ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LAURENT STOLOVITCH

# Sur un théorème de Dulac

*Annales de l'institut Fourier*, tome 44, n° 5 (1994), p. 1397-1433

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_5_1397_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**44**, 5 (1994), 1397-1433

# SUR UN THÉORÈME DE DULAC

par Laurent STOLOVITCH

---

## Table des matières.

**1. Introduction et notations**
1.1 Rappels historiques
1.2 Position du problème

**2. Preuve du théorème**
2.1 Fin de la preuve du théorème
2.2 Preuve de la proposition d'estimation du nombre de petits diviseurs

**3. Remarques concernant les petits diviseurs**
3.1 Sur l'absence de petits diviseurs en dimension 2
3.2 Nécessité d'une condition arithmétique sur les $\lambda_i$

**4. Le cas à plusieurs résonances positives**

## 1. Introduction et notations.

### 1.1. Rappels historiques.

Considérons les systèmes autonomes d'équations différentielles analytiques au voisinage du point fixe $0 \in \mathbb{C}^n$, de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}_i = \lambda_i x_i + f_i(x), \quad 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

---

*Mots-clés :* Champs de vecteurs analytiques – Formes normales – Variétés invariantes – Petits diviseurs.
*Classification A.M.S. :* 34A34 – 30D05 – 34C40 – 58F35 – 58F36.

où les $f_i$ sont des fonctions analytiques 1-plates au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ (i.e $f_i(0) = 0$, $Df_i(0) = 0$). Dans le but d'étudier la structure *fine* des solutions au voisinage du point fixe qu'est l'origine, on procède, classiquement, à une classification des classes d'équivalence du champ de vecteurs $X$ défini par 1, par le groupe $G$(resp. $\hat{G}$) des difféomorphismes analytiques locaux (resp. formels) laissant invariante l'origine et tangents à l'identité en ce point.

Introduisons quelques notations classiques : soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ une séries formelles en les variables $x_1, \ldots, x_n$, à coefficients complexes. On écrira

$$\hat{f} = \sum_Q f_Q x^Q \text{ avec } Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}^n, x^Q = x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n} \text{ et } f_Q \in \mathbb{C}.$$

Si $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}^n$, on posera $|Q| = q_1 + \cdots + q_n$ que l'on appellera *norme* de $Q$. Si $k$ est un entier positif, $\mathbb{N}_k^n$ désignera l'ensemble des $n$-uples d'entiers $Q$ de norme supérieure ou égale à $k$. Enfin, *l'ordre* de la série formelle $\hat{f}$ est le plus petit entier $\mathrm{ord}\hat{f}$ tel qu'il existe un multiindice $Q$, de norme $\mathrm{ord}\hat{f}$, vérifiant $f_Q \neq 0$. Soit $k$ un entier supérieur ou égal à 2, nous dirons que les $n$ nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, satisfont une *relation de résonance d'ordre* $k$ s'il existe un multiindice $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}_2^n$ de norme $k$ et un indice $1 \leq s \leq n$ tels que

$$(Q, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n q_i \lambda_i = \lambda_s.$$

Le théorème de Poincaré-Dulac formel [Arn80], [Bru89] assure l'existence d'un changement de variables formel $x_i = y_i + \xi_i(y)$ qui transforme le système 1 en un système de la forme

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + \sum_{\substack{(Q,\lambda)=\lambda_i \\ Q \in N_2^n}} a_Q^i y^Q \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

que l'on appelle *forme normale*. Le changement de variables n'est pas unique : on transforme une forme normale en une autre par des changements de variables de la forme

$$y_i = z_i + \sum_{\substack{(Q,\lambda)=\lambda_i \\ Q \in N_2^n}} b_Q^i z^Q \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

Ainsi, modulo ce type de transformations, on obtient une forme normale à laquelle nous nous référerons en l'appelant *la* forme normale.

Si les $\lambda_i$ ne vérifient aucune relation de résonance, alors le système précédent est linéaire. Cependant, le *difféomorphisme normalisant* n'est pas systématiquement analytique; C.L. Siegel [Sie42], puis A. Bruno [Bru72], ont montré, que, si les $\lambda_i$ vérifient en outre une condition arithmétique diophantienne, que nous préciserons par la suite, alors le système 1 est analytiquement linéarisable au voisinage de l'origine. Dans le cas des difféormorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$, J.-C. Yoccoz [Yoc88] a démontré que la condition diophantienne en question est aussi nécessaire.

Lorsque il y a des résonances, deux cas de nature très différente se présentent :

- soit l'enveloppe convexe des $\lambda_i$ dans le plan complexe ne contient pas l'origine; dans ce cas, on montre que la forme normale est polynomiale et même intégrable par quadratures. De plus, les difféomorphismes normalisants sont analytiques au voisinage de l'origine [Arn80].
- soit l'enveloppe convexe contient 0. En dimension 2, la classification analytique des champs de vecteurs dont la partie linéaire n'est ni nulle, ni nilpotente, est due à J.-P. Ramis et J. Martinet [RM82], [RM83], [MR85], [Mal82]. Lorsque la partie linéaire est nilpotente, des éléments de réponse ont été apportés par R. Moussu et D. Cerveau [MC88].

Pour une introduction détaillée sur la normalisation formelle et analytique des champs de vecteurs, nous renvoyons le lecteur à [DDS94], [AA88].

### 1.2. Position du problème.

*Dans la suite, nous supposerons l'existence d'un vecteur d'entiers non-nul* $r \in \mathbb{N}^n$ *tel que* $(r, \lambda) = 0$ *et que toutes les relations de résonances sont engendrées par cette relation; c'est-à-dire que la relation* $(Q, \lambda) = \lambda_s$ *avec* $Q \in \mathbb{N}_2^n$ *entraîne* $Q = lr + E_s$ *où* $l$ *est un entier non-nul et* $E_s$ *désigne le* $s$*-ième vecteur de base, soit* $Q = (lr_1, \ldots, lr_{s-1}, lr_s + 1, lr_{s+1}, \ldots, lr_n)$.

Nous écrirons $r = (r_1, \ldots, r_p, 0, \ldots, 0)$, les $p$ premières composantes étant des entiers positifs premiers entre eux. Cette hypothèse amène quelques remarques :

*Remarque* 1.1. — Les valeurs propres $\lambda_j$ avec $1 \leq j \leq p$ sont des valeurs propres simples. En effet, si l'on avait $\lambda_j = \lambda_{j'}$, pour des indices $j \leq p$ et $j'$, les deux vecteurs d'entiers $r = (r_1, \ldots, r_p, 0, \ldots, 0)$ et $r' = r - r_j E_j + r_j E_{j'}$ vérifieraient $(R, \lambda) = 0$ tout en étant linéairement indépendants, ce qui n'est pas possible.

Avec nos notations, si une des valeurs propres est nulle, alors il ne peut y en avoir une deuxième comme nous venons de le voir; on a alors $\lambda_1 = 0$ et $r = (1, 0, \ldots, 0)$.

Sous une telle hypothèse, la forme normale de Poincaré-Dulac s'écrit

$$\dot{y}_i = y_i(\lambda_i + f_i(u)), 1 \leq i \leq n$$

où l'on a posé $u = y^r$ et $f_i \in \mathbb{C}[[u]], f_i(0) = 0$. Si 0 appartient à l'intérieur de l'enveloppe convexe des valeurs propres, A. Bruno a démontré [Bru72], [Mar80], entre autre, que s'il existe deux séries formelles $a$ et $b$ en les variables $y_1, \ldots, y_n$, telles que $\lambda_i + f_i(u) = \lambda_i a(y) + \bar{\lambda}_i b(y)$, $1 \leq i \leq n$ et si les $\lambda_i$ vérifient une condition arithmétique diophantienne, alors non seulement la forme normale est convergente mais aussi le difféomorphisme normalisant. En particulier, si le système 1 est formellement linéarisable et si les $\lambda_i$ vérifient une condition arithmétique diophantienne alors il l'est aussi analytiquement. Cependant, en général, ni le difféomorphisme normalisant, ni la forme normale ne convergent au voisinage de l'origine [Bru72], [IP86].

Nous nous proposons cependant, de transformer, moyennant une condition arithmétique diophantienne sur les $\lambda_i$, le champ de vecteurs analytique 1 en une forme normale *préliminaire* par un changement de variables analytique. Le résultat obtenu est une normalisation partielle de champs de vecteurs accompagnée de l'existence de variétés invariantes. Il constitue une généralisation à une dimension quelconque, des théorèmes de H. Dulac [Dul23], [Dul04]. Plus précisément, H. Dulac a démontré

- dans [Dul04], que tout champ de vecteurs analytique de la forme

$$f(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + (\lambda y + g(x, y))\frac{\partial}{\partial y}$$

($\lambda \neq 0$, $f, g$ 1-plates en $0 \in \mathbb{C}^2$ qui est une singularité isolée du champ de vecteurs) s'écrit, dans un système de coordonnées locales holomorphes au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ sous la forme

$$x^{p+1}(1 + \tilde{f}(x, y))\frac{\partial}{\partial x} + (\lambda y + x\tilde{g}(x, y))\frac{\partial}{\partial y}.$$

- dans [Dul23], que tout champ de vecteurs analytique de la forme

$$-qx\frac{\partial}{\partial x} + (py + g(x, y))\frac{\partial}{\partial y}$$

($p, q \in \mathbb{N}$, premiers entre eux et $g$ 1-plate en $0 \in \mathbb{C}^2$) s'écrit, étant donnés deux entiers $r, s$ suffisamment grands, dans un système de coordonnées locales holomorphes au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ sous la forme

$$-qx\frac{\partial}{\partial x} + py(1 + P(u) + x^r y^s \tilde{g}(x,y))\frac{\partial}{\partial y}$$

avec $u = x^p y^q$, $P$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$, $P(0) = 0$ et $r > pn$, $s > qn$.

Le résultat que nous nous proposons d'énoncer repose sur une condition arithmétique concernant les $\lambda_i$. Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers tels que $p_0 = 2$ et $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{p_k} < +\infty$. Définissons alors les nombres

$$\omega(p_k) = \inf\{|(Q,\lambda) - \lambda_i| \mid |(Q,\lambda) - \lambda_i| \neq 0, \\ i = 1,\dots,n,\ Q \in \mathbb{N}^n,\ 2 \leq |Q| \leq p_k\}.$$

La condition arithmétique en question peut alors s'énoncer de la manière suivante :

$$(\omega) \qquad -\sum_{k\geq 0} \frac{\ln(\omega(p_{k+1}))}{p_k} < +\infty.$$

*Remarque* 1.2. — Bruno a démontré [Bru72] que la condition $(\omega)$ est équivalente à la condition

$$-\sum_{k\geq 0} \frac{\ln(\omega(2^{k+1}))}{2^k} < +\infty.$$

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Si, outre les hypothèses citées ci-dessus, la condition arithmétique $(\omega)$ est satisfaite alors pour tout entier $m$, il existe des polynômes $P_{i,m} \in \mathbb{C}[u]$ sans terme constant et de degrés au plus égaux à $m$ tels que, dans un système de coordonnées analytiques au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$, le système 1 s'écrit*

$$\dot{y}_i = y_i(\lambda_i + P_{i,m}(u)) + u^{m+1} g_i(y),\ \ 1 \leq i \leq n$$

*où $u = y^r$ et les $g_i$ sont analytiques à l'origine. Si en outre, on a $|r| = 1$, c'est-à-dire lorsque $\lambda_1 = 0$, alors on a $g_i(0) = 0$ (ceci afin d'avoir $ord(u^{m+1} g_i(y)) > m|r| + 1$).*

Notre démonstration est inspirée de celles faites, dans le cas 2-dimensionnel, dans [MM80] [CS]. Cependant, en dimension $n$ quelconque, nous aurons à faire face, comme nous le verrons, à des problèmes de *petits diviseurs* [Sie42], [Bru72], [Eli90]. De plus, nous ne distinguerons pas le cas où une des valeurs propres est nulle des autres cas. On trouvera des résultats sur les variétés invariantes dans [CKP78], [Bru72], [Pos86].

## 2. Preuve du théorème.

Avant d'entamer la preuve, commençons par faire une remarque concernant le résultat.

*Remarque 2.1.* — Il est classique que, par un changement de variables polynomial, l'on puisse transformer le système 1 en $\dot{z}_i = z_i(\lambda_i + P_{i,m}(u)) + \tilde{g}_i(z)$, $1 \leq i \leq n$, avec $u = z^r$ et les $\tilde{g}_i$ analytiques et $(m|r|+1)$-plates à l'origine. La difficulté du résultat réside donc dans l'appartenance du "reste" à l'idéal engendré par $u^{m+1}$.

Pour démontrer le résultat, nous allons raisonner par récurrence sur l'entier $m$. Nous commencerons donc par démontrer le résultat pour $m = 0$ :

PROPOSITION 2.1. — *Sous les hypothèses du théorème 1.1, il existe un système de coordonnées locales analytiques au voisinage de* $0 \in \mathbb{C}^n$, $x = y + \xi(y)$, *dans lequel le système 1 s'écrit sous la forme :*

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + u g_i(y), \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{où} \quad u = y^r$$

*avec* $g_i$ *analytique au voisinage de* 0 ; *si* $|r| = 1$, *on a* $g_i(0) = 0$.

*Preuve.* — Effectuons le changement de variables formel tangent à l'identité au voisinage de 0, $x = y + \xi(y)$, dans le système 1 ; c'est-à-dire

$$x_j = y_j + \xi_j(y) \text{ où } \xi_j = \sum_{Q \in \mathbb{N}_2^n} \xi_{j,Q} y^Q \text{ est 1-plate en 0 pour } 1 \leq j \leq n.$$

On obtient un système de la forme :

$$\dot{y}_j = \lambda_j y_j + \psi_j(y), \text{ avec } \psi_j = \sum_{Q \in \mathbb{N}_2^n} \psi_{j,Q} y^Q \text{ pour } 1 \leq j \leq n.$$

Les relations entre les $\xi_j$, $\psi_j$ et $f_j$ s'obtiennent en dérivant l'expression du difféomorphisme par rapport au *temps* $t$ :

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{dy_j}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt}.$$

On exprime alors les $\dot{x}_j$ et $\dot{y}_j$ dans les coordonnées $(y_k)$, ce qui donne :

$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda_j x_j + f_j(x) = \lambda_j(y_j + \xi_j(y)) + f_j(y_1 + \xi_1(y), \ldots, y_n + \xi_n(y))$$
$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j + \psi_j(y),$$

d'où la relation :

$$\lambda_j(y_j + \xi_j(y)) + f_j(y_1 + \xi_1(y), \ldots, y_n + \xi_n(y)) = \lambda_j y_j + \psi_j(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k}(\lambda_k y_k + \psi_k(y)).$$

Remarquons que pour $Q \in \mathbb{N}_2^n$, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^Q}{\partial y_k} \lambda_k y_k = (Q, \lambda) y^Q$. Par conséquent, on obtient les relations suivantes pour $1 \leq j \leq n$ :

$$\sum_{Q \in \mathbb{N}_2^n} (\delta_{j,Q} \xi_{j,Q} + \psi_{j,Q}) y^Q = f_j(y + \xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k \tag{2}$$

avec $\delta_{j,Q} = (Q, \lambda) - \lambda_j$. On se propose alors de résoudre le problème formel de la manière suivante : Soit $\hat{\mathcal{I}}$ (resp. $\mathcal{I}$) l'idéal des séries formelles (resp. des fonctions analytiques) engendré par $u = y^r$. On construit alors les séries $\xi_j$ et $\psi_j$ par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice $Q$, en posant pour tout $Q \in \mathbb{N}_2^n$ :

– si $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}$ alors

$$\psi_{j,Q} = \left\{ f_j(y + \xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k \right\}_Q$$
$$\xi_{j,Q} = 0$$

– si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}$ alors

$$\xi_{j,Q} = \frac{1}{\delta_{j,Q}} \left\{ f_j(y + \xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k \right\}_Q$$
$$\psi_{j,Q} = 0$$

où $\{f(y)\}_Q$ désigne le coefficient de $y^Q$ dans le développement de Taylor de $f$. Ceci détermine bien les séries $\xi_j$ et $\psi_j$. En effet, soit $Q \in \mathbb{N}_2^n$ un multiindice; supposons avoir calculé les termes $\xi_{j,Q'}$ et $\psi_{j,Q'}$ pour tous les multiindices $Q'$ tels que $|Q'| < |Q|$. Or,

$$\left\{ f_j(y+\xi) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k \right\}_Q$$

s'exprime comme un polynôme en les $\xi_{j,Q'}$ et $\psi_{j,Q'}$ pour $|Q'| < |Q|$. Il est donc connu par récurrence. D'autre part, par hypothèse, si $\delta_{j,Q} = (Q,\lambda) - \lambda_j = 0$ alors $Q = lr + E_j$ avec $l \in \mathbb{N}^*$, donc $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}$. Par conséquent, si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}$ alors $\delta_{j,Q} \neq 0$.

*Remarque 2.2.* — Puisque les $\psi_i$ ont tous leurs termes non-nuls dans l'idéal $\hat{\mathcal{I}}$, il en est de même pour les $\sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k$. Par conséquent, pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^n$ tel que $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}$, on a

$$\left\{ f_j(y+\xi) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k \right\}_Q = \{f_j(y+\xi)\}_Q.$$

Passons à la démonstration de la convergence de $\xi$. Reprenons les notations de Siegel : si $\phi = \sum_Q \phi_Q y^Q$ est une série formelle, nous notons $\bar{\phi} = \sum_Q |\phi_Q| y^Q$. Si $\eta = \sum_Q \eta_Q y^Q$, la notation $\eta \prec \phi$ signifie que, pour tout multiindice $Q$, $|\eta_Q| \leq |\phi_Q|$. On notera

$$\delta_Q = \inf_{1 \leq k \leq n} \{|\delta_{k,Q}|\}, \quad \tilde{\xi}_Q = \sum_{k=1}^n |\xi_{k,Q}|,$$
$$\tilde{\xi}(y) = \sum_{Q \in \mathbb{N}_2^n} \tilde{\xi}_Q y^Q \text{ et } \mathbb{N}_k^n \setminus \hat{\mathcal{I}} = \{Q \in \mathbb{N}_k^n \mid y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}\}.$$

Faisons tout d'abord deux remarques que nous utiliserons constamment par la suite :

*Remarque 2.3.* — Pour tout $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $\delta_Q \neq 0$. De plus, $\tilde{\xi}(y) = \sum_{Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}} \tilde{\xi}_Q y^Q$ par construction. On a aussi $\tilde{\xi}(y) = \sum_{j=1}^n \tilde{\xi}_j(y)$.

*Remarque 2.4.* — Soit $f \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ une série formelle. Soit $J$ un ensemble de monômes (éventuellement infini). Soit $\pi_J \bar{f}$ la projection de $\bar{f}$

sur $J$. On a alors $\pi_J \bar{f} \prec \bar{f}$. Dans la suite, $J$ sera généralement les monômes d'un idéal ou d'un complémentaire d'un idéal dans un autre. De même, soient $f, g, \xi_1, \ldots, \xi_n$ des séries formelles en les variables $x_1, \ldots, x_n$ telles que $g(x_1, \ldots, x_n) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Alors, $\bar{g}(x_1, \ldots, x_n) \prec \bar{f}(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n)$. Il suffit, en effet, d'appliquer l'inégalité triangulaire à tous les modules de sommes dans les expressions des modules des coefficients de la série $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Par construction, on a

$$\forall 1 \leq j \leq n, \forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}, \quad |\xi_{j,Q}||\delta_{j,Q}| = |\{f_j(y+\xi)\}_Q| \leq \{\bar{f}_j(y+\bar{\xi})\}_Q$$

d'après la remarque précédente. En sommant, sur $1 \leq j \leq n$, il vient

$$\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}, \quad \delta_Q \sum_{j=1}^{n} |\xi_{j,Q}| \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_{j,Q}||\delta_{j,Q}| \leq \left\{ \sum_{j=1}^{n} \bar{f}_j(y+\bar{\xi}) \right\}_Q$$

car, d'après la remarque 2.3, $\forall 1 \leq j \leq n, \forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}, \quad \delta_{j,Q} \neq 0$.

Les fonctions $f_j$ étant analytiques et 1-plates au voisinage de l'origine, il existe deux constantes $a, b > 0$ telles que

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{f}_j(x_1, \ldots, x_n) \prec \frac{a\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2}{1 - b\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)}.$$

On en déduit que

$$\forall Q \in \mathbb{N}_2^n, \quad \left\{ \sum_{j=1}^{n} \bar{f}_j(y+\bar{\xi}) \right\}_Q \leq \left\{ \frac{a\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \bar{\xi}_j\right)^2}{1 - b\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \bar{\xi}_j\right)} \right\}_Q$$

car le développement de Taylor de $\dfrac{a\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \bar{\xi}_j\right)^2}{1 - b\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \bar{\xi}_j\right)}$ est une série à coefficients positifs. Finalement, on obtient :

$$\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}, \quad \delta_Q \tilde{\xi}_Q \leq \left\{ \frac{a\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi}\right)^2}{1 - b\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi}\right)} \right\}_Q. \tag{3}$$

Construisons, par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice $Q$, la série $\sigma(y) = \sum_{Q\in\mathbb{N}_2^n} \sigma_Q y^Q$ de la manière suivante :

$$\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus (\mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}) \quad \sigma_Q = 0$$

$$\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \quad \sigma_Q = \left\{ \frac{a\Big(\sum_{j=1}^n y_j + \sigma\Big)^2}{1 - b\Big(\sum_{j=1}^n y_j + \sigma\Big)} \right\}_Q .$$

LEMME 2.1. — *La série $\sigma$ est convergente dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$.*

*Preuve.* — Considérons la fonction

$$F(y_1, \ldots, y_n, v) = \frac{a\Big(v + \sum_{i=1}^n y_i\Big)^2}{1 - b\Big(v + \sum_{i=1}^n y_i\Big)} - v.$$

Les fonctions $F$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ sont analytiques au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ ; en outre, on a $F(0,0) = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}(0,0) = -1 \neq 0$. Donc, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une unique fonction $\tilde{\sigma}$ analytique au voisinage $0 \in \mathbb{C}^n$ telle que

$$\tilde{\sigma}(0) = 0 \text{ et } \frac{a\Big(\tilde{\sigma} + \sum_{i=1}^n y_i\Big)^2}{1 - b\Big(\tilde{\sigma} + \sum_{i=1}^n y_i\Big)} = \tilde{\sigma}; \text{ on écrira } \tilde{\sigma} = \sum_{Q\in\mathbb{N}_2^n} \tilde{\sigma}_Q y^Q$$

car, au regard de l'équation qu'elle satisfait, la différentielle de $\tilde{\sigma}$ en 0 est nulle. Montrons alors, par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice $Q$, que $\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $\sigma_Q = \tilde{\sigma}_Q$. En effet, pour tout multiindice $P \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, tel que $|P| = 2$ (de tels multiindices existent), on a

$$\tilde{\sigma}_P = \left\{ a\Big(\sum_{j=1}^n y_j\Big)^2 \right\}_Q = \sigma_P$$

Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre $k \geq 2$. Soit $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|Q| = k+1$, alors :

$$\tilde{\sigma}_Q = \left\{ \frac{a\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\sigma}\Big)^2}{1 - b\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\sigma}\Big)} \right\}_Q = \left\{ \frac{a}{b^2} \sum_{p=2}^{|Q|} b^p \Big(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\sigma}\Big)^p \right\}_Q$$
$$= \frac{a}{b^2} \sum_{p=2}^{|Q|} b^p \left\{ \Big(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\sigma}\Big)^p \right\}_Q .$$

Or,

$$\left\{ \Big(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\sigma}\Big)^p \right\}_Q = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \left( \sum_{\substack{S_1, S_2 \in \mathbb{N}^n \\ S_1 + S_2 = Q}} \left( \left\{ \Big(\sum_{j=1}^{n} y_j\Big)^{p-k} \right\}_{S_1} \left\{ \tilde{\sigma}^k \right\}_{S_2} \right) \right).$$

On a $S_1, S_2 \in \Big(\mathbb{N}^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \cup \{0\}\Big)^2$. Si $k \neq p$ et si $|S_1| < p-k$ alors $\left\{ \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\Big)^{p-k} \right\}_{S_1} = 0$ ; donc, les multiindices $S_2$ qui apparaissent effectivement dans la somme vérifient $|S_2| \leq |Q| + k - p$. Si $k = p$ alors $S_2 = Q$. Si $k \neq 0$ alors si $|S_2| \leq 2k-1$ alors $\left\{ \tilde{\sigma}^k \right\}_{S_2} = 0$. Si $k = 1$, alors pour $S_2 \in \mathbb{N}_2^n$ et $|S_2| \leq |Q| + 1 - p$, on a $\left\{ \tilde{\sigma}^k \right\}_{S_2} = \tilde{\sigma}_{S_2} = \sigma_{S_2}$. Si $k \geq 2$, on a

$$\left\{ \tilde{\sigma}^k \right\}_{S_2} = \sum_{Q_1 + \cdots + Q_k = S_2} \tilde{\sigma}_{Q_1} \cdots \tilde{\sigma}_{Q_k}$$

la somme portant sur les ensembles de $k$ multiindices $Q_1, \ldots, Q_k$ qui vérifient

$$\forall 1 \leq j \leq k, \quad Q_j \in \mathbb{N}_2^n, \quad |Q_j| < |S_2| \leq |Q|.$$

De plus, puisque $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, alors $\forall 1 \leq j \leq p'$, $Q_j \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$. Par hypothèse de récurrence, $\forall 1 \leq j \leq k$, $\tilde{\sigma}_{Q_j} = \sigma_{Q_j}$. D'où, il vient

$$\left\{ \Big(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\sigma}\Big)^p \right\}_Q = \left\{ \Big(\sum_{j=1}^{n} y_j + \sigma\Big)^p \right\}_Q$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\sigma}_Q = \left\{ \frac{a\Big(\sum_{j=1}^n y_j + \tilde{\sigma}\Big)^2}{1 - b\Big(\sum_{j=1}^n y_j + \tilde{\sigma}\Big)} \right\}_Q = \left\{ \frac{a\Big(\sum_{j=1}^n y_j + \sigma\Big)^2}{1 - b\Big(\sum_{j=1}^n y_j + \sigma\Big)} \right\}_Q = \sigma_Q,$$

d'où le résultat. □

*Remarque 2.5.* — Si les nombres $|(Q,\lambda) - \lambda_i|$, avec $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, ne s'accumulent pas sur 0 lorsque $|Q| \to +\infty$, il existe alors une constante $\epsilon > 0$ qui les minore. La relation 3 devient alors

$$\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}, \quad \epsilon\tilde{\xi}_Q \leq \left\{ \frac{a\Big(\sum_{j=1}^n y_j + \tilde{\xi}\Big)^2}{1 - b\Big(\sum_{j=1}^n y_j + \tilde{\xi}\Big)} \right\}_Q .$$

Dans ce cas, la démonstration de la proposition est terminée. En effet, il suffit de prendre la fonction $\sigma$, analytique au voisinage de l'origine, définie précédement, où l'on a remplacé $a$ par $a/\epsilon$. On montre alors, par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice $Q$, que $\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $\tilde{\xi}_Q \leq \sigma_Q$. Pour ce faire, on reprend textuellement la preuve de récurrence du lemme précédent en remplaçant, pour tout $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $\tilde{\sigma}_Q$ par $\tilde{\xi}_Q$ ainsi que l'égalité $\tilde{\sigma}_Q = \sigma_Q$ par l'inégalité $\tilde{\xi} \leq \sigma_Q$, les sommes et produits ne faisant intervenir que des nombres positifs.

Dans la suite nous nous intéresserons uniquement au cas où il y a effectivement des petits diviseurs.

Considérons la suite $\{\eta_Q\}_{Q \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}}$ definie par

1. $\forall P \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|P| = 1$, $\eta_P = 1$ (de tels multiindices existent),
2. $\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$,

$$\delta_Q \eta_Q = \max_{\substack{Q_j \in \mathbb{N}_1^n, S \in \mathbb{N}^n \\ Q_1 + \cdots + Q_p + S = Q}} \eta_{Q_1} \cdots \eta_{Q_p},$$

le maximum étant pris sur les ensembles de $p+1$, $1 \leq p \leq |Q|$ multiindices $Q_1, \ldots, Q_p, S$ tels que $\forall 1 \leq j \leq p$, $Q_j \in \mathbb{N}_1^n$, $|Q_j| < |Q|$, $S \in \mathbb{N}^n$. Ces ensembles sont non-vides.

Cette suite est bien définie. En effet, si $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, alors il existe des multiindices $Q_1, \ldots, Q_p, S$ tels que $Q = Q_1 + \ldots + Q_p + S$, $\forall 1 \leq j \leq$

$p,\ Q_j \in \mathbb{N}_1^n,\ |Q_j| < |Q|,\ S \in \mathbb{N}^n$ ; dans ce cas, $\forall 1 \leq j \leq p,\ \ Q_j \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$. Le point suivant est primordial.

LEMME 2.2. — *Pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, on a $\tilde{\xi}_Q \leq \sigma_Q \eta_Q$.*

*Preuve.* — On montre le résultat par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice $Q$. A l'ordre 2, on a, pour tout $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $|Q| = 2$,

$$\delta_Q \tilde{\xi}_Q \leq \left\{ a \left( \sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2 \right\}_Q = \sigma_Q.$$

Or, par définition, $1 \leq \delta_Q \eta_Q$. En effet, on a $Q = P + S$ avec $|P| = |S| = 1$, $(P, S) \in \left( \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \right)^2$ ; donc, $1 = \eta_P \leq \delta_Q \eta_Q$.

Supposons le résultat vrai pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|Q| \leq k$ $(k \geq 2)$. Soit alors un multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|Q| = k + 1$. L'inégalité 3 s'écrit

$$\delta_Q \tilde{\xi}_Q \leq \left\{ \frac{a \left( \sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi} \right)^2}{1 - b \left( \sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi} \right)} \right\}_Q = \left\{ \frac{a}{b^2} \sum_{p \geq 2} b^p \left( \sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi} \right)^p \right\}_Q$$

$$= \frac{a}{b^2} \sum_{p=2}^{|Q|} b^p \left\{ \left( \sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi} \right)^p \right\}_Q.$$

Or,

$$\left\{ \left( \sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi} \right)^p \right\}_Q = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \left( \sum_{\substack{S_1, S_2 \in \mathbb{N}^n \\ S_1 + S_2 = Q}} \left( \left\{ \left( \sum_{j=1}^{n} y_j \right)^{p-k} \right\}_{S_1} \left\{ \tilde{\xi}^k \right\}_{S_2} \right) \right).$$

On a $S_1, S_2 \in \left( \mathbb{N}^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \cup \{0\} \right)^2$. Si $k \neq p$ et si $|S_1| \leq p - k - 1$ alors $\left\{ \left( \sum_{j=1}^{n} y_j \right)^{p-k} \right\}_{S_1} = 0$ ; donc, les multiindices $S_2$ qui apparaissent effectivement dans la somme vérifient $|S_2| \leq |Q| + k - p$. Si $k = p$ alors $S_2 = Q$. Si $k \neq 0$ et si $|S_2| \leq 2k - 1$ alors $\left\{ \tilde{\xi}^k \right\}_{S_2} = 0$ car l'ordre de $\tilde{\xi}$ est

supérieur ou égal à 2. Si $k=1$, alors pour $S_2 \in \mathbb{N}_2^n$ et $|S_2| \leq |Q|+1-p$, on a $\left\{\tilde{\xi}^k\right\}_{S_2} = \tilde{\xi}_{S_2}$. Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\left\{\tilde{\xi}^k\right\}_{S_2} &\leq \eta_{S_2}\sigma_{S_2} \\ &\leq \left(\max_{S_1+S_2=Q} \eta_{S_2}\right)\sigma_{S_2},\end{aligned}$$

le maximum étant pris sur les couples de multiindices $(S_1, S_2)$ tel que $2 \leq |S_2| < |Q|$. Si $k \geq 2$, on a

$$\left\{\tilde{\xi}^k\right\}_{S_2} = \sum_{Q_1+\cdots+Q_k=S_2} \tilde{\xi}_{Q_1}\cdots\tilde{\xi}_{Q_k}$$

la somme portant sur les ensembles de $k$ multiindices $Q_1,\ldots,Q_k$ qui vérifient $\forall 1 \leq j \leq k,\ \ Q_j \in \mathbb{N}_2^n,\ \ |Q_j| < |S_2| \leq |Q|$. De plus, puisque $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, alors $\forall 1 \leq j \leq p',\ \ Q_j \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$. Par hypothèse de récurrence, $\forall 1 \leq j \leq k,\ \ \tilde{\xi}_{Q_j} \leq \eta_{Q_j}\sigma_{Q_j}$. Il vient alors

$$\begin{aligned}\left\{\tilde{\xi}^k\right\}_{S_2} &\leq \sum_{Q_1+\cdots+Q_k=S_2} \eta_{Q_1}\cdots\eta_{Q_k}\sigma_{Q_1}\cdots\sigma_{Q_k} \\ &\leq \max_{Q_1+\cdots+Q_k=S_2} \eta_{Q_1}\cdots\eta_{Q_k} \sum_{Q_1+\cdots+Q_k=S_2} \sigma_{Q_1}\cdots\sigma_{Q_k}\end{aligned}$$

le maximum et la somme portant sur les ensembles de $k$ multiindices $Q_1,\ldots,Q_k$ qui vérifient $\forall 1 \leq j \leq k,\ \ Q_j \in \mathbb{N}_2^n,\ \ |Q_j| < |S_2|$. Ce maximum est inférieur au maximum

$$\max_{Q_1+\cdots+Q_{p'}+S=Q} \eta_{Q_1}\cdots\eta_{Q_{p'}}$$

portant sur les ensembles de $p'+1$ multiindices $Q_1,\ldots,Q_{p'},S$, $1 \leq p' \leq |Q|$, qui vérifient $\forall 1 \leq j \leq p,\ \ Q_j \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}},\ \ |Q_j| < |Q|,\ \ S \in \mathbb{N}^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \cup \{0\}$. De plus, ce maximum est supérieur à 1 ; donc,

$$\begin{aligned}\left\{\left(\sum_{j=1}^n y_j + \tilde{\xi}\right)^p\right\}_Q &\leq \max_{Q_1+\cdots+Q_{p'}+S=Q} \eta_{Q_1}\cdots\eta_{Q_{p'}} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^p C_p^k \left(\sum_{\substack{S_1,S_2\in\mathbb{N}^n \\ S_1+S_2=Q}} \left(\left\{\left(\sum_{j=1}^n y_j\right)^{p-k}\right\}_{S_1} \left\{\sigma^k\right\}_{S_2}\right)\right)\end{aligned}$$

le maximum portant sur les ensembles de $p'+1$ multiindices $Q_1,\dots,Q_{p'},S$, $1\le p'\le |Q|$, qui vérifient $\forall 1\le j\le p,\ \ Q_j\in\mathbb{N}_1^n\setminus\hat{\mathcal{I}},\ \ |Q_j|<|Q|,\ \ S\in\mathbb{N}^n\setminus\hat{\mathcal{I}}\cup\{0\}$. En sommant sur $2\le p\le |Q|$, il vient alors

$$\delta_Q\tilde{\xi}_Q\le \max_{Q_1+\cdots+Q_{p'}+S=Q}\eta_{Q_1}\cdots\eta_{Q_{p'}}\left(\frac{a}{b^2}\sum_{p=2}^{|Q|}b^p\left\{\left(\sum_{j=1}^n y_j+\sigma\right)^p\right\}_Q\right),$$

le maximum portant sur les ensembles de $p'+1$ multiindices $Q_1,\dots,Q_{p'},S$, $1\le p'\le |Q|$, qui vérifient $\forall 1\le j\le p,\ \ Q_j\in\mathbb{N}_1^n\setminus\hat{\mathcal{I}},\ \ |Q_j|<|Q|,\ \ S\in\mathbb{N}^n\setminus\hat{\mathcal{I}}\cup\{0\}$. Par définition, on a alors $\delta_Q\tilde{\xi}_Q\le\delta_Q\eta_Q\sigma_Q$, soit $\tilde{\xi}_Q\le\eta_Q\sigma_Q$ car $\delta_Q\neq 0$. □

Suivant la démonstration de Bruno [Bru72], nous allons montrer le

LEMME 2.3. — *Il existe une constante $c>0$ telle que $\forall Q\in\mathbb{N}_2^n\setminus\hat{\mathcal{I}},\ \ \eta_Q\le c^{|Q|}$.*

Il est clair, au regard de la définition de la suite $\eta_Q$, que $\eta_Q$ est un produit de termes $1/\delta_{Q'}$ avec $|Q'|\le|Q|$. Pour un entier $k$, soit $\phi^{(k)}(Q)$ le nombre des $1/\delta_{Q'}$ intervenant dans ce produit et tels que $\delta_{Q'}<\omega(p_k)/2$. Le lemme précédent est une conséquence de la

PROPOSITION 2.2 (Estimation du nombre de petits diviseurs). — *Pour tout multiindice $Q\in\mathbb{N}_2^n\setminus\hat{\mathcal{I}}$, on a $\phi^{(k)}(Q)\le 2n\dfrac{|Q|}{p_k}$ si $|Q|\ge p_k+1$; et $\phi^{(k)}(Q)=0$ si $|Q|\le p_k$.*

Nous renvoyons la preuve à la section suivante.

Nous pouvons maintenant conclure quant à la majoration de $\eta_Q$. En effet, $\phi^{(k)}(Q)$ majore le nombre de facteurs $1/\delta_{Q'}$ figurant dans le produit définissant $\eta_Q$ et vérifiant $\omega(p_{k+1})/2\le\delta_{Q'}<\omega(p_k)/2$. Soit $l$ l'entier tel que $p_l+1\le|Q|<p_{l+1}+1$; on a alors

$$\eta_Q\le\prod_{k=0}^{l}\left(\frac{2}{\omega(p_{k+1})}\right)^{\phi^{(k)}(Q)}.$$

En prenant le Logarithme et en utilisant la proposition 2.2, on a

$$\begin{aligned}\ln\eta_Q&\le\sum_{k=0}^{l}2n\frac{|Q|}{p_k}\left(\ln\frac{2}{\omega(p_{k+1})}\right)\\&\le|Q|\left(-2n\sum_{k\ge0}\frac{\ln\omega(p_{k+1})}{p_k}+2n\ln 2\sum_{k\ge0}\frac{1}{p_k}\right)\end{aligned}$$

puisque $(\omega)$ est satisfaite; d'où $\eta_Q \leq c^{|Q|}$ pour une constante $c > 0$.

*Remarque 2.6.* — Comme le remarque Bruno [Bru72], il n'est pas nécessaire de supposer la convergence de $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{p_k}$ dans le cas qui nous intéresse ici – à savoir – $\lim_{k\to+\infty} \omega(p_k) = 0$. En effet, à partir d'un certain rang $k_0$, on a $\omega(p_k) \leq \omega(p_{k_0}) \leq 1$; ce qui amène à

$$\sum_{k\geq k_0} \frac{1}{p_k} \leq \frac{1}{-\ln \omega(p_{k_0})} \sum_{k\geq k_0} \frac{-\ln \omega(p_{k+1})}{p_k} < +\infty.$$

La convergence de $\tilde{\xi} = \bar{\xi}_1 + \cdots + \bar{\xi}_n$, et donc celle de $\xi = (\xi_i)_{1\leq i\leq n}$, est alors immédiate. En effet, $\sigma$ est analytique au voisinage de 0 donc il existe une constante $d > 0$ telle que pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $\sigma_Q \leq d^{|Q|}$. Par conséquent, d'après le lemme 2.2, on a, pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $\tilde{\xi}_Q \leq \sigma_Q \eta_Q \leq a^{|Q|}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$. Ceci montre la convergence du difféomorphisme *prénormalisant*.

Il nous reste à montrer que le champ de vecteurs, dans les nouvelles coordonnées, est analytique au voisinage de l'origine; c'est-à-dire que les séries $\psi_i$ convergent au voisinage de 0. Ceci se fait sans difficulté maintenant que l'on sait que $\xi$ est convergente. En effet, reprenons l'équation 2, en la projetant cette fois sur $\hat{\mathcal{I}}$. Puisque, par construction, les séries $\psi_i$ ont tous leurs termes non nuls dans l'idéal $\hat{\mathcal{I}}$ alors que $\sum_{|Q|\geq 2} \delta_{i,Q}\xi_{i,Q}y^Q$ n'en a aucun, on obtient, après une majoration large(remarque 2.4),

$$\bar{\psi}_j(y) \prec \bar{f}_j(y_1 + \bar{\xi}_1, \ldots, y_n + \bar{\xi}_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial y_k} \bar{\psi}_k. \tag{4}$$

La fonction $\bar{f}_j(y_1 + \bar{\xi}_1, \ldots, y_n + \bar{\xi}_n)$ est connue, analytique et 1-plate au voisinage de l'origine. On regarde donc les équations $v_j = \bar{f}_j(y_1 + \bar{\xi}_1, \ldots, y_n + \bar{\xi}_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial y_k} v_k$ dont les $v_j$ sont les inconnues, pour $1 \leq j \leq n$. Ces équations s'écrivent sous la forme $(\mathrm{Id}_n - D\bar{\xi}(y))v = \bar{f}(y_1 + \bar{\xi}_1, \ldots, y_n + \bar{\xi}_n)$ avec $v = (v_j)_{1\leq j\leq n}$ et $f = (f_j)_{1\leq j\leq n}$. Or, pour $y$ suffisamment petit, la matrice $(\mathrm{Id}_n - D\bar{\xi}(y))$ ($\mathrm{Id}_n$ désigne la matrice identité de $\mathbb{C}^n$) est inversible et $v = (\mathrm{Id}_n - D\bar{\xi}(y))^{-1}\bar{f}(y_1 + \bar{\xi}_1, \ldots, y_n + \bar{\xi}_n)$ est analytique au voisinage de l'origine, car la fonction $D\bar{\xi}(y)$ converge au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ et est nulle en ce point. On montre alors que $\psi_j \prec v_j$, pour $1 \leq j \leq n$. Ainsi, $\psi_j$ appartient à l'idéal $\mathcal{I}$ des fonctions analytiques au voisinage de l'origine engendré par $u = y^r$; ce qui conclut la preuve de la proposition. □

### 2.1. Fin de la preuve du théorème.

Reprenons la démonstration par récurrence du théorème 1.1. Nous venons de montrer qu'il est vrai pour $m = 0$, c'était l'objectif de la proposition 2.1. Supposons maintenant le théorème vrai à l'ordre $m$. Le système 1 s'écrit donc, dans un système de coordonnées analytiques locales au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$, sous la forme :

$$\dot{x}_j = x_j(\lambda_j + P_{j,m}(x^r)) + (x^r)^{m+1} f_j(x), \quad 1 \leq j \leq n \tag{5}$$

où les $f_j$ sont analytiques à l'origine ; si en outre $|r| = 1$ alors $f_j(0) = 0$, ceci afin d'assurer que $\mathrm{ord}(u^{m+1} f_j(x)) > m|r| + 1$. En effectuant le changement de coordonnées $x_j = y_j + \xi_j(y)$ analytiques au voisinage de l'origine, nous voulons transformer ce système en un système de la forme

$$\dot{y}_j = y_j(\lambda_j + P_{j,m+1}(y^r)) + (y^r)^{m+2} \tilde{g}_j(y), \quad 1 \leq j \leq n$$

où $P_{j,m+1}(U) \in \mathbb{C}[U]$ est un polynôme sans terme constant de degré inférieur ou égal à $m+1$ et $\tilde{g}_j(y)$ une fonction analytique, nulle en zéro lorsque $|r| = 1$. Ce changement de coordonnées se fait en deux étapes :

- la première étape consiste à faire un changement de variables polynomial $x_j = z_j + h_j(z)$, permettant de faire apparaître les termes résonnants $z_j u^{m+1} \partial_{z_j}$. On peut écrire $h_j = (z^r)^{m+1} \tilde{h}_j$ ; les polynômes $\tilde{h}_j$ sont de degré inférieur ou égal 1 ; si en outre $r = 1$, alors ils sont nuls en 0. Dans ce système de coordonnées locales, le système 5, s'écrit

  $$\dot{z}_j = z_j(\lambda_j + P_{j,m+1}(z^r)) + (z^r)^{m+1} g_j(z), \quad 1 \leq j \leq n$$

  où $P_{j,m+1}(U) \in \mathbb{C}[U]$ est un polynôme sans terme constant de degré inférieur ou égal à $m+1$ et $g_j(z)$ une fonction analytique telle que $g_j(0) = 0$ et $Dg_j(0) = 0$. De plus, il existe des nombres complexes $c_j$ tels que $P_{j,m+1}(U) - P_{j,m}(U) = c_j U^{m+1}$.
- la deuxième étape consiste à transformer le "reste" en un élément de l'idéal $\mathcal{I}_{m+2}$ des fonctions analytiques engendré par $(y^r)^{m+2}$ ; c'est-à-dire que, dans un système de coordonnées locales analytiques au voisinage de l'origine $z_j = y_j + \xi_j(y)$, le système précédent s'écrit sous la forme 6.

Ces deux étapes peuvent se traiter simultanément ; néanmoins, nous préférons les distinguer, quitte à accepter une certaine redondance.

Commençons par la première étape. Afin d'alléger l'écriture, nous la faisons dans le cas où $|r| \geq 2$. Le cas $|r| = 1$ se traite de manière identique, sauf qu'il y a un ordre de moins à enlever. Posons $R_{j,m}(x) =$

$x_j P_{j,m}(x^r)$, $\phi_j(x) = (x^r)^{m+1} f_j(x)$. En faisant le changement de variables $x_j = z_j + h_j(z)$, où $h_j$ est un polynôme de valuation $(m+1)|r|$ et de degré $(m+1)|r|+1$, on obtient un système

$$\dot{z}_j = z_j(\lambda_j + P_{j,m}(z^r)) + \psi_j(z), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Les relations entre les $\phi_j$, $\psi_j$ et $h_j$ s'obtiennent de la même manière que lors de la preuve de la proposition 2.1. On a alors, pour $1 \leq j \leq n$ :

$$(7) \quad \sum_{Q \in \mathbb{N}^n_{(m+1)|r|}} (\delta_{j,Q} h_{j,Q} + \psi_{j,Q}) z^Q = \phi_j(z+h) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial z_k}(R_{k,m} + \psi_k) + R_{j,m}(z+h) - R_{j,m}(z)$$

avec $\delta_{j,Q} = (Q, \lambda) - \lambda_j$. On résoud le problème formel de la manière suivante : Pour tout $1 \leq j \leq n$ et pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}^n_{(m+1)|r|}$, on pose :

– si $z^Q = z_j(z^r)^{m+1}$ ou $|Q| \geq (m+1)|r|+2$ alors,

$$\psi_{j,Q} = \left\{ R_{j,m}(z+h) - R_{j,m}(z) + \phi_j(z+h) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial z_k}(R_{k,m} + \psi_k) \right\}_Q$$

$$h_{j,Q} = 0$$

– si $z^Q \neq z_j(z^r)^{m+1}$ et $|Q| \leq (m+1)|r|+1$ alors,

$$h_{j,Q} = \frac{1}{\delta_{j,Q}} \left\{ R_{j,m}(z+h) - R_{j,m}(z) + \phi_j(z+h) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial z_k}(R_{k,m} + \psi_k) \right\}_Q$$

$$\psi_{j,Q} = 0$$

où $\{f(z)\}_Q$ désigne le coefficient de $z^Q$ dans le développement de Taylor de $f$. On a alors le

LEMME 2.4. — *La construction ci-dessus définit bien, par récurrence, les séries formelles $\psi_j$ et les polynômes $h_j$ et ils appartiennent à l'idéal $\hat{\mathcal{I}}_{m+1}$.*

*Preuve.* — Il s'agit de démontrer, par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice $Q$, que

$$A_{j,Q} \equiv \left\{ R_{j,m}(z+h) - R_{j,m}(z) + \phi_j(z+h) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial z_k}(R_{k,m} + \psi_k) \right\}_Q = 0 \quad \text{si } z^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}.$$

Pour tout multiindice $Q$ tel que $|Q| = (m+1)|r|$, on a

$$A_{j,Q} = \{\phi_j(z)\}_Q = \left\{(z^r)^{m+1} f_j(z)\right\}_Q .$$

Donc, si $z^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$, alors $A_{j,Q} = 0$. De plus, puisque $|Q| = (m+1)|r|$, si $z^Q \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$, alors $Q = (m+1)r$, et donc $\delta_{j,Q} = -\lambda_j \neq 0$( si une des valeurs propres était nulle, on serait dans le cas $|r| = 1$ et cette étape n'aurait pas lieu d'être car on commencerait à l'ordre $(m+1)|r|+1)$ ; donc, $h_{j,Q}$ et $\psi_{j,Q}$ sont bien définis.

Soit $k_0 \geq (m+1)|r|$ un entier. Supposons que pour tout multiindice $Q$ tel que $|Q| \leq k_0$ on ait

- $A_{j,Q} = 0$ si $z^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ ;
- les développements de Taylor à l'ordre $k_0$ de $\psi_j$ et de $h_j$ sont bien définis et appartiennent à $\hat{\mathcal{I}}_{m+1}$.

Commençons par réécrire les différents termes qui composent le membre de droite de l'équation 7.

$$\phi_j(z+h) = (z^r)^{m+1} f_j(z) + h_1(z) H_{1,j}(z, h_1, \ldots, h_n) + \cdots + h_n(z) H_{n,j}(z, h_1, \ldots, h_n),$$

$H_{1,j} \ldots, H_{n,j}$ étant des séries formelles en les $2n$ variables $z_1$, ..., $z_n, h_1$, ..., $h_n$. De plus, on a :

$$(8)\quad R_{j,m}(z+h) - R_{j,m}(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial R_{j,m}}{\partial z_k}(z).h_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 R_{j,m}}{\partial z_k \partial z_l}(z).h_k h_l + \cdots \text{ et}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial z_k} (R_{k,m}(z) + \psi_k(z)) = \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial h_j}{\partial z_k} P_{k,m}(z^r) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial z_k} \psi_k(z).$$

Soient alors $1 \leq j \leq n$ et $Q \in \mathbb{N}^n_{k_0+1}$. De l'équation 7, on obtient que $A_{j,Q}$ s'écrit comme la somme du terme

$$\left\{(z^r)^{m+1} f_j(z) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial z_k} \psi_k(z)\right\}_Q \text{ et des termes}$$

$$\left\{h_1(z) H_{1,j} + \cdots + h_n(z) H_{n,j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial R_{j,m}}{\partial z_k}(z).h_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 R_{j,m}}{\partial z_k \partial z_l}(z).h_k h_l + \cdots\right\}_Q \text{ et } \left\{\sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial h_j}{\partial z_k} P_{k,m}(z^r)\right\}_Q .$$

Par hypothèse de récurrence, ils sont nuls si $z^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$. De plus, si $|Q| \geq (m+1)|r|+1$, $z^Q \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ et $z^Q \neq z_j(z^r)^{m+1}$, alors $Q = (m+1)r+E_i$ avec $i \neq j$ ; donc $\delta_{j,Q} = \lambda_i - \lambda_j \neq 0$ car les valeurs propres sont simples. Cela permet de définir $h_{j,Q}$ et $\psi_{j,Q}$ de la manière décrite ; les développements de Taylor de $h_j$ et $\psi_j$ à l'ordre $k_0+1$ appartiennent à $\hat{\mathcal{I}}_{m+1}$

*Remarque 2.7.* — Pour le dernier terme, nous avons utilisé le fait que, pour tout multiindice $Q'$, si $h_{j,Q'} = 0$ alors $\left\{ z_k \dfrac{\partial h_j}{\partial z_k} \right\}_{Q'} = 0$.

Il est clair que le nouveau système obtenu à partir de ce changement de variables polynomial est analytique au voisinage de l'origine.

Ceci étant dit, nous supposons avoir réalisé la première étape, c'est-à-dire que le système est sous la forme

$$\dot{z}_j = z_j(\lambda_j + P_{j,m+1}(z^r)) + (z^r)^{m+1} g_j(z), \quad 1 \leq j \leq n$$

où $P_{j,m+1}(U) \in \mathbb{C}[U]$ est un polynôme sans terme constant, de degré inférieur ou égal à $m+1$ et $g_j(z)$ une fonction analytique telle que $g_j(0) = 0$ et $Dg_j(0) = 0$. On notera encore $\phi_j(z) = (z^r)^{m+1} g_j(z)$ et $R_{j,m+1}(z) = z_j P_{j,m+1}(z^r)$. Nous voulons que, dans un système de coordonnées $((m+1)|r|+1)$-plat à l'origine par rapport à l'identité $z_j = y_j + \xi_j(y)$ (c'est-à-dire que $\xi_j$ est d'ordre $(m+1)|r|+2$), et tel que $\xi_j(y) \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$, ce système s'écrive

$$\dot{y}_j = y_j(\lambda_j + P_{j,m+1}(y^r)) + \psi_j(y), \quad 1 \leq j \leq n$$

avec $\psi_j \in \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$. Les relations entre les $\phi_j$, $\psi_j$ et $\xi_j$ s'obtiennent de la même manière que lors de la preuve de la proposition 2.1. On a alors, pour $1 \leq j \leq n$ :

$$(9) \quad \sum_{Q \in \mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}} (\delta_{j,Q}\xi_{j,Q} + \psi_{j,Q}) y^Q = \phi_j(y+\xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k}(R_{k,m+1} + \psi_k) + R_{j,m+1}(y+\xi) - R_{j,m+1}(y)$$

avec $\delta_{j,Q} = (Q,\lambda) - \lambda_j$. On résoud le problème formel de la manière suivante : Pour tout $1 \leq j \leq n$ et pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}$, on pose :

– si $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$ alors,

$$\psi_{j,Q} = \left\{ R_{j,m+1}(y+\xi) - R_{j,m+1}(y) + \phi_j(y+\xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} (R_{k,m+1} + \psi_k) \right\}_Q$$

$$\xi_{j,Q} = 0$$

– si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$ alors,

$$\xi_{j,Q} = \frac{1}{\delta_{j,Q}} \left\{ R_{j,m+1}(y+\xi) - R_{j,m+1}(y) + \phi_j(y+\xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} (R_{k,m+1} + \psi_k) \right\}_Q$$

$$\psi_{j,Q} = 0$$

où $\{f(y)\}_Q$ désigne le coefficient de $y^Q$ dans le développement de Taylor de $f$.

LEMME 2.5. — *La construction ci-dessus définit bien, par récurrence, des séries formelles $\xi_j$ et $\psi_j$ solutions de 9 et qui appartiennent respectivement à l'idéal $\hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ et $\hat{\mathcal{I}}_{m+2}$.*

*Preuve.* — Il s'agit de démontrer, par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice $Q$, que

$$A_{j,Q} \equiv \left\{ R_{j,m+1}(y+\xi) - R_{j,m+1}(y) + \phi_j(y+\xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} (R_{k,m+1} + \psi_k) \right\}_Q = 0 \quad \text{si } y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}.$$

Pour tout multiindice $Q$ tel que $|Q| = (m+1)|r| + 2$, on a

$$A_{j,Q} = \{\phi_j(y)\}_Q = \left\{(y^r)^{m+1} f_j(y)\right\}_Q.$$

Donc, si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$, alors $A_{j,Q} = 0$. De plus, puisque $|Q| = (m+1)|r| + 2$, si $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ et $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$, alors $\delta_{j,Q} \neq 0$; en effet, si $\delta_{j,Q} = 0$ alors $Q = (m+1)r + E_j$ et donc $|Q| < (m+1)|r| + 2$. Ainsi, $\xi_{j,Q}$ et $\psi_{j,Q}$ sont bien définis.

Soit $k_0 \geq (m+1)|r|+2$ un entier. Supposons que pour tout multiindice $Q$ tel que $|Q| \leq k_0$ on ait

- $A_{j,Q} = 0$ si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ ;
- les développements de Taylor à l'ordre $k_0$ de $\psi_j$ (resp. $\xi_j$) appartiennent à $\hat{\mathcal{I}}_{m+2}$ (resp. $\hat{\mathcal{I}}_{m+1}$).

Commençons par réécrire les différents termes qui composent le membre de droite de l'équation 9.

$$\phi_j(y+\xi) = (y^r)^{m+1} f_j(y) + \xi_1(y) h_{1,j}(y, \xi_1, \dots, \xi_n) + \cdots + \xi_n(y) h_{n,j}(y, \xi_1, \dots, \xi_n),$$

$h_{1,j} \dots, h_{n,j}$ étant des séries formelles en les $2n$ variables $y_1, \dots, y_n, \xi_1, \dots, \xi_n$. De plus, on a :

$$R_{j,m+1}(y+\xi) - R_{j,m+1}(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial R_{j,m+1}}{\partial y_k}(y).\xi_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 R_{j,m+1}}{\partial y_k \partial y_l}(y).\xi_k \xi_l + \cdots, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} (R_{k,m+1}(y) + \psi_k(y)) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} P_{k,m+1}(y^r) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k(y).$$

Soient alors $1 \leq j \leq n$ et $Q \in \mathbb{N}^n_{k_0+1}$. De l'équation 7, on obtient que $A_{j,Q}$ s'écrit comme la somme du terme

$$\left\{ (y^r)^{m+1} f_j(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k(y) \right\}_Q \text{ et des termes}$$

$$\left\{ \xi_1(y) h_{1,j} + \cdots + \xi_n(y) h_{n,j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial R_{j,m+1}}{\partial y_k}(y).\xi_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 R_{j,m+1}}{\partial y_k \partial y_l}(y).\xi_k \xi_l + \cdots \right\}_Q \text{ et } \left\{ \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} P_{k,m+1}(y^r) \right\}_Q .$$

Par hypothèse de récurrence, ils sont nuls si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$. De plus, puisque $|Q| \geq (m+1)|r| + 2$, si $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ et $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$, alors $\delta_{j,Q} \neq 0$. Cela permet de définir $\xi_{j,Q}$ et $\psi_{j,Q}$ de la manière décrite ; les développements de Taylor de $\xi_j$ et $\psi_j$ à l'ordre $k_0 + 1$ appartiennent respectivement à $\hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ et $\hat{\mathcal{I}}_{m+2}$. □

Passons à la convergence des $\xi_j$ ; nous procédons de manière similaire à la preuve de la convergence de la proposition 2.1. D'après le lemme précédent, $\xi_j \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ donc $y_k \dfrac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$. Dans ce cas, puisque $R_{j,m+1}(y) = y_j P_{j,m+1}(y^r)$, avec $P_{j,m+1}(0) = 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} R_{k,m+1}(y) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} P_{k,m+1}(y^r) \in \hat{\mathcal{I}}_{m+2}.$$

De plus, par construction, $\psi_j$ est un élément de l'idéal $\hat{\mathcal{I}}_{m+2}$. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} (R_{k,m+1}(y) + \psi_k(y)) \in \hat{\mathcal{I}}_{m+2}.$$

De plus,

$$\phi_j(y+\xi) = \phi_j(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial y_k}(y).\xi_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y_k \partial y_l}(y).\xi_k \xi_l + \cdots$$

et $\dfrac{\partial \phi_j}{\partial y_k}(y)$ est $(m+1)|r|$-plate en 0, c'est-à-dire d'ordre supérieur ou égal à $(m+1)|r| + 1$. En vertu du lemme précédent, ainsi que de l'égalité précédente et de l'égalité 8, on a, pour tout $1 \leq j \leq n$, pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}$, tel que $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ et $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$,

$$\delta_{j,Q}\xi_{j,Q} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial R_{j,m+1}}{\partial y_k}(y).\xi_k + \phi_j(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial y_k}(y).\xi_k \right\}_Q$$

car, les $\xi_i$ appartenant à $\hat{\mathcal{I}}_{m+1}$, les produits $\xi_{k_1} \cdots \xi_{k_l}$, avec $l \geq 2$, appartiennent à $\hat{\mathcal{I}}_{l(m+1)} \subset \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$ ; en effet, puisque $l \geq 2$, alors $(l-1)m + l - 2 \geq 0$ donc $l(m+1) \geq m+2$.

*Remarque 2.8.* — L'ensemble des multiindices $Q \in \mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}$, tels que $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ et $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$, n'est autre que $(m+1)r + \mathbb{N}^n_2 \setminus \hat{\mathcal{I}}$, le translaté de $\mathbb{N}^n_2 \setminus \hat{\mathcal{I}}$ par $(m+1)r$.

On a alors, pour tout multiindice $Q \in (m+1)r + \mathbb{N}^n_2 \setminus \hat{\mathcal{I}}$,

$$|\delta_{j,Q}||\xi_{j,Q}| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y).\bar{\xi}_k + \bar{\phi}_j(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y).\bar{\xi}_k \right\}_Q .$$

On somme ces $n$ inégalités, on minore chaque $|\delta_{j,Q}|$ par $\delta_Q = \inf_{1\leq j\leq n}|\delta_{j,Q}|$ qui est est non nul; et après avoir utilisé les majorations

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y).\bar{\xi}_k \prec \left(\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y)\right).\sum_{j=1}^{n}\bar{\xi}_j \quad \text{et}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y).\bar{\xi}_k \prec \left(\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y)\right).\sum_{j=1}^{n}\bar{\xi}_j,$$

on obtient alors, pour tout multiindice $Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$,

$$\delta_Q\tilde{\xi}_Q \leq \left\{\left(\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y) + \sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y)\right)\tilde{\xi} + \sum_{j=1}^{n}\bar{\phi}_j\right\}_Q \tag{11}$$

où, comme précédement, on a posé

$$\tilde{\xi}_Q = \sum_{k=1}^{n}|\xi_{k,Q}|, \quad \tilde{\xi}(y) = \sum_{Q\in\mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}}\tilde{\xi}_Q y^Q \text{ et } \mathbb{N}_k^n\setminus\hat{\mathcal{I}} = \{Q\in\mathbb{N}_k^n \,|\, y^Q\notin\hat{\mathcal{I}}\}.$$

Construisons, par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice $Q$, la série $\sigma_{m+1}(y) = \sum_{Q\in(m+1)r+\mathbb{N}_2^n}\sigma_{Q,m+1}y^Q$ de la manière suivante :

$$\forall Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus (\mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}) \quad \sigma_{Q,m+1} = 0$$
$$\forall Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$$
$$\sigma_{Q,m+1} = \left\{\left(\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y) + \sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y)\right)\sigma_{m+1} + \sum_{j=1}^{n}\bar{\phi}_j\right\}_Q.$$

LEMME 2.6

*La série $\sigma_{m+1}$ est convergente dans un voisinage de $0.\in\mathbb{C}^n$,*

*- $\forall Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $\xi_Q \leq \sigma_{Q,m+1}\eta_{Q-(m+1)r}$*

*où $\{\eta_Q\}_{Q\in\mathbb{N}_1^n\setminus\hat{\mathcal{I}}}$ est la suite définie précédemment.*

*Preuve.* — Considérons en effet la fonction

$$G(y,v) = \left(\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y) + \sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y)\right)v + \sum_{j=1}^{n}\bar{\phi}_j - v.$$

La fonction $\left(\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y) + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y)\right)$ est nulle en 0. Les fonctions $G$ et $\frac{\partial G}{\partial v}$ sont analytiques en $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ et leurs valeurs en 0 sont respectivement 0 et $-1$. Le théorème des fonctions implicites donne alors l'existence d'une fonction analytique $\tilde{\sigma} = \sum_{Q} \tilde{\sigma}_Q y^Q$ au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$, telle que $G(y, \tilde{\sigma}(y)) = 0$ et $\tilde{\sigma}(0) = 0$; de plus, $\tilde{\sigma}$ est du même ordre que la fonction $\sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_j$, c'est-à-dire supérieur ou égal à $(m+1)|r| + 2$.

On montre, par récurrence sur la norme du multiindice $Q$, que pour tout multiindice $Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, on a

- $\tilde{\sigma}_Q = \sigma_{Q,m+1}$,
- $\xi_Q \leq \sigma_{Q,m+1} \eta_{Q-(m+1)r}$.

On remarquera que $\delta_Q = \delta_{Q+lr}$ avec $l \in \mathbb{N}$ car $(r, \lambda) = 0$. Pour tout multiindice $Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|Q| = (m+1)|r| + 2$, on a

$$\delta_Q \tilde{\xi}_Q \leq \left\{ \sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_j \right\}_Q = \tilde{\sigma}_Q = \sigma_{Q,m+1}.$$

Or, $1/\delta_{Q-(m+1)r} \leq \eta_{Q-(m+1)r}$ car on a $Q - (m+1)r = P + S$ avec $|P| = |S| = 1$, $(P, S) \in \left(\mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}\right)^2$; donc, $1 = \eta_P \leq \delta_{Q-(m+1)r} \eta_{Q-(m+1)r}$; d'où le résultat. Posons, pour simplifier,

$$h(y) = \sum_{Q \in \mathbb{N}_1^n} h_Q y^Q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y) + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y).$$

Soit $k_0 \geq (m+1)|r|+2$ un entier et supposons la proposition vraie pour tout multiindice $Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|Q| \leq k_0$. Soit $Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ un multiindice tel que $|Q| = k_0 + 1$. D'après la majoration 11, on a

$$\begin{aligned} \delta_Q \tilde{\xi}_Q &\leq \left\{ \left( \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y) + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y) \right) \tilde{\xi} + \sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_j \right\}_Q \\ &\leq \sum_{\substack{Q_1 \in \mathbb{N}_1^n, Q_2 \in \mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2} \\ Q_1 + Q_2 = Q}} h_{Q_1} \tilde{\xi}_{Q_2} + \left\{ \sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_j \right\}_Q \end{aligned}$$

la somme portant sur les couples de multiindices $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \times \left((m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}\right)$ tel que $|Q_1|, |Q_2| < |Q|$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}\delta_Q \tilde{\xi}_Q &\leq \sum_{\substack{Q_1 \in \mathbb{N}_1^n, Q_2 \in \mathbb{N}_{(m+1)|r|+2}^n \\ Q_1+Q_2=Q}} h_{Q_1} \eta_{Q_2-(m+1)r} \sigma_{Q_2,m+1} + \left\{\sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j\right\}_Q \\ &\leq \max_{\substack{Q_1 \in \mathbb{N}_1^n, Q_2 \in \mathbb{N}_{(m+1)|r|+2}^n \\ Q_1+Q_2=Q}} \eta_{Q_2-(m+1)r} \sum_{\substack{Q_1 \in \mathbb{N}_1^n, Q_2 \in \mathbb{N}_{(m+1)|r|+2}^n \\ Q_1+Q_2=Q}} h_{Q_1} \sigma_{Q_2,m+1} \\ &\quad + \left\{\sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j\right\}_Q\end{aligned}$$

la somme et le maximum portant sur les couples de multiindices $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \times \left((m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}\right)$ tel que $|Q_1|, |Q_2| < |Q|$. Or,

$$\begin{aligned}\max_{\substack{Q_1 \in \mathbb{N}_1^n, Q_2 \in \mathbb{N}_{(m+1)|r|+2}^n \\ Q_1+Q_2=Q}} \eta_{Q_2-(m+1)r} &= \max_{\substack{Q_1 \in \mathbb{N}_1^n, Q_2 \in \mathbb{N}_2^n \\ Q_1+Q_2=Q-(m+1)r}} \eta_{Q_2} \\ &\leq \delta_{Q-(m+1)r} \eta_{Q-(m+1)r}\end{aligned}$$

le premier maximum portant sur les couples de multiindices $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \times \left((m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}\right)$ tel que $|Q_1|, |Q_2| < |Q|$ alors que le deuxième porte sur les couples de multiindices $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \times \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|Q_1|, |Q_2| < |Q - (m+1)r|$. De plus, $1 \leq \delta_{Q-(m+1)r} \eta_{Q-(m+1)r}$. Donc, on obtient

$$\begin{aligned}\delta_Q \tilde{\xi}_Q &\leq \delta_{Q-(m+1)r} \eta_{Q-(m+1)r} \\ &\quad \times \left( \sum_{\substack{Q_1 \in \mathbb{N}_1^n, Q_2 \in \mathbb{N}_{(m+1)|r|+2}^n \\ Q_1+Q_2=Q}} h_{Q_1} \sigma_{Q_2,m+1} + \left\{\sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j\right\}_Q \right)\end{aligned}$$

la somme portant sur les couples de multiindices $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \times \left((m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}\right)$ tel que $|Q_1|, |Q_2| < |Q|$. D'autre part, par hypothèse

de récurrence, on a

$$\sigma_{Q,m+1} = \sum_{\substack{Q_1\in\mathbb{N}_1^n, Q_2\in\mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}\\ Q_1+Q_2=Q}} h_{Q_1}\sigma_{Q_2,m+1} + \left\{\sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j\right\}_Q$$

$$= \sum_{\substack{Q_1\in\mathbb{N}_1^n, Q_2\in\mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}\\ Q_1+Q_2=Q}} h_{Q_1}\tilde{\sigma}_{Q_2} + \left\{\sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j\right\}_Q = \tilde{\sigma}_Q.$$

De plus, puisque $(r,\lambda)=0$, alors $\delta_{Q-(m+1)r} = \delta_Q \neq 0$; on obtient donc

$$\tilde{\xi}_Q \leq \eta_{Q-(m+1)r}\sigma_{Q,m+1} \text{ et } \tilde{\sigma}_Q = \sigma_{Q,m+1}.$$

□

On conclut alors de manière identique à la preuve de la proposition 2.1 : la série $\tilde{\xi}$ est convergente au voisinage de l'origine. Il en est donc de même pour les séries $\xi_j$. La convergence des séries $\psi_j$ en est une conséquence; de plus, elles appartiennent à l'idéal $\hat{\mathcal{I}}_{m+2}$ donc $\psi_j \in \mathcal{I}_{m+2}$.

□

### 2.2. Preuve de la proposition d'estimation du nombre de petits diviseurs.

L'objet de cette section est de démontrer la propostion 2.2. Notre démonstration s'inspire de celle de A. Bruno [Bru72]. Dans cette section, $k$ désignera un entier fixé. Rappelons que $\mathbb{N}_k^n \setminus \hat{\mathcal{I}} = \{Q \in \mathbb{N}_k^n \,|\, y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}\}$, $\delta_Q = \inf_{1\leq i\leq n} |\delta_{i,Q}|$ et

$$\omega(p_k) = \inf\{|(Q,\lambda)-\lambda_i| \,|\, |(Q,\lambda)-\lambda_i| \neq 0, \quad i=1,\dots,n,\ Q\in\mathbb{N}^n,\ 2\leq|Q|\leq p_k\}.$$

Nous rappelons enfin que la suite $\{\eta_Q\}_{Q\in\mathbb{N}_1^n\setminus\hat{\mathcal{I}}}$ est definie par

1. $\forall P \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|P|=1$, $\eta_P = 1$ (de tels multiindices existent),
2. $\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$,

$$\delta_Q\eta_Q = \max_{\substack{Q_j\in\mathbb{N}_1^n, S\in\mathbb{N}^n\\ Q_1+\cdots+Q_p+S=Q}} \eta_{Q_1}\cdots\eta_{Q_p}$$

le maximum étant pris sur les ensembles de $p+1$, $1\leq p\leq|Q|$ multiindices $Q_1,\dots,Q_p,S$ tels que $\forall 1\leq j\leq p$, $Q_j\in\mathbb{N}_1^n$, $|Q_j|\leq|Q|-1$, $S\in\mathbb{N}^n$. Ces ensembles sont non-vides.

Cette suite est bien définie. En effet, si $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, alors il existe des multiindices $Q_1, \ldots, Q_p, S$ tels que $Q = Q_1 + \ldots + Q_p + S$, $\forall 1 \leq j \leq p$, $Q_j \in \mathbb{N}_1^n$, $|Q_j| \leq |Q| - 1$, $S \in \mathbb{N}^n$ ; dans ce cas, $\forall 1 \leq j \leq p$, $Q_j \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$. **Cette remarque sera constamment utilisée dans la suite.**

Il est clair, au regard de la définition de la suite $\eta_Q$, que $\eta_Q$ est, pour $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, un produit de termes $1/\delta_{Q'}$ avec $|Q'| \leq |Q|$ et $Q' \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$. Soit $\phi^{(k)}(Q)$, pour $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, le nombre des $1/\delta_{Q'}$ intervenant dans ce produit et tels que $\delta_{Q'} < \omega(p_k)/2$. Pour majorer ce nombre, nous considérons, pour tout entier $k$ et pour tout indice $1 \leq j \leq n$, pour $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, le nombre $\phi_j^{(k)}(Q)$ de $1/\delta_{Q'}$ intervenant dans $\eta_Q$ tels que

- $\delta_{Q'} = |(Q', \lambda) - \lambda_j| = |\delta_{j,Q'}|$ et
- $\delta_{Q'} < \omega(p_k)/2$.

C'est le nombre de "petits diviseurs atteints par $j$". Nous poserons $\forall P \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|P| = 1$, $\phi_j^{(k)}(P) = 0$. On a alors, pour tout $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$,

$$0 \leq \phi^{(k)}(Q) \leq \phi_1^{(k)}(Q) + \cdots + \phi_n^{(k)}(Q).$$

Pour tout entier $k$, pour tout indice $1 \leq j \leq n$, considérons la fonction définie sur $\mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ par

$$\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}, \quad \psi_j^{(k)}(Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta_Q = |\delta_{j,Q}| \text{ et } |\delta_{j,Q}| < \omega(p_k)/2 \\ 0 & \text{si } \delta_Q \neq |\delta_{j,Q}| \text{ ou } |\delta_{j,Q}| \geq \omega(p_k)/2. \end{cases}$$

Le lemme suivant va nous permettre de faire une récurrence.

LEMME 2.7. — *Soit $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $\psi_j^{(k)}(Q) = 1$. Si $Q = P + P'$ avec $(P, P') \in \mathbb{N}_1^n \times \mathbb{N}_2^n$ et $|P| \leq p_k - 1$, alors $(P, P') \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \times \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ et $\psi_j^{(k)}(P') = 0$.*

*Remarque 2.9.* — La suite d'entiers $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et $p_0 = 2$. Par conséquent, l'ensemble des $P \in \mathbb{N}_1^n$ tels que $|P| \leq p_k - 1$ n'est pas vide.

*Preuve.* — En effet, il est clair que si $Q = P + P' \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ alors $(P, P') \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \times \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$. Deux cas se présentent :

1. Si $\delta_{P'} \neq |\delta_{j,P'}|$ alors, par définition, $\psi_j^{(k)}(P') = 0$.
2. Si $\delta_{P'} = |\delta_{j,P'}|$, alors on a $(Q, \lambda) - \lambda_j = (P', \lambda) - \lambda_j + (P, \lambda)$; donc $|(P, \lambda)| \leq |\delta_{j,Q}| + |\delta_{j,P'}|$, soit $|\delta_{j,P'}| \geq |(P, \lambda)| - |\delta_{j,Q}|$. Puisque $\psi_j^{(k)}(Q) = 1$, alors $\delta_Q = |\delta_{j,Q}| < \omega(p_k)/2$, d'où $-|\delta_{j,Q}| > -\omega(p_k)/2$.

D'autre part, puisque $P \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ alors $(P,\lambda) \neq 0$. Soit alors $1 \leq i \leq n$ un indice quelconque; on a

$$\begin{aligned} 0 \neq |(P,\lambda)| &= |(P+E_i,\lambda) - \lambda_i| \\ &\geq \inf\{|(P+E_i,\lambda)-\lambda_l| \mid |(P+E_i,\lambda)-\lambda_l| \neq 0,\ 1 \leq l \leq n\}. \end{aligned}$$

De plus, $1 \leq |P| \leq p_k - 1$ donc $2 \leq |P+E_i| \leq p_k$. Or, par définition,

$$\begin{aligned} &\inf\{|(P+E_i,\lambda)-\lambda_l| \mid |(P+E_i,\lambda)-\lambda_l| \neq 0,\ 1 \leq l \leq n\} \geq \\ &\inf\{|(R,\lambda)-\lambda_l| \mid |(R,\lambda)-\lambda_l| \neq 0,\ l=1,\ldots,n,\ R \in \mathbb{N}^n,\ 2 \leq |R| \leq p_k\} \\ &\qquad = \omega(p_k). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $|(P,\lambda)| \geq \omega(p_k)$. D'où finalement, $|\delta_{j,P'}| \geq \omega(p_k)/2$ et $|\delta_{j,P'}| = \delta_{P'}$, c'est-à-dire, par définition de $\psi_j^{(k)}$, $\psi_j^{(k)}(P') = 0$.

□

On a alors, pour tout indice $1 \leq j \leq n$, pour tout entier $k$ et pour tout $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$,

$$0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq \psi_j^{(k)}(Q) + \max_{\substack{Q_j \in \mathbb{N}_1^n, S \in \mathbb{N}^n \\ Q_1+\cdots+Q_p+S=Q}} (\phi_j^{(k)}(Q_1) + \cdots \phi_j^{(k)}(Q_p)) \tag{12}$$

le maximum étant pris sur les ensembles de $p+1$, $1 \leq p \leq |Q|$ multiindices $Q_1,\ldots,Q_p,S$ tels que $\forall 1 \leq i \leq p,\ Q_i \in \mathbb{N}_1^n,\ |Q_i| \leq |Q|-1,\ S \in \mathbb{N}^n$. Ces ensembles sont non-vides et $\forall 1 \leq i \leq n, Q_i \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$. La propostion 2.2 est alors une conséquence immédiate du résultat suivant.

LEMME 2.8. — *Pour tout multindice $Q \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$*

$$\phi_j^{(k)}(Q) \begin{cases} = 0 \text{ si } |Q| \leq p_k \\ \leq 2\left[\dfrac{|Q|}{p_k}\right] - 1 \text{ si } |Q| \geq p_k + 1 \end{cases}$$

*où $[a]$ désigne la partie entière de $a$.*

*Preuve.* — Elle se fait par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice $Q$. Commençons par le cas $|Q| \leq p_k$. Par définition, $\forall P \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|P| = 1$, $\phi_j^{(k)}(P) = 0$. Soit $2 \leq k_0 \leq p_k$ un entier et supposons l'égalité vraie pour tout $Q' \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, tel que $|Q'| \leq k_0 - 1$. Soit $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que

$|Q| = k_0$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} 0 \neq |\delta_{j,Q}| &\geq \inf\{|(R,\lambda) - \lambda_l| \mid |(R,\lambda) - \lambda_l| \neq 0,\ l = 1,\dots,n, \\ &\qquad R \in \mathbb{N}^n,\ 2 \leq |R| \leq k_0\} \\ &\geq \inf\{|(R,\lambda) - \lambda_l| \mid |(R,\lambda) - \lambda_l| \neq 0,\ l = 1,\dots,n, \\ &\qquad R \in \mathbb{N}^n,\ 2 \leq |R| \leq p_k\} \\ &= \omega(p_k) \end{aligned}$$

car $k_0 \leq p_k$ ; on en déduit que $\psi_j^{(k)}(Q) = 0$ et donc

$$0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq \max_{\substack{Q_j \in \mathbb{N}_1^n, S \in \mathbb{N}^n \\ Q_1 + \cdots + Q_p + S = Q}} (\phi_j^{(k)}(Q_1) + \cdots \phi_j^{(k)}(Q_p))$$

le maximum étant pris sur les ensembles de $p+1$, $1 \leq p \leq |Q|$ multiindices $Q_1, \dots, Q_p, S$ tels que $\forall 1 \leq i \leq p,\ Q_i \in \mathbb{N}_1^n,\ |Q_i| \leq |Q| - 1,\ S \in \mathbb{N}^n$. Soient $Q_1, \dots, Q_p, S$ les multiindices qui réalise le maximum de cette inégalité. Puisqu'ils sont tous de norme inférieure à $k_0 - 1$ alors $\forall 1 \leq i \leq p, \phi_j^{(k)}(Q_i) = 0$ par hypothèse de récurrence ; on obtient donc $\phi_j^{(k)}(Q) = 0$.

Si $|Q| \geq p_k + 1$ alors supposons le maximum de l'inégalité 12 réalisé pour un entier $p$, et les multiindices $Q_1, \dots, Q_p$.

On a alors $0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq \psi_j^{(k)}(Q) + \phi_j^{(k)}(Q_1) + \cdots + \phi_j^{(k)}(Q_p)$. On peut ordonner les $Q_i$ de sorte que $|Q_1| \geq \cdots \geq |Q_p| > 0$. Soit alors $r$ tel que $|Q_r| \geq p_k + 1 > |Q_{r+1}|$ (Si toutes les normes sont inférieures à $p_k$, on pose $r = 0$). Deux cas se présentent :

1. Si $\psi_j^{(k)}(Q) = 0$, alors $0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq \phi_j^{(k)}(Q_1) + \cdots + \phi_j^{(k)}(Q_p)$.
   (a) Si $r = 0$ alors $\forall 1 \leq i \leq p$, $|Q_i| \leq p_k$ ; donc, par hypothèse de récurrence, $\forall 1 \leq i \leq p$, $\phi_j^{(k)}(Q_i) = 0$ et donc $\phi_j^{(k)}(Q) = 0$.
   (b) Si $r > 0$ alors $0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq \phi_j^{(k)}(Q_1) + \cdots + \phi_j^{(k)}(Q_r)$ ; donc, par hypothèse de récurrence, on a
   $$0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq \left(2\left[\frac{|Q_1|}{p_k}\right] - 1\right) + \cdots + \left(2\left[\frac{|Q_r|}{p_k}\right] - 1\right) \leq 2\left[\frac{|Q|}{p_k}\right] - 1.$$

2. $\psi_j^{(k)}(Q) = 1$, alors $0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq 1 + \phi_j^{(k)}(Q_1) + \cdots + \phi_j^{(k)}(Q_p)$.
   (a) Si $r = 0$ alors, par hypothèse de récurence, $\forall 1 \leq i \leq p$, $\phi_j^{(k)}(Q_i) = 0$ ; donc
   $$0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq 1 \leq 2\left[\frac{|Q|}{p_k}\right] - 1$$

car $|Q| \geq p_k + 1$.

(b) Si $r \geq 2$ alors, par hypothèse de récurrence, on a

$$0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq 1 + \left(2\left[\frac{|Q_1|}{p_k}\right] - 1\right) + \cdots + \left(2\left[\frac{|Q_r|}{p_k}\right] - 1\right)$$
$$\leq 2\left[\frac{|Q|}{p_k}\right] - (r-1).$$

(c) Si $r = 1$ alors $0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq 1 + \phi_j^{(k)}(Q_1)$. Deux cas se présentent :

i. Si $[|Q_1|/p_k] < [|Q|/p_k]$ alors $[|Q_1|/p_k] \leq [|Q|/p_k] - 1$ donc

$$0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq 1+2\left[\frac{|Q_1|}{p_k}\right]-1 \leq 2\left(\left[\frac{|Q|}{p_k}\right]-1\right) \leq 2\left[\frac{|Q|}{p_k}\right]-1.$$

ii. Si $[|Q_1|/p_k] = [|Q|/p_k]$ alors on a $Q = Q_1 + S$ avec $(S, Q_1) \in \mathbb{N}^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \times \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, et $|Q_1| \leq |Q| - 1$. On en déduit que $(S, Q_1) \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \times \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, car $S \neq 0$ et si $|Q_1| = 1$ alors, puisque $p_k \geq 2$ et $|Q| \geq p_k + 1$, $0 = [|Q_1|/p_k] = [|Q|/p_k] \geq 1$ ce qui n'est pas possible. De plus, $|S| \leq p_k - 1$ car, puisque $[|Q_1|/p_k] = [|Q|/p_k]$ alors $(|Q| - |Q_1|)/p_k < 1$ ; donc $|S| < p_k$. D'après le lemme 2.7, on a alors $\psi_j^{(k)}(Q_1) = 0$. Appliquons l'inégalité 12 à $Q_1$, en écrivant que le maximum est réalisé pour $p'$, $Q'_1, \ldots, Q'_{p'}$, on obtient

$$0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq 1 + \phi_j^{(k)}(Q'_1) + \cdots + \phi_j^{(k)}(Q'_{p'})$$

avec $Q_1 = Q'_1 + \cdots + Q'_{p'} + S'$, $Q'_j \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $S' \in \mathbb{N}^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \cup \{0\}$, et $\forall 1 \leq i \leq p'$, $|Q'_i| \leq |Q_1| - 1$. On a donc, $Q = Q'_1 + \cdots + Q'_{p'} + S' + S$ ; on ordonne ces multindices de manière décroissante ; soit alors $r'$ tel que $|Q_{r'}| \geq p_k + 1 > |Q_{r'+1}|$. On applique les arguments précédents aux $Q'_j$ (ceux du point (2)) ; dans les cas $(a), (b), (c)i$, on obtient les bonnes majorations :

$$0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq 2\left[\frac{|Q|}{p_k}\right] - 1.$$

Dans le dernier cas, c'est-à-dire le cas $r' = 1$ $(c)ii$, on a $[|Q'_1|/p_k] = [|Q_1|/p_k] = [|Q|/p_k]$ et $|Q'_1| < |Q_1| < |Q|$ ; on réapplique l'argument du cas $(c)ii$ en remarquant que l'on ne peut tomber dans ce dernier cas au plus $p_k - 1$ fois (car la

norme du multiindice décroît au moins d'une unité à chaque étape. Dans le pire cas, c'est-à-dire $\tilde{r} = 1$ après chaque réduction, on finit par obtenir $[|\tilde{Q}_1|/p_k] < [|Q|/p_k]$).

□

## 3. Remarques concernant les petits diviseurs.

### 3.1. Sur l'absence de petits diviseurs en dimension 2.

En dimension 2, les démonstrations de la proposition 2.1 de H. Dulac [Dul04], [Dul23] ou celles [MM80], [CS] dont nous nous sommes inspirés pour ce travail, ne font apparaître aucune hypothèse de *petits diviseurs diophantiens* : en fait, elle est automatiquement vérifiée. Nous allons voir que, dans ce cas, les nombres $|(Q,\lambda) - \lambda_i|$, lorsqu'ils ne sont pas nuls, sont tous minorés par une constantes $\epsilon > 0$ ; ils ne s'accumulent pas sur 0 lorsque $|Q| \to +\infty$. La démonstration de la proposition 2.1 s'achève donc avec la remarque 2.5.

Dans le cadre qui est le nôtre, deux cas se présentent, tous deux traités par H. Dulac :

1. $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$. Le vecteur $r$ est alors défini par $r = (1,0)$. Soit alors $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{N}_2^2$ un multiindice. On a, pour $i = 1,2$, $(Q,\lambda) - \lambda_j = q_2\lambda_2 - \lambda_j$. Dans tous les cas, on a $|(Q,\lambda) - \lambda_j| \geq (q_2 - 1)|\lambda_2| \geq |\lambda_2|$, si $q_2 \geq 2$.
2. $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\dfrac{q}{p}$, $p$ et $q$ étant des entiers non-nuls premiers entre eux. Dans ce cas, le vecteur $r$ est défini par $r = (p,q)$. Soit alors $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{N}_2^2$ un multiindice ; on peut l'écrire $Q = lr + Q'$ où $l \in \mathbb{N}$ et $Q' = (q_1', q_2')$ un multiindice tel que $q_1' < p$ ou $q_2' < q$. On a donc, pour $i = 1,2$, $(Q,\lambda) - \lambda_j = q_1'\lambda_1 + q_2'\lambda_2 - \lambda_j$. De plus, les nombres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont alignés dans le plan complexe et le segment qui les joint contient l'origine. En désignant par $\theta$ l'argument de $\lambda_1$, on a $(Q,\lambda) - \lambda_j = e^{i\theta}(q_1'|\lambda_1| - q_2'|\lambda_2| + (-1)^{j-1}|\lambda_j|)$. Il devient alors clair que les modules de ces nombres ne peuvent s'accumuler sur 0 car $q_1' < p$ ou $q_2' < q$.

Ce fait n'est plus vrai, en général, en dimension $n > 2$ puisque les combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs de deux des valeurs propres pourraient très bien s'accumuler sur la troisième, comme nous allons le voir.

### 3.2. Nécessité d'une condition arithmétique sur les $\lambda_i$.

Nous allons montrer, dans cette section, que pour que l'énoncé de la propostion 2.1 soit vrai en dimension $n > 2$, il est nécessaire d'imposer une condition arithmétique sur les $\lambda_i$. Nous ne démontrerons pas cependant que la condition $(\omega)$ est nécessaire.

Plus précisément, nous allons construire un contre-exemple en dimension 3. Cette construction est inspirée de celles faites par J.-P. Françoise dans sa thèse [Fra80]. La première valeure propre $\lambda_1$ sera prise nulle (donc $r = (1,0,0)$) tandis que les deux autres $\lambda_2$ et $\lambda_3$ seront prises de sorte que la condition de Bruno $(\omega)$ ne soit pas vérifiée; c'est-à-dire que l'on ne pourra trouver deux constantes positives $a$ et $b$, telles que $|q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3| \geq a\exp(-b(q_2+q_3))$ pour tout multiindice $(q_2,q_3) \in \mathbb{N}^2$. Soit alors les nombres

$$\omega_k = \min\left(|q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3| \neq 0,\ (q_2,q_3) \in \mathbb{N}^2,\ q_2+q_3 \leq 2^k\right).$$

Il revient au même de supposer que

$$\lim_{k\to+\infty} -\frac{\ln\omega_k}{2^k} = +\infty.$$

Soit alors une suite de multiindice $\alpha^k = (\alpha_2^k, \alpha_3^k) \in \mathbb{N}_2^2$ telle que $\omega_k = |\alpha_2^k\lambda_2 + \alpha_3^k\lambda_3|$. Quitte à réindexer, on peut supposer les $\alpha^k$ tous distincts. Considérons une fonction analytique au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ de la forme

$$v(x_2,x_3) = \sum_{k\geq 0} a_k x_2^{\alpha_2^k} x_3^{\alpha_3^k} \quad \text{avec} \quad |a_k| = 1$$

ainsi que le sytème d'équations différentielles analytiques au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^3$

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = & x_1 f(x_2,x_3) + v(x_2,x_3) \\ \dot{x}_2 = & \lambda_2 x_2 \\ \dot{x}_3 = & \lambda_3 x_3 \end{array}\right. \tag{13}$$

la fonction analytique $f$ étant nulle à l'origine.

Nous allons transformer ce système sous une forme normale *préliminaire*. Les deux dernières équations étant déjà sous la forme requise, nous ne transformerons que la première en posant $x_1 = y_1 + \xi_1(y)$( $x_2 = y_2$ et $x_3 = y_3$ ), ce qui donne $\dot{y}_1 = \psi_1(y)$. On reprend alors la construction formelle faite dans la preuve de la proposition 2.1 ; $\hat{\mathcal{I}}$ désignant l'idéal engendré par $y^r = y_1$, posons, pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^3$ :

– si $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}$ alors

$$\psi_{1,Q} = \{(y_1 + \xi_1(y))f(y_2, y_3) + v(y_2, y_3) - \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1}\psi_1(y)\}_Q$$
$$\xi_{1,Q} = 0$$

– si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}$ alors

$$\xi_{1,Q} = \frac{1}{\delta_{1,Q}}\{(y_1 + \xi_1(y))f(y_2, y_3) + v(y_2, y_3)\}_Q$$
$$= \frac{1}{\delta_{1,Q}}\{\xi_1(y)f(y_2, y_3) + v(y_2, y_3)\}_Q$$
$$\psi_{1,Q} = 0.$$

Mais, $\xi_1$ n'a aucun terme non-nul dans $\hat{\mathcal{I}}$, donc $\xi_1$ ne dépend pas de $y_1$ ; on a donc :

– si $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}$ alors

$$\psi_{1,Q} = \{y_1 f(y_2, y_3)\}_Q$$
$$\xi_{1,Q} = 0$$

– si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}$ alors

$$\xi_{1,Q} = \frac{1}{\delta_{1,Q}}\{\xi_1(y)f(y_2, y_3) + v(y_2, y_3)\}_Q$$
$$\psi_{j,Q} = 0.$$

On choisit les termes de $v$ de la manière suivante : Si $Q = (0, \alpha_2^k, \alpha_3^k)$ alors on prend $a_k$ de module 1 et d'argument $\arg(\{\xi(y)f(y_2, y_3)\}_Q)$. Dans ce cas, on a :

$$\forall k \geq 0, \quad |\xi_{1,(0,\alpha_2^k,\alpha_3^k)}| \geq \frac{1}{\omega_k}.$$

Il suit que la série $\sum_{k\geq 0} \xi_{1,(0,\alpha_2^k,\alpha_3^k)} x_2^{\alpha_2^k} x_3^{\alpha_3^k}$ divergent car

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{\omega_k}\right)^{\frac{1}{|\alpha^k|}} = \lim_{k\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{|\alpha_k|}\log\left(\frac{1}{\omega_k}\right)\right) = +\infty.$$

Ainsi, considérant la forme normale *préliminaire* analytique

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_1 f(x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = & \lambda_2 x_2 \\ \dot{x}_3 = & \lambda_3 x_3 \end{cases} \tag{14}$$

il existe un système analytique 13, qui admet le système 14 comme forme normale *préliminaire* mais dont le difféomorphisme normalisant formel est divergent à l'origine.

*Remarque 3.1.* — Le système 14 est bien une forme normale *préliminaire* et non pas une forme normale. En effet, les formes normales formelles, pour le triplet de valeurs propres $(0, \lambda_2, \lambda_3)$, sont de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_1 f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 = & x_2(\lambda_2 + f_2(x_1)) \\ \dot{x}_3 = & x_3(\lambda_3 + f_3(x_1)) \end{cases}$$

les $f_i$ étant des séries formelles en la variable $x_1$, 1-plates en 0.

## 4. Le cas à plusieurs résonances positives.

Dans cette section, nous montrons comment s'étend notre résultat lorsque les valeurs propres du système 1 vérifient des relations de résonances toutes engendrées par $l$ relations $(R_j, \lambda) = 0$ où $R_j \in \mathbb{N}^n$, $1 \leq j \leq l$; les $\{R_j\}_{1 \leq j \leq l}$ étant libres sur $\mathbb{Q}$. Ceci signifie que s'il on a $(Q, \lambda) = \lambda_s$ pour un multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^n$ et un indice $1 \leq s \leq n$ alors il existe $0 \neq (n_1, \ldots, n_l) \in \mathbb{N}^l$ tel que $Q = n_1 R_1 + \cdots + n_l R_l + E_j$ si $\lambda_j = \lambda_s$. Dans ce cas, les termes résonnants sont $(x^{R_1})^{n_1} \cdots (x^{R_l})^{n_l} x_j \partial_{x_i}$ avec $\lambda_i = \lambda_j$ et $0 \neq (n_1, \ldots, n_l) \in \mathbb{N}^l$.

Soit $\hat{\mathcal{I}}$ (resp. $\mathcal{I}$) un idéal des séries formelles (resp. des fonctions analytiques) qui contient tous les "monômes résonnants" $(y^{R_1})^{n_1} \cdots (y^{R_l})^{n_l} x_j$ pour $0 \neq (n_1, \ldots, n_l) \in \mathbb{N}^l$. On a alors la :

PROPOSITION 4.1. — *Sous les hypothèses précédentes et si la condition* $(\omega)$ *est satisfaite, il existe un système de coordonnées locales analytique au voisinage de* $0 \in \mathbb{C}^n$, $x = y + \xi(y)$, *dans lequel le système 1 s'écrit sous la forme :*

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + g_i(y), \quad 1 \leq i \leq n$$

*avec* $g_i \in \mathcal{I}$, *c'est-à-dire* $g_i(y) = \sum_{j=1}^{l} g_{i,j}(y) y^{R_j}$ ; *si* $|R_j| = 1$, *alors on a* $g_{i,j}(0) = 0$.

La démonstration est identique en tout point à celle de la proposition 2.1 ; il en est de même pour l'estimation du nombre de *petits diviseurs*.

Ce résultat nous fournit des variétés invariantes analytiques. En effet, soit $I_j$ l'ensemble des indices *résonnants* de $R_j$, c'est-à-dire, si $k \in I_j$ alors la $k$ième composante de $R_j$ est non-nulle. Soit l'ensemble $NR = [1,n] \setminus (\cup_{j=1}^{l} I_j)$ ; il est constitué des indices qui ne *résonnent* pas (il peut être vide). Soit $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par $y_{i_j}$, $i_j \in I_j$, et $y_k$, $k$ parcourant un sous-ensemble $A$ de $NR$. Alors d'après le théorème précédent, dans les nouvelles coordonnées, la variété

$$y_{i_j} = 0,\ i_j \in I_j,\ \ y_k = 0,\ \ k \in A$$

est invariante. Ce résultat, dans le cas d'une seule résonance, a été annoncé par J. Écalle [Eca92].

L'auteur exprime toute sa reconnaissance à B. Malgrange pour les remarques et suggestions qui ont permis d'améliorer la rédaction de cet article.

## BIBLIOGRAPHIE

[AA88] V. ARNOLD et D.V. ANOSOV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences : Dynamical Systems I, Springer-Verlag, 1988.

[Arn80] V. ARNOLD, Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, Mir, 1980.

[Bru72] A.D. BRUNO, The analytical form of differential equations, Trans. Mosc. Math. Soc., 25 (1971), 131-288; 26 (1972), 199-239.

[Bru89] A.D. BRUNO, Local methods in nonlinear differential equations, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer Verlag, 1989.

[CKP78] H. CAMACHO, N.H. KUIPER, et J. PALIS, The Topology of Holomorphic Flows with Singularity, I.H.E.S., 48 (1978), 5-38.

[CS] C. CAMACHO et P. SAD, Pontos singulares de equaçoes diferencais analiticas, 16 Coloquio Brasileiro de Matematica.

[DDS94] J. DELLA DORA et L. STOLOVITCH, Normal Forms of Differential Systems, 1994, Ed. E. Tournier, London Mathematical Society Lecture Note Series 193, p 143-184.

[Dul04] H. DULAC, Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, J. Ecole Polytechnique, 2,9 (1904), 1-125.

[Dul23] H. DULAC, Sur les cycles limites, Bull. Soc Math. France, 51 (1923), 45-188.

[Eca92] J. ÉCALLE, Singularités non abordables par la géométrie, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 42, 1-2 (1992), 73-164.

[Eli90] L.H. ELIASSON, Generalisation of an estimate of small divisors by Siegel, pages 283–299, Rabinowitz, Zehnder editors, Academic Press, analysis, et cetera edition, 1990.

[Fra80] J.-P. FRANÇOISE, Singularités en géométrie locale isochore et applications à l'étude des champs de vecteurs, PhD thesis, Université Joseph Fourier Grenoble, France, 1980.

[IP86] Yu.S. IL'YASHENKO et A.S. PYARTLI, Materialization of resonances and divergence of normalizing series for polynomial differential equations, J. Soviet Math., 31 (1986), 300-313.

[Mal82] B. MALGRANGE, Travaux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques, Sém. Bourbaki 1981-1982, exp. 582 (1982).

[Mar80] J. MARTINET, Normalisation des champs de vecteurs holomorphes, Séminaire Bourbaki, 33 (1980-1981), 564.

[MC88] R. MOUSSU et D. CERVEAU, Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C},0)$ et équations différentielles $ydy + \cdots = 0$, Bull. Soc. Math. France, 16 (1988), 459-488.

[MM80] J.-F. MATTEI et R. MOUSSU, Intégrales premières et holonomie, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 13 (1980) 469-523.

[MR85] J. MARTINET et J.P. RAMIS, Analytic Classification of Resonant Saddles and Foci, 1985, North-Holland.

[Pos86] J. POSCHEL, On invariant manifolds of complex analytic mappings near fixed points, Expo. Math., 4, (1986), 97-109.

[RM82] J.-P. RAMIS et J. MARTINET, Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre, I.H.E.S, 55 (1982), 63-164.

[RM83] J.-P. RAMIS et J. MARTINET, Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonantes du premier ordre, Ann. Sci. E.N.S, 4ème série, 16 (1983), 571-621.

[Sie42] C.L. SIEGEL, Iterations of analytic functions, Ann. Math., 43 (1942) 807-812.

[Yoc88] J.-C. YOCCOZ, Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C},0)$, C.R. Acad. Sci. Paris, 306 (1988) 55-58.

Manuscrit reçu le 9 mai 1994.

Laurent STOLOVITCH,
Institut Fourier
Laboratoire associé au CNRS
Université Joseph-Fourier
B.P. 74
38402 St Martin d'Hères Cedex (France).