ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL BERTHIER
ROBERT MOUSSU

Réversibilité et classification des centres nilpotents

Annales de l'institut Fourier, tome 44, nº 2 (1994), p. 465-494
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_2_465_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 2 (1994), 465–494

RÉVERSIBILITÉ ET CLASSIFICATION DES CENTRES NILPOTENTS

par M. BERTHIER et R. MOUSSU

INTRODUCTION

Soit $\omega = a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$ un germe de 1-forme différentielle analytique à singularité isolée à l'origine 0 de $\mathbb{R}^2$. On dit que le germe d'équation différentielle $\omega = 0$ est *monodromique* si à tout germe de courbe analytique $\tau : (\mathbb{R}^+, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ correspond un germe *d'application premier retour de Poincaré* P : pour $t > 0$ assez petit, la courbe intégrale orientée de $\omega = 0$ issue de $\tau(t)$ recoupe τ une première fois en $\tau(P(t))$. Si P est le germe de l'identité, les courbes intégrales sont des *cycles* et on dit que 0 est *un centre* de $\omega = 0$. Si ce n'est pas le cas, 0 est un point fixe isolé de P d'après le théorème de Dulac ([Du_1], [Ec], [Il]), les courbes intégrales de $\omega = 0$ spiralent autour de 0 et on dit que 0 est un *foyer* de $\omega = 0$.

Lorsque le portrait de phases de $\omega = 0$ est invariant par une involution qui renverse l'orientation, on dit que $\omega = 0$ est *réversible*. Plus précisément, $\omega = 0$ est *analytiquement réversible* (resp. C^∞ *réversible*) s'il existe un germe de difféomorphisme analytique (resp. C^∞) I de $(\mathbb{R}^2, 0)$ tel que :

$$I^*(\omega) \wedge \omega = 0, \quad I^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \quad \det DI(0) = -1.$$

Lorsque $\omega = 0$ est monodromique et analytiquement (resp. C^∞) réversible le point 0 est clairement un centre de $\omega = 0$ (voir [SaCo]). On dit alors que 0 est un *centre analytiquement réversible* (resp. C^∞ *réversible*). Il est naturel de poser le problème de la « réciproque » : à quelle(s) condition(s) un centre (d'un germe d'équation analytique) est-il analytiquement ou C^∞ réversible ?

Mots-clés : Équations différentielles ordinaires – Centres – Réversibilité – Désingularisation – Groupes de difféomorphismes – Classification analytique.
Classification A.M.S. : 34A26 – 34A99 – 32G34 – 32S65.

Rappelons les résultats connus sur cette question lorsque le jet d'ordre 1 de ω en 0, $j^1\omega$ n'est pas nul. Si 0 est un centre de $\omega = 0$, il est facile de prouver que $j^1\omega$ est la différentielle d'une forme quadratique q de signe constant. Lorsque q est définie ($q(v) \neq 0$ si $v \neq 0$), $\omega = 0$ est analytiquement linéarisable d'après le célèbre théorème de Poincaré-Liapounov ([Li], [Po], [Mo_1]). Dans des coordonnées linéarisantes, $\omega = 0$ s'écrit $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$ et il est invariant par la symétrie $(x, y) \mapsto (-x, y)$. Lorsque q n'est pas définie, on peut supposer que $j^1\omega = \mathrm{d}y^2$. La partie linéaire d'un champ de vecteurs dual de ω est alors nilpotente, on dit que 0 est un *centre nilpotent.* On sait d'après [Mo_2] qu'un centre nilpotent est toujours C^∞ réversible. Plus récemment, M. Brunella a établi la reversibilité analytique de centres nilpotents «génériques» [Br]. Nous généralisons ce résultat avec le théorème suivant :

THÉORÈME DE RÉVERSIBILITÉ. — *Un centre nilpotent d'un germe d'équation différentielle analytique $\omega = 0$ est analytiquement réversible.*

Le résultat que nous obtenons est plus précis que ce théorème. Nous prouvons l'existence et l'unicité d'un germe d'involution analytique I tel que $DI(0)$ soit la symétrie $(x, y) \longmapsto (-x, y)$ et qui laisse invariantes les courbes intégrales de $\omega = 0$ et les courbes $y = tx^n$ où $t \in \mathbb{R}$. Puisque I est périodique, I est linéarisable et on choisit des coordonnées (x, y) telles que $I = DI(0)$. Soit $F : (x, y) \mapsto (x^2, y)$ le germe d'application pli correspondant. On montre (chap. 5) qu'il existe un germe de 1-forme analytique θ, unique à un facteur multiplicatif près, tel que $F^*(\theta) \wedge \omega = 0$. C'est-à-dire que *l'équation $\omega = 0$ d'un centre analytique nilpotent est l'image réciproque par un pli F d'un germe d'équation analytique $\theta = 0$.*

Nous notons Θ l'ensemble de ces θ.

THÉORÈME DE CLASSIFICATION. — *Soient $\omega_k = 0$, où $k = 1, 2$, deux germes de centres analytiques nilpotents et soient θ_k, les éléments de Θ correspondants. Les ω_k sont analytiquement (resp. formellement) conjugués si et seulement si les θ_k le sont.*

La classification des éléments de Θ pour les relations de conjugaisons formelles–analytiques se trouvent dans les travaux de Martinet-Ramis [MaRa] et de Cerveau-Moussu [CeMo]. On peut, d'après le théorème précédent, en déduire celle des centres nilpotents. Donnons trois exemples qui illustrent une règle presque générale sur laquelle nous reviendrons dans le paragraphe 5 :

(i) 0 est un centre de $\omega = \mathrm{d}(y^2 + x^4) + x(x\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x) = 0$ et toute équation formellement conjuguée à $\omega = 0$ l'est analytiquement.

(ii) 0 est un centre de $\omega = \mathrm{d}(y^2 + x^4) + x(x^2 + y^2)(x\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x) = 0$ et il existe des germes formellement conjugués à $\omega = 0$ qui ne le sont pas analytiquement.

(iii) 0 est un centre de $\omega = \mathrm{d}(y^2 + x^6) + x^3(3x\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x) = 0$ et toute équation formellement conjuguée à $\omega = 0$ l'est analytiquement.

Le plan de cet article est le suivant. Après avoir rappelé des résultats de [CeMo] et [Mo_2] dans le premier paragraphe, nous montrons l'existence de « relations » entre l'holonomie projective et l'application de Poincaré dans le paragraphe 2. Dans le paragraphe 3, nous développons quelques outils techniques qui sont nécessaires pour les preuves des théorèmes de réversibilité et de classification. Ces dernières font l'objet des paragraphes 4 et 5.

1. FORME NORMALE ET DÉSINGULARISATION

Dans toute la suite $\omega = a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$ désigne un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$ de 1-forme analytique dont 0 est une singularité algébriquement isolée, c'est-à-dire que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel quotient $\mathbb{R}\{x, y\}/(a, b)$ est de dimension finie. On suppose en outre que 0 est un point singulier nilpotent, c'est-à-dire que la matrice du champ de vecteurs dual de $j^1\,\omega$ est nilpotente non nulle. Dans ce paragraphe, nous fixons les notations et rappelons certains des résultats de [Ta], [Mo_2], [CeMo] essentiels dans la preuve du théorème de réversibilité.

1.1. Forme normale des centres nilpotents.

En utilisant la dualité entre champs de vecteurs et 1-formes on déduit de [Ta] qu'il existe $m \geq 3$ et $G(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ tels que ω soit formellement conjugué à :

$$\widehat{\omega} = \mathrm{d}(y^2 + x^m) + G(x)\,\mathrm{d}y.$$

Dans [Mo_2], il est montré que $\omega = 0$ est monodromique si et seulement si $m = 2n$ et :

$$G(x) = \sum_{k \geq n} a_k x^k \quad \text{avec} \quad 0 \leq |a_n| < 4.$$

On prouve aussi que 0 est un centre de $\omega = 0$ si et seulement si en outre G s'écrit $G(x) = F(x^2)$ avec $F \in \mathbb{R}[[x]]$. En particulier, $\widehat{\omega}$ est invariant par la

symétrie $R : (x, y) \longmapsto (-x, y)$ et ainsi $\omega = 0$ est *formellement réversible*, c'est-à-dire qu'il existe $I = (I_1, I_2)$, avec $I_1, I_2 \in \mathbb{R}[[x, y]]$, tel que :

$$\mathrm{I}^*(\omega) \wedge \omega = 0, \quad I^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \quad \det DI(0) = -1.$$

Ces différents résultats sont résumés dans la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Le germe d'équation (nilpotent) $\omega = 0$ est monodromique si et seulement si il existe $n \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $|\alpha| < 1$, $g \in \mathbb{R}[x]$ avec $g(0) = 0$ tels que le jet d'ordre $(2n-1)$ de ω s'écrive dans des coordonnées convenables :*

$$j^{2n-1}\,\omega = \omega_{n,\alpha} = \mathrm{d}(y^2 + x^{2n}) + \big(4\alpha + g(x)\big)x^n\,\mathrm{d}y.$$

De plus, 0 est un centre si et seulement si $\omega = 0$ est formellement conjuguée à une 1-forme du type :

$$\widehat{\omega} = \mathrm{d}(y^2 + x^{2n}) + F(x^2)\,\mathrm{d}y, \quad F \in \mathbb{R}[[x]].$$

1.2. Complexification et désingularisation.

Soit $\omega = 0$ un germe analytique, monodromique, nilpotent et soient (x, y) des coordonnées analytiques réelles telles que $j^{2n-1}\,\omega$ soit du type $\omega_{n,\alpha}$. On note Ω et $\Omega_{n,\alpha}$ les 1-formes obtenues par complexification de ω et $\omega_{n,\alpha}$ respectivement. Si

$$\omega = a(x, y)\,\mathrm{d}x + b(x, y)\,\mathrm{d}y, \qquad a, b \in \mathbb{R}\{x, y\},$$

et si $(x_{\mathbb{C}}, y_{\mathbb{C}})$ désignent les coordonnées holomorphes en $0 \in \mathbb{C}^2$ obtenues par complexification de (x, y), on a :

$$\Omega = a(x_{\mathbb{C}}, y_{\mathbb{C}})\,\mathrm{d}x_{\mathbb{C}} + b(x_{\mathbb{C}}, y_{\mathbb{C}})\,\mathrm{d}y_{\mathbb{C}}.$$

Dans la suite, nous omettrons l'indice $\mathbb{C}$ qui désigne la complexification des coordonnées afin d'alléger l'écriture ; nous écrirons abusivement :

$$(x_{\mathbb{C}}, y_{\mathbb{C}}) = (x, y) \quad \text{et} \quad \Omega = a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y.$$

On vérifie facilement que Ω et $\Omega_{n,\alpha}$ sont « désingularisés » par le même morphisme π (*cf.* [CeMo]). Les « désingularisations » de Ω et $\Omega_{n,\alpha}$ ont les mêmes points singuliers et en ces points les mêmes jets d'ordre 1. La proposition suivante décrit cette désingularisation (on se reportera à [CeMo] et [Ma Mo] pour les notations et définitions utilisées ici).

PROPOSITION. — *La résolution $\pi : (M, D) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ de Ω et $\Omega_{n,\alpha}$ est la composée de n éclatements ponctuels*

$$\pi_k : (M_k, D_k) \longrightarrow (M_{k-1}, \mathrm{D}_{k-1})$$

des points réels $m_{k-1} \in D_{k-1}$ pour $k = 1, 2, ...n$, avec les conventions :

$$(M_0, D_0) = (\mathbb{C}^2, 0), \quad (M, D) = (M_n, D_n).$$

Le diviseur exceptionnel D est une chaîne de n droites projectives P_k qui se coupent aux points $m_k = P_k \cap P_{k+1}$. La structure de (M, D) est donnée par les n cartes (x'_k, x_{k+1}) centrées aux points m_k et deux autres cartes (x'_1, y), (t, x) centrées respectivement aux points $\underline{\infty} \in D_1$ et $\underline{0} \in D_n$ liées par les relations :

$$x_1 x'_1 = x_2 x'_2 = \cdots = x_{n-1} x'_{n-1} = t x_n = 1,$$

$$y = x x_1, \quad x_1 = x x_2, \quad \ldots \quad , \quad x_{n-1} = t x.$$

Les premières correspondent à la restriction des changements de cartes aux droites projectives P_k, les secondes aux éclatements successifs $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$. Les points singuliers de l'éclaté divisé de Ω sont les points m_k et les deux points $\underline{t}_\alpha$, $\underline{\overline{t}}_\alpha \in P_n$ de coordonnées $(t_\alpha, 0)$, $(\overline{t_\alpha}, 0)$ dans la carte (t, x), où t_α et $\overline{t_\alpha}$ sont les racines du polynôme $t^2 + 2\alpha t + 1 = 0$ (voir figure 1).

Figure 1

La restriction $\pi_{\mathbb{R}}$ de π à $M_{\mathbb{R}} = \pi^{-1}(\mathbb{R}^2)$ est la désingularisation réelle de ω. Les restrictions des cartes à $M_{\mathbb{R}}$ sont les cartes qui définissent la structure algébrique réelle de $M_{\mathbb{R}}$. Le diviseur réel $D_{\mathbb{R}} = M_{\mathbb{R}} \cap D$ est la chaîne de cercles $S_k = M_{\mathbb{R}} \cap P_k$. Le fibré normal à S_k dans $M_{\mathbb{R}}$ est trivial pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$ et il est isomorphe à une bande de Mœbius

pour $k = n$. $M_{\mathbb{R}}$ est obtenue en collant aux points $m_k \in S_k \cap S_{k+1}$ des «anneaux» A_k, A_{k+1} homéomorphes à $S^1 \times \mathbb{R}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n-2$ et en recollant à l'anneau A_{n-1} une bande de Mœbius au point m_{n-1}.

Dans la carte (t, x), l'éclaté divisé de $\pi^*\Omega$ s'écrit

$$\Omega_1 = \frac{\pi^*\Omega}{x^{2n-1}} = 2n(1 + t^2 + 2t\alpha + \cdots)\,\mathrm{d}x + x(2t + 4\alpha + \cdots)\,\mathrm{d}t$$

et son jet d'ordre 1 au point singulier $\underline{t}_\alpha = (t_\alpha, 0)$ a pour expression

$$j^1\,\Omega_1 = 2n\; i\sqrt{1-\alpha^2}\,v\,\mathrm{d}x + \big(\alpha + i\sqrt{1-\alpha^2}\,\big)x\,\mathrm{d}v,$$

avec $v = t - t_\alpha$. Son jet d'ordre 1 en $\overline{\underline{t}_\alpha}$, s'obtient en changeant i en $-i$.

1.3. Séparatrices et fibration transverse.

Compte tenu de l'écriture de $j^1\,\Omega$ aux points $\underline{t}_\alpha$, $\overline{\underline{t}_\alpha}$, l'équation $\Omega_1 = 0$ possède en ces points des séparatrices S, $\bar{S}$ tangentes aux droites $t = t_\alpha$, $t = \overline{t_\alpha}$. De plus, $\Omega_1 = 0$ étant la complexifiée d'une équation réelle $\omega_1 = 0$, leurs équations dans la carte (t, x) sont conjuguées. Leurs images $C = \pi(S)$, $\bar{C} = \pi(\bar{S})$ par π sont des germes de courbes conjuguées, tangentes à l'ordre n à l'axe $y = 0$ puisque l'on a la relation $y = tx^n$. On peut choisir les coordonnées initiales (x, y) réelles telles que l'on ait

$$C = \{y - t_\alpha x^n = 0\}, \quad \bar{C} = \{y - \overline{t_\alpha} x^n = 0\}$$

dans les coordonnées complexes correspondantes. Reprenons le raisonnement de l'assertion 1, p. 178, de [CeMo]. Notons P_α le polynôme défini par :

$$P_\alpha(x, y) = y^2 + 2\alpha y x^n + x^{2n} = (y - t_\alpha x^n)(y - \overline{t_\alpha} x^n) = 0.$$

Puisque C, $\bar{C}$ sont des séparatrices de Ω et de $\eta = ny\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$, il existe H_1, $H_2 \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tels que :

$$\begin{cases} \Omega \wedge \mathrm{d}P_\alpha = H_1 P_\alpha\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \\ \Omega \wedge \eta = H_2 P_\alpha\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \end{cases}$$

Puisque Ω, η et P_α sont à coefficients réels, il en va de même pour H_1 et H_2. De $\mathrm{d}P_\alpha \wedge \eta = -2nP_\alpha\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, on déduit l'égalité :

$$-2n\Omega = H_2\,\mathrm{d}P_\alpha - H_1\eta \quad \text{avec} \quad H_2(0,0) \neq 0.$$

On a prouvé la :

PROPOSITION 1.4. — *Soit $\omega = 0$ un germe d'équation analytique monodromique nilpotent. Alors il existe des coordonnées analytiques de $(\mathbb{R}^2, 0)$ dans lesquelles ω s'écrit*

$$(*) \qquad \omega = \mathrm{d}(y^2 + 2\alpha y x^n + x^{2n}) + g(x,y)(ny\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y),$$

où n est un entier ≥ 2, α est un réel avec $|\alpha| < 1$, g un élément de $\mathbb{R}\{x,y\}$ tel que $g(x,0)$ soit d'ordre supérieur ou égal à n.

Dans ces mêmes coordonnées, considérées comme coordonnées holomorphes, Ω possède un représentant holomorphe sur un voisinage U de 0 qui s'écrit sous la même forme (*). On choisit U tel que 0 soit l'unique point singulier de Ω et tel que :

$$\Omega \wedge (ny\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y) \neq 0 \quad \text{si} \quad (x,y) \in U \setminus C \cup \overline{C}.$$

L'équation $\Omega = 0$ définit un feuilletage non singulier de $U \setminus \{0\}$ transverse aux courbes $x = 0$ et $y = tx^n$ pour $t \in \mathbb{C}$. Son image réciproque par π s'étend en un feuilletage non singulier $\pi^*\mathcal{F}$ de

$$\widetilde{U} = \pi^{-1}(U) \setminus \{m_1,\ m_2, \ldots, m_{n-1}, \underline{t}_\alpha, \overline{\underline{t}_\alpha}\}.$$

Les droites projectives P_k sont des séparatrices aux points m_k. La restriction $\mathcal{F}_1$ de $\pi^*\mathcal{F}$ à l'ouvert

$$U_1 = \widetilde{U} \setminus \{x_1' = 0\} \cup P_1 \cup \cdots P_{n-1} \cup S \cup \overline{S}$$

est un feuilletage transverse au feuilletage défini par :

$$\frac{\pi^*(ny\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)}{x^{n+1}} = \mathrm{d}t.$$

Puisque U_1 est contenu dans le domaine de définition de la carte (t,x), ceci s'énonce encore (en identifiant ce domaine de définition et $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$) : *$\mathcal{F}_1$ est un feuilletage de U_1 défini par Ω_1 transverse aux fibres de la projection $p : (t,x) \mapsto t$.* Soulignons que cette structure est attachée à l'écriture (*) de ω, c'est-à-dire aux coordonnées (x,y) choisies.

2. HOLONOMIE ET APPLICATION DE POINCARÉ

Dans tout ce paragraphe, $\omega = 0$ désigne de nouveau un germe d'équation analytique, monodromique et nilpotent. On choisit des coordonnées (x,y) dans lesquelles ω s'écrit sous la forme (*) et on reprend

les notations, définitions du paragraphe précédent. On identifie la feuille $\mathcal{L}_0 = P_n \cap U_1$ de $\mathcal{F}_1$ avec $\mathbb{C} \setminus \{t_\alpha, \overline{t_\alpha}\}$ et on note $\underline{t}$ le point de U_1 de coordonnées $(t, 0)$ dans la carte (t, x).

2.1. Holonomie projective.

La *représentation d'holonomie projective* de Ω est la représentation d'holonomie de $\mathcal{L}_0$ pour $\mathcal{F}_1$, évaluée sur la courbe $t = 0$ paramétrée par x. Nous la notons :

$$\mathcal{H}_\Omega : \pi_1(\mathcal{L}_0, \underline{0}) \longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbf{C}, 0).$$

Son image H_Ω est le *groupe d'holonomie projective de* Ω. Soient $\gamma, \overline{\gamma}$ les générateurs de $\pi_1(\mathcal{L}_0, \underline{0})$ représentés par des lacets en $\underline{0}$ d'indice 1 autour de $\underline{t}_\alpha$ et $\overline{\underline{t}_\alpha}$ construits de la façon suivante : désignons par δ_d et δ_g les chemins représentés par les segments (orientés) reliant $\underline{0}$ à $\underline{1}$, $\underline{0}$ à $-\underline{1}$ et par γ_+, γ_- les demi-cercles joignant $\underline{1}$ à $-\underline{1}$, $-\underline{1}$ à $\underline{1}$. Alors on a (Fig. 2) :

$$\gamma = \delta_d \cdot \gamma_+ \cdot \delta_g^{-1}, \quad \overline{\gamma} = \delta_g \cdot \gamma_- \cdot \delta_d^{-1}$$

Figure 2

Enfin, on pose :

$$\beta = \gamma \cdot \overline{\gamma}, \quad h = \mathcal{H}_\Omega(\gamma), \quad \bar{h} = \mathcal{H}_\Omega(\overline{\gamma}), \quad f = \mathcal{H}_\Omega(\beta).$$

PROPOSITION [CeMo]. — *Le germe de difféomorphisme f est périodique de période n.*

Preuve. — Il est clair que β est un lacet d'indice -1 autour de m_{n-1} dans P_n. D'autre part, le germe de $\pi^*\Omega$ en ce point possède une intégrale première qui s'écrit $x_n' \; x_{n-1}^n$ à une unité multiplicative près. Ainsi, le difféomorphisme d'holonomie de P_n considéré comme séparatrice de $\pi^*\Omega$ en m_{n-1}, est périodique de période n.

2.2. Demi-application de Poincaré.

La trace sur $\mathbb{R}^2$ de $\mathcal{F}$ est le feuilletage réel, $\mathrm{Re}\,\mathcal{F}$, défini par $\omega = 0$. Il est encore transverse aux courbes $y = tx^n$, $t \in \mathbb{R}$ et à l'axe $x = 0$. Pour

$x > 0$ assez petit la feuille $\mathcal{L}_x$ de $\operatorname{Re}\mathcal{F}$ passant par $(x, 0)$ parcourue dans le sens direct coupe une première fois $\mathbb{R}^- \times \{0\}$ en un point $(P^+(x), 0)$. On note ℓ_x^+ l'arc de $\mathcal{L}_x$ reliant ces deux points (Fig. 3).

Figure 3

Le germe d'application

$$P^+ : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^-, 0), \quad x \longmapsto P^+(x)$$

ainsi défini est appelé la *demi-application de Poincaré supérieure.* On définit de même la *demi-application de Poincaré inférieure* de $(\mathbb{R}^-, 0)$ dans $(\mathbb{R}^+, 0)$. L'application de Poincaré évaluée sur $\mathbb{R}^+ \times \{0\}$ est évidemment le composé $P = P^- \circ P^+$.

L'image réciproque par π de ℓ_x^+ est un chemin $\pi^{-1}(\ell_x^+)$ dans une feuille $\mathcal{L}_x$ de $\pi^*\mathcal{F}$ d'origine le point $\widetilde{x}$, d'extrémité $\widetilde{P}^+(x)$ en écrivant, dans la carte (t, x)

$$\widetilde{x} = (0, x), \quad \widetilde{P}^+(x) = \big(0, P^+(x)\big).$$

PROPOSITION. — *Pour $\epsilon = \pm$, les germes en 0 des demi-applications de Poincaré P^ϵ sont des restrictions à $\mathbb{R}^\epsilon$ d'éléments de H_Ω notés $\widetilde{P}^\epsilon$.*

Preuve. — L'arc ℓ_x^+ coupe $x = 0$ en unique point. Son image réciproque $\pi^{-1}(\ell_x^+)$ coupe $\pi^{-1}(x = 0)$ en unique point de coordonnées $(0, y(x))$ dans la carte (x_1', y). Nous allons légèrement déformer $\pi^{-1}(\ell_x^+)$ en un chemin $\widetilde{\ell}_x^+$ qui contourne la droite $x_1' = 0$ (Fig. 4 page suivante).

Fixons $\eta > 0$ petit ; alors $\pi^{-1}(\ell_x^+)$ coupe les droites $x_1' = \eta$ et $x_1' = -\eta$ en des points :

$$p_0(x) = \big(-\eta, y_0(x)\big), \quad p_1(x) = \big(\eta, y_1(x)\big).$$

On note $\widetilde{\ell}_x'$ et $\widetilde{\ell}_x'''$ les sous-arcs de $\pi^{-1}(\ell_x^+)$ joignant $\widetilde{x}$ à $p_0(x)$ et $p_1(x)$ à $\widetilde{P}^+(x)$. Soit $\widetilde{\ell}_x''$ l'unique chemin dans $\mathcal{L}_x$ qui relie $p_0(x)$ à $p_1(x)$ et qui

Figure 4

s'écrit dans la carte (x_1', y)

$$\widetilde{\ell}_x'' : \theta \longmapsto \big(\eta\, \mathrm{e}^{-i\pi\theta}, y(x,\theta)\big), \qquad \theta \in [0,1], \tag{2.2.1.}$$

avec $y(x,0) = y_0(x)$ et $y(x,1) = y_1(x)$. Par construction, le chemin

$$\widetilde{\ell}_x^+ = \widetilde{\ell}_x' \cdot \widetilde{\ell}_x'' \cdot \widetilde{\ell}_x'''$$

est un chemin dans $\mathcal{L}_x \cap U_1$ qui joint $\widetilde{x}$ à $\widetilde{P}^+(x)$. Son image par la projection $(t,x) \mapsto t$ est un lacet δ_x^+ en $\underline{0}$ dans $\mathcal{L}_0$ qui dépend continûment de x. Pour $x > 0$ assez petit, les lacets δ_x^+ représentent le même élément δ^+ de $\pi_1(\mathcal{L}_0, \underline{0})$. Par construction, le relèvement de δ^+ d'origine $\widetilde{x}$ dans $\mathcal{L}_x$ a pour extrémité $\widetilde{P}^+(x)$. Par définition de $\mathcal{H}_\Omega$, pour $x > 0$ petit, on a :

$$\mathcal{H}_\Omega(\delta^+)(x) = \widetilde{P}^+(x).$$

On montre de même que P^- est la restriction à $\mathbb{R}^-$ d'un $\mathcal{H}_\Omega(\delta^-) = \widetilde{P}^-(x)$. □

Remarque. — Le résultat de Liapounov [Li], [Mo$_2$], «l'application de Poincaré d'un germe nilpotent monodromique est analytique» est une conséquence de cette proposition puisque $P = P^- \circ P^+$ appartient à H_Ω.

2.3. Calcul de $\widetilde{P}^+$ et $\widetilde{P}^-$.

Nous allons montrer avec les notations de 2.1 que :

$$\widetilde{P}^+ = \widetilde{P}^- = h \circ f^m \qquad \text{si } n = 2m+1, \tag{2.3.1}$$

$$\widetilde{P}^+ = h^{-1} \circ \widetilde{P}^- \circ h = f^m \quad \text{si } n = 2m. \tag{2.3.2}$$

Reprenons les notations de 2.2 et soient δ'_x, δ''_x, δ'''_x les projections sur $\mathcal{L}_0$ de $\widetilde{\ell}'_x$, $\widetilde{\ell}''_x$, $\widetilde{\ell}'''_x$. Dans la carte t sur $\mathcal{L}_0$, δ'_x, δ'''_x sont des chemins réels : δ'_x joint 0 à un point $a(x) > 0$ et δ'''_x joint un point $b(x)$ réel au point 0. Étudions δ''_x. Puisque les cartes (t, x) et $(x'_1,\ y)$ sont liées par les relations

$$y = tx^n, \quad x = yx'_1,$$

la paramétrisation de $\widetilde{\ell}''_x$ dans (t, x) s'écrit

$$\theta \longmapsto \big(t(x,\theta), x(x,\theta)\big), \qquad \theta \in [0,1],$$

où $t(x,\theta)$ est déterminé, à partir de 2.2.1, par la relation :

$$t(x,\theta) = y^{1-n}(x,\theta)\,\mathrm{e}^{i\pi n\theta}.$$

Puisque $y = (x,\theta)$ a un argument voisin de 0 et que $y(x,0)$, $y(x,1)$ sont réels positifs, la classe d'homotopie dans $\mathcal{L}_0$ de δ''_x avec origine $a(x)$ et extrémité $b(x)$ fixées est la même que celle du chemin :

$$\theta \longmapsto \big|y^{1-n}(x,\theta)\big|\,\mathrm{e}^{i\pi n\theta}, \qquad \theta \in [0,1].$$

Remarquons que l'on a bien :

$$a(x) = y(x,0) > 0, \quad b(x) = (-1)^n y(x,1) \in \mathbb{R}.$$

La classe d'homotopie de $\delta^+_x = \delta'_x \cdot \delta''_x \cdot \delta'''_x$ est la même que celle du composé $\delta' \cdot \delta'' \cdot \delta'''$, où

$$\delta'' : \theta \longmapsto \mathrm{e}^{in\pi\theta}, \qquad \theta \in [0,1],$$

et où δ' est le chemin δ_d de 2.1. Notons encore c le chemin :

$$c : \theta \longmapsto \mathrm{e}^{2i\pi n\theta}, \qquad \theta \in [0,1].$$

Figure 5

Figure 6

Distinguons deux cas pour définir le chemin δ''' (figures 5 et 6).

(1) Si $n = 2m+1$, δ''' est le chemin δ_g^{-1}. La classe d'homotopie de δ^+ s'écrit, avec les notations de 2.1 :

$$\delta^+ = \delta' \cdot \delta'' \cdot \delta''' = \delta_d \cdot c^m \cdot \gamma_+ \cdot \delta_g^{-1},$$

$$\delta^+ = \delta_d \cdot c^m \cdot \delta_d^{-1} \cdot \delta_d \cdot \gamma_+ \cdot \delta_g^{-1} = \beta^m \cdot \gamma.$$

(2) Si $n = 2m$, δ''' est le chemin δ_d^{-1}. La classe d'homotopie de δ^+ s'écrit :

$$\delta^+ = \delta_d \cdot c^m \cdot \delta_d^{-1} = \beta^m.$$

Les calculs de P^- ou plutôt δ^- se font de façon analogue. En écrivant que $P = \mathrm{P}^- \circ P^+$, on déduit immédiatement des formules 2.3.1 et 2.3.2 le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Le point* 0 *est un centre si et seulement si* :

(i) $\widetilde{P}^+ = \widetilde{P}^- = h \circ f^m$ *est une involution lorsque* $n = 2m+1$.

(ii) *L'involution* $\widetilde{P}^+ = f^m$ *commute avec* h *lorsque* $n = 2m$.

3. DIFFÉOMORPHISMES FIBRÉS

3.1. — Soient (x, y) les coordonnées (fixées !) dans lesquelles ω s'écrit sous la forme

$$(*) \qquad \omega = \mathrm{d}P_\alpha + g\eta, \quad g \in \mathbb{R}\{x, y\},$$

avec $\eta = ny\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$ et

$$P_\alpha(x, y) = y^2 + 2\alpha y x^n + 2^n,$$

le polynôme introduit dans le paragraphe 1.3. Notons $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ (resp. $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2, 0)$) le groupe des germes en $0 \in \mathbb{C}^2$ (resp. $\mathbb{R}^2$) de difféomorphismes analytiques et $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^2, 0)$ (resp. $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}^2, 0)$) son complété formel. On dit qu'un élément $\widehat{\phi} \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^2, 0)$ *respecte* $\mathcal{F}$ si $\widehat{\phi}^*\Omega \wedge \Omega = 0$ et on dit que $\widehat{\phi}$ est *fibré* s'il respecte le feuilletage par les courbes $y/x^n =$ constante, c'est-à-dire si $\widehat{\phi}^*\eta \wedge \eta = 0$.

On se propose de montrer (dans certains cas) que s'il existe un difféomorphisme $\widehat{\phi}$ qui respecte $\mathcal{F}$, alors il existe un difféomorphisme $\widehat{\psi}$ fibré qui respecte $\mathcal{F}$ et qui possède les « mêmes propriétés » que $\widehat{\phi}$: si $\widehat{\phi}$ est analytique, réel ou périodique alors $\widehat{\psi}$ l'est aussi...

De tels résultats peuvent être prouvés en utilisant des arguments de [CeMo]. Par exemple, si $\phi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ respecte $\mathcal{F}$, il existe un germe de difféomorphisme holomorphe $\widetilde{\phi}$ de M le long du diviseur D tel que $\pi \circ \widetilde{\phi} = \phi \circ \pi$ qui respecte $\pi^*\mathcal{F}$. On dit que $\widetilde{\phi}$ est *l'éclaté* de ϕ. A partir du morphisme induit par $\widetilde{\phi}$ sur la représentation d'holonomie $\mathcal{H}_\Omega$, on construit un $\widetilde{\psi}$ par la méthode du relèvement des chemins ; ce $\widetilde{\psi}$ est l'éclaté du ψ cherché. Cette méthode qui repose essentiellement sur le théorème d'Hartogs n'est pas adaptée au cas formel que nous devons traiter ici. Nous utilisons une méthode directe de « déformation » de $\widetilde{\widehat{\phi}}$ en $\widetilde{\widehat{\psi}}$ qui est « formelle ». La proposition suivante en est la clef.

3.2. Proposition. — *Soit $\widehat{\phi} = (X, Y)$ un élément de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^2, 0)$ tangent à l'identité tel que les séparatrices C et $\overline{C}$ de Ω soient (formellement) invariantes par $\widehat{\phi}$, i.e $Y - t_\alpha X^n$ et $Y - \bar{t}_\alpha X^n$ sont divisibles respectivement par $y - t_\alpha x^n$ et $y - \bar{t}_\alpha x^n$. Alors il existe $\widehat{\psi} \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^2, 0)$ fibré, tangent à l'identité tel que $\widehat{\psi} \circ \widehat{\phi}^{-1}$ respecte $\mathcal{F}$. De plus si $\widehat{\phi}$ est à coefficients réels, $\widehat{\psi}$ l'est aussi, si $\widehat{\phi}$ est convergent, $\widehat{\psi}$ l'est aussi.*

Définissons tout d'abord l'éclaté $\widetilde{\widehat{\phi}}$ de $\widehat{\phi}$ dans la carte (t, x). Notons :

$$X(x, y) = x + \sum_{p+q>1} a_{p,q} x^p y^q \ , \quad Y = y + \sum_{p+q>1} b_{p,q} x^p y^q,$$

$$\widetilde{X}(t, x) = X(x, tx^n) = x + \sum_{k>1} a_k(t) x^n.$$

Remarquons que les $a_k \in \mathbb{C}[t]$ sont de degré $\leq k/n$. Un calcul élémentaire montre que l'invariance de C et $\overline{C}$ par $\widetilde{\widehat{\phi}}$ implique que $Y(x, 0)$ est d'ordre $> n$. On en déduit que $Y(x, tx^n)$ est divisible par x^n. On peut écrire :

$$T(t, x) = \frac{Y(x, tx^n)}{\widetilde{X}(t, x)^n} = t + \sum_{k>0} b_k(t) x^n,$$

où les b_k sont dans $\mathbb{C}[t]$. Par construction, $\widetilde{\widehat{\phi}} = (T, \widetilde{X})$ vérifie $\pi \circ \widetilde{\widehat{\phi}} = \widehat{\phi} \circ \pi$ et on dit que $\widetilde{\widehat{\phi}}$ est *l'éclaté* de $\widehat{\phi}$ dans la carte (t, x). Remarquons que sa restriction à $x = 0$ est l'identité. Réciproquement, soit $\widetilde{\widehat{\psi}}$ tel que

$$\widetilde{\widehat{\psi}}(t, x) = \big(t, \widetilde{Z}(t, x)\big), \quad \widetilde{Z} = x + \sum_{k>1} c_k(t) x^k, \tag{3.2.1}$$

où les $c_k \in \mathbb{C}[t]$ sont de degré $\leq k/n$. Alors $\widetilde{\widehat{\psi}}$ est clairement l'éclaté d'un élément $\widehat{\psi} \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^2, 0)$ qui est fibré et qui hérite des propriétés de $\widetilde{\widehat{\psi}}$. Pour prouver la proposition, nous allons construire un $\widetilde{\widehat{\psi}}$ tel que $\mathcal{F}_1$ soit invariant par $\widetilde{\widehat{\psi}} \circ \widetilde{\widehat{\phi}}^{-1}$, c'est-à-dire tel que :

$$\widetilde{\widehat{\phi}}^* \Omega_1 \wedge \widetilde{\widehat{\psi}}^* \Omega_1 \equiv 0. \tag{3.2.2}$$

L'existence de $\widetilde{\widehat{\psi}}$ résulte du lemme suivant :

LEMME. — *Avec les notations précédentes, on a :*

(i) *Pour $k > 1$, il existe des fonctions holomorphes c_k sur $\mathbb{C} \setminus \{t_\alpha, \bar{t}_\alpha\}$ telles que $\widetilde{\widehat{\psi}}$ défini par* 3.2.1 *vérifie* 3.2.2.

(ii) *Les fonctions c_k se prolongent holomorphiquement en t_α et $\bar{t}_\alpha$.*

(iii) *Les c_k sont des polynômes de degré $\leq k/n$.*

Preuve de (i). — Soit $t_0 \neq t_\alpha$, $\bar{t}_\alpha$ et soit f une intégrale première holomorphe de Ω_1 au voisinage de $\underline{t}_0 = (t_0, 0)$ tel que :

$$f(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) = 1.$$

Alors l'équation implicite en $\widetilde{Z}$

$$f(t, \widetilde{Z}) = f\big(T(t, x), \widetilde{X}(t, x)\big) = f \circ \widetilde{\widehat{\phi}}(t, x) \tag{3.2.3}$$

a une unique solution

$$\widetilde{Z}_{t_0} = x + \sum_{k>1} c_k(t) x^k$$

telle que $\widetilde{Z}_{t_0}(t_0, x) = x$, les c_k étant holomorphes au voisinage de t_0. Cette solution ne dépend pas de f. En effet, toute intégrale première holomorphe de Ω_1 au voisinage de $\underline{t}_0$ s'écrit $\ell \circ f$ où ℓ appartient à $\mathbb{C}\{u\}$. L'équation implicite correspondante a la même solution que 3.2.3. Ainsi, les $\widetilde{Z}_{t_0}$ sont les restrictions d'un même $\widetilde{Z} = x + \sum c_k(t) x^k$, les c_k étant holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \{t_\alpha, \bar{t}_\alpha\}$. D'autre part, en différentiant (3.2.3) et en posant $\widetilde{\widehat{\psi}}(t, x) = (t, \widetilde{Z}(t, x))$, on obtient :

$$\mathrm{d}(f \circ \widetilde{\widehat{\psi}}) = \widetilde{\widehat{\psi}}^* (\mathrm{d}f) = \widetilde{\widehat{\phi}}^* (\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(f \circ \widetilde{\widehat{\phi}}).$$

Puisque $\mathrm{d}f \wedge \Omega_1 \equiv 0$, on a 3.2.2. De plus si $\widehat{\phi}$ est réel, les $c(t)$ sont réels pour $t \in \mathbb{R}$ et si $\widehat{\phi}$ est convergent $\widetilde{\widehat{\psi}}$ est convergent.

Preuve de (ii). — Puisque $C = \pi(S)$ est invariante par $\widehat{\phi}$, S est invariante par $\widetilde{\widehat{\phi}}$ et $T(x,t) - t_\alpha$ est divisible par $(t - t_\alpha)$. Plus précisément, on peut écrire :

$$T(x,t) - t_\alpha = (t - t_\alpha)\,\mathrm{e}^{\tau(t,x)}, \quad \tau(t,x) = \sum_{k>0} \tau_k(t) x^k,$$

où les τ_k sont dans $\mathbb{C}[t]$. D'autre part, $\underline{t}_\alpha$ est un point singulier hyperbolique de $\mathcal{F}_1$. Il existe un champ de vecteurs X_1 holomorphe au voisinage de $\underline{t}_\alpha$, tangent à $\mathcal{F}_1$ qui s'écrit :

$$X_1 = (t - t_\alpha)\,\frac{\partial}{\partial t} + h(t,x)\,\frac{\partial}{\partial x}\cdot$$

Soit $\widetilde{\varphi}$ son flot. Par construction de τ et d'après (3.2.3), on a :

$$\widetilde{\widehat{\psi}}(t,x) = \big(t, \widetilde{Z}(t,x)\big) = \widetilde{\varphi}\Big(\widetilde{\widehat{\phi}}(t,x), -\tau(t,x)\Big).$$

Cette relation prouve que $\widetilde{Z}$ appartient à $\mathbb{C}\{t - t_\alpha\}[[x]]$.

Nous aurions pu définir initialement $\widetilde{Z}$ par une telle relation en prenant pour X_1 le dual de Ω_1. Mais cette définition n'est pas très utilisable pour prouver (iii).

Preuve de (iii). — Calculons l'expression de $\widetilde{Z}$ dans la carte (x_1', y) reliée à (t,x) par :

$$x = x_1' y, \quad t = x_1'^{-n} y^{1-n}.$$

On obtient :

$$\widetilde{Z}(x,t) = x + \sum_{k>1} c_k(t) x^k = Z_1(x_1', y) = x_1' y + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k(x_1') y^k,$$

où les d_k sont holomorphes a priori sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour prouver (iii), il suffit de prouver qu'ils s'étendent holomorphiquement en 0 : ceci implique que les pôles des $c_k(u^{-1})$ sont d'ordre $\leq k/n$. Pour le montrer, nous allons redéfinir $\widetilde{\psi}$ géométriquement dans la carte (x_1', y) au voisinage de $\underline{\infty} = (0,0)$. Dans cette carte, on a $\widetilde{\phi} = (X_1', Y)$ avec

$$X_1' = x_1' + \sum_{k>0} \alpha_k(x_1') y^k, \quad Y = y(1 + \sum_{k>0} \beta_k(x_1') y^k),$$

les α_k, β_k appartenant à $\mathbb{C}[x_1']$. Soit f une intégrale première holomorphe de $\pi^*\mathcal{F}$ au voisinage de $\underline{\infty}$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0, \quad f(x_1',0) = 0.$$

Alors $\widetilde{\psi} = (\widetilde{X}_1', \widetilde{Y})$ est défini par les équations

$$f(\widetilde{X}_1', \widetilde{Y}) = f(X_1', Y) \quad \text{et} \quad \widetilde{X}_1'^n \widetilde{Y}^{n-1} = x_1'^n y^{n-1}$$

traduisant que $\widetilde{\psi}(x_1', y)$ appartient « formellement » à la même feuille de $\pi^*\mathcal{F}$ que $\widetilde{\phi}(x_1', y)$ et à la même fibre $t =$ constante que (x_1', y). Après avoir divisé la dernière équation par y^{n-1} et pris sa racine n-ième, on obtient par le théorème des fonctions implicites :

$$\widetilde{X}_1(x_1', y) = x_1' + \sum_{k>0} \widetilde{\alpha}_k(x_1') y^k, \quad \widetilde{Y}(x_1', y) = y\Big(1 + \sum_{k>0} \widetilde{\beta}_k(x_1') y^k\Big)$$

où les $\widetilde{\alpha}_k$, $\widetilde{\beta}_k$ appartiennent à $\mathbb{C}\{x_1'\}$. On en déduit finalement que les coefficients d_k de $Z_1 = \widetilde{X}_1 \widetilde{Y}$ sont aussi holomorphes en $x_1' = 0$.

3.3. Proposition. — *Supposons que* 0 *soit un centre de* $\omega = 0$ *analytique, nilpotent (écrit sous la forme* (*)). *Alors il existe* $J \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}^2, 0)$ *fibré tel que*

$$(**) \qquad J^*\omega \wedge \omega = 0, \quad J^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2, \quad \det DJ(0) = -1.$$

Preuve. — Nous savons d'après 1.1 qu'il existe $I \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}^2, 0)$ vérifiant (**) tel que $DI(0)$ soit la symétrie $R : (x, y) \mapsto (-x, y)$. Les séparatrices C et $\overline{C}$ sont globalement invariantes par R. Elles sont formellement invariantes par $\phi = I \circ R$. Appliquons 3.2 à ϕ : il existe $\psi \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}^2, 0)$ fibré tel que $\mathcal{F}$ soit invariant par $\psi \circ \phi^{-1}$. Alors

$$J = \psi \circ \mathrm{R} = (\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \mathrm{R}) = (\psi \circ \phi^{-1}) \circ I$$

est fibré, respecte $\mathcal{F}$ et $\det DJ(0) = -1$. Pour prouver que J est une involution, utilisons la définition de $\widetilde{\psi}$ à partir de l'éclaté $\widetilde{\phi}$ de ϕ. Soit u une intégrale première holomorphe de Ω_1 au voisinage de $\underline{0}$ telle que :

$$u(0,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 1.$$

Alors le couple (t, u) est une carte en $\underline{0}$.

D'après 3.2.1, si on écrit

$$\widetilde{\phi}(t,u) = \big(T_1(t,u), u_1(t,u)\big), \qquad u_1 \in \mathbb{R}\{t\}[[u]],$$

on a : $\widetilde{\psi}(t,u) = (t, u_1(t,u))$. D'autre part, l'éclaté $\widetilde{R}$ de R s'écrit dans ces coordonnées :

$$\widetilde{R}(t,u) = \big((-1)^n t, u_0(t,u)\big), \qquad u_0 \in \mathbb{R}\{t\}[[u]].$$

On peut alors définir l'éclaté $\widetilde{I}$ de I par :

$$\widetilde{I}(t,u) = \widetilde{\phi} \circ \widetilde{R}(t,u) = \widetilde{\phi}\big((-1)^n t, u_0(t,u)\big) = \big(T_2(t,u), u_2(t,u)\big).$$

On peut de même définir l'éclaté $\widetilde{J}$ de $J = \psi \circ R$:

$$\widetilde{J}(t,u) = \widetilde{\psi} \circ \widetilde{R}(t,u) = \widetilde{\psi}\big((-1)^n t, u_0(t,u)\big) = \big((-1)^n t, u_3(t,u)\big).$$

Puisque $\widetilde{I}$ est une involution, on a :

$$\widetilde{I} \circ \widetilde{I}(t,u) = \widetilde{I}\big(T_2(t,u), u_2(t,u)\big) = (t,u).$$

Par définition de $\widetilde{J}$, on a $u_2 = u_3$ et ainsi :

$$\widetilde{J} \circ \widetilde{J}(t,u) = \widetilde{J}\big((-1)^n t, u_2(t,u)\big) = (t,u).$$

4. RÉVERSIBILITÉ ET COMMUTATIVITÉ

4.1. — Supposons que 0 soit un centre nilpotent de $\omega = 0$. Soient (x, y) des coordonnées dans lesquelles ω s'écrit sous la forme (*), $J = (X, Y)$ l'involution formelle fibrée construite dans 3.3 vérifiant (**), $\widetilde{J}$ son éclaté :

$$\widetilde{J}(t,x) = \Big((-1)^n t, -x + \sum_{k>0} a_k(t) x^k\Big) = \big((-1)^n t, \widetilde{X}(t,x)\big)$$

et soit $J_0 = \widetilde{X}(0,x)$ sa restriction à $t = 0$. Montrons tout d'abord que le théorème de réversibilité est une conséquence de l'assertion suivante :

ASSERTION. — *Avec les notations de* 2.2, $J_0 = \widetilde{P}^+$ *appartient à* H_Ω.

Puisque J est fibré, on a :

$$Y(x,y) = (-1)^n \frac{yX(x,y)^n}{x^n}.$$

Pour prouver le théorème, il suffit de prouver que

$$X(x,y) = -x + \sum_{p+q>1} a_{p,q} x^p y^q$$

converge, ou encore que

$$\widetilde{X}(t,x) = -x + \sum_{p+q>1} a_{p,q} t^q x^{p+q} = -x + \sum_{q+r>0} A_{q,r} t^q x^r$$

converge. En effet, si c'est le cas, il existe $M > 1$ tel que :

$$|a_{p,q}| = |A_{q,p+q}| < M^{2q+p} < M^{2(p+q)}.$$

Soit $u \in \mathbb{C}\{t,x\}$ une intégrale première de Ω_1 au voisinage de $\underline{0}$ telle que :

$$u(0,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 1.$$

Alors le germe $(t,x) \mapsto (t, u(t,x))$ est un élément de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ d'inverse $h : (t,u) \mapsto (t, x(t,u))$. Dans la carte (t,u), l'éclaté $\widetilde{J}$ de J s'écrit :

$$\widetilde{J}(t,u) = \big((-1)^n t, U(t,u)\big) \quad \text{avec } U = \widetilde{X} \circ h.$$

Puisque $\mathcal{F}_1$ est invariant par $\widetilde{J}$, U est indépendant de t et on a :

$$\begin{cases} (J^* \mathrm{d}u) \wedge \mathrm{d}u = \mathrm{d}U \wedge \mathrm{d}u = \dfrac{\partial U}{\partial t}\, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}u \equiv 0, \\ U(u) = U(0,u) = \widetilde{X}\big(0, x(0,u)\big) = J_0 \circ h(0,u). \end{cases}$$

Comme J_0 est convergent, U l'est aussi.

Remarque. — Il est évident géométriquement que J est la seule involution (réelle) qui respecte le feuilletage $\mathrm{Re}\,\mathcal{F}$, le feuilletage par les courbes $y = tx^n$, $t \in \mathbb{R}$ et telle que $DJ(0)(x,y) = (-x,y)$. On peut encore montrer directement (par relèvements de chemins, [CeMo]) que J est le seul élément de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}^2, 0)$ tel que :

$$J^*\Omega \wedge \Omega = 0, \quad J^*\eta \wedge \eta = 0, \quad J(x,0) = (P^+(x), 0).$$

4.2. Preuve de l'assertion.

Il suffit de prouver que J_0 et $\widetilde{P}^+$ commutent puisque, comme le montre un calcul simple, deux involutions de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C},0)$ qui commutent sont égales. Distinguons les cas pairs et impairs.

• Cas $n = 2m$. — Montrons plus généralement que $\mathcal{H}_\Omega$ est invariante par J_0. Soit

$$c : s \longmapsto \underline{c}(s) = \big(c(s), 0\big), \quad s \in [0,1], \quad c(0) = 0$$

un chemin dans $\mathcal{L}_0$ et soit $C(s,x) = (c(s), u(s,x))$ son relèvement tangent à $\mathcal{F}_1$ d'origine $(0,x)$; si $\Omega_1 = A(t,x)\,\mathrm{d}t + B(t,x)\,\mathrm{d}x$, alors u est la solution de

$$A\big(c(s),u\big)c'(s) + B\big(c(s),u\big)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 0$$

avec la condition initiale $u(0,x) = x$. Puisque $\widetilde{J}^*\Omega_1 \wedge \Omega_1 = 0$, où $\widetilde{J} = ((-1)^n t, \widetilde{X})$ est l'éclaté de J, le composé

$$u_1(s,x) = \widetilde{X} \circ C(s,x) = \widetilde{X}\big(c(s), u(s,x)\big)$$

est la solution de la même équation avec condition initiale $u_1(0,x) = J_0(x) = \widetilde{X}(0,x)$. On a ainsi :

$$\widetilde{J} \circ C(s,x) = \big(c(s), u_1(s,x)\big) = \big(c(s), u\big(s, J_0(x)\big)\big).$$

Lorsque c est un lacet, en faisant $s = 1$ dans cette égalité, on obtient :

$$J_0\big(u(1,x)\big) = J_0 \circ \mathcal{H}_\Omega\big([c]\big)(x) = u\big(1, J_0(x)\big) = \mathcal{H}_\Omega\big([c]\big) \circ J_0(x).$$

• Cas $n = 2m+1$. — La restriction de $\widetilde{J}$ à $\mathcal{L}_0$ est la symétrie $R(\underline{t}) = -\underline{t}$. L'automorphisme $R_\sharp$ de $\pi_1(\mathcal{L}_0, \underline{0})$ correspondant échange les générateurs γ, $\overline{\gamma}$ car, dans ce cas, $\alpha = 0$ et t_α est imaginaire pur (voir 1.1, 1.3). Par le même argument que dans le cas pair, on prouve que $J_0^*(\mathcal{H}_\Omega) = \mathcal{H}_\Omega \circ R_\sharp$. En particulier on a :

$$J_0^*(h) = J_0^{-1} \circ h \circ J_0 = \bar{h}.$$

En utilisant $\widetilde{P}^+ = (\widetilde{P}^+)^{-1} = h \circ f^m$, $f = \bar{h} \circ h$, $f^{2m+1} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, on obtient :

$$J_0^*(\widetilde{P}^+) = \bar{h} \circ (h \circ \bar{h})^m = f^{m+1} \circ h^{-1} = f^{-m} \circ h^{-1} = \widetilde{P}^+.$$

5. CLASSIFICATION DES CENTRES NILPOTENTS

5.1. Centres et applications pli.

Soit $\omega = 0$ un germe d'équation différentielle analytique dont 0 est un centre nilpotent et soient (x, y) les coordonnées dans lesquelles ω s'écrit sous la forme (*). D'après le théorème de réversibilité, il existe une involution $J \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2, 0)$ respectant le feuilletage $\mathcal{F}$ d'équation $\omega = 0$ et ayant pour partie linéaire la symétrie $R : (x, y) \mapsto (-x, y)$. Puisque J est périodique, il existe un changement de coordonnées tangent à l'identité tel que dans les nouvelles coordonnées J soit linéaire, i.e. $J = R$. Dans ces coordonnées, notées encore (x, y), ω s'écrit :

$$\omega = a(x, y)\,\mathrm{d}x + b(x, y)\,\mathrm{d}y$$

et son 1-jet demeure $y\,\mathrm{d}y$. L'involution J respectant le feuilletage $\mathcal{F}$, il vient :

$$a(x, y)b(-x, y) = -a(-x, y)b(x, y).$$

La fonction qui à (x, y) associe $a(x, y)b(-x, y)$ est une fonction impaire de x. Elle s'écrit :

$$a(x, y)b(-x, y) = xc(x^2, y), \qquad c \in \mathbb{R}\{x, y\}.$$

De $b(0, y) = y+$, on déduit que la fonction a est divisible par x dans $\mathbb{R}\{x, y\}$. On a :

$$a(x, y) = xA(x, y), \qquad a \in \mathbb{R}\{x, y\}.$$

Soient

$$A(x, y) = \prod_{i=1}^{p} A_i(x, y), \quad b(-x, y) = \prod_{j=1}^{q} b_j(-x, y)$$

les décompositions en facteurs irréductibles de $A(x, y)$ et $b(-x, y)$. La courbe $\{c = 0\}$ étant invariante par la symétrie R, celle-ci permute les branches irréductibles de $A(x, y)b(-x, y) = 0$. Fixons $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ et distinguons trois cas :

(i) Il existe $j \in \{1, 2...q\}$ tel que $b_j(x, y) = A_i(x, y)$ (à unité près).

(ii) $A_i(x, y) = A_i(-x, y)$ (à unité près).

(iii) Il existe $k \in \{1, 2...p\}$ différent de i tel que $A_i(x, y) = A_k(-x, y)$ (à unité près).

Le cas (i) conduit à l'existence d'un facteur commun à A et b donc à a et b. Ceci n'est pas possible puisque ω est à singularité isolée.

Dans le cas (ii), on décompose le germe A_i en ses parties paire et impaire en x :

$$A_i(x,y) = \alpha_i(x^2,y) + x\beta_i(x^2,y).$$

Étant donné que la branche $A_i(x,y) = 0$ est invariante par R, les ensembles analytiques $\{\alpha_i(x^2,y) = 0\}$ et $\{\beta_i(x^2,y) = 0\}$ ont une composante commune. On obtient :

$$A_i(x,y) = \gamma_i(x^2,y)U_i(x,y).$$

Le cas (iii) se ramène au cas (ii) en considérant le produit $A_i(x,y)A_k(-x,y)$. On a donc en procédant de même avec les b_j :

$$U_1(x,y)U_2(-x,y)\widetilde{A}(x^2,y)B(x^2,y) = c(x^2,y),$$
$$U_1(x,y)U_2(-x,y) = U(x^2,y),$$

U étant une unité de $\mathbb{R}\{x,y\}$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ admet pour équation :

$$V(x^2,y)x\widetilde{A}(x^2,y)\,\mathrm{d}x + B(x^2,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

avec $V(x^2,y) = U(x^2,y)/U_2(-x,y)U_2(x,y)$.

Soit F l'application « pli » qui à (x,y) associe (x^2,y). Nous avons montré la :

PROPOSITION. — *Soit ω un germe en 0 de 1-forme analytique nilpotent tel que 0 soit un centre de $\omega = 0$. Il existe un germe θ de 1-forme analytique tel que $\omega \wedge F^*\theta = 0$ où F est un germe d'application pli.*

5.2. Centres et équations semi monodromiques.

Nous décrivons dans ce paragraphe l'ensemble Θ des germes d'équations $\theta = 0$ qui donnent naissance à des centres par le processus de pli. Introduisons dans ce but la définition suivante. Nous dirons qu'un germe de 1-forme analytique θ est *semi monodromique pour une courbe lisse C* si cette courbe est transverse à $\theta = 0$ en dehors de 0 et si toute courbe intégrale issue d'un point p de C suffisamment proche de 0 recoupe C en restant dans une même composante connexe de $(\mathbb{R}^2 \setminus C, \{0\})$ (Fig. 7).

Figure 7

Dans toute la suite de ce paragraphe $F : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ désigne un germe d'application pli, C l'image de la ligne de pli et $\theta = a(u,v)\,\mathrm{d}u + b(u,v)\,\mathrm{d}v$ un germe en 0 de 1-forme analytique réelle.

Il est clair que si θ est un germe semi monodromique pour C alors $F^*\theta$ est un centre réversible. Pour que ce centre soit nilpotent il faut imposer des conditions sur le 1-jet $j^1\,\theta$ et sur les positions relatives de la tangente à l'origine à la courbe C et du cône tangent C_θ du germe θ. Rappelons que C_θ est l'ensemble analytique défini par :

$$C_\theta = \Big\{ j^1\,\theta\Big(u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\Big) = 0 \Big\}.$$

Remarquons tout d'abord que $j^1\,\theta$ doit être non nul.

LEMME. — *Avec les notations précédentes, le centre réversible $F^*\theta$ est nilpotent si et seulement si la tangente à l'origine à la courbe C n'appartient pas au cône tangent de θ.*

Preuve. — Il s'agit d'une condition sur

$$j^1\,\theta = (\alpha u + \beta v)\,\mathrm{d}u + (\gamma u + \delta v)\,\mathrm{d}v.$$

On peut donc supposer $F(x,y) = (x^2, y) = (u,v)$. L'équation de C_θ est :

$$\alpha u^2 + (\beta + \gamma)uv + \delta v^2 = 0.$$

La direction $u = 0$ est dans le cône tangent de θ si et seulement si $\delta = 0$. Par suite, $F^*\theta = 2(\alpha x^2 + \beta y)x\,\mathrm{d}x + (\gamma x^2 + \delta y)\,\mathrm{d}y +$ est nilpotent si et seulement si la direction $u = 0$ n'appartient pas à C_θ. □

Remarque. — La condition précédente est équivalente à la condition : « l'application $v \circ F$ est une submersion ».

Nous dressons maintenant la liste des germes θ de 1-jet non nul qui sont semi-monodromiques. Notons X_1 le champ de vecteurs associé à $j^1\,\theta$ par la dualité symplectique. Nous distinguons plusieurs cas.

1) Le champ X_1 possède une valeur propre réelle non nulle.

Le germe θ admet une séparatrice analytique tangente à la direction propre correspondant à la valeur propre non nulle. On est en présence d'un col, d'un nœud-col ou d'un nœud. On vérifie cas par cas sur le portrait de phases que le germe θ n'est pas semi monodromique.

2) Le champ X_1 possède une valeur propre qui n'est pas réelle.

Les deux valeurs propres sont conjuguées. Le point 0 est un centre ou un foyer. Tout germe de courbe analytique lisse issu de l'origine est transverse au feuilletage d'équation $\theta = 0$ en dehors de 0. Il est clair que θ est semi monodromique par rapport à tout germe de courbe passant par 0. On notera Θ_0 l'ensemble des germes θ correspondant à ce second cas.

3) Les deux valeurs propres du champ X_1 sont nulles.

D'après [Ta] et [Mo$_2$], le germe θ est formellement conjugué à une 1-forme du type :

$$\widehat{\theta} = \mathrm{d}(v^2 + u^n) + u^p\big(4\alpha + g(u)\big)\,\mathrm{d}v,$$

où $g \in \mathbb{R}[[u]]$, $n \geq 3$ et $p \geq 2$. Distinguons à nouveau plusieurs cas.

3.a) L'entier n est pair et $p \geq \frac{1}{2}n$. — Lorsque $p = \frac{1}{2}n$ et $|\alpha| \geq 1$, l'équation $\theta = 0$ possède une ou deux séparatrices analytiques réelles. Son portrait de phases montre clairement que θ n'est jamais semi monodromique (figures 8 et 9).

Figure 8

Figure 9

Lorsque $p > \frac{1}{2}n$ ou ($p = \frac{1}{2}n$ et $|\alpha| < 1$), nous savons que θ est monodromique. Il est semi monodromique pour toute courbe. On notera Θ_p l'ensemble des germes θ du cas 3.a) qui sont semi monodromiques.

3.b) L'entier n est impair et $p > \frac{1}{2}n$. — Il existe toujours une séparatrice de type «cusp» tangente à l'axe $v = 0$. Il est clair d'après le portrait de phases que le germe θ est semi monodromique pour toute courbe non tangente à $v = 0$ (Fig. 10). On notera Θ_i l'ensemble des germes θ correspondant à ce cas.

Remarque. — Si θ appartient à $\Theta_0\Theta_p\Theta_i$ et si F est tel que la tangente à C à l'origine n'est pas dans le cône tangent de θ alors, d'après ce qui précède, $F^*\theta$ est un centre réversible nilpotent.

Il nous reste un cas à traiter.

Figure 10

3.c) L'entier p est inférieur à $\frac{1}{2}n$. — Nous allons montrer que de tels θ ne peuvent donner naissance à des centres nilpotents par le processus de pli. Nous raisonnons par l'absurde. Puisque $v \circ F$ est une submersion, nous choisissons les coordonnées (x, y) telles que $F(x, y) = (u(x, y), y)$. En appliquant le lemme du paragraphe 5.4, on se ramène à la situation où la ligne de pli est l'axe $x = 0$ puisque le cône tangent de $F^*\theta$

est $y = 0$. Un calcul simple sur la matrice jacobienne de F montre que $u(x, y) = x^2(1+\cdots)$. En prenant l'image réciproque de θ par F, on obtient :

$$F^*\theta = \mathrm{d}(y^2 + x^{2n}(1 + \cdots)) + x^{2p}(1 + \cdots)\,\mathrm{d}y.$$

On aboutit à une contradiction puisque le jet d'ordre $(2n - 1)$ de $F^*\theta$ doit être du type $\omega_{n,\alpha}$ (paragraphe 1.1).

D'après 5.1, avec les définitions de Θ_0, Θ_p et Θ_i données ci-dessus, le théorème de réversibilité s'énonce encore :

THÉORÈME. — *Le germe d'équation $\omega = 0$ est un centre nilpotent si et seulement si il existe un couple $(\theta; F)$ tel que $F^*\theta \wedge \omega = 0$ où :*

(i) *θ appartient à $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_p \cup \Theta_i$;*

(ii) *F est un germe de pli tel que l'image de la ligne de pli C ne soit pas dans le cône tangent de θ.*

La classification analytique des centres nilpotents se ramène alors à la classification des germes θ de Θ grâce à un théorème de conjugaison équivariante.

5.3. Théorème de conjugaison équivariante.

Soient ω_1 et ω_2 deux germes de 1-formes différentielles analytiques de $(\mathbb{R}^2, 0)$ tels que 0 soit un centre de $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$. Nous allons montrer que si les germes d'équation $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$ sont conjugués par un difféomorphisme, ils le sont par un difféomorphisme respectant les involutions J_1 et J_2 correspondant à ces germes.

THÉORÈME DE CONJUGAISON ÉQUIVARIANTE. — *Soient $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$ deux germes d'équation différentielle de $(\mathbb{R}^2, 0)$ dont 0 est un centre nilpotent. Si $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$ sont analytiquement (resp. formellement) conjugués, alors il existe un difféomorphisme $\Psi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2, 0)$ (resp. $\widehat{\Psi} \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}^2, 0)$) fibré tangent à l'identité tel que :*

$$J_2 = \Psi^{-1} \circ J_1 \circ \Psi \quad \text{et} \quad \Psi^*\omega_2 \wedge \omega_1 = 0$$
$$(\text{resp. } J_2 = \widehat{\Psi}^{-1} \circ J_1 \circ \widehat{\Psi} \quad \text{et} \quad \widehat{\Psi}^*\omega_2 \wedge \omega_1 = 0).$$

Preuve. — Soit $\widehat{\Phi} \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}^2, 0)$ le difféomorphisme conjuguant $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$. Il est clair que $\widehat{\Phi}$ considéré comme élément de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^2, 0)$ applique les séparatrices du complexifié de $\omega_1 = 0$ sur les séparatrices du complexifié de $\omega_2 = 0$. On peut donc supposer (modulo une conjugaison

réelle) que ces deux complexifiés ont les mêmes séparatrices complexes C et $\overline{C}$. Soient alors (x, y) des coordonnées telles que :

$$C = \{y - t_\alpha x^n = 0\}, \quad \overline{C} = \{y - \overline{t_\alpha} x^n = 0\}.$$

D'après 1.4, les ω_k pour $k = 1, 2$ s'écrivent dans ces coordonnées sous la forme (*). Soient J_k, où $k = 1, 2$, les uniques éléments de $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2, 0)$ fibrés respectant les feuilletages $\mathcal{F}_k$ et tels que $DJ_k(0)(x, y) = (-x, y)$. En écrivant que les complexifiés des équations $\omega_k = 0$ ont les mêmes séparatrices, on montre facilement que $D\widehat{\Phi}(0)(x, y) = (\pm x, \pm y)$. En remplaçant $\widehat{\Phi}$ par $\widehat{\Phi} \circ J_1$ si nécessaire, on peut supposer que $\mathrm{D}\widehat{\Phi}(0) = \pm\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Modulo un changement de variables qui respecte les courbes $y/x^n = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$, on peut supposer que $\widehat{\Phi}$ est tangent à l'identité.

Le couple $(\widehat{\Phi}, \omega_2)$ vérifie les deux hypothèses de la proposition 3.2. Il existe un difféomorphisme $\widehat{\Psi} \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}^2, 0)$ fibré (convergent si $\widehat{\Phi}$ converge) tangent à l'identité tel que :

$$(\widehat{\Psi} \circ \widehat{\Phi}^{-1})^* \omega_2 \wedge \omega_2 = (\widehat{\Phi}^{-1})^* (\widehat{\Psi}^* \omega_2) \wedge \omega_2 = 0.$$

En composant par $\widehat{\Phi}^*$ on obtient :

$$\widehat{\Psi}^* \omega_2 \wedge \widehat{\Phi}^* \omega_2 = \widehat{\Psi}^* \omega_2 \wedge \omega_1 = 0.$$

D'après la remarque de 4.1 (unicité de l'involution), on a nécessairement $\widehat{\Psi}^{-1} \circ J_1 \circ \widehat{\Psi} = J_2$.

5.4. Classification.

Soit $\omega = 0$ un germe d'équation différentielle analytique dont 0 est un centre nilpotent. D'après 5.2, il existe un germe θ appartenant à Θ et une application F tels que :

$$\omega \wedge F^* \theta = 0.$$

Puisque $F^* \theta$ est un centre *nilpotent*, la tangente à la courbe analytique lisse C image par F de la ligne de pli n'appartient pas au cône tangent de θ. Le lemme suivant montre que la classe de conjugaison du couple $(\theta\,; C)$ est indépendante de C. C'est un cas particulier d'un problème plus général (et très intéressant) qui consiste à classifier les germes de formes différentielles modulo des objets analytiques ou formels. Nous remercions J.-F. Mattei de nous avoir donné la clef de la preuve du lemme suivant :

LEMME. — *Soit θ un germe de 1-forme analytique réel dont le jet d'ordre 1 est non nul et soit C un germe de courbe analytique lisse dont la tangente n'appartient pas au cône tangent C_θ de θ. On suppose que les valeurs propres du champ dual de θ sont imaginaires pures ou que $j^1\,\theta$ est $v\,\mathrm{d}v$. Alors la classe de conjugaison du couple $(\theta\,;C)$ ne dépend pas de C. Plus précisément, il existe un difféomorphime H de $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2,0)$ tel que $H^*\theta\wedge\theta=0$ et $H(C)$ soit la courbe $u=0$.*

Preuve. — Soit $u=f(v)$ l'équation de C vue comme graphe au-dessus de l'axe des v. Considérons la fonction $F(u,v,t)=u-tf(v)$ où les variables u et v sont germifiées et la variable t parcourt l'intervalle $[0,1]$. Notons Z le champ de vecteurs

$$Z=\frac{\partial}{\partial t}+aX$$

où a est une fonction des variables u, v et t à déterminer et X le champ dual de θ. Il suffit de prouver que $Z\cdot F$ appartient à l'idéal (F) engendré par F. Si c'est le cas, le flot Φ_t de Z laisse invariant le feuilletage défini par $\theta=0$ et est tangent à l'hypersurface $F=0$. Son temps 1, Φ_1, applique $u=0$ sur C. Montrons donc qu'il existe une fonction b telle que

$$-f(v)+aX\cdot F=F\cdot b,$$

ou encore que la fonction f appartient à l'idéal $\mathcal{J}$ engendré par les germes F et $X\cdot F$. Distinguons trois cas.

(i) Les deux valeurs propres de X sont nulles. Puisque θ est formellement conjugué à $\widehat{\theta}=\mathrm{d}(v^2+u^n)+u^p(4\alpha+g(u))\,\mathrm{d}v$, l'idéal $\mathcal{J}$ est engendré par $u-tf(v)$ et $2v+u^p(4\alpha+g(u))-nu^{n-1}tf'(v)$. Pour prouver que f appartient à l'idéal $\mathcal{J}$, il suffit de montrer que v appartient à l'idéal $\mathcal{J}'$ engendré par u et $2v+u^p(4\alpha+g(u))-nu^{n-1}tf'(v)$, où $n\geq 3$ et $p\geq 2$. Ce dernier fait est évident.

(ii) L'équation $\theta=0$ est un foyer faible, i.e. X possède deux valeurs propres imaginaires pures. Le 1-jet de θ peut s'écrire $u\,\mathrm{d}u+v\,\mathrm{d}v$. L'idéal $\mathcal{J}$ est engendré par u et $v-tf(v)$ et $v-tf'(v)$, et le germe f appartient à l'idéal $\mathcal{J}$ pour les mêmes raisons que précédemment.

(iii) L'équation $\theta=0$ est un foyer hyperbolique. Le germe θ est linéarisable et s'écrit dans un système de coordonnées adéquat :

$$\theta=u\,\mathrm{d}u+v\,\mathrm{d}v+\beta(u\,\mathrm{d}v-v\,\mathrm{d}u),$$

où β est un réel. Puisque θ est invariant par le groupe SO(2), on peut supposer $f'(0) = 0$. L'idéal $\mathcal{J}$ est engendré par $u - tf(v)$ et $v + \beta u + \beta vtf'(v) - utf'(v)$. Il suffit de montrer que v est dans l'idéal $\mathcal{J}'$ engendré par u et $v(1+\beta tf'(v)) + u(\beta - tf'(v))$. Ceci résulte de la condition $f'(0) = 0$.

Soient $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$ deux centres analytiques nilpotents formellement conjugués par un difféomorphisme Φ de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}^2, 0)$. Par le théorème de réversibilité, il existe des couples $(\theta_1\,; C_1)$ et $(\theta_2\,; C_2)$, des applications pli F_1 et F_2 tels que $F_i^*\theta_i \wedge \omega_i = 0$, $i = 1, 2$. D'après le lemme précédent, on peut supposer $C_1 = C_2 = \{x = 0\}$. Le théorème de conjugaison équivariante nous dit que $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$ sont analytiquement conjugués si et seulement si les équations $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = 0$ le sont. On a le théorème suivant :

THÉORÈME DE CLASSIFICATION. — *Soient $\omega_k = 0$, $k = 1, 2$ deux germes de centres analytiques nilpotents et soient θ_k les éléments de Θ correpondants. Les ω_k sont analytiquement (resp. formellement) conjugués si et seulement si les θ_k le sont.*

5.5. Espaces des modules.

Décrivons pour finir les espaces des modules des centres analytiques nilpotents donnés par la classification formelle-analytique. Nous distinguons les trois cas décrits dans 5.2 (cf. introduction).

(i) θ appartient à Θ_0. Si la partie réelle des valeurs propres du champ dual de $j^1\theta$ est non nulle alors, d'après le théorème de Poincaré, tout germe formellement conjugué à θ l'est analytiquement. Si la partie réelle des valeurs propres est nulle deux cas se présentent. Lorsque le germe θ possède une intégrale première, θ est rigide (i.e. a un module trivial), il est en fait analytiquement conjugué à $\mathrm{d}(x^2 + y^2)$. Dans le cas contraire, des modules non triviaux existent, ils sont donnés par [MaRa].

(ii) θ appartient à Θ_p. Des modules non triviaux peuvent exister dûs à la présence de groupes « exceptionnels ». Nous ne savons pas si de tels groupes peuvent être réalisés par des centres réels.

(iii) θ appartient à Θ_i. Tous les modules sont triviaux.

Nous renvoyons le lecteur à [CeMo] et [Me] pour les détails concernant la classification et les espaces de modules dans les cas (ii) et (iii). Cette discussion est résumée par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient $\omega_k = 0$, avec $k = 1, 2$, deux germes de centres analytiques nilpotents formellement conjugués et soient θ_k les éléments de Θ correspondants. Alors :*

(a) *ω_1 et ω_2 sont analytiquements conjugués si :*

- *θ_1 est un foyer hyperbolique ou un centre;*
- *le champ dual de θ_1 a deux valeurs propres nulles et dans la forme normale formelle $\hat{\theta}_1 = \mathrm{d}(v^2 + u^n) + u^p(4\alpha + g(u))\,\mathrm{d}v$, $p \geq \frac{1}{2}n$, on a :*

$$n \text{ est impair ou } p = \tfrac{1}{2}n \text{ et } |\alpha| < 1.$$

(b) *Il existe des modules non triviaux si θ_1 est un foyer faible.*

BIBLIOGRAPHIE

[Br] M. BRUNELLA, Vanishing holonomy and monodromy of certain centers and foci, preprint SISSA (1992).

[CeMo] D. CERVEAU et R. MOUSSU, Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ et équations différentielles $y\,\mathrm{d}y + = 0$, Bull. Soc. Math. France, 116 (1988), 459–488.

[Du$_1$] H. DULAC, Sur les cycles limites, Bull. Soc. Math. France, 51 (1923), 45–188.

[Du$_2$] H. DULAC, Recherche sur les points singuliers des équations différentielles, J. École Polytechnique, 2, sec. 9 (1904), 1–125.

[Ec] J. ÉCALLE, Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac, Actualités Mathématiques, Publication Hermann, 1992.

[Il] Y. IL YASHENKO, Finiteness theorem for limit cycles, Translations of Mathematical Monographs, vol. 94, AMS, 1991.

[Li] A.M. LIAPOUNOV, Stability of motion, Academic Press, 1966.

[MaRa] J. MARTINET et J.-P. RAMIS, Analytic Classification of Resonant Saddles and Foci, Singularities and Dynamical Systems, North–Holland Math. Studies, 103 (1985), 109–135.

[MaMo] J.F. MATTÉI et R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, Ann. Sci. École Normale Supérieure, 13 (1980), 469–523.

[Me] R. MÉZIANI, Problème de modules pour des équations dégénérées de $\mathbb{C}^2$, Thèse de l'Université de Rennes, 1992.

[Mo_1] R. MOUSSU, Une démonstration géométrique d'un théorème de Poincaré–Liapounov, Astérisque, 98–99 (1982), 216–223.

[Mo_2] R. MOUSSU, Symétries et formes normales des centres et foyers dégénérées, Ergod. Th. and Dynam. Systems, 2 (1982), 241–251.

[Mo_3] R. MOUSSU, Holonomie évanescente des équations différentielles dégénérées transverses, in Singularities and dynamical systems, North Holland, 1985.

[Po] H. POINCARÉ, Mémoires sur les courbes définies par une équation différentielle, J. Math. Pures Appl., 37 (1881), 375–442.

[SaCo] G. SANSONE et R. CONTI, Non Linear Differential Equations, Pergamon Press, 1964.

[Ta] F. TAKENS, Singularities of vector fields, Publ. Math. IHES, 43 (1974), 47–100.

Manuscrit reçu le 28 juin 1993,
révisé le 20 août 1993.

M. BERTHIER et R. MOUSSU,
Université de Bourgogne
Laboratoire de Topologie
BP 138
21004 Dijon Cedex (France).