

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PATRICK IGLESIAS

La trilogie du moment

Annales de l'institut Fourier, tome 45, n° 3 (1995), p. 825-857

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_3_825_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA TRILOGIE DU MOMENT

par Patrick IGLESIAS

Introduction.

On considère une 2-forme fermée ω sur une variété différentiable connexe X . On appelle *tore des périodes* de la forme ω le quotient T_ω de $\mathbb{R}$ par son *groupe des périodes* P_ω . On appelle *fibré d'intégration* de la forme ω , tout fibré principal de base X et de groupe structural T_ω , possédant une connexion de courbure ω . On montre que l'ensemble des fibrés d'intégration de la forme ω est classée, à équivalence de fibré principal près, par le premier groupe d'extension de $H_1(X, \mathbb{Z})$ à coefficients dans P_ω , c'est-à-dire $\text{Ext}(H_1(X, \mathbb{Z}), P_\omega)$. En particulier, si le groupe $H_1(X, \mathbb{Z})$ est sans torsion et si X est compacte, il y a unicité du fibré d'intégration.

Dès que le tore des périodes T_ω n'est plus un groupe de Lie, c'est-à-dire dès que ω n'est plus entière⁽¹⁾, il est nécessaire d'élargir la catégorie des variétés différentiables à celle des *espaces différentiables* (voir annexe A). Dans ces conditions, le fibré d'intégration Y n'est plus une variété, mais les notions d'applications différentiables, fibrés, connexions et autres objets géométriques sont bien définis dans cette catégorie [Igl85], et c'est dans ce sens qu'ils sont utilisés ici.

Chaque fibré d'intégration $\pi : Y \rightarrow X$ peut être muni d'une famille de connexions inéquivalentes de courbure ω indexée par $H^1(X, \mathbb{R})$. On appelle *structure d'intégration* de la forme ω tout couple (Y, λ) où $\pi : Y \rightarrow X$ est un fibré d'intégration et λ une forme de connexion de courbure ω . L'ensemble des structures d'intégrations de la forme ω est donc classée par $H^1(X, T_\omega)$.

Mots-clés : Géométrie différentielle – Géométrie symplectique – Application moment – Extensions centrales – Quantification géométrique.

Classification math. : 58A10 – 53C57.

⁽¹⁾ On dit qu'une forme fermée est *entière* si son groupe des périodes est soit nul soit isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Soit $\text{Diff}(Y, \lambda)$ le groupe des automorphismes de la structure d'intégration (Y, λ) , c'est-à-dire le groupe des difféomorphismes de Y , équivariants sous l'action de T_ω , et préservant la forme de connexion λ . Il s'envoie, par homomorphisme, dans le groupe $\text{Diff}(X, \omega)$ des difféomorphismes de X qui préservent la forme ω . Son image $\text{Ham}(Y, \lambda) \subset \text{Diff}(X, \omega)$ est appelé *groupe des difféomorphismes hamiltoniens* de ω , associés à (Y, λ) . Son noyau est réduit au tore des périodes T_ω . Le groupe $\text{Diff}(Y, \lambda)$ est une extension centrale de $\text{Ham}(Y, \lambda)$ par T_ω .

Lorsque $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$, on a égalité des composantes connexes

$$\text{Ham}^0(Y, \lambda) = \text{Diff}^0(X, \omega).$$

L'extension centrale de $\text{Diff}^0(X, \omega)$ par $\text{Diff}^0(Y, \lambda)$ est représentée par un cocycle de groupe

$$K_\omega \in H^2(\text{Diff}^0(X, \omega), T_\omega)$$

dont on donne une interprétation géométrique simple, en termes d'aire de triangle, qui justifie le nom qu'on lui a donné de *cocycle triangulaire*.

Le moment J du groupe $\text{Ham}(Y, \lambda)$ est une application de X dans le dual $\text{Vect}^*(X, \omega)$ de l'algèbre de Lie $\text{Vect}(X, \omega)$ des champs de vecteurs qui préservent la 2-forme ω . Son *défaut d'équivariance*, sous l'action de $\text{Ham}(Y, \lambda)$, est un 1-cocycle Θ de $\text{Ham}(Y, \lambda)$ dans $\text{Vect}^*(X, \omega)$. Il est relié au cocycle triangulaire : c'est l'image de K_ω par un certain *morphisme dérivé*.

L'aspect infinitésimal de cette construction fait intervenir un 2-cocycle d'algèbre de Lie $k_\omega \in H^2(\text{Vect}(X, \omega), \mathbb{R})$ obtenu par dérivation du cocycle triangulaire K_ω . Ces trois objets K_ω , Θ et k_ω constituent ce qu'on a envie d'appeler la *trilogie du moment*.

On illustre cette construction par quelques exemples. On montre en particulier comment on peut retrouver le cocycle de Bott-Thurston [Bot78], qui définit la seule extension centrale non triviale de $\text{Diff}^\circ(S^1)$ par $\mathbb{R}$ [GF68], en considérant l'espace des immersions du cercle S^1 dans $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, le défaut d'équivariance du moment est la dérivée schwarziennne des difféomorphismes du cercle [Kir82], et le niveau infinitésimal fait naturellement apparaître le cocycle de Gelfand-Fuchs [GF68].

Tout cela généralise, au cas d'une 2-forme fermée quelconque ω , une construction relativement bien connue lorsque ω est entière. Cette construction, utilisée notamment en quantification géométrique [Sou70] et dans la

méthode des orbites [Kir74], est à l'origine de ce travail. Mais soulignons toutefois que le fibré d'intégration est ici unique dès que $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$, ce qui n'est pas le cas en quantification géométrique. C'est parce que nous utilisons ici le tore des périodes T_ω , bien défini comme le quotient $\mathbb{R}/P_\omega$ et non un groupe donné à l'avance (en l'occurrence S^1) défini à isomorphisme près.

Il semble naturel que cette construction trouve sa place en cohomologie équivariante, nous n'avons pas développé cet aspect.

Au moment d'envoyer la deuxième version de cet article à la revue, j'ai eu connaissance du livre de Jean-Luc Brylinski [Bry93] dans lequel certaines constructions analogues sont présentées.

1. Intégration d'une 2-forme fermée.

Soit ω une 2-forme fermée sur une variété différentiable connexe X . Rappelons que le *groupe des périodes* de la forme ω est le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ défini par :

$$(1) \quad P_\omega = \left\{ \int_\sigma \omega \mid \sigma \in H_2(X, \mathbb{Z}) \right\}.$$

DÉFINITION 1.1. — *On appellera tore des périodes de la forme ω le quotient T_ω de $\mathbb{R}$ par son groupe des périodes P_ω . On notera cl_ω la projection de $\mathbb{R}$ sur le tore T_ω :*

$$(2) \quad 0 \rightarrow P_\omega \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\text{cl}_\omega} T_\omega \rightarrow 1.$$

Lorsque la forme ω est entière, T_ω est un groupe de Lie ($\mathbb{R}$ ou S^1 , suivant que ω est exacte ou non), sinon il sera muni de sa structure de groupe différentiable (voir annexe A). On notera additivement sa loi de groupe, même si lorsqu'il est égal à S^1 , l'usage veut qu'elle soit notée multiplicativement. Rappelons qu'une forme fermée est dite entière lorsque son groupe des périodes est discret, *i.e.* trivial ou isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Soit θ la 1-forme différentielle (de Maurer-Cartan) définie sur T_ω par :

$$(3) \quad \text{cl}_\omega^* \theta = dt.$$

On notera $\text{Arc}(X, x_0)$ l'espace des arcs différentiables de X pointés en $x_0 \in X$ et $\text{Lac}(X, x_0)$ le sous-espace de ses lacets. Ces espaces sont munis de leurs structures différentiables standard .

Deux arcs γ et γ' , sont *homologues* si leur différence borde une 2-chaîne singulière; on notera :

$$(4) \quad \gamma \sim \gamma' \iff \exists \sigma \quad \partial \sigma = \gamma' - \gamma.$$

Le quotient des arcs pointés par la relation d'homologie sera noté $\widehat{X}$, c'est le *revêtement d'homologie* de X . Son groupe structural, quotient de $\text{Lac}(X, x_0)$ par la relation d'homologie, est isomorphe au groupe $H_1(X, \mathbb{Z})$.

PROPOSITION 1.2. — Soit ω une 2-forme fermée sur une variété différentiable connexe X , telle que $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$. Il existe un fibré principal $\pi : Y \rightarrow X$, de base X , de groupe structural T_ω , muni d'une forme de connexion λ de courbure ω . La structure (Y, λ) est unique à équivalence près.

Démonstration. — Démontrons d'abord l'existence. Relevons la relation d'équivalence, définie plus haut sur les arcs, au produit $\text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega$:

$$(5) \quad (\gamma, z) \sim (\gamma', z') \iff \gamma \sim \gamma' \text{ et } z' = z + \text{cl}_\omega \int_\sigma \omega \text{ où } \partial \sigma = \gamma' - \gamma.$$

Il est facile de vérifier que c'est bien une relation d'équivalence. Soit Y le quotient de $\text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega$ par cette relation d'équivalence. Puisque $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$, on a $\widehat{X} = X$ et Y est fibré principalement sur X , de groupe structural T_ω . Soit K l'opérateur de chaîne-homotopie tel qu'il est défini dans l'annexe B, et α la 1-forme définie sur le produit $\text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega$ par :

$$(6) \quad \alpha = K\omega \oplus \theta.$$

C'est évidemment une forme de connexion pour l'action naturelle de T_ω , de courbure $b^*\omega$, puisque $K\omega$ est une primitive de $b^*\omega$, où b désigne l'application *but* de $\text{Arc}(X, x_0)$ sur X qui à γ associe $\gamma(1)$. En appliquant la proposition A.1, le passage de la forme α au quotient Y est assuré par le lemme suivant :

LEMME 1.3. — Soit p la projection de $\text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega$ sur son quotient Y . Si deux paramétrages différentiables (plaques) P et P' de $\text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega$ vérifient $p \circ P = p \circ P'$, alors $P^*\alpha = P'^*\alpha$.

Démonstration. — Soient U le domaine des plaques P et P' et $r \in U$; notons $P(r) = (P_X(r), P_T(r))$ où P_X est une plaque de $\text{Arc}(X, x_0)$ et P_T une plaque de T_ω . On ne perd rien en généralité en supposant que P_T se

relève globalement sur $\mathbb{R}$ en une plaque $Q \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ (i.e. $P_T = \text{cl}_\omega \circ Q$). On a donc $P^*(K\omega \oplus \theta) = P_X^*(K\omega) + P_T^*\theta$, c'est-à-dire $P_X^*(K\omega) + dQ$. Notons $\gamma = P(r)$ et $\delta\gamma = D(P)(r)(\delta r)$ où δr est un vecteur tangent à $r \in U$, par définition (cf. annexe B) :

$$P_X^*(K\omega)_r(\delta r) = \int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \delta\gamma(t)) dt.$$

D'autre part, $p \circ P = p \circ P'$ implique l'existence, pour tout $r \in U$ d'une 2-chaîne σ_r telle que $\partial\sigma_r = P'(r) - P(r)$. On peut vérifier, en restreignant si nécessaire le domaine U , que σ_r peut être choisie différenciablement. On a alors

$$\text{cl}_\omega(Q'(r)) = \text{cl}_\omega(Q(r)) + \text{cl}_\omega \int_{\sigma_r} \omega,$$

c'est-à-dire

$$Q'(r) = Q(r) + \int_{\sigma_r} \omega + \ell(r),$$

où $\ell : U \rightarrow P_\omega$ est différentiable. Comme $P\omega$ est *différentiablement discret* : toute application différentiable de U dans $\mathbb{R}$ à valeur dans P_ω est localement constante, on déduit que ℓ est constante et donc que :

$$dQ'(r) = dQ(r) + d\left[\int_{\sigma_r} \omega\right].$$

En utilisant le théorème de Stokes (voir annexe C), qui peut s'écrire aussi

$$d\left[\int_{\sigma} \omega\right] = \int_{\sigma} d\omega(\cdot) + \int_{\partial\sigma} \omega(\cdot),$$

et l'expression précédente de $P_X^*(K\omega)$ on déduit finalement :

$$dQ' - dQ = -P_X^*(K\omega) + P_X'^*(K\omega) \implies P^*[K\omega \oplus \theta] = P'^*[K\omega \oplus \theta].$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. □

Démontrons l'unicité de cette construction. Soit (Y', λ') une autre structure répondant aux hypothèses. L'image réciproque de Y par $b : \text{Arc}(X, x_0) \rightarrow X$ est triviale, car $\text{Arc}(X, x_0)$ est contractile et muni d'une connexion (cette propriété remplace la paracompacité dans le cas des variétés). L'image de la section nulle au-dessus de $\text{Arc}(X, x_0)$ définit une

application ψ de $\text{Arc}(X, x_0)$ dans Y . On vérifie alors que la projection $(\gamma, z) \mapsto z\psi(\gamma)$ réalise le quotient de $\text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega$ par la relation d'équivalence définie plus haut et donc que Y et Y' sont équivalents en tant que fibrés principaux. Il est toujours possible, d'autre part, de choisir un isomorphisme entre $b^*(Y')$ et le produit $\text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega$ de telle sorte que l'image réciproque de λ' coïncide avec la forme α . $\square$

Remarque 1.4. — Le relevé à $\text{Arc}(X, x_0)$ de la relation d'équivalence sur les arcs définit un *cocycle* qu'on pourrait appeler le *cocycle d'arcs* associé à ω . C'est la fonction f_ω définie sur les couples d'arcs homologues par :

$$(7) \quad f_\omega(\gamma, \gamma') = \text{cl}_\omega \int_\sigma \omega \quad \text{où} \quad \partial\sigma = \gamma' - \gamma.$$

L'intégrale dépend de la chaîne bordant $(\gamma' - \gamma)$, mais pas sa classe dans T_ω . Le choix de cette terminologie résulte de l'identité suivante, vérifiée pour tout triplet d'arcs homologues :

$$(8) \quad f_\omega(\gamma, \gamma') + f_\omega(\gamma', \gamma'') + f_\omega(\gamma'', \gamma) = 0.$$

La fonction f_ω est un *cobord* s'il existe $\mu : \text{Arc}(X, x_0) \rightarrow T_\omega$ différentiable, telle que $f_\omega(\gamma, \gamma') = \mu(\gamma') - \mu(\gamma)$. Ce qui se produit lorsque $\omega = d\alpha$, auquel cas $\mu(\gamma) = \int_\gamma \alpha$.

Nous utiliserons le lemme précédent pour démontrer le théorème plus général suivant :

THÉORÈME 1.5. — *Pour toute 2-forme fermée ω définie sur une variété différentiable connexe X , il existe un fibré principal $\pi : Y \rightarrow X$ de groupe structural T_ω muni d'une forme de connexion λ de courbure ω . Un tel fibré sera appelé fibré d'intégration de la 2-forme ω . Les fibrés d'intégration de la 2-forme ω sont classés, à équivalence de fibré principal près, par le premier groupe d'extension $\text{Ext}(H_1(X, \mathbb{Z}), P_\omega)$.*

Démonstration. — Comme dans la démonstration précédente nous considérons la relation d'équivalence définie par (5), sur le produit $\text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega$, ainsi que la 1-forme α (définition 6). L'espace quotient $\hat{Y}$ est alors fibré sur le revêtement d'homologie $\hat{X}$ de X , de groupe T_ω . Il est muni d'une connexion $\hat{\lambda}$ de courbure $\hat{\omega}$, image réciproque de ω par la projection naturelle $\hat{X} \rightarrow X$. En vertu de la proposition précédente la structure $(\hat{Y}, \hat{\lambda})$, qui intègre $\hat{\omega}$, est unique à équivalence près.

Considérons une section s de $H_1(X, \mathbb{Z})$ dans l'espace des lacets $\text{Lac}(X, x_0)$. Soit ϕ le 2-cocycle de groupe défini sur $H_1(X, \mathbb{Z})$, à valeurs dans T_ω :

$$(9) \quad \phi(h, h') = f_\omega(s(h + h'), s(h) + s(h')).$$

Ce cocycle étant symétrique, il définit une extension abélienne Γ de $H_1(X, \mathbb{Z})$ par T_ω . Cette extension agit naturellement sur $\text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega$ par :

$$(10) \quad (h, \tau)[\gamma, z] = [s(h) + \gamma, z + \tau],$$

où $\ell + \gamma$ désigne la juxtaposition du lacet ℓ avec l'arc γ , et les crochets : les classes d'équivalences. Mais le groupe T_ω étant divisible, l'extension est triviale (voir par exemple [KM85]) et le groupe Γ est isomorphe au produit direct de $H_1(X, \mathbb{Z})$ par T_ω . Tout isomorphisme permet de définir une action de $H_1(X, \mathbb{Z})$ sur $\hat{Y}$, dont le quotient $Y = \hat{Y}/H_1(X, \mathbb{Z})$ est un fibré principal de groupe structural T_ω sur X . On vérifie alors que la forme de connexion $\hat{\lambda}$, étant invariante par ces actions de $H_1(X, \mathbb{Z})$, passe sur Y en une forme de connexion λ de courbure ω . Le fibré $Y \rightarrow X$, muni de la forme de connexion λ est construit par quotients successifs :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega & \longrightarrow & \hat{Y} & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Arc}(X, x_0) & \longrightarrow & \hat{X} & \longrightarrow & X. \end{array}$$

Deux tels isomorphismes entre Γ et $H^1(X, \mathbb{Z})$ ne diffèrent que d'un élément de $\text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), T_\omega)$ c'est-à-dire d'un élément de $H^1(X, T_\omega)$. Grâce à l'unicité de la structure $(\hat{Y}, \hat{\lambda})$ nous avons trouvé de cette façon, toutes les structures qui intègrent ω .

Soit alors $\pi : Y \rightarrow X$ et $\pi' : Y' \rightarrow X$ deux de ces fibrés obtenus par quotient de $\hat{Y}$ à partir des actions ρ et ρ' de $H_1(X, \mathbb{Z})$. Ces actions diffèrent d'un élément $r \in \text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), T_\omega)$. Il y a donc une surjection naturelle σ de l'espace des classes de fibrés d'intégration de ω sur $\text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), T_\omega)$. On peut facilement vérifier, en prenant les images réciproques de Y et Y' par la projection naturelle de $\hat{X}$ sur X , qu'ils sont équivalents si et seulement si il existe une application $\zeta : \hat{X} \rightarrow T_\omega$ telle que $r(k) = \zeta(k\hat{x}) - \zeta(\hat{x})$, pour tout $k \in H_1(X, \mathbb{Z})$. La fonction ζ définit alors une 1-forme fermée ε

sur X , par $\zeta^*\theta = \pi^*\varepsilon$, qui définit à son tour (par intégration sur le revêtement d'homologie) une fonction F de $\widehat{X}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\zeta^*\theta = dF$, on en déduit $\zeta = \text{cl}_\omega \circ F$. Autrement dit, le noyau de la surjection σ est le sous-groupe des homomorphismes de $H_1(X, \mathbb{Z})$ dans T_ω provenant d'un homomorphisme de $H_1(X, \mathbb{Z})$ dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est divisible, on conclut, en utilisant la suite exacte du foncteur Ext [McL71], que le co-noyau de la flèche naturelle $\text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), T_\omega)$ est exactement le premier groupe d'extension de $H_1(X, \mathbb{Z})$ dans le groupe des périodes P_ω , c'est-à-dire $\text{Ext}(H_1(X, \mathbb{Z}), P_\omega)$. $\square$

Remarque 1.6. — Si le groupe d'homologie $H_1(X, \mathbb{Z})$ est sans torsion et si X est compacte, il y a unicité du fibré d'intégration de la 2-forme ω . En effet, tout homomorphisme de $H_1(X, \mathbb{Z})$ dans T_ω est alors la projection d'un homomorphisme à valeurs réelles.

DÉFINITION 1.7. — On appellera structure d'intégration de la 2-forme fermée ω , tout couple (Y, λ) où Y est un fibré d'intégration de ω et λ une connexion de courbure ω .

Remarque 1.8. — Étant donné un fibré d'intégration $\pi : Y \rightarrow X$, les formes de connexions inéquivalentes sur Y de courbure ω sont classées par $H^1(X, \mathbb{R})$. L'ensemble des structures d'intégrations est donc classé par $H^1(X, T_\omega)$. Ce que nous dit le théorème précédent est que cette classification se scinde grâce à la suite exacte :

$$(11) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), P_\omega) \longrightarrow \text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{R}) \\ \longrightarrow \text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), T_\omega) \longrightarrow \text{Ext}(H_1(X, \mathbb{Z}), P_\omega) \rightarrow 0.$$

Le groupe $\text{Ext}(H_1(X, \mathbb{Z}), P_\omega)$ classe les fibrés d'intégration et le groupe dual $\text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$, c'est-à-dire $H^1(X, \mathbb{R})$, classe les formes de connexions.

Remarque 1.9. — Parce que les cocycles d'arcs de deux 2-formes fermées cohomologues sont cohomologues, leurs fibrés d'intégration sont équivalents. Autrement dit, la classe de cohomologie de la forme ω est, en un certain sens, la première « classe de Chern » de ces fibrés d'intégration.

Remarque 1.10. — On peut être surpris que des fibrés d'intégration existent pour toute forme fermée, même multiples les unes des autres par un réel non entier. Mais c'est un exercice de montrer que pour $\omega = s\omega_0$, où $s \in \mathbb{R}$, le fibré d'intégration de ω_0 est équivalent comme fibré à celui

de ω , mais attention : les groupe T_ω et T_{ω_0} ne sont pas *identiques*, seulement *isomorphes*. La différence avec la situation classique des 2-formes entières est qu'il n'y a pas d'identification possible, *a priori*, des tores des périodes pour les 2-formes fermées quelconques. Une telle identification, dans le cas entier, consiste à fixer à l'avance la longueur de la période.

2. Extensions centrales des difféomorphismes hamiltoniens.

Soit (Y, λ) une structure d'intégration de la 2-forme fermée ω définie sur X . On note $\text{Diff}(Y, \lambda)$ le groupe des automorphismes du couple (Y, λ) :

$$(12) \quad \text{Diff}(Y, \lambda) = \{ \psi \in \text{Diff}(Y) \mid \psi^* \lambda = \lambda \text{ et } \forall z \in T_\omega, \psi \cdot z = z \cdot \psi \}.$$

Le groupe $\text{Diff}(Y, \lambda)$ s'envoie par homomorphisme dans le groupe $\text{Diff}(X, \omega)$ des difféomorphismes de X qui préservent la 2-forme ω . On notera $\text{Ham}(Y, \lambda)$ son image, et ses éléments seront appelés *difféomorphismes hamiltoniens* de la structure (Y, λ) . Le groupe $\text{Diff}(Y, \lambda)$ contient évidemment le groupe T_ω comme sous-groupe central ; plus précisément :

PROPOSITION 2.1. — *Le noyau de l'homomorphisme naturel de $\text{Diff}(Y, \lambda)$ dans $\text{Diff}(X, \omega)$ est réduit au tore des périodes T_ω .*

Démonstration. — Soit ψ un automorphisme de (Y, λ) se projetant sur l'identité de X , il existe une application différentiable $\zeta : Y \rightarrow T_\omega$ telle que $\psi(y) = \zeta(y) \cdot y$. Par équivariance de ψ on déduit que ζ ne dépend que de $x = \pi(y)$ et la condition $\psi^* \lambda = \lambda$ implique $\zeta_X^* \theta = 0$, c'est-à-dire $\zeta_X = C^{\text{te}}$, où $\zeta = \zeta_X \circ \pi$. $\square$

Ainsi, chaque structure d'intégration (Y, λ) donne lieu à une extension centrale, par le tore des périodes T_ω , de son sous-groupe des difféomorphismes hamiltoniens.

$$(13) \quad 0 \rightarrow T_\omega \longrightarrow \text{Diff}(Y, \lambda) \longrightarrow \text{Ham}(Y, \lambda) \rightarrow 1.$$

DÉFINITION 2.2. — *Lorsque la structure d'intégration est unique, ce qui est le cas si $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$, cette extension centrale sera appelée extension centrale régulière du groupe des automorphismes de la 2-forme ω .*

3. Le cocycle triangulaire.

A partir de ce paragraphe, nous supposons pour simplifier que $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$; nous avons vu que dans ce cas la structure d'intégration (Y, λ) est unique. De plus, nous nous restreindrons aux composantes connexes des groupes $\text{Diff}(Y, \lambda)$, $\text{Diff}(X, \omega)$ et $\text{Ham}(X, \omega)$.

Remarque 3.1. — Notons déjà que dans ce cas :

$$\text{Ham}^\circ(X, \omega) = \text{Diff}^\circ(X, \omega).$$

En effet, soient $\phi \in \text{Diff}^\circ(X, \omega)$ et Φ une isotopie de ϕ ; désignons par c_Φ la trajectoire sous l'action de Φ du point x_0 :

$$(14) \quad c_\Phi : t \longmapsto \Phi_t(x_0).$$

Alors ϕ se relève en un difféomorphisme $\hat{\phi}$ de Y :

$$(15) \quad \hat{\phi}[\gamma, z] = [c_\Phi + \phi \circ \gamma, z].$$

Il est facile de vérifier que c'est un automorphisme de (Y, λ) .

Nous allons maintenant décrire la construction géométrique d'un cocycle K_ω de l'extension centrale régulière de $\text{Diff}^\circ(X, \omega)$. Pour cela, nous commencerons par construire une certaine extension centrale du groupe des isotopies de $\text{Diff}(X, \omega)$ qui donnera, par quotient, l'extension recherchée. Soit :

$$(16) \quad \text{Is}(X, \omega) = \text{Arc}(\text{Diff}(X, \omega), \text{id}_X);$$

nous noterons $*$ sa loi de groupe. Elle est définie, pour tout couple d'isotopies (Φ, Ψ) de $\text{Diff}(X, \omega)$, par :

$$(17) \quad \Phi * \Psi = [t \mapsto \Phi_t \circ \Psi_t],$$

À Φ et Ψ associons le 2-simplexe $\sigma(\Phi, \Psi)$ de X défini par :

$$(18) \quad \sigma(\Phi, \Psi) : (t, s) \longmapsto \Phi_t \circ \Psi_s(x_0) \quad \text{avec} \quad 0 \leq s \leq t \leq 1,$$

dont le bord est donné par :

$$(19) \quad \partial\sigma(\Phi, \Psi) = c_\Phi + \phi \circ c_\Psi - c_{\Phi*\Psi},$$

où $\phi = \Phi_1$ (idem pour $\psi = \Psi_1$).

PROPOSITION 3.2. — L'application $\tilde{K}_\omega$ de $\text{Is}(X, \omega) \times \text{Is}(X, \omega)$ dans T_ω , définie par

$$(20) \quad \tilde{K}_\omega(\Phi, \Psi) = \text{cl}_\omega \int_{\sigma(\Phi, \Psi)} \omega$$

est un 2-cocycle de groupe. L'extension centrale de $\text{Is}(X, \omega)$ par T_ω qui lui est associée par l'opération :

$$(21) \quad (\Phi, \tau) * (\Psi, \mu) = (\Phi * \Psi, \tau + \mu - \tilde{K}_\omega(\Phi, \Psi))$$

sera notée $\text{Is}(X, \omega) \times_{\tilde{K}_\omega} T_\omega$.

Démonstration. — Soient Φ , Ψ et Ξ trois isotopies de $\text{Diff}(X, \omega)$; il faut vérifier que :

$$\tilde{K}_\omega(\Phi * \Psi, \Xi) + \tilde{K}_\omega(\Phi, \Psi) = \tilde{K}_\omega(\Phi, \Psi * \Xi) + \tilde{K}_\omega(\Psi, \Xi).$$

En posant

$$\sigma(\Phi, \Psi, \Xi) = \sigma(\Phi * \Psi, \Xi) + \sigma(\Phi, \Psi) - \sigma(\Phi, \Psi * \Xi) - \sigma(\Psi, \Xi),$$

cela équivaut à montrer que l'on a :

$$\text{cl}_\omega \int_{\sigma(\Phi, \Psi, \Xi)} \omega = 0.$$

Or, on peut vérifier facilement que $\sigma(\Phi, \Psi, \Xi)$ et $\phi \circ \sigma(\Psi, \Xi) - \sigma(\Psi, \Xi)$ sont homologues; il suffit donc de remarquer que :

$$\int_{\phi \circ \sigma(\Psi, \Xi)} \omega = \int_{\sigma(\Psi, \Xi)} \omega,$$

ce qui est immédiat puisque $\phi^*\omega = \omega$. □

Le groupe $\text{Is}(X, \omega)$ agit sur $\text{Arc}(X)$ de façon naturelle; pour toute isotopie Φ et tout arc γ on notera :

$$(22) \quad \Phi * \gamma : t \longmapsto \Phi_t(\gamma(t)).$$

Évidemment, si $\gamma \in \text{Arc}(X, x_0)$, alors $\Phi * \gamma \in \text{Arc}(X, x_0)$. Soit $\sigma(\Phi, \gamma)$ le 2-simplexe de X défini par :

$$(23) \quad \sigma(\Phi, \gamma) : (t, s) \longmapsto \Phi_t(\gamma(s)) \quad \text{avec} \quad 0 \leq s \leq t \leq 1,$$

dont le bord est donné par :

$$(24) \quad \partial\sigma(\Phi, \gamma) = c_\Phi + \phi \circ \gamma - \Phi * \gamma.$$

L'action de $\text{Is}(X, \omega)$ sur $\text{Arc}(X, x_0)$ s'étend en une action de $\text{Is}(X, \omega) \times_{\tilde{K}_\omega} T_\omega$ sur le produit $\text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega$:

PROPOSITION 3.3. — *L'application qui à tout couple*

$$(\Phi, \tau) \in \text{Is}(X, \omega) \times_{\tilde{K}_\omega} T_\omega$$

et à tout couple $(\gamma, z) \in \text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega$ *associe :*

$$(25) \quad (\Phi, \tau)(\gamma, z) = \left(\Phi * \gamma, z + \tau - \text{cl}_\omega \int_{\sigma(\Phi, \gamma)} \omega \right),$$

est une action de groupe qui préserve la forme $\alpha = K\omega \oplus \theta$.

Démonstration. — Soient (Φ, τ) et (Ψ, μ) deux éléments du produit $\text{Is}(X, \omega) \times_{\tilde{K}_\omega} T_\omega$; soit (γ, z) un élément de $\text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega$. On a :

$$\begin{aligned} (\Phi, \tau)[(\Psi, \mu)(\gamma, z)] &= (\Phi, \tau)(\Psi * \gamma, z + \mu - \langle \Psi, \gamma \rangle) \\ &= ((\Phi * \Psi) * \gamma, z + \tau + \mu - \langle \Phi, \Psi * \gamma \rangle - \langle \Psi, \gamma \rangle), \end{aligned}$$

où on a noté pour simplifier $\langle \Psi, \gamma \rangle$ à la place de $\text{cl}_\omega \int_{\sigma(\Psi, \gamma)} \omega$; d'autre part :

$$\begin{aligned} [(\Phi, \tau) * (\Psi, \mu)](\gamma, z) &= (\Phi * \Psi, \tau + \mu - \tilde{K}_\omega(\Phi, \Psi))(\gamma, z) \\ &= ((\Phi * \Psi) * \gamma, z + \tau + \mu - \tilde{K}_\omega(\Phi, \Psi) - \langle \Phi * \Psi, \gamma \rangle). \end{aligned}$$

Il faut donc montrer que :

$$(26) \quad \tilde{K}_\omega(\Phi, \Psi) = \text{cl}_\omega \int_{\sigma(\Phi, \Psi * \gamma)} \omega - \text{cl}_\omega \int_{\sigma(\Phi * \Psi, \gamma)} \omega + \text{cl}_\omega \int_{\sigma(\Psi, \gamma)} \omega.$$

Ce qui revient à vérifier que le deuxième membre de cette égalité est indépendant de γ , puisque $\sigma(\Phi, \Psi) = \sigma(\Phi, \Psi * \widehat{x_0})$, où $\widehat{x_0}$ est l'arc constant $[t \mapsto x_0]$. Or, un calcul simple montre que les simplexes $\sigma(\Phi, \Psi * \gamma) + \sigma(\Psi, \gamma) - \sigma(\Phi * \Psi, \gamma)$ et $\sigma(\Phi, \Psi)$ sont homologues, donc l'égalité a lieu.

Montrons maintenant que la forme α est préservée, c'est-à-dire pour tout $(\Phi, \tau) \in \text{Is}(X, \omega) \times_{\tilde{K}_\omega} T_\omega$: $(\Phi, \tau)^* \alpha = \alpha$. Soit $(\gamma, z) \in \text{Arc}(X, x_0)$; nous noterons $(\gamma^*, z^*) = (\Phi, \tau)(\gamma, z)$; soient $(\delta\gamma, \delta z)$ un vecteur tangent⁽²⁾ au point (γ, z) et $(\delta\gamma^*, \delta z^*)$ son image par (Φ, τ) . Il faut montrer que $\alpha_{(\gamma, z)}(\delta\gamma, \delta z) = \alpha_{(\gamma^*, z^*)}(\delta\gamma^*, \delta z^*)$. Or nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha_{(\gamma^*, z^*)}(\delta\gamma^*, \delta z^*) &= K\omega(\delta\gamma^*) + \theta(\delta z^*) \\ &= \int_0^1 \omega_{\gamma^*(t)}(\dot{\gamma}^*(t), \delta\gamma^*(t)) dt + \theta(\delta z) - \delta \int_{\sigma(\Phi, \gamma)} \omega. \end{aligned}$$

⁽²⁾ Une justification précise de cette terminologie et du calcul qui suit est possible mais prendrait trop de place dans cet exposé sans éclairer davantage les idées.

En introduisant la famille de champs de vecteurs ξ_t définie sur X par

$$\xi_t(x) = [D(\Phi_t)(x)]^{-1} \left(\frac{\partial \Phi_t(x)}{\partial t} \right),$$

on peut écrire :

$$K\omega(\delta\gamma^*) = K\omega(\delta\gamma) + \int_0^1 \omega(\xi_t(\gamma(t)), \delta\gamma(t)) dt.$$

D'autre part, en utilisant la formule de Stokes, telle qu'elle est exprimée par (84) dans l'annexe C, on peut vérifier que :

$$\delta \int_{\sigma(\Phi, \gamma)} \omega = \int_0^1 \omega(\xi_t(\gamma(t)), \delta\gamma(t)) dt,$$

d'où on déduit le résultat. $\square$

PROPOSITION 3.4. — *L'action de $\text{Is}(X, \omega) \times_{\tilde{K}_\omega} T_\omega$ sur $\text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega$ se projette en une action sur Y dont le noyau est le sous-groupe :*

$$(27) \quad \Gamma = \left\{ (\Phi, \tau) \in \text{Is}(X, \omega) \times_{\tilde{K}_\omega} T_\omega \mid \phi = \text{id}_X \text{ et } \tau = \text{cl}_\omega \int_{\sigma_\Phi} \omega \right\},$$

où $\phi = \Phi_1$ et σ_Φ est une 2-chaîne quelconque bordant c_Φ i.e. $\partial\sigma_\Phi = c_\Phi$.

Démonstration. — Il faut montrer que si $(\gamma, z) \sim (\gamma', z')$ au sens de la relation (5), alors $(\Phi, \tau)(\gamma', z') \sim (\Phi, \tau)(\gamma, z)$. Puisque $\gamma(1) = \gamma'(1)$, il existe une 2-chaîne $\sigma_{\gamma, \gamma'}$ bordant $(\gamma' - \gamma)$ telle que $z' = z + \text{cl}_\omega \int_{\sigma_{\gamma, \gamma'}} \omega$. Il faut donc vérifier que :

$$\left(\Phi * \gamma', z + \text{cl}_\omega \int_{\sigma_{\gamma, \gamma'}} \omega + \tau - \text{cl}_\omega \int_{\sigma(\Phi, \gamma')} \omega \right) \sim \left(\Phi * \gamma, z + \tau - \text{cl}_\omega \int_{\sigma(\Phi, \gamma)} \omega \right).$$

Autrement dit, il faut montrer que pour toute chaîne $\sigma_{\Phi * \gamma, \Phi * \gamma'}$ bordant $(\Phi * \gamma' - \Phi * \gamma)$ on a :

$$\text{cl}_\omega \int_{\sigma_{\Phi * \gamma, \Phi * \gamma'}} \omega = \text{cl}_\omega \int_{\sigma_{\gamma, \gamma'}} \omega - \text{cl}_\omega \int_{\sigma(\Phi, \gamma')} \omega + \text{cl}_\omega \int_{\sigma(\Phi, \gamma)} \omega.$$

Puisque $\phi^*\omega = \omega$ ($\phi = \Phi_1$), il existe une chaîne $\sigma_{\phi \circ \gamma, \phi \circ \gamma'}$ bordant $(\phi \circ \gamma' - \phi \circ \gamma)$ telle que :

$$\text{cl}_\omega \int_{\sigma_{\phi \circ \gamma, \phi \circ \gamma'}} \omega = \text{cl}_\omega \int_{\sigma_{\gamma, \gamma'}} \omega.$$

Un calcul élémentaire permet alors de vérifier que les chaînes $\sigma_{\Phi * \gamma, \Phi * \gamma'}$ et $\sigma(\Phi, \gamma') - \sigma(\Phi, \gamma') + \sigma(\Phi, \gamma)$ sont homologues, ce qui établit le résultat. L'action de $\text{Is}(X, \omega) \times_{\tilde{K}_\omega} T_\omega$ sur $\text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega$ passe donc au quotient $Y = [\text{Arc}(X, x_0) \times T_\omega] / \sim$. Le calcul du noyau est une formalité. $\square$

COROLLAIRE 3.5. — L'extension centrale de $\text{Is}(X, \omega)$ par T_ω définie par le cocycle $\tilde{K}_\omega$ se factorise sur l'extension centrale régulière de $\text{Diff}(X, \omega)$:

$$(28) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & T_\omega & \longrightarrow & \text{Is}(X, \omega) \times_{\tilde{K}_\omega} T_\omega & \longrightarrow & \text{Is}(X, \omega) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \Gamma & & \downarrow b \\ 0 & \rightarrow & T_\omega & \longrightarrow & \text{Aut}(Y, \lambda) & \longrightarrow & \text{Diff}^\circ(X, \omega) \rightarrow 1. \end{array}$$

Le groupe $\text{Aut}(Y, \lambda)$ est isomorphe au quotient de $\text{Is}(X, \omega) \times_{\tilde{K}_\omega} T_\omega$ par son sous-groupe Γ (définition 27).

Démonstration. — Il suffit de vérifier que la projection de l'extension $\text{Is}(X, \omega) \times_{\tilde{K}_\omega} T_\omega$ sur $\text{Aut}(Y, \lambda)$ est surjective, ce qui est immédiat. $\square$

La construction du cocycle $\tilde{K}_\omega$ nous donne ainsi la possibilité de définir un nouveau cocycle K_ω caractéristique de l'extension centrale régulière de $\text{Diff}^\circ(X, \omega)$. Il suffit de choisir une section du morphisme $b : \text{Is}(X, \omega) \rightarrow \text{Diff}^\circ(X, \omega)$, c'est-à-dire d'associer à tout difféomorphisme $\phi \in \text{Diff}^\circ(X, \omega)$ une isotopie Φ telle que $\Phi_1 = \phi$. Tout autre choix d'isotopie conduit à un cocycle K'_ω cohomologue à K_ω . On peut le vérifier directement en considérant l'application qui à $\phi \in \text{Diff}^\circ(X, \omega)$ associe la classe de l'aire d'un cycle bordant le cycle $(c'_\phi - c_\phi)$. Ces cocycles que nous appellerons *cocycles triangulaires* sont illustrés par la figure 1.

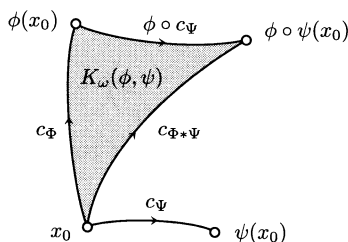


Figure 1. Le cocycle K_ω .

Remarque 3.6. — Il n'y a aucune raison *a priori* pour qu'un des cocycles K_ω soit différentiable car cela signifierait que la fibration principale $\text{Aut}^\circ(\xi) \rightarrow \text{Diff}^\circ(X, \omega)$ est différentiablement triviale.

Remarque 3.7. — Si le groupe $\text{Diff}^\circ(X, \omega)$ a un point fixe, que l'on peut toujours choisir comme point base, l'extension centrale régulière est triviale. En effet, le cocycle K_ω est le cobord de l'application $\phi \mapsto \text{cl}_\omega \int_\sigma \omega$, où σ est une chaîne bordant c_ϕ .

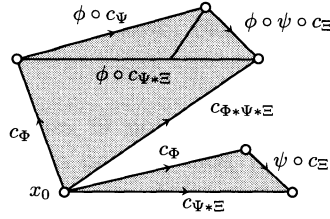


Figure 2. La condition de cocycle pour K_ω .

Nous verrons plus loin des exemples d'extensions régulières non triviales.

4. Cocycle triangulaire et moment.

Le cocycle triangulaire de l'extension régulière de $\text{Diff}^\circ(X, \omega)$ est étroitement lié au moment de l'action de ce groupe sur X et de son défaut d'équivariance. Soit $\text{Vect}(X, \omega)$ l'espace des champs de vecteurs sur X qui préservent ω :

$$(29) \quad \text{Vect}(X, \omega) = \{\xi \in \text{Vect}(X) \mid \mathcal{L}_\xi \omega = 0\}.$$

D'après la formule de Cartan, la 1-forme $i_\xi \circ \omega$ est fermée, puisque par hypothèse $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$, cette forme est exacte. Il existe donc une fonction différentiable réelle J_ξ telle que :

$$(30) \quad i_\xi \circ \omega = -dJ_\xi.$$

La fonction J_ξ n'est définie qu'à une constante près ; nous la fixerons en exigeant que $J_\xi(x_0) = 0$. Il existe alors une application J de X dans le dual $\text{Vect}^*(X, \omega)$, appelée *application moment*, telle que $J_\xi(x) = J(x)(\xi)$, définie par :

$$(31) \quad J : X \longrightarrow \text{Vect}^*(X, \omega) \quad \text{et} \quad J(x) = \left[\xi \mapsto - \int_{x_0}^x i_\xi \circ \omega \right],$$

où l'intégrale est calculée sur un arc quelconque de x_0 à x . Le groupe $\text{Diff}^\circ(X, \omega)$ agit naturellement sur X , et par son action coadjointe, sur $\text{Vect}^*(X, \omega)$. Soit $\phi \in \text{Diff}^\circ(X, \omega)$; nous noterons respectivement :

$$(32) \quad \text{ad}(\phi) : \xi \longmapsto \phi_* \xi \quad \text{et} \quad \text{ad}^*(\phi) : \mu \longmapsto \mu \circ \text{ad}(\phi^{-1}),$$

son action adjointe sur $\text{Vect}(X, \omega)$ et son action coadjointe sur $\text{Vect}^*(X, \omega)$. La variance de J , sous l'action de ϕ , est alors donnée par :

$$(33) \quad J \circ \phi = \text{ad}^*(\phi) \circ J + \Theta(\phi) \quad \text{avec} \quad \Theta(\phi) : \xi \mapsto - \int_{x_0}^{\phi(x_0)} i_\xi \circ \omega.$$

DÉFINITION 4.1. — *L'application Θ est un 1-cocycle du groupe $\text{Diff}^\circ(X, \omega)$ dans $\text{Vect}^*(X, \omega)$ pour l'action coadjointe; il sera appelé le défaut d'équivariance⁽³⁾ du moment J :*

$$(34) \quad \begin{cases} \Theta : \text{Diff}^\circ(X, \omega) \longrightarrow \text{Vect}^*(X, \omega), \\ \Theta(\phi \circ \psi) = \text{ad}^*(\phi)(\Theta(\psi)) + \Theta(\phi). \end{cases}$$

Le défaut d'équivariance Θ et le cocycle triangulaire K_ω sont reliés par la construction suivante. Soit $\xi \in \text{Vect}(X, \omega)$ un champ de vecteurs complet; nous noterons $t \mapsto \exp(t\xi) \in \text{Diff}(X, \omega)$ le groupe à un paramètre de $\text{Diff}(X, \omega)$ associé. Soit $E(t\xi)$ l'isotopie de $\exp(t\xi)$ définie par :

$$(35) \quad E(t\xi) : s \longmapsto \exp(st\xi).$$

PROPOSITION 4.2. — *Soient $\phi \in \text{Diff}^\circ(X, \omega)$ et $\xi \in \text{Vect}(X, \omega)$ un champ de vecteurs complet; alors :*

$$(36) \quad \Theta(\phi)(\xi) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \tilde{K}_\omega(\Phi, E(t\phi_*^{-1}\xi)) - \tilde{K}_\omega(E(t\xi), \Phi) \right\}_{t=0},$$

où Φ est une isotopie quelconque de ϕ .

Démonstration. — Soit Φ une isotopie de ϕ ; considérons la famille de 2-chaînes rectangulaires suivante :

$$(37) \quad \sigma_t : (s, s') \longmapsto \exp(st\xi)(\Phi_{s'}(x_0)).$$

Un calcul élémentaire permet de vérifier que :

$$(38) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{\sigma_t} \omega \right\}_{t=0} = -\Theta(\phi)(\xi).$$

Le bord de σ_t est donné par :

$$\partial\sigma_t = c_\Phi + \phi \circ c_{E(t\phi_*^{-1}\xi)} - \exp(t\xi) \circ c_\Phi - c_{E(t\xi)}.$$

(3) C'est à J.-M. Souriau que l'on doit les notions de moment et de défaut d'équivariance que nous venons d'introduire. La présentation que nous en donnons est légèrement différente pour satisfaire les besoins de cet article.

En divisant ce rectangle en deux triangles le long de la diagonale $s = s'$, ce qui conduit à ajouter et retrancher $c_{\Phi * E(t\phi_*^{-1}\xi)}$ du bord (voir figure 3), on obtient :

$$(38) \quad \text{cl}_\omega \int_{\sigma_t} \omega = \tilde{K}_\omega(E(t\xi), \Phi) - \tilde{K}_\omega(\Phi, E(t\phi_*^{-1}\xi)),$$

d'où le résultat. □

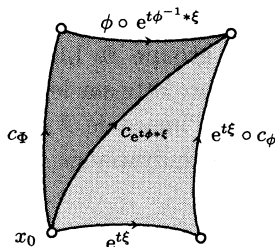


Figure 3. Le défaut d'équivariance Θ .

Remarque 4.3. — Le groupe $\text{Is}(X, \omega)$ agit par l'intermédiaire de $\text{Diff}^\circ(X, \omega)$. La formule ci-dessus est en réalité l'expression du défaut d'équivariance du moment de $\text{Is}(X, \omega)$ qui ne dépend de l'isotopie Φ que par son extrémité et se projette donc sur le défaut Θ . Soient $\phi \in \text{Diff}^\circ(X, \omega)$ et $\xi \in \text{Vect}(X, \omega)$ un champ complet ; il est possible de choisir une section de la projection $b : \text{Is}(X, \omega) \rightarrow \text{Diff}^\circ(X, \omega)$ de telle sorte que l'application $t \mapsto K_\omega(\phi, \exp(t\xi))$ soit différentiable. Il suffit de choisir une isotopie quelconque Φ de ϕ et d'étendre à $\text{Diff}^\circ(X, \omega)$ tout entier la section définie sur $\{\phi\} \times \{\exp(t\xi)\}_{t \in \mathbb{R}}$ par $(\phi, \exp(t\xi)) \mapsto (\Phi, E(t\xi))$. Dans ce cas le défaut d'équivariance Θ est donné par la formule :

$$(40) \quad \Theta(\phi)(\xi) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ K_\omega(\phi, \exp(t\phi_*^{-1}\xi)) - K_\omega(\exp(t\xi), \Phi) \right\}_{t=0},$$

c'est comme ça qu'il faut interpréter la formule (36).

Soit k_ω le 2-cocycle dérivé de Θ (annexe D) ; c'est un cocycle de l'algèbre de Lie $\text{Vect}_\omega(X)$ à valeurs réelles. Par un calcul analogue à celui de Θ , on peut montrer que :

$$\begin{aligned} k_\omega(\xi, \xi') &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \left\{ \tilde{K}_\omega(E(t\xi), E(s\xi')) - \tilde{K}_\omega(E(t\xi'), E(s\xi)) \right\}_{s=t=0} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \left\{ K_\omega(\exp(t\xi), \exp(s\xi')) - K_\omega(\exp(t\xi'), \exp(s\xi)) \right\}_{s=t=0}, \end{aligned}$$

où ξ et ξ' sont deux champs de vecteurs complets dans $\text{Vect}(X, \omega)$ et K_ω est choisi de telle sorte que $(t, s) \mapsto K_\omega(\exp(t\xi'), \exp(s\xi))$ soit différentiable. Le 2-cocycle k_ω définit une extension centrale de $\text{Vect}(X, \omega)$ par $\mathbb{R}$, isomorphe à l'algèbre de Lie de l'extension régulière; nous l'appellerons *extension centrale régulière infinitésimale*. Un calcul direct montre que :

$$(41) \quad k_\omega(\xi, \xi') = \omega(\xi(x_0), \xi'(x_0)).$$

Remarque 4.4. — Si un groupe de Lie G agit par automorphismes sur la forme ω , $\text{Vect}^*(X, \omega)$ se projette sur le dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G ; le moment de G est alors l'image de J par cette projection, de même en ce qui concerne son défaut d'équivariance.

Remarque 4.5. — Le moment J est constant sur le « feuilletage caractéristique » de la forme ω . C'est un invariant intégral de ω (théorème de Noëther).

Remarque 4.6. — Le groupe $\text{Diff}(Y, \lambda)$ agit aussi sur X simplement par projection sur $\text{Diff}^\circ(X, \omega)$. Le moment $\tilde{J}$ de cette action : $\tilde{J}(\xi, \epsilon) = J(\xi)$, où $(\xi, \epsilon) \in \text{Vect}(X, \omega) \times_k \mathbb{R}$, est alors équivariant sous l'action de $\text{Diff}^\circ(Y, \lambda)$.

Remarque 4.7. — La classe de cohomologie de Θ ne dépend que de ω : si le moment est translaté d'une constante, Θ est translaté d'un cobord. C'est pour cette raison que seule la classe de cohomologie Θ n'a de sens intrinsèque (il en va de même pour K_ω). Cette classe de cohomologie qui traduit la non équivariance du moment sous l'action de $\text{Diff}^\circ(\omega, X)$ peut s'annuler dans de nombreux cas. Par exemple si $\text{Diff}^\circ(\omega, X)$ a un point fixe, ou encore si ω est symplectique et X compacte, dans ce cas on considère la moyenne du moment J pour le volume défini par la forme ω .

Remarque 4.8. — Si $H_1(X, \mathbb{Z}) \neq 0$, les algèbres de Lie de $\text{Ham}_\lambda(X, \omega)$ sont identiques et égales à $\text{Vect}(X, \omega)$. Il est vraisemblable que les différents cocycles d'algèbres de Lie k_ω , associés à chaque choix de structure d'intégration (indexées par $H^1(X, T_\omega)$), conduisent à des extensions centrales inéquivalentes de $\text{Vect}(X, \omega)$ par $\mathbb{R}$. Par exemple, pour une 2-forme sur $\mathbb{T}^2$, on obtiendrait une famille d'extensions inéquivalentes indexée par $\text{Hom}(\mathbb{Z}^2, S^1) \simeq S^1 \times S^1$, le fibré d'intégration étant unique puisque T^2 est compacte et $H^1(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$ est sans torsion (voir remarque 1.6).

5. Exemples.

Commençons par quelques préliminaires dans le cas d'une forme exacte $\omega = d\alpha$. Le fibré Y est le produit direct $X \times \mathbb{R}$ et $\lambda = \alpha + dt$. Tout difféomorphisme ϕ qui préserve ω vérifie $d[\phi^*\alpha - \alpha] = 0$. S'il existe une application $F : \text{Diff}(X, \omega) \rightarrow C^\infty(X, \mathbb{R})$ telle que

$$(42) \quad \phi^*\alpha = \alpha + dF(\phi),$$

alors elle vérifie :

$$(43) \quad d[F(\phi \circ \psi) - F(\phi) \circ \psi - F(\psi)] = 0,$$

et le cocycle de l'extension centrale régulière est donné par :

$$(44) \quad K_\omega(\phi, \psi) = F(\phi \circ \psi) - F(\phi) \circ \psi - F(\psi).$$

On peut toujours normaliser F en exigeant $F(\phi)(x_0) = 0$ pour tout ϕ , auquel cas :

$$(45) \quad K_\omega(\phi, \psi) = F(\phi)(\psi(x_0)).$$

Formule que l'on obtient, à un cobord près, en appliquant la définition du cocycle triangulaire. En définissant $j : X \rightarrow \text{Vect}^*(X, \omega)$, par

$$(46) \quad j(x) : \eta \mapsto \frac{\partial}{\partial t} \left\{ F(e^t \eta)(x) \right\}_{t=0},$$

on obtient l'expression suivante du moment :

$$(47) \quad J = i_\eta \circ \alpha - j \cdot \eta.$$

Nous appliquerons ce petit formulaire dans les deux exemples suivants.

Exemple 5.1. — On considère $X = \mathbb{R}^2$, muni de sa structure symplectique ordinaire $\omega = d\alpha$. Son extension centrale régulière n'est pas triviale. En effet, supposons que K_ω soit un cobord; on peut trouver F tel que $F(\phi \circ \psi') = F(\phi) \circ \psi' + F(\psi')$. Ceci doit être vrai, en particulier, pour les translations $T_u : x \mapsto x + u$. En utilisant l'identité $\alpha_x(u) = \omega(x, u)$, pour tout x et u dans $\mathbb{R}^2$, on déduit $d[F(T_u) - i_u \circ \omega] = 0$, c'est-à-dire $F(T_u)(x) = \omega(u, x) + c(u)$, où $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Et par conséquent :

$\omega(u, u') = c(u + u') - c(u) - c(u')$, ce qui est absurde puisque ω est anti-symétrique. De façon générale, si on trouve un sous-groupe de $\text{Diff}^\circ(X, \omega)$ pour lequel la restriction de l'extension régulière n'est pas triviale, l'extension elle-même n'est pas triviale.

On définit, pour $X = \mathbb{R}^2$, un autre représentant de la classe de l'extension régulière. Soit $\mu : \text{Diff}^\circ(\mathbb{R}^2, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par :

$$(48) \quad \mu : \phi \longmapsto \int_{c_\phi}^{t_x} K\omega,$$

où $x = \phi(0)$ et t_x est le segment qui joint 0 à x , soit $\Delta\mu$ son cobord. Le cocycle H , défini par

$$(49) \quad H = K_\omega - \Delta\mu = f_\omega(t_x + \phi \circ t_y, t_z)$$

et illustré par la figure 4, représente encore la classe de l'extension régulière, c'est l'aire du simplexe bordé par le segment t_x , $\phi \circ t_y$ et le segment t_z :

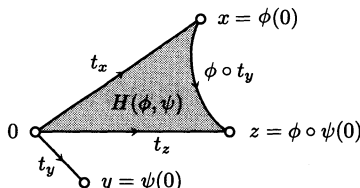


Figure 4. Le cocycle H .

PROPOSITION 5.2. — *Le cocycle H prolonge à $\text{Diff}^\circ(X, \omega)$ le cocycle de Heisenberg défini sur le sous-groupe des translation de $\mathbb{R}^2$.*

Remarquons encore que la différence de H avec le triangle linéaire de sommets $(0, x, z)$ mesure en quelque sorte, le défaut de linéarité du symplectomorphisme ϕ .

Exemple 5.3. — Considérons l'espace $\text{Imm}(S^1, \mathbb{R}^2)$ des immersions du cercle S^1 dans $\mathbb{R}^2$. Il est pointé par le plongement ordinaire $\iota : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Nous le munissons de la 1-forme suivante :

$$(50) \quad \alpha = \int \frac{1}{\|\gamma'\|^2} \langle \gamma'', d\gamma' \rangle,$$

où γ' désigne la dérivée par rapport au paramètre de l'immersion, et

l'intégration se fait sur le cercle S^1 . Soit $\omega = d\alpha$. On vérifie que $d[\phi^*\alpha - \alpha] = dF(\phi)$ pour tout difféomorphisme $\phi \in \text{Diff}^\circ(S^1)$, avec :

$$(51) \quad F(\phi) : \gamma \mapsto \int \log \|(\gamma \circ \phi)'\| \, d \log \phi'.$$

La 2-forme ω est donc invariante par $\text{Diff}^\circ(S^1)$; en voici une expression :

$$(52) \quad \omega = \int \frac{1}{\|\gamma'\|^2} \langle d\gamma'' - d[\log \|\gamma'\|^2] \gamma'' \wedge d\gamma' \rangle,$$

où la notation $\langle \cdot \wedge \cdot \rangle$ désigne l'opération $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle$. En remarquant que $F(\phi)(\iota) = 0$, l'expression du cocycle K_ω se déduit immédiatement de la formule (45) :

$$(53) \quad K_\omega(\phi, \psi) = \int \log(\phi \circ \psi)' \, d \log \psi'.$$

On reconnaît la formule de Bott-Thurston [Bot78] du cocycle de groupe qui décrit la seule extension centrale non triviale du groupe $\text{Diff}^\circ(S^1)$ par $\mathbb{R}$. En utilisant l'application j , définie par la formule (46), qui a pour valeur dans cet exemple

$$(54) \quad j(\gamma) : \eta \mapsto \int (\log \|\gamma'\|)'' \eta,$$

on obtient immédiatement l'expression du moment :

$$(55) \quad J(\gamma) : \eta \mapsto \int \left[\frac{\|\gamma''\|^2}{\|\gamma'\|^2} - (\log \|\gamma'\|^2)'' \right] \eta.$$

Pour calculer Θ , il suffit d'appliquer la formule (33) à l'immersion ι pour lesquels la vitesse et l'accélération sont de modules constants égaux à 1. En remarquant que $\int \phi_* \eta = \int \eta(\phi')^2$, il vient immédiatement :

$$(56) \quad \Theta(\phi) : \eta \mapsto \int \frac{3\phi''^2 - 2\phi''' \phi'}{\phi'^2} \eta.$$

On reconnaît l'expression de la dérivée schwarzienne dont la classe de cohomologie représente le défaut d'équivariance du moment J de cette 2-forme ω . Il est facile ensuite de calculer le cocycle infinitésimal, que l'on reconnaît évidemment comme le cocycle de Gelfand-Fuchs [GF68] :

$$(57) \quad k_\omega(\xi, \eta) = \int \xi'' \eta' - \eta'' \xi'.$$

Ainsi ces trois objets :

- *cocycle de Bott-Thurston,*
- *dérivée schwarziennne,*
- *cocycle de Gelfand-Fuchs,*

se trouvent reliés à travers cet exemple, dans cette trilogie des 2-formes fermées :

- *extension centrale régulière,*
- *défaut d'équivariance du moment,*
- *extension centrale infinitésimale.*

Remarque 5.4. — La construction précédente doit pouvoir s'étendre sans difficulté à l'espace des lacets d'une variété riemannienne quelconque, en remplaçant l'accélération par l'accélération géodésique et les dérivées par les dérivées covariantes.

Exemple 5.5. — Considérons l'espace $L(S^3)$ des lacets non pointés de S^3 et soit s l'application qui à tout lacet γ associe son point base $s(\gamma) = \gamma(1)$. Soit K l'opérateur chaîne-homotopie et vol la forme volume sur S^3 normalisée, c'est-à-dire $\int_{S^3} \text{vol} = 1$. La 2-forme $\omega = K \text{vol}|_{L(S^3)}$ est fermée puisque $K \text{vol} = b^* \text{vol} - s^* \text{vol}$ sur $\text{Arc}(S^3)$ et $b = s$ sur $L(S^3)$. En vertu de l'expression (72), on a :

$$(58) \quad \omega(\delta_1 \gamma, \delta_2 \gamma) = \int_{\gamma} \text{vol}(\dot{\gamma}, \delta_1 \gamma, \delta_2 \gamma),$$

pour tout couple $(\delta_1 \gamma, \delta_2 \gamma)$ de vecteurs tangents au point $\gamma \in L(S^3)$. La forme ω est entière, plus précisément $P_{\omega} = \mathbb{Z}$. En effet, en utilisant la suite exacte d'homotopie de la fibration $s : L(S^3) \rightarrow S^3$, il est possible de montrer que :

$$\begin{aligned} \pi_0(\Omega(S^3), N) &= \pi_1(\Omega(S^3), N) = 0, \\ \pi_2(\Omega(S^3), N) &= H_2(L(S^3), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

où N est le pôle nord de S^3 . On peut choisir comme générateur ϵ du H_2 le lacet obtenu dans $C^{\infty}(S^2, S^3)$ par l'intersection de S^3 avec un hyperplan (dans $\mathbb{R}^4$) situé au pôle nord et pivotant autour d'un plan fixe. On a bien $\int_{\epsilon} \omega = \int_{S^3} \text{vol} = 1$. En appliquant la proposition 1.2, on en déduit

l'existence d'un fibré principal Y au-dessus de $L(S^3)$, de groupe $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, muni d'une connexion λ de courbure ω .

Tout arc de $L(S^3)$ pointé en l'arc constant $\hat{N} : t \mapsto N$ est identifié à une application du cylindre $\text{cyl} = [0, 1] \times S^1$ dans S^3 dont l'image de la base $\{0\} \times S^1$ est le pôle nord. La forme $\alpha = K\omega \oplus \theta$ qui définit λ par passage au quotient est alors donnée par :

$$(59) \quad \alpha(\delta\gamma, \delta z) = \int_{\text{cyl}} \gamma^* [\text{vol}(\delta\gamma)] + \frac{\delta z}{iz}.$$

Ce fibré (ou plutôt le fibré en droite complexe $\mathbb{C}$ qui lui est associé) a été introduit par J.-L. Brylinski [Bry90]. La construction que nous venons de présenter fait l'économie de la théorie des gerbes. C'est Serge Tabashnikov qui a suggéré cette application.

APPENDICE

A. Espaces différentiables.

Nous utilisons dans cet article une terminologie empruntée à la théorie des espaces différentiables dont on trouvera différentes variantes dans [Ch77], [Hae72], [Sou84] et [Igl85]. Nous en rappelons quelques éléments.

Un *paramétrage* d'un ensemble X est une application P d'un ouvert U d'un espace numérique quelconque $\mathbb{R}^n$ dans X . Un *espace différentiable* est un ensemble X pour lequel on a choisi un ensemble de paramétrages dits différentiables, qui seront appelés *plaques*, et qui vérifient les propriétés suivantes :

- les paramétrages constants sont des plaques;
- le plus petit prolongement commun d'une famille compatible de plaques est encore une plaque;
- le composé d'une plaque par un paramétrage C^∞ de sa source est encore une plaque.

Les variétés sont évidemment des espaces différentiables. Mais les quotients de variétés sont aussi des espaces différentiables : une plaque du quotient est un paramétrage qui admet un relevé différentiable local au voisinage de tout point. C'est muni de cette structure quotient que le tore des périodes T_ω est considéré.

Une application F d'un espace différentiable X dans un autre Y est dite *différentiable* si le composé d'une plaque de X par F est une plaque de Y . Les difféomorphismes de X à Y sont évidemment les applications différentiables bijectives dont l'inverse est aussi différentiable.

L'espace $C^\infty(X, Y)$ des applications différentiables de X dans Y est muni naturellement d'une structure différentiable appelée *structure fonctionnelle*. Les plaques de cette structure sont les paramétrages $r \mapsto f$ telles que l'application $(r, x) \mapsto f(x)$ soit différentiable. C'est de cette structure différentiable dont est muni l'espace $\text{Arc}(X)$.

On sait définir sur ces espaces la notion de fibrés différentiables et la théorie de l'homotopie qui l'accompagne [Igl85]. La relation d'homotopie est définie à partir des familles à un paramètre d'arcs différentiables, indépendamment du choix d'une topologie *a priori*⁽⁴⁾. Une projection d'espaces différentiables $\pi : Y \rightarrow X$ est une *fibration* si, pour toute plaque $P : U \rightarrow X$, l'image réciproque $P^*(Y) \rightarrow U$ de la projection P est localement triviale. On montre que tout espace différentiable X possède un revêtement universel, simplement connexe, unique à équivalence près, de groupe structural $\pi_1(X)$. Par exemple, la projection $\text{cl}_\omega : \mathbb{R} \rightarrow T_\omega$ réalise le revêtement universel de T_ω .

La notion de groupe différentiable est immédiate : un *groupe différentiable* est un groupe G muni d'une structure différentiable compatible avec la multiplication et l'inversion. L'*algèbre de Lie* $\mathcal{G}$ de G est définie comme l'espace des homomorphismes différentiables de $\mathbb{R}$ dans G : $\mathcal{G} = \text{Hom}^\infty(\mathbb{R}, G)$. Dans le cas du tore T_ω les homomorphismes différentiables de $\mathbb{R}$ dans G se relèvent au revêtement universel $\text{cl}_\omega : \mathbb{R} \rightarrow T_\omega$ (théorème de monodromie des espaces différentiables [Igl85]) en des homomorphismes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et donc $T_\omega \simeq \mathbb{R}$.

Une *p-forme différentielle* ω sur un espace différentiable X est un procédé, qui à toute plaque P de X associe une *p-forme* notée $\omega(P)$ ou encore $P^*\omega$, définie sur le domaine U de P , telle que pour tout paramétrage C^∞ , F de U :

$$(P \circ F)^*\omega = F^*(P^*\omega).$$

La dérivée extérieure de ω est alors définie par :

$$P^*[d\omega] = d[P^*\omega].$$

(4) Il existe toutefois, sur les espaces différentiables, une topologie remarquable (appelée *D-topologie*), la plus fine telle que les plaques soient continues.

Cette définition donne lieu à un calcul différentiel extérieur sur X qui coïncide avec le calcul extérieur ordinaire lorsque X est une variété. L'image réciproque $f^*\omega$ d'une p -forme ω sur X par une application différentiable $f : Y \rightarrow X$ est définie par $P^*[f^*\omega] = [f \circ P]^*\omega$, où P est une plaque de Y .

PROPOSITION A.1. — Soient X un espace différentiable et $\pi : X \rightarrow Y$ une surjection; Y est muni de sa structure quotient. Pour qu'une forme différentielle α définie sur X passe au quotient, c'est-à-dire pour qu'il existe une forme β sur Y telle que $\alpha = \pi^*\beta$, il faut et il suffit que pour tout couple de plaques (P, P') de X telles que $\pi \circ P = \pi \circ P'$ on ait $\alpha(P) = \alpha(P')$.

Démonstration. — Par définition de la structure quotient, toute plaque Q de Y s'écrit $Q = \sup \pi \circ P_i$, où les P_i sont des plaques de X et $\sup$ désigne le plus petit prolongement commun. La forme β est définie par $\beta(Q) = \sup \alpha(P_i)$. En effet, soit U_i le domaine de définition de P_i ; restreintes à $U_{ij} = U_i \cap U_j$, les plaques P_i et P_j vérifient $\pi \circ P_i = \pi \circ P_j$, et donc $\alpha(P_i|_{U_{ij}}) = \alpha(P_j|_{U_{ij}})$. Les formes $\alpha(P_i)$ sont compatibles, elles ont donc un plus petit prolongement commun $\sup \alpha(P_i)$. Par un raisonnement analogue on montre que $\beta(Q)$ ne dépend pas du choix des relevés P_i de Q . Les autres vérifications sont immédiates. $\square$

Il existe sur les espaces différentiables une formule de Cartan pour la dérivée de Lie des formes différentielles. Soit h un groupe à un paramètre de difféomorphismes de $X : h \in \text{Hom}^\infty(\mathbb{R}, \text{Diff}(X))$, la dérivée de Lie d'une p -forme ω par h est définie par :

$$(60) \quad \mathcal{L}_h \omega = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ h(t)^* \omega \right\}_{t=0}.$$

Le contracté $i_h(\omega)$ de la p -forme ω par le groupe à un paramètre h est donné par la construction suivante. Soient $P : U \rightarrow X$ une plaque de X et $h \cdot P$ la plaque définie sur $\mathbb{R} \times U$ par :

$$(61) \quad h \cdot P : (t, r) \longmapsto h(t) \circ P(r).$$

La $(p-1)$ -forme $i_h(\omega)$, évaluée sur la plaque P , est donnée par la formule :

$$(62) \quad P^*[i_h(\omega)] = i_{\partial/\partial t}[(h \cdot P)^*\omega]_{\{0\} \times U}.$$

Cette formule étend la construction ordinaire sur les variétés, elle préserve la formule de Cartan :

PROPOSITION A.2. — Soient X un espace différentiable, ω une p -forme sur X et h un groupe à un paramètre de difféomorphismes de X . On a l'identité :

$$(63) \quad \mathcal{L}_h \omega = d[i_h(\omega)] + i_h[d\omega].$$

Démonstration. — Soit P une plaque de X définie sur un domaine U , par définition :

$$[\mathcal{L}_h \omega](P) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [h(t)^* \omega](P) \right\}_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [h(t) \circ P]^* \omega \right\}_{t=0}.$$

Soit $j : U \mapsto \{0\} \times U$ définie par $j(r) = (0, r)$; on a :

$$[i_h(\omega)](P) = i_{\partial/\partial t} [\omega(h \cdot P)]_{\{0\} \times U},$$

où $h \cdot P$ est définie par (61), c'est-à-dire $[i_h(\omega)](P) = j^* [i_{\partial/\partial t} (\omega(h \cdot P))]$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} [d(i_h \omega)](P) + [i_h(d\omega)](P) &= d\{j^*(i_{\partial/\partial t} [\omega(h \cdot P)])\} + j^*\{i_{\partial/\partial t}(d[\omega(h \cdot P)])\} \\ &= j^*\{d \circ i_{\partial/\partial t} [\omega(h \cdot P)] + i_{\partial/\partial t} \circ d[\omega(h \cdot P)]\} \\ &= j^*\{\mathcal{L}_{\partial/\partial t} [\omega(h \cdot P)]\} \\ &= j^*\left\{\frac{\partial}{\partial t} [h(t)^* \omega(h \cdot P)]_{t=0}\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [h(t) \circ h \cdot P \circ j]^* \omega \right\}_{t=0}. \end{aligned}$$

Or $h(t) \circ h \cdot P \circ j(r) = h(t)(P(r))$, c'est-à-dire $h(t) \circ h \cdot P \circ j = h(t) \circ P$. On en déduit donc :

$$\begin{aligned} [d(i_h \omega)](P) + [i_h(d\omega)](P) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [h(t) \circ P]^* \omega \right\}_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ h(t)^* [\omega(P)] \right\}_{t=0}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$[d(i_h \omega)](P) + [i_h(d\omega)] = \frac{\partial}{\partial t} \{ h(t)^* \omega \}_{t=0},$$

ce qu'il fallait démontrer. □

B. Opérateur de chaîne-homotopie.

Soit X une variété différentiable connexe ; on désigne par $\text{Arc}(X)$ son *espace des arcs*, c'est-à-dire l'espace des applications différentiables de $\mathbb{R}$ à valeurs dans X :

$$(64) \quad \text{Arc}(X) = C^\infty(\mathbb{R}, X).$$

Les applications *source* et *but*, notées s et b , associent respectivement à tout arc γ les points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$. Le choix de $\mathbb{R}$ plutôt que l'intervalle $[0, 1]$ est technique, pour assurer la différentiabilité de la juxtaposition des arcs et l'action du groupe des translations.

L'espace des arcs de X est muni de sa structure fonctionnelle d'espace différentiable (voir annexe A).

À toute p -forme ω de X , on associe la p -forme sur $\text{Arc}(X)$ définie par intégration de ω le long des arcs, ce que nous noterons :

$$(65) \quad \tilde{\omega}_\gamma = \int_\gamma \omega.$$

L'expression de $\tilde{\omega}$ dans toute plaque (paramétrage différentiable) P de l'espace $\text{Arc}(X)$, est donnée par :

$$(66) \quad P^* \tilde{\omega} = \int_0^1 P_t^* \omega \, dt,$$

où P_t est la plaque de X définie par $P_t(r) = P(r)(t)$. L'application linéaire $\Phi : \omega \mapsto \tilde{\omega}$ ainsi définie est un morphisme du complexe différentiel de De Rham de X dans celui de $\text{Arc}(X)$:

$$(67) \quad \Phi : \Omega^*(X) \longrightarrow \Omega^*(\text{Arc}(X)) \quad \text{et} \quad d \circ \Phi = \Phi \circ d.$$

Les translations de $\mathbb{R}$ agissent comme un groupe à un paramètre η de difféomorphismes de $\text{Arc}(X)$, pour tout $\gamma \in \text{Arc}(X)$ et tout $a \in \mathbb{R}$:

$$(68) \quad \eta(a) : \gamma \longmapsto \gamma \circ T_a, \quad \text{où} \quad T_a : t \longmapsto t + a.$$

PROPOSITION B.1. — La dérivée de Lie de la p -forme $\tilde{\omega}$ par η vérifie :

$$(69) \quad \mathcal{L}_\eta \tilde{\omega} = b^* \omega - s^* \omega.$$

Démonstration. — En effet, pour toute plaque P de $\text{Arc}(X)$, on a :

$$[\mathcal{L}_\eta \tilde{\omega}](P) = \frac{\partial}{\partial t} \{ [\eta(t)^* \tilde{\omega}](P) \}_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \{ (\eta(t)^* \circ P)^* \tilde{\omega} \}_{t=0}.$$

Mais $\eta(t) \circ P : r \mapsto P(r) \circ T_t$ et donc :

$$(\eta(t) \circ P)^* \tilde{\omega} = \int_0^1 (\eta(t) \circ P)_s^* \omega \, ds = \int_0^1 [r \mapsto P(r)(t+s)]^* \omega \, ds.$$

En posant $u = t + s$, on obtient

$$(\eta(t) \circ P)^* \tilde{\omega} = \int_t^{1+t} [r \mapsto P(r)(u)]^* \omega \, du,$$

ce qui donne en dérivant :

$$[\mathcal{L}_\eta \tilde{\omega}](P) = [r \mapsto P(r)(1)]^* \omega - [r \mapsto P(r)(0)]^* \omega = [b^* \omega - s^* \omega](P).$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. $\square$

En appliquant alors la formule de Cartan (63), on a :

$$d[i_\eta \Phi(\omega)] + i_\eta \circ d[\Phi(\omega)] = b^* \omega - s^* \omega.$$

En posant alors :

$$(70) \quad K = i_\eta \circ \Phi, \quad K : \Omega^*(X) \rightarrow \Omega^{*-1}(\text{Arc}(X, x_0)),$$

on obtient l'identité :

$$(71) \quad K \circ d + d \circ K = b^* - s^*.$$

DÉFINITION B.2. — *Le morphisme K ci-dessus est appelé opérateur de chaîne-homotopie.*

Lorsque X est une variété, on peut donner une expression de l'opérateur K en termes d'intégrales de chemins. Soit P une plaque de $\text{Arc}(X)$ définie sur un domaine U , soient $r \in U$ et δr un vecteur tangent en r . Notons :

$$\gamma = P(r) \quad \text{et} \quad \delta \gamma : t \mapsto D[\gamma(t)](r)(\delta r).$$

Alors $K\omega$, calculée au point γ et appliquée à $(p-1)$ variations γ_i associées à des vecteurs δr_i , est donnée par :

$$(72) \quad K\omega_\gamma(\delta \gamma_1, \dots, \delta \gamma_{p-1}) = \int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \delta \gamma_1, \dots, \delta \gamma_{p-1}) \, dt.$$

C. La formule de Stokes pour les espaces différentiables.

Nous allons montrer, dans cette annexe, comment on peut généraliser la formule de Stokes aux espace différentiables. Nous choisirons pour cela d'utiliser l'homologie cubique.

Soit X un espace différentiable. Nous appellerons p -cube de X toute application différentiable c définie sur un voisinage U de I^p à valeurs dans X , avec $I = [0, 1]$ (c'est en particulier une p -plaque de X). L'homologie cubique est définie de façon ordinaire en considérant les différents groupes abéliens libres $C_p(X)$ engendrés par les p -cubes pour $p \in \mathbb{N}$. Les éléments de $C_p(X)$ sont les p -chaînes cubiques de X .

Soit $\epsilon \in \{0, 1\}$; on notera j_i^ϵ l'application de $\mathbb{R}^{p-1}$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par :

$$(73) \quad j_i^\epsilon : (t_1, \dots, t_{p-1}) \longrightarrow (t_1, \dots, t_{i-1}, \epsilon, t_{i+1}, \dots, t_{p-1}).$$

A chaque indice $i = 1, \dots, p$ correspond les deux faces du cube c :

$$(74) \quad c_i^\epsilon = c \circ j_i^\epsilon, \quad i = 0, 1.$$

Ce qui permet de définir le bord ∂c d'un p -cube c par :

$$(75) \quad \partial c = \sum_{\epsilon=0}^1 (-1)^\epsilon \sum_{i=1}^p (-1)^p c_i^\epsilon.$$

L'opérateur ∂ est ensuite prolongé par linéarité sur $C_p(X)$ tout entier; il est à valeurs dans C_{p-1} (pour $p \geq 1$).

L'intégrale d'une p -forme $\omega \in \Omega^p(X)$ sur une p -chaîne $\sigma \in C_p(X)$ est obtenue en prolongeant par linéarité l'intégrale de ω sur les p -cubes :

$$(76) \quad \sigma = \sum_{c \in C_p(X)} n_c c \implies \int_\sigma \omega = \sum_{c \in C_p(X)} n_c \int_c \omega,$$

où les entiers n_c sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux, avec :

$$(77) \quad \int_c \omega = \int_{I^p} c^* \omega.$$

Considérons maintenant une famille différentiable de p -cubes c_α , c'est-à-dire une application différentiable définie sur $] -\epsilon, \epsilon[\times I^p$ à valeurs dans X . L'application $\alpha \mapsto \int_{c_\alpha} \omega_\alpha$ est alors différentiable; nous noterons :

$$(78) \quad \delta \int_c \omega = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \int_{c_\alpha} \omega \right\}_{\alpha=0}$$

la variation première de l'intégrale de ω sur c associée à la famille c_α .

Soit $\bar{c} :] - \epsilon, \epsilon[\times U \rightarrow X$ et $\bar{\omega}$, les $(p+1)$ -plaque et p -forme définies respectivement par :

$$\bar{c} = (\alpha, t) \mapsto c_\alpha(t) \quad \text{et} \quad \bar{\omega} = \omega(\bar{c}).$$

Soient $t_0 = \alpha$ et e_0 le vecteur de base $\partial/\partial\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$; nous introduirons pour la commodité des expressions finales les quantités suivantes :

$$(80) \quad \begin{cases} \int_c d\omega(\delta c) = \int_{\{0\} \times I^p} [d\bar{\omega}](e_0), \\ \int_{\partial c} \omega(\delta c) = \sum_{\epsilon=0}^1 (-1)^\epsilon \sum_{i=0}^p \int_{I^{p-1}} j_i^{\epsilon*} \bar{\omega}(e_0), \end{cases}$$

où la notation $\bar{\omega}(e_0)$ désigne le contracté de $\bar{\omega}$ par le vecteur e_0 (idem pour $d\bar{\omega}$). Il serait possible de définir formellement δc ; disons simplement que cela représente la variation infinitésimale du cube c associée à la famille c_α .

Le lecteur pourra vérifier que, compte tenu de ces définitions, la démonstration de la proposition suivante se ramène à un calcul différentiel ordinaire sur $\mathbb{R}^p$.

PROPOSITION C.1. — Soient X un espace différentiable, ω une p -forme sur X et c un p -cube de X . Soit c_α une famille différentiable de p -cubes telle que $c_0 = c$. La variation première de l'intégrale de ω sur c associée à la famille c_α est donnée par la formule :

$$(81) \quad \delta \int_c \omega = \int_c d\omega(\delta c) + \int_{\partial c} \omega(\delta c).$$

On obtient en particulier comme corollaire la formule de Stokes étendue aux espaces différentiables.

COROLLAIRE C.2. — Soient ω une $(p-1)$ -forme définie sur un espace différentiable X et σ une p -chaîne de X ; on a :

$$(82) \quad \int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

Démonstration. — En effet, il suffit de le démontrer pour un p -cube c . On a $\delta \int_c d\omega = \int_{\partial c} d\omega(\delta c)$ et aussi $\delta \int_{\partial c} \omega = \int_{\partial c} d\omega(\delta c)$, car $dd\omega = 0$ et $\partial\partial c = 0$. On déduit que $\delta[\int_c d\omega - \int_{\partial c} \omega] = 0$, et donc que $\int_c d\omega - \int_{\partial c} \omega$ est constante sur l'espace des p -cubes; comme l'espace des p -cubes est contractile, il suffit d'évaluer cette différence sur le p -cube constant, ce qui donne le résultat. $\square$

On peut étendre évidemment cette proposition par linéarité à toute p -chaîne cubique σ , en définissant correctement les familles différentiables de p -chaînes. On peut l'étendre aussi sans difficulté à des domaines polyédraux ou encore plus généraux.

La formule (81) ci-dessus peut se généraliser immédiatement au cas où la forme ω est aussi variable. Soit ω_α une famille différentiable de p -formes telle $\omega_0 = \omega$. On dira que la famille de p -formes ω_α est *différentiable* si pour toute plaque P de X l'application $(\alpha, r) \mapsto [\omega_\alpha(P)]_r$ est différentiable, autrement dit, si pour toute famille de p -vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ dans $\mathbb{R}^p$ l'application $(\alpha, r) \mapsto [\omega_\alpha(P)]_r(u_1, \dots, u_p)$ est différentiable. En notant $\delta\omega$ la p -forme définie par

$$(83) \quad \delta\omega : P \longmapsto \frac{\partial}{\partial\alpha} \{ \omega_\alpha(P) \}_{\alpha=0},$$

on peut écrire :

$$(84) \quad \delta \int_c \omega = \int_c d\omega(\delta c) + \int_{\partial c} \omega(\delta c) + \int_c \delta\omega.$$

Remarque C.3. — Comme dans le cas des variétés, la formule de Stokes permet de montrer en particulier l'invariance par homotopie de la cohomologie de De Rham. Elle permet aussi, sous sa forme étendue (84), de donner une autre démonstration de la formule de Cartan (annexe A). Soient h un groupe à un paramètre de difféomorphismes de X , ω une p -forme sur X et c un p -cube. Notons $c_t = h(t) \circ c$ et $\omega_t = h(t)_* \omega = h(-t)^* \omega$. En appliquant (84) à ces familles à un paramètre et en notant que $\int_{c_t} \omega_t = \int_c \omega$, on obtient :

$$(85) \quad \int_c \mathcal{L}_h \omega = \int_c i_h[d\omega] + \int_c d[i_h\omega].$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout p -cube c de X , on en déduit la formule de Cartan $\mathcal{L}_h \omega = i_h[d\omega] + d[i_h\omega]$.

D. Les morphismes dérivés.

Considérons un groupe de Lie G , son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ le dual de $\mathcal{G}$. Nous noterons ad et ad^* les actions adjointes et coadjointes de G , définies respectivement sur $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$.

Soit K un deux cocycle de G à valeur dans un tore différentiable T_A , c'est-à-dire le quotient de $\mathbb{R}$ par un sous-groupe abélien A :

$$(86) \quad K(g, g'g'') + K(g', g'') = K(gg', g'') + K(g', g'').$$

Soit $Z \mapsto g_*Z$, l'action adjointe de G sur $\mathcal{G}$, avec $g \in G$ et $Z \in \mathcal{G}$. Si K est normalisé, c'est-à-dire $K(\text{id}_G, \phi) = K(\phi, \text{id}_G) = 0$, une vérification élémentaire montre que l'application Θ définie sur G , à valeur dans $\mathcal{G}^*$, par

$$(87) \quad \Theta(g) : Z \mapsto \frac{\partial}{\partial t} \left\{ K(g, e^{tg^*Z}) - K(e^{tZ}, g) \right\}_{t=0}$$

est un 1-cocycle de G dans $\mathcal{G}^*$ pour l'action coadjointe, c'est-à-dire :

$$(88) \quad \forall (g, g') \in G \times G, \quad \Theta(gg') = \text{ad}^*(g) \circ \Theta(g') + \Theta(g).$$

De plus, l'application bilinéaire k définie sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ par

$$\begin{aligned} k(Z, Z') &= D\Theta_{\text{id}_G}(Z)(Z') \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \left\{ K(e^{tZ}, e^{sZ'}) - K(e^{tZ'}, e^{sZ}) \right\}_{s=t=0} \end{aligned}$$

est un 2-cocycle de la cohomologie alternée de $\mathcal{G}$ dans $\mathbb{R}$. Le couple d'application $K \mapsto \Theta \mapsto k$ définit une suite de morphismes en cohomologie :

$$(89) \quad H^2(G, A) \longrightarrow H^1(G, \mathcal{G}^*) \longrightarrow H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$$

que nous appelons *morphismes dérivés*.

Remarque D.1. — Cette construction peut s'étendre à certains groupes différentiables, notamment aux groupes de difféomorphismes de variétés.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bot78] R. BOTT, On some formulas for the characteristic classes of group actions, differential topology, foliations and Gelfand–Fuchs cohomology, in Proceed. Rio de Janeiro, 1976, volume 652 of Springer Lectures Notes, Springer Verlag, 1978.
- [Bry90] J.-L. BRYLINSKI, The Kaehler geometry of the space of knots in a smooth threefold, preprint, Pennsylvania State University, 1990.
- [Bry93] J.-L. BRYLINSKI, Loop spaces, characteristic classes and geometric quantization, Birkäuser, 1993..
- [Che77] K.T. CHEN, Iterated path integral, Bull. of Am. Math. Soc., 83 (5) (1977), 831–879..

- [GF68] I. GELFAND and D. FUCHS, Cohomology of the Lie algebra of vector fields on the circle. *Functional Analysis and Applications*, 2 (1968), 342–343.
- [Hae72] A. HAEFLIGER, Sur les classes caractéristiques des feuilletages, *Publications séminaires, Séminaire Bourbaki*, juin 1972.
- [Igl85] P. IGLESIAS, Fibrés difféologiques et homotopie, Thèse de doctorat d'état, Université de Provence, Marseille, 1985.
- [Kir74] A.A. KIRILLOV, Éléments de la théorie des représentations, MIR, Moscou, 1974.
- [Kir82] A.A. KIRILLOV., Infinite dimensional Lie groups : their orbits, invariants and representations, vol. 970, Springer-Verlag, 1982.
- [KM85] M. KARGAPALOV et Iou. MERZLIAKOV, Éléments de la théorie des groupes, MIR, Moscou, 1985.
- [McL71] S. MCLANE, Homology, Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1967.
- [Sou70] J.-M. SOURIAU, Structure des systèmes dynamiques, Dunod, Paris, 1970.
- [Sou84] J.-M. SOURIAU, Groupes différentiels et physique mathématique, Collection travaux en cours, 1984, 75–79.

Manuscrit reçu le 20 juillet 1994,
accepté le 16 décembre 1994.

Patrick IGLESIAS,
École Normale Supérieure de Lyon
UMPA, UMR 128 du CNRS
46, allée d'Italie
69364 Lyon CEDEX 7 (France).