unique $U \in \mathcal{N}(\omega_T; \mathbf{R}^+_\theta)$ solution du système (2.1.4). Pour tout $m, k \in \mathbf{N}$, il existe $\lambda_m \geqslant 1$ et $\mu_{k,m} \geqslant 1$ tel que $\forall\lambda \geqslant \lambda_m$:*

$$(2.1.8) \qquad | U |_{m,\lambda,T} + \parallel U \parallel_{m,\lambda,T} \leqslant \frac{\lambda_m}{\lambda} \left(| h |_{m,\lambda,T} + \parallel h \parallel_{m,\lambda,T} \right),$$

et $\forall \mu \geqslant \mu_{k,m}$ *:*

$$\text{(2.1.9)} \qquad \| \theta^k U \|_{m,\mu,T} \leqslant \frac{\mu_{m,k}}{\mu} \left(\sum_{j=0}^{j=k} \| \theta^j h \|_{m,\mu,T} \right),$$

pour tout $U, h \in \mathcal{N}(\omega_T; \mathbf{R}_\theta^+)$ *vérifiant (2.1.4).*

Démonstration. — Supposons dans un premier temps que $U \in H^\infty(\omega_T \times \mathbf{R}_\theta^+)$ et soit $h = (-\partial_\theta^2 + \mathbb{X})U$. Nous commençons par estimer les dérivées conormales au bord $\{x_n = 0\}$. Notons $\mathcal{Z}_j = \partial_j$ si $0 \leqslant j \leqslant n$, $\mathcal{Z}_{n+1} = \theta\partial_\theta$ et $\mathcal{Z}^\alpha := \mathcal{Z}_0^{\alpha_0} \dots \mathcal{Z}_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$ pour $\alpha \in \mathbf{N}^{n+2}$. Fixons m et $T > 0$. Pour $\alpha \in \mathbf{N}^{n+2}$, $| \alpha | \leqslant m$, $\mathcal{Z}^\alpha U$ est solution de

$$\text{(2.1.10)} \qquad (-\partial_\theta^2 + \mathbb{X})\, \mathcal{Z}^\alpha U = \mathcal{Z}^\alpha h + [\mathbb{X}, \mathcal{Z}^\alpha]\, U + [-\partial_\theta^2, \mathcal{Z}^\alpha]\, U,$$

$$\mathcal{Z}^\alpha U_{|\{\theta=0\}} = 0, \quad \mathcal{Z}^\alpha U_{|\omega_0} = 0.$$

En appliquant à (2.1.9) l'inégalité d'énergie (2.1.5), on obtient :

$$\text{(2.1.11)} \qquad \left(\lambda^{m-|\alpha|} \| \partial_\theta \mathcal{Z}^\alpha U \|_{0,\lambda,T} \right)^2 + \lambda \left(\lambda^{m-|\alpha|} \| \mathcal{Z}^\alpha U \|_{0,\lambda,T} \right)^2$$

$$\leqslant \| h \|_{m,\lambda,T} + \frac{c}{\lambda} \left| \left\langle \lambda^{m-|\alpha|} \left(\mathcal{Z}^\alpha h + [\mathbb{X}, \mathcal{Z}^\alpha]\, U\right), \lambda^{m-|\alpha|}\, \mathcal{Z}^\alpha U \right\rangle_{L^2_\lambda} \right|$$

$$+ \frac{c}{\lambda} \left| \left\langle \lambda^{m-|\alpha|} [-\partial_\theta^2, \mathcal{Z}^\alpha]\, U, \lambda^{m-|\alpha|}\, \mathcal{Z}^\alpha U \right\rangle_{L^2_\lambda} \right|.$$

Le premier terme du membre de droite de (2.1.10) se majore par cte $\lambda^{-1}(\| h \|_{m,\lambda,T} + \| U \|_{m,\lambda,T}) \| U \|_{m,\lambda,T}$. Pour le second terme, puisque $[\partial_\theta^2, \partial_i] = 0$ si $i \in \{0, \dots, n\}$ et $[\partial_\theta^2, \theta\partial_\theta] = 2\partial_\theta^2$, le commutateur $[\partial_\theta^2, \mathcal{Z}^\alpha]\, U$ s'écrit comme une somme de termes de la forme $\partial_\theta^2\, \mathcal{Z}^\beta\, U$ où $| \beta | \leqslant | \alpha | -1$. En intégrant par parties en θ, comme $\mathcal{Z}^\alpha\, U$ est nul sur $\theta = 0$, on trouve que $| \langle \partial_\theta^2\, \mathcal{Z}^\beta\, U, \mathcal{Z}^\alpha\, U \rangle_{L^2_\lambda} | = | \langle \partial_\theta\, \mathcal{Z}^\beta\, U, \partial_\theta \mathcal{Z}^\alpha\, U \rangle_{L^2_\lambda} |$ et donc le second terme du membre de droite de (2.1.10) est majoré par cte $\lambda^{-1} \| \partial_\theta U \|_{m-1,\lambda,T} \| \partial_\theta U \|_{m,\lambda,T} \leqslant$ cte $\lambda^{-2} \| \partial_\theta U \|^2_{m,\lambda,T}$. En sommant ces inégalités on obtient donc pour λ assez grand

$$\| \partial_\theta U \|^2_{m,\lambda,T} + \lambda \| U \|^2_{m,\lambda,T} \leqslant \frac{c_m}{\lambda} \left\{ \| h \|_{m,\lambda,T} + \| U \|_{m,\lambda,T} \right\} \| U \|_{m,\lambda,T},$$

et pour $\lambda \geqslant \tilde{c}_m$, $\tilde{c}_m$ étant choisi suffisamment grand, on obtient

$$\text{(2.1.12)} \qquad \sqrt{\lambda}\, \| \partial_\theta U \|_{m,\lambda,T} + \lambda\, \| U \|_{m,\lambda,T} \leqslant \tilde{c}_m\, \| h \|_{m,\lambda,T},$$

qui contient une partie des estimations (2.1.8). Il reste à estimer les dérivées normales $\partial_\theta^k U$ pour contrôler les normes $| U |_{m,\lambda,T}$. Les termes de la forme $\lambda^{m-|\beta|-1} \mid \partial_0^{\beta_0} \dots \partial_n^{\beta_n} \partial_\theta U \mid_{0,\lambda,T}$, pour $| \beta | \leqslant m-1$, sont majorés par $\| h \|_{m,\lambda,T}$ d'après (2.1.12). Ensuite si $\alpha_{n+1} \geqslant 2$ on majore $\lambda^{m-|\alpha|} \mid \partial_0^{\alpha_0} \dots \partial_\theta^{\alpha_{n+1}} U \mid_{0,\lambda,T}$, en écrivant $\alpha_{n+1} = p+2$ et en exprimant grâce à l'équation que $\partial_\theta^2 U = -h + \sum_0^{n+1} C_j \mathcal{Z}_j U$. Le terme se majore alors par la somme de $| h |_{m,\lambda,T}$ et de termes de la forme

$$\lambda^{m-k} \mid \partial_0^{\alpha_0} \dots \partial_n^{\alpha_n} \partial_\theta^p \mathcal{Z} U \mid_{0,\lambda,T} \tag{2.1.13}$$

où $k = \alpha_0 + \dots + \alpha_n + p + 2$. Comme $\theta^q \leqslant 1 + \theta^{p+q}, \forall p, q \in \mathbf{N}$, on a (2.1.14)

$$\mid \partial_\theta^p (\theta\partial_\theta)^q U \mid \leqslant c_{p,q} \left(\mid (\theta\partial_\theta)^{p+q} U \mid + \sum_{0 \leqslant j \leqslant p+q} \mid \partial_\theta^j U \mid \right), \quad p, q \in \mathbf{N}$$

et on majore le terme (2.1.13) par le membre de droite de (2.1.8).

Pour démontrer les inégalités (2.1.9) on démontre en fait par récurrence sur p que si $h \in \mathcal{N}(\Omega_T; \mathbf{R}_\theta^+)$:

$$(2.1.15)_p \quad \sqrt{\mu} \; \| \partial_\theta(\theta^p U) \|_{m,\mu,T} + \mu \; \| \theta^p U \|_{m,\mu,T} \leqslant \sum_{j=0}^{j=p} \| \theta^j h \|_{m,\mu,T}.$$

Lorsque $p = 1$ la fonction $V := \theta U$ vérifie $-\partial_\theta^2 V + \mathbb{X}V - V = \theta h - 2\partial_\theta U$. Comme $\| \partial_\theta U \|_{m,\mu,T}$ est majoré d'après (2.1.12) par $\| h \|_{m,\mu,T}$, l'estimation (2.1.12) appliquée à V donne l'inégalité $(2.1.15)_1$. Lorsque $p \geqslant 2$ la fonction $V := \theta^p U$ est solution de :

$$\begin{aligned} -\partial_\theta^2 V + \mathbb{X}V - pV &= \theta^p h + \left(-p(p-1)\theta^{p-2} + 2p\theta^{p-1}\partial_\theta U \right) \\ &= \theta^p h + \sum_{j=0}^{p-1} q_j \, \partial_\theta(\theta^j U) \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

où les q_j sont des coefficients entiers. L'inégalité $(2.1.15)_p$ résulte alors de l'estimation (2.1.12) appliquée à V. On a donc établi les estimations (2.1.8) et (2.1.9) lorsque l'on suppose U régulière a priori. Le fait que U possède nécessairement cette régularité résulte ensuite de la méthode classique ([F2], [H1], [H2], [CP]) consistant à appliquer les estimations établies dans le cas régulier, à des régularisées de U. Les inégalités (2.1.8) et (2.1.9) montrent alors que U est dans $\mathcal{N}(\omega_T; \mathbf{R}_\theta^+)$. La proposition 2.3 est démontrée. □

Preuve du théorème 2.1. — Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.1. Dans le cas où f est linéaire il suffit d'appliquer la proposition 2.2. Dans le cas général on cherche la solution U du système (2.1.3) comme la limite des solutions du schéma itératif suivant :

$$\text{(2.1.17)} \qquad \begin{cases} (-\partial_\theta^2 + \mathbb{X})U^{\nu+1} = g(t,x,p,U^\nu) \quad \text{dans} \quad \omega_T \times \mathbf{R}_\theta^+, \\ \\ U^{\nu+1}_{|\{\theta=0\}} = 0, \quad U^{\nu+1}_{|\omega_0 \times \mathbf{R}_\theta^+} = 0, \end{cases}$$

initialisé avec $U^0 = 0$. Notons $N^m_{\lambda,T} = |\ U\ |_{m,\lambda,T} + \|\ U\ \|_{m,\lambda,T}$ et $g^0(t,x) := g(t,x,p,0)$, qui vérifie $g^0_{|\omega_0 \times \mathbf{R}_\theta^+} = 0$. Le théorème de plongement de Sobolev assure qu'il existe une constante c_s telle que $\forall T \in [0, T_o]$, $\forall \lambda \geqslant 1$, si $U \in \mathcal{N}(\omega_T; \mathbf{R}_\theta^+)$:

$$\text{(2.1.18)} \qquad \|\ U\ \|_{L^\infty} \leqslant\ c_s\ e^{\lambda T}\ N^m_{\lambda,T}\ , \quad \forall m \geqslant (n+2)/2.$$

Il résulte des inégalités de Gagliardo-Nirenberg à poids établies dans [G2], qu'il existe pour tout entier m une constante κ_m telle que $\forall T \in [0, T_o]$, $\forall \lambda \geqslant 1$, si $U \in \mathcal{N}(\omega_T; \mathbf{R}_\theta^+)$, $\|\ U\ \|_{L^\infty} \leqslant\ 1$:

$$\text{(2.1.19)} \qquad N^m_{\lambda,T}\big(\ g(t,x,p,U)\ \big)\ \leqslant\ N^m_{\lambda,T}(g^0)\ +\ \kappa_m N^m_{\lambda,T}(U).$$

Choisissons un entier $m > (n+2)/2$. Soit $\lambda := \lambda_m(1+\kappa_m)$ où λ_m est donné par la proposition 2.3. Fixons $T > 0$ assez petit pour que $e^{\lambda T} \leqslant 2$ et $N^m_{\lambda,T}(g^0) \leqslant 1$. Montrons que le schéma itératif (2.1.7) est bien défini sur $\omega_T \times \mathbf{R}_\theta^+$ et que :

$$\text{(2.1.20)} \qquad N^m_{\lambda,T}(U^\nu) \leqslant 1\ ,\ \|\ U^\nu\ \|_{L^\infty} \leqslant\ 2c_s\ , \quad \forall \nu \in \mathbf{N}.$$

En effet (2.1.17) est vérifiée par $U^0 = 0$. Supposons que U^ν vérifie (2.1.17). Alors la proposition 2.3 appliquée au système (2.1.17) montre que :

$$N^m_{\lambda,T}(U^{\nu+1})\ \leqslant\ \frac{\lambda_m}{\lambda}\ N^m_{\lambda,T}\big(\ g(t,x,p,U^\nu)\ \big).$$

On en déduit d'après (2.1.19) et grâce à l'hypothèse de récurrence que :

$$N^m_{\lambda,T}(U^{\nu+1})\ \leqslant\ \frac{\lambda_m}{\lambda}\ (1+\kappa_m)\ \leqslant\ 1.$$

Ce qui entraîne d'après (2.1.18) que $\|\ U^{\nu+1}\ \|_{L^\infty} \leqslant\ c_s\ e^{\lambda T}\ \leqslant 2c_s$. La propriété (2.1.20) est donc établie.

Nous montrons maintenant la propriété suivante : pour tout $m \in \mathbf{N}$ et tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $\mu > 0$ tel que

$$\text{(2.1.21)} \qquad \sup_{\nu \in \mathbf{N}}\ \big(\ N^m_{\mu,T}(U^\nu)\ \big)\ <\ \infty,$$

et, si l'on note $S_\mu(U^\nu) := \sum_{0\leqslant j\leqslant k} \| \theta^j U^\nu \|_{m,\lambda,T}$, alors :

$$\sup_{\nu\in\mathbf{N}} \big(S_\mu(U\nu) \big) < \infty. \tag{2.1.22}$$

En effet, on sait que $\| U^\nu \|_{L^\infty} \leqslant 2c_s$ et les inégalités (2.1.8) appliquées pour un m arbitraire fixé, montrent que

$$N^m_{\mu,T}(U^\nu) \leqslant \frac{\lambda_m}{\mu} \big(N^m_{\mu,T}(g^0) + \kappa_m N^m_{\mu,T}(U^\nu) \big),$$

qui donne (2.1.21) en choisissant μ assez grand. D'autre part, l'estimation (2.1.15) montre que

$$S_\mu(U^\nu) \leqslant \frac{c}{\mu} S_\mu\big(g(t,x,p,U^\nu) \big), \tag{2.1.23}$$

où c ne dépend ni de μ ni de ν. On déduit de (2.1.21) et du théorème de plongement de Sobolev que, si $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n+2}) \in \mathbf{N}^{n+2}$:

$$\| \partial_0^{\alpha_0} \dots \partial_n^{\alpha_n} \partial_\theta^{\alpha_{n+}} (\theta\partial_\theta)^{\alpha_{n+2}} U^\nu \|_{L^\infty(\omega_T\times\mathbf{R}^+_\theta)} \leqslant c_{|\alpha|}\ , \quad \forall\nu\in\mathbf{N}. \tag{2.1.24}$$

Alors comme $g(t,x,p,U^\nu) = g^0 + \tilde{g}(t,x,p,U^\nu).U^\nu$, on a :

$$S_\mu\big(g(t,x,p,U^\nu) \big) \leqslant S_\mu(g^0) + \tilde{c}\, S_\mu(U^\nu) \tag{2.1.25}$$

où $\tilde{c}$ est indépendant de μ et ν. En prenant μ suffisamment grand, on déduit (2.1.22) de (2.1.23) et (2.1.25).

On peut donc extraire de la suite U^ν une sous-suite qui converge dans L^∞_{loc} vers une solution U du système non linéaire (2.1.3), et les estimations (2.1.21), (2.1.22) sont vérifiées par U qui est donc dans $\mathcal{N}(\omega_T;\mathbf{R}^+_\theta)$. La partie existence du théorème 2.1 est établie, l'unicité résultant de l'inégalité d'énergie (2.1.5) appliquée à l'équation linéarisée. Le théorème 2.1 est démontré. □

2.2. Construction des profils.

Le but de ce paragraphe est de construire la suite des profils $\mathcal{U}^j$ du théorème 1.5. de manière à ce que les sommes partielles

$$\sum_{j=0}^{j=k} (\sqrt{\varepsilon})^j\ \mathcal{U}^j(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\ )$$

définissent des solutions approchées de $\mathbf{PM}(\varepsilon, T)$.

Commençons par une observation préliminaire. Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^{1+n}, \mathbf{R})$ une fonction bornée ayant toutes ses dérivées bornées, et $\mathcal{U} \in \mathcal{P}\,(\Omega_T)$. Considérons

$$v_\varepsilon(t,x) := \varphi(t,x)\ \partial_\theta \mathcal{U}(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,)$$

et

$$v'_\varepsilon(t,x) := \varphi(t,x)\ \partial_z \mathcal{U}(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,).$$

Comme $\partial_\theta U = (\partial_\theta U)^*$ est à décroissance rapide à l'infini, la fonction $\theta\partial_\theta\mathcal{U}$ est encore un élément de $\mathcal{P}(\Omega_T)$. De même $z\partial_z\mathcal{U}$ est un élément de $\mathcal{P}(\Omega_T)$. La formule de Taylor montre que φ s'écrit $\varphi(t,x) = \varphi(t,y,0) + x_n\,\varphi^\flat(t,x)$, où $\varphi^\flat$ est C^∞ bornée avec toutes ses dérivées bornées. Les fonctions v_ε et v'_ε s'écrivent donc

(2.2.1)
$$\begin{aligned}\varphi(t,x)\ \partial_\theta\mathcal{U}(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,) \ &= \ \varphi(t,y,0)\ \partial_\theta\mathcal{U}(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,)\\ &+ \sqrt{\varepsilon}\ (\ \varphi^\flat\ \theta\partial_\theta\mathcal{U}\ )(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,),\end{aligned}$$

et

(2.2.2)
$$\begin{aligned}\varphi(t,x)\ \partial_z\mathcal{U}(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,) \ &= \ \varphi(t,y,0)\ \partial_z\mathcal{U}(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,)\\ &+ \varepsilon\ (\ \varphi^\flat\ z\partial_z\mathcal{U}\ )(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,).\end{aligned}$$

Dans la suite on utilisera la notation $\mathring{\varphi}(t,x) := \varphi(t,y,0)$.

Pour contruire une solution approchée de $\mathbf{PM}(\varepsilon, T)$, on remplace formellement u^ε par

$$\sum_{j=0}^{\infty}(\sqrt{\varepsilon}\,)^j\ \mathcal{U}^j(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,)$$

dans l'expression

$$-\varepsilon\mathcal{E}u^\varepsilon + \mathcal{H}u^\varepsilon = F(t,x,u^\varepsilon),$$

on développe par la formule de Taylor, et on ordonne en puissances de $\sqrt{\varepsilon}$ en écrivant :

$$A_n\partial_\theta\mathcal{U}^j(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,) \ = \ \mathring{A}_n\ \partial_\theta\mathcal{U}^j(\ "\ ) \ + \ \sqrt{\varepsilon}\ A_n^\flat\ \theta\partial_\theta\mathcal{U}^j(\ "\ ),$$

et

$$E_{n,n}\partial_z^2\mathcal{U}^j(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,) \;=\; \overset{\circ}{E}_{n,n}\partial_z^2\mathcal{U}^j(\text{ '' }) \;+\; \varepsilon\, E^{\flat}_{n,n}z\partial_z^2\mathcal{U}^j(\text{ '' }).$$

On obtient une expression de la forme

$$\sum_{j=-2}^{\infty}(\sqrt{\varepsilon}\,)^j\ \mathcal{F}^j(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,).$$

On cherche alors à déterminer les $\mathcal{U}^j$ de sorte que soient vérifiées les relations :

$$(2.2.3)_j \qquad \mathcal{F}^j\equiv 0\ ,\quad \mathcal{U}^j_{|x_n=z=\theta=0}=0\ ,\quad \mathcal{U}^j_{|t=0}=0\ ,\quad j\geqslant -2.$$

Les trois premières équations (pour $k=-2,-1,0$) ont une forme particulière. Elles s'écrivent :

$$(\mathcal{F}^{-2}\equiv 0) \qquad \overset{\circ}{A}_n\partial_z\mathcal{U}^{\mathrm{o}}-\overset{\circ}{E}_{n,n}\ \partial_z^2\mathcal{U}^{\mathrm{o}}=0,$$

$$(\mathcal{F}^{-1}\equiv 0) \qquad \overset{\circ}{A}_n\partial_\theta\mathcal{U}^{\mathrm{o}}-2E_{n,n}\partial_\theta\partial_z\mathcal{U}^{\mathrm{o}}+\ \overset{\circ}{A}_n\partial_z\mathcal{U}^1-\overset{\circ}{E}_{n,n}\partial_z^2\mathcal{U}^1=0,$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}^{0}\equiv 0) \qquad & \mathcal{H}\,\mathcal{U}^{\mathrm{o}}+A^{\flat}_n\theta\partial_\theta\mathcal{U}^{\mathrm{o}}-\overset{\circ}{E}_{n,n}\ \partial_\theta^2\mathcal{U}^{\mathrm{o}}\\
&-\ \sum_i(E_{i,n}+E_{n,i})\partial_i\partial_z\mathcal{U}^{\mathrm{o}}-\ \sum_i(\partial_iE_{i,n})\partial_z\mathcal{U}^{\mathrm{o}}\\
&+\ A^{\flat}_nz\partial_z\mathcal{U}^{\mathrm{o}}-\ E^{\flat}_{n,n}\ z\partial_z^2\mathcal{U}^{\mathrm{o}}\\
&+\ \overset{\circ}{A}_n\partial_\theta\mathcal{U}^1-\ 2E_{n,n}\ \partial_\theta\partial_z\mathcal{U}^1+\ \overset{\circ}{A}_n\partial_z\mathcal{U}^2-\ \overset{\circ}{E}_{n,n}\partial_z^2\mathcal{U}^2\ =\ F(t,x,\mathcal{U}^{\mathrm{o}}).\end{aligned}$$

Lorsque $k\geqslant 1$, l'équation $\mathcal{F}^k\equiv 0$ s'écrit :

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}^{k}\equiv 0) \qquad & \mathcal{H}\,\mathcal{U}^k-F'_u(t,x,0)\,\mathcal{U}^k+A^{\flat}_n\theta\partial_\theta\mathcal{U}^k-\overset{\circ}{E}_{n,n}\ \partial_\theta^2\mathcal{U}^k\\
&-\sum_i(E_{i,n}+E_{n,i})\partial_i\partial_z\mathcal{U}^k-\sum_i(\partial_iE_{i,n})\partial_z\mathcal{U}^k+A^{\flat}_nz\partial_z\mathcal{U}^k-E^{\flat}_{n,n}\ z\partial_z^2\mathcal{U}^k\\
&+\ \overset{\circ}{A}_n\ \partial_\theta\mathcal{U}^{k+1}-\ 2E_{n,n}\ \partial_\theta\partial_z\mathcal{U}^{k+1}\\
&+\ \overset{\circ}{A}_n\ \partial_z\mathcal{U}^{k+2}-\ \overset{\circ}{E}_{n,n}\ \partial_z^2\mathcal{U}^{k+2}\ =\ q_k(t,x,z,\theta),\end{aligned}$$

où $q_k = f_k\big(t,x,(\partial_{t,x},\partial_z,\partial_\theta,z\partial_z,\theta\partial_\theta)^\alpha\mathcal{U}^j\ ;\ |\,\alpha\,|\leqslant 2,\ j\leqslant k-1\big)$, les fonctions f_k étant C^∞ de leurs arguments.

Changement d'inconnue. — Introduisons l'inconnue $U^j := R\mathcal{U}^j$ où l'on rappelle que $R = (\overset{\circ}{E}_{n,n})^{1/2}$. Après multiplication à gauche par R^{-1}, les équations $\mathcal{F}^k \equiv 0$ sont équivalentes aux équations $\tilde{\mathcal{F}}^k \equiv 0$, où les fonctions $\tilde{\mathcal{F}}^k \equiv R^{-1}\mathcal{F}^k$ s'expriment en fonction des U^j de la manière suivante. La fonction $\tilde{\mathcal{F}}^{-2}$ s'écrit :

$$(2.2.4)_{-2} \qquad \tilde{\mathcal{F}}^{-2} \equiv \Lambda\partial_z U^{\mathrm{o}} - \partial_z^2 U^{\mathrm{o}}.$$

La fonction $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}$ s'écrit :

$$(2.2.4)_{-1} \qquad \tilde{\mathcal{F}}^{-1} \equiv \Lambda\partial_\theta U^{\mathrm{o}} - 2R^{-1}E_{n,n}R^{-1}\partial_\theta\partial_z U^{\mathrm{o}} + \Lambda\partial_z U^1 - \partial_z^2 U^1.$$

La fonction $\tilde{\mathcal{F}}^0$ s'écrit :

$$\begin{aligned}(2.2.4)_0 \qquad \tilde{\mathcal{F}}^0 \equiv{}& R^{-1}\mathcal{H}\,R^{-1}U^{\mathrm{o}} - \partial_\theta^2 U^{\mathrm{o}} - R^{-1}F(t,x,R^{-1}U^{\mathrm{o}})\\ &+ R^{-1}A_n^\flat R^{-1}\theta\partial_\theta U^{\mathrm{o}} - \sum_i R^{-1}(E_{i,n}+E_{n,i})R^{-1}\partial_i\partial_z\mathcal{U}^{\mathrm{o}} - \sum_i(\partial_i E_{i,n})\partial_z U^{\mathrm{o}}\\ &+ R^{-1}A_n^\flat R^{-1}z\partial_z U^{\mathrm{o}} - R^{-1}E_{n,n}^\flat R^{-1}\,z\partial_z^2 U^{\mathrm{o}}\\ &+ \Lambda_n\,\partial_\theta U^1 - 2R^{-1}E_{n,n}R^{-1}\,\partial_\theta\partial_z U^1\\ &+ \Lambda\,\partial_z U^2 - \partial_z^2 U^2.\end{aligned}$$

Lorsque $k\geqslant 1$ la fonction $\tilde{\mathcal{F}}^k$ s'écrit :

$$\begin{aligned}(2.2.4)_k \qquad \tilde{\mathcal{F}}^k \equiv{}& R^{-1}\mathcal{H}\,R^{-1}U^k - \partial_\theta^2 U^k - R^{-1}F_u'(t,x,0)R^{-1}U^k\\ &+ R^{-1}A_n^\flat R^{-1}\theta\partial_\theta U^k - \sum_i R^{-1}(E_{i,n}+E_{n,i})R^{-1}\partial_i\partial_z\mathcal{U}^k\\ &- \sum_i(\partial_i E_{i,n})\partial_z U^k + R^{-1}A_n^\flat R^{-1}z\partial_z U^k - R^{-1}E_{n,n}^\flat R^{-1}\,z\partial_z^2 U^k\\ &+ \Lambda_n\,\partial_\theta U^{k+1} - 2R^{-1}E_{n,n}R^{-1}\,\partial_\theta\partial_z U^{k+1}\end{aligned}$$

$$+ \Lambda\, \partial_z U^{k+2} - \partial_z^2 U^{k+2} - p_k(t,x,z,\theta),$$

où $p_k = R^{-1} q_k$.

Pour résoudre la cascade des équations de profils $(2.2.4)_k$ il est commode d'introduire les notations suivantes pour $U \in \mathcal{P}(\Omega_T)$:

$$U(t,x;z;\theta) = \underline{U}(t,x) + V(t,x;z;\theta) + W(t,x;\theta), \tag{2.2.5}$$

ce qui revient à dire si l'on se reporte à la décomposition (1.3) que $V := c+d$ et $W := b$. On définit trois projecteurs $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ de $\mathcal{P}(\Omega_T)$ par

$$\mathcal{L}_0 U := \lim_z \big(\lim_\theta U + P_0(\mathrm{Id} - \lim_\theta) U\big) = \underline{U} + P_0 \mathrm{W},$$

$$\mathcal{L}_1 U := \lim_z \mathrm{Id} - \lim_\theta)\mathrm{Id} - P_0) U = \mathrm{Id} - P_0) W,$$

$$\mathcal{L}_2 U := (\mathrm{Id} - \lim_z) U = V,$$

qui vérifient $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \mathrm{Id}$.

L'algorithme permettant de résoudre les équations de profils $(2.2.5)_j$, $j \in \mathbf{N}$ où les inconnues sont les U_j, $j \in \mathbf{N}$, consiste à itérer la résolution du problème $\mathcal{S}_j$ suivant :

$$(\mathcal{S}_j) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_2 \tilde{\mathcal{F}}^{j-2} \equiv 0, \quad \mathcal{L}_1 \tilde{\mathcal{F}}^{j-1} \equiv 0, \quad \mathcal{L}_0 \tilde{\mathcal{F}}^{j} \equiv 0, \\ U^j_{|x_n = z = \theta = 0} = 0, \quad \partial_t^\alpha U^j_{|t=0} = 0, \ \forall \alpha \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Un fait crucial qu'il faut observer sur le système $(\mathcal{S}_j)$, est que les inconnues U^{j+1} et U^{j+2} n'y figurent pas : elles ont été «effacées» par l'application des opérateurs $\mathcal{L}_i$, $(i = 0,1,2)$. Autrement dit, si l'on suppose connues $U^{\circ}, \dots, U^{j-1}$, la seule inconnue du système $(\mathcal{S}_j)$ est U^j. Cette construction présente des analogies avec celle (à deux échelles) introduite par J.-L. Joly et J. Rauch [JR] pour résoudre la cascade des équations B.K.W de l'optique géométrique semilinéaire.

Commençons par résoudre $(\mathcal{S}_0)$. Pour cela on utilise la fonction $\mathbf{S}$ définie en (1.5) et la fonction Ψ donnée par le théorème 1.7.

PROPOSITION 2.2.1. — *Soit* $U^{\circ} := Ru^{\circ} + \mathbf{S} + \Psi$ *si* $d_0 \geqslant 1$ *et* $U^{\circ} := Ru^{\circ} + \mathbf{S}$ *si* $d_0 = 0$. *Alors* U° *est solution de* $(\mathcal{S}_0)$.

Démonstration. — Nous le démontrons dans le cas $d_0 \geqslant 1$, le cas $d_0 = 0$ s'en déduisant en faisant $\Psi = 0$. Vérifions d'abord les conditions aux limites. Comme $P_+R\, u^{\circ}_{|\{x_n=0\}} = 0$, les conditions aux limites $(1.5)_b$ et (1.11) entraînent que $\big(\, Ru^{\circ} + \mathbf{S} + \Psi\, \big)_{|\{x_n=\theta=z=0\}} = 0$. Il reste à vérifier les équations.

Il résulte de (2.2.4) que $\mathcal{L}_2\tilde{\mathcal{F}}^{-2} \equiv \tilde{\mathcal{F}}^{-2}$ c'est-à-dire que le système $\mathcal{L}_2\tilde{\mathcal{F}}^{-2} \equiv 0$ coïncide avec le système $(1.5)_a$.

L'équation $\mathcal{L}_1\tilde{\mathcal{F}}^{-1}$ s'écrit : $\Lambda\partial_\theta U^0 = 0$. La fonction $Ru^{\circ} + \mathbf{S} + \Psi$ vérifie bien cette équation puisque sa dérivée par rapport à θ est $\partial_\theta\Psi$ et que d'après (1.9) $P_0\, \partial_\theta\Psi = \partial_\theta\Psi$ et donc $\Lambda\, \partial_\theta\Psi = 0$.

Il reste à vérifier que $\mathcal{L}_0\tilde{\mathcal{F}}^0 = 0$. En appliquant $\mathcal{L}_0$ à $(2.2.4)_0$, on trouve que $\mathcal{L}_0\tilde{\mathcal{F}}^0$ s'écrit, suivant la décomposition (2.2.5) :

$$R^{-1}\mathcal{H}\, R^{-1}\underline{U}^{\circ} \;+\; \big(-\,\partial_\theta^2 \;+\; \mathbb{H}\,\big)P_0W^{\circ} -\; F_R(t,x,U^{\circ}).$$

Dans le cas de la fonction $U^{\circ} = Ru^{\circ} + \mathbf{S} + \Psi$ on a $\underline{U}^{\circ} = Ru^{\circ}$ et $W^{\circ} = P_0W^{\circ} = \Psi$. De plus $\mathcal{L}_0F_R(t,x,U^{\circ}) = F_R(t,x,\underline{U}^{\circ}) \;+\; P_0\, \{\, F(t,x,\underline{U}^{\circ} + W^{\circ}) \;-\; F(t,x,\underline{U}^{\circ})\, \}$. Par conséquent on doit vérifier que

$$R^{-1}\mathcal{H}\, R^{-1}\underline{U}^{\circ} \;+\; \big(-\,\partial_\theta^2 \;+\; \mathbb{H}\,\big)\;\Psi \;=\; R^{-1}F(t,x,u^{\circ})$$

$$+\; P_0R^{-1}\,\{\, F(t,x,u^{\circ} + R^{-1}\Psi) - F(t,x,u^{\circ}\, \},$$

ce qui résulte des définitions respectives de u° et Ψ. □

Le théorème qui suit montre que l'on peut contruire les U^j par récurrence :

THÉORÈME 2.2.2. — *Soit $k \geqslant 1$. Supposons connues des fonctions $U^j \in \mathcal{P}(\Omega_T)$, vérifiant $(\mathcal{S}_j)$ pour $j = o,\dots,k-1$. Alors il existe $U^k \in \mathcal{P}(\Omega_T)$, vérifiant $(\mathcal{S}_k)$.*

Démonstration. — Lorsque l'on veut résoudre le système $(\mathcal{S}_k)$, connaissant $U^0,\dots,U^{k-1}$, on est confronté au problème de résoudre, pour des éléments Φ_0, Φ_1, Φ_2 de $\mathcal{P}(\Omega_T)$ (vérifiant $\partial_t^\alpha\Phi_{i|t=0}, \forall\alpha\in\mathbf{N},\ i=1,2,3$), le problème linéaire suivant où l'inconnue est $U^k = \underline{U}^k + V^k + W^k$ (on omet de noter l'exposant k) et où l'on désigne par $\tilde{\mathcal{H}}$ l'opérateur hyperbolique linéaire $R^{-1}\mathcal{H}\ R^{-1} - F'_u(t,x,0)$:

$$(2.2.6)\qquad \begin{cases} -\partial_z^2 V + A_n \partial_z V = \mathcal{L}_2 \Phi_2, & (a) \\ A_n \partial_\theta (\mathrm{Id} - P_0) W = \mathcal{L}_1 \Phi_1, & (b) \\ \tilde{\mathcal{H}}\ \underline{U} + (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H}\ ) P_0 W = \mathcal{L}_0 \Phi_0, & (c) \\ (\underline{U} + V + W)_{|x_n = z = \theta = 0} = 0, \quad U_{|t=0} = 0. & (d) \end{cases}$$

Proposition 2.2.3. — *Pour tout $T > 0$, le système (2.2.6) possède une solution $U = \underline{U} + V + W$ dans $\mathcal{P}(\Omega_T)$, qui en outre vérifie $\partial_t^\alpha U_{|t=0} = 0$, $\forall \alpha \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — L'équation (b) détermine par intégration $(\mathrm{Id} - P_0)W$ dans $H^\infty(\Omega_T \times \mathbf{R}_\theta^+)$, car $\mathcal{L}_1\Phi_1$ est de la forme $(\mathrm{Id} - P_0)\Psi_1 \in \mathcal{N}(\Omega_T; \mathbf{R}_\theta^+)$, et la décroissance rapide à l'infini assure que $(\mathrm{Id} - P_0)W$ est dans $\mathcal{P}(\Omega_T)$. Par (a), V n'est pas déterminé car les conditions aux limites nécessaires pour résoudre (a) dans $H^\infty(\Omega_T \times \mathbf{R}_z \times \mathbf{R}_\theta^+)$, c'est-à-dire la donnée de $P_- V_{|z=0}$, sont inconnues puisqu'elles sont reliées à $\underline{U}$ et à W. Cependant $P_- V$ et $P_0 V$ sont déterminés par (a). En effet V est connu modulo un élément de $H^\infty(\Omega_T \times \mathbf{R}_z \times \mathbf{R}_\theta^+)$ appartenant au noyau de $-\partial_z^2 + A_n \partial_z$. Or ce noyau est polarisé sur $\mathbb{E}_-$. C'est-à-dire que si $\Psi(t,x;z;\theta)$ vérifie $(-\partial_z^2 + \Lambda \partial_z)\Psi = 0$, alors $\Psi(t,x;z;\theta) \in \mathbb{E}_-(t,x)$ pour tout $(t,x;z;\theta)$ puisque Ψ s'annule lorsque $z \to \infty$. Par conséquent la projection de V sur $(\mathbb{E}_-)^\perp = \mathbb{E}_+ \oplus \mathbb{E}_0$ est déterminée : $P_+ V$ et $P_0 V$ sont connus. Ces deux fonctions sont les solutions des systèmes suivants (puisque P_+ et P_0 commuttent avec A_n) :

$$(-\partial_z^2 + \Lambda \partial_z)\ P_+ V = P_+ \mathcal{L}_2 \Phi_2, \quad P_-(P_+ V)_{|z=0} = 0,$$

et

$$(-\partial_z^2 + \Lambda \partial_z)\ P_0 V = P_0 \mathcal{L}_2 \Phi_2, \quad P_-(P_0 V)_{|z=0} = 0.$$

En appliquant P_+ à la condition aux limites (d) on obtient, en notant $\Sigma := \{x_n = \theta = z = 0\}$:

$$(2.2.7)\qquad \big(P_+ \underline{U} + P_+ V + P_+ (\mathrm{Id} - P_0) W\big)_{|\Sigma} = 0,$$

donc $(P_+ \underline{U})_{|x_n = 0}$ est connu. En prenant alors la limite de (2.2.7) quand $\theta \to \infty$ on trouve que $\underline{U}$ est solution du problème mixte hyperbolique symétrique (avec des conditions aux limites maximales dissipatives)

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{H}}\ \underline{U} = \underline{\mathcal{L}_0\Phi_0} \\ P_+\underline{U}_{\ |x_n=0} = -P_+V_{|\Sigma} - P_+(\mathrm{Id} - P_0)W_{|\Sigma}, \\ \underline{U}_{\ |t=0} = 0 \end{cases}$$

et donc $\underline{U}$ est déterminé. La condition (2.2.7) entraîne alors que $(P_0\underline{U} + P_0V + P_0W)_{|\Sigma} = 0$, ce qui permet de résoudre la partie restante de (c) qui est une équation sur P_0W :

$$\begin{cases} (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H}\ )\ P_0W = \mathcal{L}_0\Phi - \underline{\mathcal{L}_0\Phi_0} \\ P_0W_{|\theta=0} = -P_0\underline{U} - P_0V_{|z=\theta=0}, \\ P_0W_{\ |t=0} = 0, \end{cases}$$

qui possède une solution unique dans $H^\infty(\Omega_T \times \mathbf{R}_\theta^+)$ d'après le théorème 2.1. On achève alors en déterminant V comme la solution du problème

$$\begin{cases} -\partial_z^2 V + A_n\partial_z V = \mathcal{L}_2\Phi_2, \\ P_-V_{|z=0} = -P_-\underline{U} - P_-W, \\ V_{|t=0} = 0, \end{cases}$$

nulle à l'infini en z, à décroissance rapide.

Le fait que les traces $\partial_t^k U_{|\{t=0\}}$ soient nulles découle par récurrence des équations, ce qui termine la preuve de la proposition. □

Remarque 2.2.4. — En reprenant les calculs qui précèdent lorsque $d_0 = 0$, on constate que les termes $\mathcal{W}^{\ j}$ ainsi que les termes $\mathcal{U}^{2j+1}$ sont nuls, $\forall j \in \mathbf{N}$. En particulier les $\mathcal{U}^{2j}$ ne dépendent que des variables t, x et z.

3. La solution exacte.

Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème 1.5. Suivant la même méthode, en vertu de la remarque 2.2.4, on obtient le théorème 1.6. Observons qu'il suffit de démontrer que les estimations L^∞ et H^m de R_ε du théorème 1.5 sont vraies lorsque $k \geqslant k_0$ pour un certain k_0, pour qu'elle soit vraie pour tout les entiers k, ceci en raison de la forme du développement asymptotique.

Fixons un entier $p > (n+1)/2$. Pour tout entier $q \geqslant 3$ les profils $\mathcal{U}^j$ construits sur $\Omega_{T_1} \times \mathbf{R}_z \times \mathbf{R}_\theta^+$ assurent que

$$a^\varepsilon(t,x) = \sum_0^{2p+q} (\sqrt{\varepsilon}\,)^j\, \mathcal{U}^j(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,)$$

est une solution approchée du système $\mathbf{PM}(\varepsilon, T_1)$ au sens où

$$(3.1)\qquad -\varepsilon\mathcal{E}\, a^\varepsilon + \mathcal{H}\, a^\varepsilon = F(t,x,a^\varepsilon) + (\sqrt{\varepsilon})^{q-1}\, \varepsilon^p\, H_\varepsilon,$$

$$a^\varepsilon_{|\Gamma_{T_1}} = 0, \quad a^\varepsilon_{|t=0} = 0,$$

et pour $q = k+4$, $k \in \mathbf{N}$ (où k est l'entier qui apparaît dans l'énoncé du théorème A), le membre de droite de (12) s'écrit $F(t,x,a^\varepsilon) + \varepsilon^{(k+1)/2}\ \varepsilon\ \varepsilon^p\ H_\varepsilon$. Nous supposons $k \geqslant 3$ pour la suite. On cherche alors une solution exacte du système sur Ω_{T_1} de la forme $a^\varepsilon + \varepsilon^{(k+1)/2} v_\varepsilon$, de sorte que v_ε doit être solution du système suivant, où l'on a noté $G(t,x,u,v)v := F(t,x,u+v) - F(t,x,u)$:

$$(3.2)\qquad \begin{cases} -\varepsilon\mathcal{E}\, v + \mathcal{H}\, v = G(t,x,a^\varepsilon,\varepsilon^{(k+1)/2}v).v + \varepsilon K_\varepsilon \quad \text{dans} \quad \Omega_{T_1}, \\[2ex] \qquad v_{|\Gamma_{T_1}} = 0, \quad v_{|t=0} = 0, \end{cases}$$

où $K_\varepsilon := \varepsilon^p\ H_\varepsilon$ est borné uniformément dans $H^p(\Omega_{T_1})$. Le théorème 1.5 résulte alors du résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$ le problème (3.2) admet une unique solution $v_\varepsilon \in H^\infty(\Omega_{T_1})$. Celle-ci vérifie les inégalités $\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_{T_1})} \leqslant$ cte , $\|v_\varepsilon\|_{H^p(\Omega_{T_1})} \leqslant c_p\ \varepsilon^{1-p/2}$.*

Lorsque $d_0 = 0$ on peut prendre comme solution approchée

$$a^\varepsilon(t,x) = \sum_0^M \varepsilon^j\, \mathcal{U}^j(t,x;x_n/\varepsilon),$$

pour un M suffisamment grand, et on obtient le théorème 1.6.

Pour démontrer le théorème 3.1, on commence par changer d'inconnue. Pour cela notons $\Gamma_1(t,x)$ et $\Gamma_2(t,x)$ deux matrices inversibles, C^∞,

$N \times N$, telles que

$$(\Gamma_2\, R^{-1}\, A_n\, R^{-1}\, \Gamma_1\,)(t,y,0) \;=\; \begin{pmatrix} I_{N-d_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;=:\; \Pi,$$

où I_{N-d_0} désigne la matrice identité de $\mathbf{R}^{N-d_0}$. Introduisons la nouvelle inconnue $\tilde{v}$ définie par : $v(t,x) = R^{-1}\Gamma_1\tilde{v}(t,x)$. Etant donnée une fonction $h \in C^\infty([0,+\infty[,\mathbf{R})$, $h(t) = t$ si $t \leqslant 1$, $h(t) = 1$ si $t \geqslant 2$, on introduit les champs de vecteurs $Z_n := h(x_n)\partial_n$ et $Z_j := \partial_j$ si $j \leqslant n-1$, $Z_0 := \partial_t$ de sorte que $(Z_0,\ldots,Z_n)$ est une base de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents à $\{x_n = 0\}$. Pour $\alpha = (\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \in \mathbf{N}^{n+1}$ on note $Z^\alpha = Z_0^{\alpha_0}\ldots Z_n^{\alpha_n}$. Avec ces notations et en appliquant la formule de Taylor à la matrice A_n, le système (3.2) s'écrit pour l'inconnue $\tilde{v}$:

$$\text{(3.3)}\qquad \left\{\begin{aligned} -\varepsilon\mathcal{E}^\sharp\tilde{v} + \mathcal{H}^\sharp\tilde{v} = G^\sharp(t,x,a^\varepsilon,\varepsilon^{(k+1)/2}\tilde{v}).\tilde{v} + \varepsilon K^\sharp_\varepsilon \quad &\text{dans} \quad \Omega_{T_1},\\ \tilde{v}_{|\Gamma_{T_1}} = 0, \quad \tilde{v}_{|t=0} = 0,& \end{aligned}\right.$$

où $\mathcal{E}^\sharp \equiv \sum\limits_{i,j} \Gamma_2\, R^{-1}\, \partial_i\, E_{i,j}\, \partial_j\, R^{-1}\, \Gamma_1$ et $\mathcal{H}^\sharp$ est l'opérateur hyperbolique

$$\text{(3.4)}\qquad \Pi\,\partial_n + \sum_0^n A_j^\sharp\, Z_j \;+\; B^\sharp \;=:\; \mathcal{H}^{\,\sharp},$$

les matrices $A_j^\sharp$ et $B^\sharp$ étant C^∞ et constantes hors d'un compact. On démontre le théorème 3.1 en montrant la convergence du schéma itératif suivant, pour $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ et ε_0 assez petit :

(3.5)

$$\left\{\begin{aligned} -\varepsilon\mathcal{E}^\sharp\tilde{v}^{\nu+1} + \mathcal{H}^\sharp\tilde{v}^{\nu+1} = G^\sharp(t,x,a^\varepsilon,\varepsilon^{(k+1)/2}\tilde{v}^\nu).\tilde{v}^{\nu+1} + \varepsilon K^\sharp_\varepsilon \quad &\text{dans} \quad \Omega_{T_1},\\ \tilde{v}^{\nu+1}_{|\Gamma_{T_1}} = 0, \quad \tilde{v}^{\nu+1}_{|t=0} = 0.& \end{aligned}\right.$$

On établit cette convergence à l'aide d'estimations a priori sur les solutions du système linéaire

$$\text{(3.6)}\qquad \left\{\begin{aligned} -\varepsilon\mathcal{E}^\sharp v + \mathcal{H}^\sharp\tilde{v} = f \quad &\text{dans} \quad \Omega_{T_1},\\ v_{|\Gamma_{T_1}} = 0, \quad v_{|t=0} = 0.& \end{aligned}\right.$$

Ces estimations portent sur des normes à poids mesurant la régularité conormale au bord $\{x_n = 0\}$: on note pour $\lambda \geqslant 1$,

$$|\, v\, \|_{0,\lambda} :=\|\, e^{-\lambda t} v\, \|_{L^2(\Omega_{T_1})},$$

et pour tout entier m

$$| v \|_{m,\lambda} := \sum_{|\alpha| \leqslant m} \lambda^{m-\alpha} \mid Z^\alpha v \|_{0,\lambda}$$

où $\alpha \in \mathbf{N}^{n+1}$.

PROPOSITION 3.2. — *Soit m un entier. Il existe $\lambda_m \geqslant 1$ tel que pour tout $f \in H^\infty(\mathbf{R}^{1+n})$, $f_{|t<0} = 0$, le problème (3.6) possède une unique solution v^ε pour tout $\varepsilon \in]0,1]$. De plus pour $\lambda \geqslant \lambda_m$ et pour tout $\varepsilon \in]0,1]$:*

$$\varepsilon \mid \nabla_x v \|^2_{m,\lambda} + \lambda \mid v \|^2_{m,\lambda} \leqslant \lambda^{-1} \lambda_m \mid f \|^2_{m,\lambda} . \tag{3.7}$$

Démonstration. — Pour tout $\varepsilon > 0$ le problème (3.6) est parabolique : l'existence et l'unicité de v sont classiques ([BR], [KL], [CP]). Le seul point à démontrer est l'estimation (3.7). Le point de départ est l'inégalité d'énergie classique qui s'obtient en multipliant le système (3.6) à gauche par $S(t,x) := \Gamma_1^t \, \Gamma_2^{-1}$, puis en faisant le produit scalaire de l'équation avec v et en intégrant par parties ([BR], [KL]). On trouve que pour $\lambda \geqslant c_0$, où c_0 est une contante assez grande, et pour tout $\varepsilon \in]0,1]$:

$$\varepsilon \mid \nabla_x v \|^2_{0,\lambda} + \lambda \mid v \|^2_{0,\lambda} \leqslant c_0 \mid \langle Sf, v \rangle_{L^2_\lambda} |, \tag{3.8}$$

où $\langle .,. \rangle_{L^2_\lambda}$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega_{T_1})$ pour la mesure $e^{-2\lambda t}\, dt\, dx$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on déduit l'inégalité (3.7) lorsque $m = 0$ de l'estimation (3.8). On démontre ensuite l'estimation (3.7) par récurrence sur m. Supposons cette estimation établie pour $0, \ldots, m-1$. Pour $\alpha \in \mathbf{N}^{n+1}$ tel que $| \alpha | \leqslant m$, en appliquant Z^α à l'équation et en écrivant (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned} &\varepsilon \left(\lambda^{m-|\alpha|} \mid \nabla_x Z^\alpha v \|_{0,\lambda}\right)^2 + \lambda \left(\lambda^{m-|\alpha|} \mid Z^\alpha v \|_{0,\lambda}\right)^2 \\ &\leqslant c_0 \, \lambda^{2(m-|\alpha|)} \mid \langle\, SZ^\alpha f, Z^\alpha v \,\rangle_{L^2_\lambda} | \\ &+ c_0 \, \lambda^{2(m-|\alpha|)} \mid \langle\, [\mathcal{H}^\sharp, Z^\alpha] v, Z^\alpha v \,\rangle_{L^2_\lambda} | \\ &+ \varepsilon\, c_0 \, \lambda^{2(m-|\alpha|)} \mid \langle\, [\mathcal{E}^\sharp, Z^\alpha] v, Z^\alpha v \,\rangle_{L^2_\lambda} | . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Le premier terme du membre de droite de (3.9) est majoré par cte $| f \|_{m,\lambda}$ $| v \|_{m,\lambda}$ que l'on majore par $\lambda^{-1} c_\delta \mid f \|^2_{m,\lambda} + \delta \lambda \mid v \|^2_{m,\lambda}$, pour un $\delta > 0$ assez petit, et le terme en $\lambda \mid v \|^2_{m,\lambda}$ est absorbé dans le membre de gauche.

Considérons maintenant le troisième terme du membre de droite de (3.9). Pour le majorer il suffit de majorer une somme de termes dont les «plus mauvais» contiennent deux dérivées normales ∂_n (les autres termes se traitent de façon plus simple car ils font intervenir au plus *une* dérivée normale) et sont de la forme :

$$\varepsilon\ \lambda^{2(m-|\alpha|)}\ \mid \langle\ A\ \partial_n B\ \partial_n C\ Z^\beta v, Z^\alpha v\ \rangle_{L^2_\lambda} \mid \tag{3.10}$$

où A, B, C sont des matrices C^∞ et $\mid \beta \mid \leqslant m-1$. Par une intégration par parties (les traces sur $\{x_n = 0\}$ de $Z^\alpha v$ sont nulles puisque Z^α est tangent au bord) on est ramené à contrôler

$$\varepsilon\ \lambda^{2(m-|\alpha|)}\ \mid \partial_n\ Z^\beta v \|^2_{0,\lambda}\ \ \mid \partial_n\ Z^\alpha v \|^2_{0,\lambda},$$

que l'on majore par

$$\delta\ \varepsilon\ \mid \partial_n v \|^2_{m,\lambda}\ \ +\ \ c_\delta\ \varepsilon\ \mid \partial_n v \|^2_{m-1,\lambda},$$

où $\delta > 0$ est choisi suffisamment petit pour absorber le terme $\delta\varepsilon\ \mid \partial_n v \|^2_{m,\lambda}$ dans le membre de gauche. Le terme $\varepsilon\ \mid \partial_n v \|^2_{m-1,\lambda}$ est majoré par le membre de droite de l'estimation (3.7) d'après l'hypothèse de récurrence.

Il reste à contrôler le deuxième terme du membre de droite de (3.9). Pour cela on doit contrôler des termes de la forme

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}\ \mid \langle\ [A^\sharp_j Z_j, Z^\alpha]v, Z^\alpha v\ \rangle_{L^2_\lambda} \mid, \tag{3.11}$$

et

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}\ \mid \langle\ [\Pi\ \partial_n, Z^\alpha]v, Z^\alpha v\ \rangle_{L^2_\lambda} \mid. \tag{3.12}$$

Le terme (3.11) se majore par cte $\mid v \|^2_{m,\lambda}$ et est absorbé dans le membre de gauche de (3.7). Pour le terme (3.12), on observe que le commutateur $[\Pi\ \partial_n, Z^\alpha]v$ s'écrit comme une somme de termes de la forme : coeff. $Z^\beta\ \Pi\ \partial_n v$, où $\mid \beta \mid \leqslant \mid \alpha \mid -1$. En revenant alors à l'équation on a $\Pi\ \partial_n v = f - \varepsilon\ \mathcal{E}^\sharp v - \sum A^\sharp_j Z_j v - B^\sharp v$. On est donc ramené à contrôler des termes de trois type : $\lambda^{2(m-|\alpha|)}\ \mid \langle\ Z^\beta f, Z^\alpha v\ \rangle_{L^2_\lambda} \mid$, $\lambda^{2(m-|\alpha|)}\ \mid \langle\ Z^\beta Z_j v, Z^\alpha v\ \rangle_{L^2_\lambda} \mid$, et $\varepsilon\ \lambda^{2(m-|\alpha|)}\ \mid \langle\ Z^\beta \mathcal{E}^\sharp v, Z^\alpha v\ \rangle_{L^2_\lambda} \mid$. Le premier terme se majore par cte $\mid f \|_{m-1,\lambda} \mid v \|_{m,\lambda} \leqslant$ cte $\lambda^{-1}\ \mid f \|_{m,\lambda}$ $\mid v \|_{m,\lambda} \leqslant$ cte $(2\lambda)^{-1}\ \{\mid f \|^2_{m,\lambda}\ +\ \mid v \|^2_{m,\lambda}\}$. Le second terme se majore par $\mid v \|^2_{m,\lambda}$ de sorte que dans les deux cas les termes en $\mid v \|^2_{m,\lambda}$ sont absorbés dans le membre de gauche pour λ assez grand. Enfin les termes de la forme

$$\varepsilon\ \lambda^{2(m-|\alpha|)}\ \mid \langle\ Z^\beta \mathcal{E}^\sharp v, Z^\alpha v\ \rangle_{L^2_\lambda} \mid$$

ont déjà été majorés dans le troisième terme du membre de droite de (3.9). La proposition est démontrée. □

On en déduit des estimations pour le schéma itératif (3.5). Rappelons que lorsque $\varepsilon > 0$ est fixé, toutes les solutions v^ν du schéma itératif sont dans $H^\infty(\Omega_{T_1})$ et il résulte par récurrence de l'équation que $\partial_t^j v^\nu{}_{|t=0} = 0$, pour tout $j \in \mathbf{N}$. On notera $\| v \|_\infty$ au lieu de $\| v \|_{L^\infty(\Omega_{T_1})}$.

PROPOSITION 3.3. — *Soit $\mu > 0$ fixé. Il existe $\lambda_1 > 0$ et $\rho : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ tels que si $\| v^\nu \|_\infty \leqslant \mu$, on a pour tout $\lambda \geqslant \lambda_1$:*

$$(3.13)\qquad \varepsilon \mid \nabla_x v^{\nu+1} \|^2_{p,\lambda} + \lambda \mid v^{\nu+1} \|^2_{p,\lambda} \leqslant \lambda_1 \,\varepsilon^2 \,\lambda^{-1} \{ \mid K^\sharp \|^2_{p,\lambda} + (\| v^{\nu+1} \|_\infty \mid v^\nu \|_{p,\lambda} + \mid v^{\nu+1} \|_{p,\lambda})^2 \},$$

$$(3.14)\qquad \| v^{\nu+1} \|_\infty \leqslant \rho(\lambda) (\mid v^{\nu+1} \|_{p,\lambda} + \mid \partial_n v^{\nu+1} \|_{p,\lambda}).$$

Démonstration. — Pour l'inégalité (3.13) il suffit d'après la proposition 3.2 de contrôler $\mid G^\sharp(t,x,a,\varepsilon^{(k+1)/2}\, v^\nu) v^{\nu+1} \|_{p,\lambda}$ par le membre de droite de (3.13). Il s'agit pour cela d'estimer en norme $\mid \quad \|_{0,\lambda}$, des termes de la forme :

$$(3.15)\qquad \lambda^{p-|\alpha|}\, Z^\alpha\big(G^\sharp(t,x,a,\varepsilon^{(k+1)/2}\, v^\nu) v^{\nu+1} \big).$$

Lorsque l'on développe (3.15) on obtient des termes de deux type : ceux où v^ν est dérivé et ceux où v^ν n'est pas dérivé. Les termes où v^ν n'est pas dérivé sont contrôlés par cte $\mid v^{\nu+1} \|_{p,\lambda}$ et pour λ assez grand sont absorbés dans le membre de gauche de (3.13). Les termes où v^ν est dérivé sont de la forme $\lambda^{p-|\alpha|}\, \Phi^\varepsilon(t,x)\, Z^{\beta_1} a \ldots Z^{\beta_i} a\, Z^{\gamma_1} v^\nu \ldots Z^{\gamma_j} v^\nu\, Z^\delta v^{\nu+1}\, \varepsilon^{j(k+1)/2}$ où $\Phi^\varepsilon(t,x)$ est uniformément borné dans L^∞ et $\mid \beta_1 \mid + \ldots + \mid \beta_i \mid + \mid \gamma_1 \mid + \ldots + \mid \gamma_j \mid + \mid \delta \mid \leqslant \mid \alpha \mid$. Comme $(k+1)/2 \geqslant 2$, ces termes admettent ε^2 en facteur. Tous les Z^{β_ℓ} sont uniformément bornés dans L^∞ en vertu de la forme particulière de a^ε. Il reste donc à majorer des termes de la forme

$$(3.16)\qquad \varepsilon^2\, \lambda^{p-|\alpha|} \mid Z^{\gamma_1} v^\nu \ldots Z^{\gamma_j} v^\nu\, Z^\delta v^{\nu+1} \|_{0,\lambda}.$$

On utilise les inégalités de Moser suivantes, déduites des inégalités de Gagliardo-Nirenberg ([G2], p 642) :

LEMME 3.4. — *Soient $m \in \mathbf{N}$, $a_1, \ldots, a_\ell \in H^\infty(\Omega_{T_1})$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \in \mathbf{N}^{n+1}$, $\mid \alpha \mid = \mid \alpha_1 \mid + \ldots + \mid \alpha_\ell \mid \leqslant m$. Alors pour tout $\lambda \geqslant 1$:*

$$\lambda^{m-|\alpha|} \mid Z^{\alpha_1} a_1 \ldots Z^{\alpha_\ell} a_\ell \|_{0,\lambda} \leqslant c \sum_j \Big(\prod_{i \neq j} \| a_i \|_\infty \Big) \mid a_j \|_{m,\lambda}$$

la constante c étant indépendante des a_i .

Sous l'hypothèse que $\| v^\nu \|_\infty \leqslant \mu$, il résulte alors de ce lemme que le terme (3.16) se majore par cte ε^2 ($\| v^{\nu+1} \|_\infty \mid v^\nu \|_{p,\lambda} + \mid v^{\nu+1} \|_{p,\lambda}$), et l'inégalité (3.13) est démontrée.

Démontrons maintenant l'inégalité (3.14). Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^{1+n}$, notons $N_k(\varphi,\Omega) := \sum_{|\alpha|\leqslant k} \| Z^\alpha\varphi \|_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|\leqslant k} \| Z^\alpha\partial_n\varphi \|_{L^2(\Omega)}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{1+n})$, par transformation de Fourier sur $\mathbf{R}^{1+n}$ en notant $\big(\eta = (\eta_0,\dots,\eta_{n-1}),\xi\big)$ la variable duale de $\big((x_0,\dots,x_{n-1}),x_n\big)$, on a :

$$\| \varphi \|_{L^1} \leqslant \text{ cte } N_k(\varphi,\mathbf{R}^{1+n}) \left(\int \{1+ \mid \eta \mid^{2k} +\xi^2(1+ \mid \eta \mid^{2k})\}^{-1}\, d\eta\, d\xi\right)^{1/2},$$

l'intégrale de droite étant finie si et seulement si $k > (n+1)/2$. Dans ce cas on a donc

$$\| \varphi \|_{L^\infty(\mathbf{R}^{1+n})} \leqslant N_k(\varphi,\mathbf{R}^{1+n}). \tag{3.17}$$

L'inégalité (3.14) résulte alors de l'inégalité (3.17) appliquée à un prolongement de v à $H^p(\mathbf{R}^{1+n})$, la présence de la fonction $\rho(\lambda)$ étant due à celle du poids $e^{-\lambda t}$ dans la norme $\mid\ \|_{p,\lambda}$. La proposition 3.3 est démontrée. □

Fixons un réel $\mu > 0$ arbitraire, un réel $\lambda \geqslant \lambda_1(\geqslant 1)$ donné par la proposition 4.3, et notons $h := \sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} \mid K^\sharp \|_{p,\lambda}$. On choisit alors $0 < \varepsilon_0 < 1$ suffisamment petit pour que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\rho(\lambda)(1+\sqrt{2}\,)\,\sqrt{\varepsilon}\,h \leqslant \mu\,, \quad \varepsilon\, h\,(1+\rho) \leqslant 1,$$

$$(3/2)\varepsilon^2\, h\,\rho \leqslant \lambda/2\,, \quad \varepsilon\, h^2 \leqslant (\lambda/2)\, h^2.$$

Lemme 3.5. — *Les valeurs de μ, λ, h, ε_0 étant ainsi choisies, la suite v^ν vérifie : $\| v^\nu \|_\infty \leqslant \mu$ et $\mid v^\nu \|_{p,\lambda} \leqslant h$ pour tout entier ν et tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$.*

Démonstration. — On procède par récurrence, $v^0 \equiv 0$ vérifiant ces estimations. Supposons que v^ν les vérifie. Comme $\lambda_1/\lambda \leqslant 1$, on déduit des inégalités (3.13) et (3.14) que

$$\varepsilon \mid \nabla_x v^{\nu+1} \|_{p,\lambda}^2 + \lambda \mid v^{\nu+1} \|_{p,\lambda}^2 \leqslant \varepsilon^2\, h^2 + (3/2)\,\varepsilon^2\, h\,\rho \mid v^{\nu+1} \|_{p,\lambda}^2 + (1/2)\,\varepsilon^2\, h\,\rho \mid \nabla_x v^{\nu+1} \|_{p,\lambda}^2 .$$

On en déduit que

$$(\varepsilon/2) \mid \nabla_x v^{\nu+1} \|_{p,\lambda}^2 + \lambda \mid v^{\nu+1} \|_{p,\lambda}^2 \leqslant \varepsilon^2\, h^2 + (3/2)\varepsilon^2\, h\,\rho \mid v^{\nu+1} \|_{p,\lambda}^2,$$

donc que $(\lambda/2) \mid v^{\nu+1} \|^2_{p,\lambda} \leqslant \varepsilon^2 h^2$ et donc $\mid v^{\nu+1} \|^2_{p,\lambda} \leqslant \varepsilon h^2$. En particulier on a bien $\mid v^{\nu+1} \|_{p,\lambda} \leqslant h$. On obtient également $(\varepsilon/2) \mid \nabla_x v^{\nu+1} \|^2_{p,\lambda} \leqslant \varepsilon^2 h^2$ et donc $\mid \nabla_x v^{\nu+1} \|_{p,\lambda} \leqslant (2\varepsilon)^{1/2} h$. L'inégalité (3.14) entraîne donc $\| v^{\nu+1} \|_\infty \leqslant \rho(\lambda)\big(\varepsilon^{1/2}h + (2\varepsilon)^{1/2}h\big)$, et donc $\| v^{\nu+1} \|_\infty \leqslant \mu$, d'après le choix de ε_0. Le lemme est démontré. □

Il résulte du lemme 3.5 et de l'inégalité (3.13) de la proposition 3.3 que la suite v^ν est bornée dans $H^1(\Omega_{T_1})$. On peut donc en extraire une suite qui converge vers la solution cherchée $\tilde{v}_\varepsilon$ du système (3.3), qui par passage à la limite vérifie les mêmes estimations (uniformes) que les v^ν du lemme 3.5 et reste bornée dans $H^1(\Omega_{T_1})$ uniformément par rapport à ε. En particulier l'estimation (4.13) montre que $\mid v_\varepsilon \|_{p,\lambda} = O(\varepsilon)$ et $\mid \partial_n v_\varepsilon \|_{p,\lambda} = O(\varepsilon^{1/2})$. On estime ensuite les dérivées normales itérées par récurrence, grâce à l'équation. □

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] C. BARDOS, Problèmes aux limites pour les équations du premier ordre, Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup., 3 (1970), 185-233.

[BBB] C. BARDOS, D. BRÉZIS, H.BRÉZIS, Perturbations singulières et prolongements maximaux d'opérateurs positifs, Arch. Rational Mech. Anal., 53 (1973), 69-100.

[BR] C. BARDOS, J. RAUCH, Maximal positive boundary value problems as limits of singular perturbation problems, Trans. Amer. Math. Soc., 270 (1982), 377-408.

[Bé] M. BÉZARD, Problème aux limites pour le système de Vlasov-Maxwell, exposé N.4, séminaire Equations aux Dérivées Partielles de l'Ecole Polytechnique, 1992-93, et preprint n.1029, Ecole Polytechnique, 1992.

[F] K. O. FRIEDRICHS, Symmetric positive systems of differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 7 (1954), 345-392.

[G1] O. GUÈS, Couches limites pour des problèmes mixtes hyperboliques, séminaire E.D.P. de l'Ecole Polytechnique, 1993-94, exp. n°17.

[G2] O. GUÈS, Problème mixte hyperbolique quasilinéaire caractéristique, Comm. Part. Diff. Equa., 15 (5) (1990), 595-645.

[I] A. M. IL'IN, Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems, Translations of Mathematical Monographs, vol 102, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1992.

[JR] J.-L. JOLY, J. RAUCH, Justification of multidimensional single phase semilinear geometric optics, Trans. Amer. Math. Soc., 330 (1992), 599-624.

[Ka] T. KATO, Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbf{R}^3$, J. Funct. Anal., 9 (1972), 296-305.

[KL] H-O. KREISS, J. LORENZ, Initial boundary value problems and the Navier-Stokes equations, Pure and Applied Mathematics, vol. 136, Academic Press, London, 1989.

[KM] S. KLAINERMAN, A. MAJDA, Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids, Comm. Pure Appl. Math., 34 (1981), 481-524.

[Lev] N. LEVINSON, The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = D(x,y)$ for small ε, Ann. Math., 5 (1950), 428-445.

[L] J-L. LIONS, Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal, Lecture Notes in Math., N. 323, Springer-Verlag, 1973.

[LP] P. LAX, R. PHILIPS, Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), 427-455.

[LSU] O. A. LADYZHENSKAYA, V. A. SOLONNIKOV, N. N. URAL'CEVA, Linear and quasilinear equations of parabolic type, Moscou 1967, et Trans. Math. Monographs, vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

[O] O. OLEINIK, Linear equations of second order, Mat. Sb., 69 (1966), 111-140, et Amer. Math. Soc. Transl. Series 2, 65 (1967), 167-200.

[R] J. RAUCH, Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity, Trans. Amer. Math. Soc., 291 (1985), 167-185.

[RR] J. RAUCH, M. REED, Bounded, stratified, and striated solutions of hyperbolic systems, Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, vol.9, Pitman Res. Notes in Math., 181, Longman Scientific and Technical, Harlow, (1988), 334-351.

[VL1] M. I. VISHIK, L. A. LYUSTERNIK, Asymptotic behavior of solutions of linear differential equations with large or quickly changing coefficients and boundary condition, Russian Math. Surveys, 4 (1960), 23-92.

[VL2] M. I. VISHIK, L. A. LYUSTERNIK, Regular degeneration and boundary layers for linear differential equations with small parameter, Uspek. Math. Nauk., 12 (1957), 3-122, Amer. Math. Soc. Transl., (2) 20 (1962), 239-264.

Manuscrit reçu le 24 janvier 1995,
accepté le 9 mai 1995.

Olivier GUÈS,
IRMAR
URA 305
Université de Rennes 1
35042 Rennes cedex (France).