

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRÉDÉRIC PATRAS

La décomposition en poids des algèbres de Hopf

Annales de l'institut Fourier, tome 43, n° 4 (1993), p. 1067-1087

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_4_1067_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_4_1067_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA DÉCOMPOSITION EN POIDS DES ALGÈBRES DE HOPF

par Frédéric PATRAS

Ce travail reprend les résultats du premier chapitre de [P2].

La définition et l'analyse des propriétés des algèbres de Hopf (ou bigèbres graduées gauches) trouvent leur origine dans l'étude de l'homologie et de la cohomologie des H -espaces ; on trouvera dans [MM] de plus amples références et les théorèmes de structure standard sur le sujet.

Nous nous attachons ici à étudier les propriétés de certains endomorphismes Ψ^k d'algèbre ou de coalgèbre d'une algèbre de Hopf H , commutative ou cocommutative (resp. d'une bigèbre graduée, commutative ou cocommutative – voir le paragraphe 1 pour les conventions terminologiques adoptées). Ces endomorphismes Ψ^k sont, par définition, les puissances de convolution du morphisme identité dans l'algèbre des endomorphismes linéaires de H .

La question abordée peut être formulée très simplement dans le langage de la topologie : si X est un H -espace, il s'agit d'étudier les propriétés algébriques des opérations Ψ^k induites en homologie et en cohomologie par les morphismes d'élévation à la puissance $x \mapsto x^k$.

Nous montrons que, si H est une algèbre de Hopf (resp. une bigèbre graduée), commutative ou cocommutative, et connexe, ces opérations permettent de définir une *décomposition en poids* de H .

Nos résultats généralisent ceux obtenus, par des méthodes essentiellement combinatoires, dans de récentes études du groupe symétrique faisant intervenir les propriétés de la bigèbre tensorielle $T(X)$ – ou bigèbre des polynômes non-commutatifs – sur un alphabet X à n lettres.

C. Reutenauer a d'abord montré dans [R] que l'on pouvait utiliser $T(X)$ pour définir une famille d'idempotents orthogonaux dans $\mathbb{Q}[S_n]$, l'algèbre sur les rationnels du groupe symétrique d'ordre n (ce sont les idempotents f_n^i de la proposition 5.1). Nous montrerons au paragraphe 5 comment nos constructions permettent d'étendre à l'algèbre de Lie libre graduée certains résultats de [R] sur l'algèbre de Lie libre.

De manière indépendante, les mêmes idempotents (souvent appelés idempotents eulériens) sont apparus dans les travaux de M. Barr, M. Gershtenhaber, S.D. Schack et J.-L. Loday sur l'homologie des algèbres commutatives [Ba] [GS1] [L] [GS2]. Attardons-nous sur [L] : on sait que les décompositions en poids de la K -théorie s'interprètent aux termes de la théorie des λ -anneaux ; c'est le point de vue adopté dans [L] par J.-L. Loday qui, pour construire une décomposition en poids de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique des algèbres commutatives, définit des λ -opérations, γ -opérations et opérations d'Adams. Précisément, ces opérations appartiennent aux algèbres de groupe des groupes symétriques et agissent sur les complexes de chaînes calculant l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique des algèbres commutatives. Dans le cas où la caractéristique est nulle, les groupes d'homologie se décomposent en sous-espaces propres sous l'action des opérations d'Adams. Pour ce qui nous intéresse ici, le point intéressant est que, comme les idempotents eulériens, ces différents éléments des algèbres $\mathbb{Q}[S_n]$ peuvent être construits en utilisant les propriétés de la bigèbre tensorielle $T(X)$ – ou, de manière équivalente, les propriétés de la bigèbre graduée duale [GS2]. Les opérations d'Adams de [L] s'identifient par exemple aux endomorphismes ψ^k de la bigèbre tensorielle $T(X)$. On trouvera des informations complémentaires sur les aspects combinatoires de ces opérations dans [GR], où leurs propriétés sont interprétées par A.M. Garsia et C. Reutenauer aux termes des propriétés de structure de l'algèbre des descentes de Solomon du groupe symétrique. On trouvera enfin dans [P1] une construction géométrique de ces mêmes opérations.

Nous montrerons ultérieurement [P3] comment associer une algèbre de descentes à toute algèbre de Hopf et à toute bigèbre graduée, et comment étudier plus avant les propriétés des familles d'opérations que nous définissons ici.

Cet article est le résultat de recherches entreprises sous la direction de Pierre Cartier. Ses indications et ses conseils sont à l'origine de ce travail. Je souhaite une fois de plus l'en remercier.

Le plan est le suivant :

1. Opérations caractéristiques.
2. Logarithme et représentations unipotentes.
3. Opérations en caractéristique nulle.
4. Structure des algèbres de Hopf en caractéristique nulle.
5. Bigèbres tensorielles.
6. Opérations et décompositions en caractéristique p .

1. Opérations caractéristiques.

Rappelons d'abord quelques définitions. Nous renvoyons à [Bo] pour ce qui est des propriétés élémentaires des bigèbres, bigèbres graduées et algèbres de Hopf.

Sauf précisions, K désigne un corps commutatif de caractéristique quelconque.

DÉFINITION 1.1. — On appelle bigèbre (resp. bigèbre graduée, resp. algèbre de Hopf) la donnée d'un K -espace vectoriel (resp. gradué, resp. gradué) H (resp. $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n$, resp. $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n$), et de morphismes linéaires (resp. gradués, resp. gradués) $\Pi : H \otimes H \longrightarrow H$, $\eta : K \longrightarrow H$, $\Delta : H \longrightarrow H \otimes H$ et $\epsilon : H \longrightarrow K$, de telle sorte que :

- i) (H, Π, η) soit une algèbre (resp. graduée, resp. graduée) avec unité.
- ii) (H, Δ, ϵ) soit une cogèbre (resp. graduée, resp. graduée) avec co-unité.
- iii) Le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 H \otimes H & \xrightarrow{\Pi} & H & \xrightarrow{\Delta} & H \otimes H \\
 \downarrow \Delta \otimes \Delta & & & & \uparrow \Pi \otimes \Pi \\
 H \otimes H \otimes H \otimes H & \xrightarrow{I \otimes T \otimes I} & & & H \otimes H \otimes H \otimes H
 \end{array}$$

où on note I l'endomorphisme identité de H et T l'endomorphisme de $H \otimes H$ défini par : $T(x \otimes y) = y \otimes x$ (resp. par : $T(x \otimes y) = y \otimes x$, resp. si $x \in H_n$ et $y \in H_m$, par : $T(x \otimes y) = (-1)^{n \cdot m} y \otimes x$).

Dans le cas des algèbres de Hopf, on parle aussi de *bigèbres graduées gauches* – cette dernière terminologie est celle adoptée dans [Bo].

Une bigèbre (resp. graduée, resp. une algèbre de Hopf) est *commutative* si $\Pi \circ T = \Pi$. Elle est *cocommutative* si $T \circ \Delta = \Delta$.

Une bigèbre graduée ou une algèbre de Hopf est *connexe* si $H_0 \cong K$.

Dans ce chapitre, H désigne sauf précisions une bigèbre, une bigèbre graduée ou une algèbre de Hopf, de produit Π , de coproduit Δ , de morphisme unité η , et de morphisme co-unité ϵ .

Si f et g sont deux endomorphismes linéaires de H (compatibles avec la graduation si H est une bigèbre graduée ou une algèbre de Hopf), on appelle *produit de convolution* de f et g et on note $f * g$ le morphisme :

$$f * g := \Pi \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

Ce produit munit l'ensemble $\mathcal{L}(H)$ des endomorphismes linéaires de H d'une structure d'algèbre associative unitaire, d'unité $\eta \circ \epsilon$.

DÉFINITION 1.2. — On appellera *k-ième opération caractéristique* sur H , et on notera Ψ^k (resp. Ψ^0) l'endomorphisme linéaire de H défini par :

$$\Psi^k := I * \dots * I = I^{*k}$$

(resp. $\Psi^0 := \eta \circ \epsilon$).

On remarquera que, si on note $\Pi^{[k]}$ (resp. $\Delta^{[k]}$) l'itérée k -ième du produit (resp. du coproduit), on a :

$$\Pi^{[k]} : H^{\otimes k} \longrightarrow H, \quad \Delta^{[k]} : H \longrightarrow H^{\otimes k},$$

et

$$\Psi^k = \Pi^{[k]} \circ \Delta^{[k]}.$$

PROPOSITION 1.3. — Les opérations caractéristiques satisfont aux relations :

$$\Psi^k * \Psi^l = \Psi^{k+l}.$$

Cette proposition résulte immédiatement de la définition des opérations caractéristiques.

PROPOSITION 1.4 [GS2]. — *Si H est une bigèbre, une bigèbre graduée ou une algèbre de Hopf, et si H est en outre commutative (resp. cocommutative), les opérations caractéristiques sont des endomorphismes d'algèbre (resp. de cogèbre) de H et satisfont aux relations :*

$$\Psi^k \circ \Psi^l = \Psi^{k \cdot l}.$$

Nous prouvons la proposition 1.4 en supposant H une bigèbre commutative; la même méthode s'appliquerait aux autres cas.

Rappelons que, si H est une bigèbre commutative, le produit de convolution de deux endomorphismes d'algèbre de H est encore un endomorphisme d'algèbre de H . La première partie de la proposition résulte de cette propriété, puisqu'on a : $\Psi^k := I^{*k}$.

Notons $\Pi_{(k)}$ le produit de l'algèbre commutative $H^{\otimes k}$ et $\Pi_{(k)}^{[l]}$ son itéré l -ième. La deuxième partie de la proposition se ramène à établir l'égalité :

$$\Delta^{[k]} \circ \Pi^{[l]} = \Pi_{(k)}^{[l]} \circ (\Delta^{[k]})^{\otimes l},$$

qui est une conséquence à peu près immédiate des axiomes de structure des bigèbres commutatives.

On remarquera que, si le corps K est de caractéristique nulle, si H est une bigèbre ou une bigèbre graduée, et si H est commutative, les opérations caractéristiques permettent de définir sur H une structure de λ -anneau. D'après 1.4, les opérations caractéristiques sont en effet, sous ces hypothèses, des endomorphismes d'algèbre commutative de H satisfaisant aux relations :

$$\Psi^1 = \text{Id}; \quad \Psi^k \circ \Psi^l = \Psi^{k \cdot l}.$$

Elles permettent donc de définir sur H une structure de λ -anneau pour laquelle les opérations d'Adams sont les opérations caractéristiques Ψ^k [K]. Les λ -opérations pour la structure de λ -anneau associée à ces opérations d'Adams sont définies par récurrence par les relations :

$$(-1)^{k+1} \cdot k \cdot \lambda^k = \Psi^k - \Psi^{k-1} \cdot \lambda^1 + \dots + (-1)^{k-1} \cdot \Psi^1 \cdot \lambda^{k-1}.$$

2. Logarithme et représentations unipotentes.

Un monoïde est, par définition, un ensemble muni d'une loi de composition associative et unitaire. Dans tout ce paragraphe, M est un monoïde d'unité notée 1 et K un corps commutatif de caractéristique nulle ou au moins égale à k , où k est un entier fixé.

La bigèbre du monoïde $K[M]$, est par définition [Bo] la bigèbre cocommutative qui est, en tant qu'algèbre, l'algèbre du monoïde M , et dont le coproduit est défini par : $\Delta(x) := x \otimes x$, $\forall x \in M$.

Notons Φ^k le n -ième endomorphisme caractéristique de $K[M]$. Par définition des endomorphismes caractéristiques, on a : $\forall x \in M$, $\Phi^k(x) = x^k$.

L'étude directe des propriétés des opérations caractéristiques Φ^k associées aux bigèbres de monoïdes semble en général délicate. D'où l'idée d'entreprendre une telle étude par l'intermédiaire des propriétés de certaines représentations particulières du monoïde M .

On appellera K -représentation de M tout morphisme d'ensemble de M dans une K -algèbre unitaire $(A, +, \times)$, qui soit un morphisme de monoïde de M dans $(A, \times)$. Une K -représentation ρ est dite *unipotente de rang k* si on a pour tout $m \in M$ l'égalité suivante dans A :

$$(\rho(m) - 1)^k = 0.$$

On ne demande pas que k soit minimal pour cette propriété. Il va de soi que toute représentation linéaire unipotente de M dans un K -espace vectoriel V définit une K -représentation unipotente de M dans l'algèbre des endomorphismes linéaires de V .

Nous supposons donnée une représentation unipotente de rang k :

$$\rho : M \longrightarrow A.$$

Nous noterons encore ρ le morphisme d'algèbre induit de $K[M]$ dans A et $\log_k$ (resp. $\exp_k$) le morphisme d'ensemble de M dans A défini par :

$$\log_k(x) = \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^{n+1} \frac{(\rho(x) - 1)^n}{n},$$

(resp. l'endomorphisme – non linéaire – de A défini par :

$$\exp_k(y) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{y^n}{n!}.$$

LEMME 2.1. — On a :

$$\exp_k \circ \log_k = \rho.$$

Le lemme résulte immédiatement de ce que ρ est une représentation unipotente de rang k et des propriétés des morphismes $\log$ et $\exp$.

DÉFINITION 2.2. — Si $i < k$, on appellera projecteur de poids i et on notera ε^i le morphisme de M dans A défini par :

$$\forall x \in M, \varepsilon^i(x) = \frac{(\log_k x)^i}{i!}$$

avec $\varepsilon^0(x) = 1, \forall x \in M$.

On notera encore ε^i le morphisme linéaire induit de $K[M]$ dans A .

PROPOSITION 2.3. — Les endomorphismes caractéristiques de $K[M]$ et les projecteurs de poids i associés à la représentation unipotente ρ de rang k sont liés par les relations :

$$\rho \circ \Phi^n = \sum_{i=0}^{k-1} n^i \cdot \varepsilon^i.$$

La proposition résulte immédiatement des propriétés des morphismes $\log$ et $\exp$.

3. Opérations en caractéristique nulle.

Soit H une bigèbre graduée ou une algèbre de Hopf; on supposera dans ce paragraphe que H est connexe et que le corps de base K est de caractéristique nulle. L'ensemble E des endomorphismes caractéristiques Ψ^k de H est un monoïde pour le produit de convolution, d'après 1.3.

Notons $\mathcal{L}(H)_n$ l'ensemble des endomorphismes linéaires de $\bigoplus_{i=0}^n H_i$ compatibles à la graduation, où H_i désigne la composante de degré i de H . Notons ρ_n l'homomorphisme de restriction de $\mathcal{L}(H)$ dans $\mathcal{L}(H)_n$.

L'ensemble $\mathcal{L}(H)_n$, muni du produit induit par le produit de convolution dans $\mathcal{L}(H)$, est une algèbre associative unitaire, d'unité le morphisme $\rho_n(\eta \circ \varepsilon)$. Nous noterons encore ρ_n la K -représentation canonique de E dans $\mathcal{L}(H)_n$.

LEMME 3.1. — *La K -représentation ρ_n est unipotente de rang $n + 1$.*

Le lemme résulte de l'hypothèse de connexité effectuée sur H . Sous cette hypothèse, la restriction de $\Psi^k - \Psi^0$ à H_0 est nulle pour tout k . On a, par définition :

$$[\rho_n(\Psi^k - \Psi^0)]^{*(n+1)} = \rho_n[\Pi^{[n+1]} \circ (\Psi^k - \Psi^0)^{\otimes n+1} \circ \Delta^{[n+1]}].$$

La restriction de $\Delta^{[n+1]}$ à H_m est à valeurs dans $\sum_{i_1, \dots, i_{n+1}} H_{i_1} \otimes \dots \otimes H_{i_{n+1}}$, où $(i_1, \dots, i_{n+1})$ parcourt l'ensemble des $(n + 1)$ -uplets de somme m . Si $m \leq n$, pour tout tel $(n + 1)$ -uplet, il existe au moins un coefficient j tel que $i_j = 0$. Le lemme résulte alors de ce que la restriction de $\Psi^k - \Psi^0$ à $H_{i_j} = H_0$ est nulle.

Comme nous l'avons fait au paragraphe 2, nous noterons Φ^k les endomorphismes caractéristiques de la bigèbre de monoïde $K[E]$. On remarquera que $\Psi^k = \Phi^k(\Psi^1) = \Phi^k(I)$.

Nous noterons dans la suite ε_n^i , $1 \leq i \leq n$, le projecteur de poids i associé à la K -représentation unipotente ρ_n du monoïde E (déf. 2.2). Le morphisme ε_n^i est donc un morphisme de E dans $\mathcal{L}(H)_n$. On notera enfin e_n^i (resp. Ψ_n^k) la restriction de $\varepsilon_n^i(I)$ (resp. de Ψ^k) à H_n .

PROPOSITION 3.2. — *On a, si $n > 0$:*

$$\Psi_n^k = \sum_{i=1}^n k^i \cdot e_n^i.$$

La proposition résulte de 2.3 et de ce que $\rho_n(\Psi^k) = \rho_n(\Phi^k(I))$.

DÉFINITION 3.3. — On appellera projecteur de poids i associé à H et on notera e^i l'élément de $\mathcal{L}(H)$ dont la restriction à H_n est donnée par le morphisme e_n^i .

A partir de maintenant nous supposons en outre que H est commutative ou cocommutative.

PROPOSITION 3.4. — Les projecteurs de poids i associés à H satisfont aux identités :

$$e^i \circ e^j = \delta_j^i \cdot e^i,$$

où on note δ_j^i le symbole de Kronecker, et :

$$e^i * e^j = \binom{i+j}{i} \cdot e^{i+j}.$$

Les deux identités résultent respectivement de 1.4 et 3.2, et de la définition 2.2 des projecteurs de poids i .

THÉORÈME 3.5. — Soit H une bigèbre graduée ou une algèbre de Hopf, commutative ou cocommutative, et connexe, sur un corps de caractéristique nulle. En tant qu'espace vectoriel gradué, elle se décompose en sous-espaces propres sous l'action des opérations caractéristiques Ψ^k .

Plus précisément, si $n > 0$, il existe une famille de projecteurs orthogonaux $(e_n^i)_{i \in [1, n]}$ dans $\text{End}_K(H_n)$ tels que :

$$H_n = \bigoplus_{i=1}^n H_n^{(i)},$$

où $H_n^{(i)} := e_n^i(H_n)$.

En posant : $H^{(i)} := \bigoplus_{n \geq i} H_n^{(i)}$, Ψ^k opère comme k^i sur $H^{(i)}$.

Les projecteurs e_n^i sont les composantes de degré n des endomorphismes linéaires de H définis par les séries formelles :

$$e^i := \frac{(\log I)^{*i}}{i!}.$$

Le théorème résulte des différents résultats établis précédemment. La série formelle e^i se réduit à une somme finie de termes en chacun des degrés (c'est une conséquence du lemme 3.1); elle est donc convergente.

COROLLAIRE 3.6. — *Si H est une bigèbre graduée ou une algèbre de Hopf, connexe, sur un corps de caractéristique nulle, et si H est en outre commutative (resp. cocommutative), la décomposition du théorème 3.5. permet de munir H d'une structure d'algèbre (resp. de cogèbre) bigraduée.*

Comme les endomorphismes caractéristiques Ψ^k sont des endomorphismes d'algèbre graduée (resp. de cogèbre graduée) de H (Proposition 1.4), on a en effet :

$$\Pi : H_n^{(i)} \otimes H_m^{(j)} \longrightarrow H_{n+m}^{(i+j)},$$

puisque $\forall x \in H_n^{(i)}, \forall y \in H_m^{(j)} :$

$$\Psi^k \circ \Pi(x \otimes y) = \Pi(\Psi^k(x) \otimes \Psi^k(y)) = k^{i+j} \cdot \Pi(x \otimes y).$$

De la même manière :

$$\Delta : H_n^{(i)} \longrightarrow \bigoplus_{m \leq n, j \leq i} H_m^{(j)} \otimes H_{n-m}^{(i-j)}.$$

DÉFINITION 3.7. — *Soit ζ un élément de K^* . On appellera ζ -ième opération caractéristique généralisée sur H et on notera Ψ^ζ l'élément de $\mathcal{L}(H)$ dont la restriction à $H_n^{(i)}$ est la multiplication par ζ^i .*

Il va de soi que, si ζ est entier, Ψ^ζ n'est autre que la ζ -ième opération caractéristique usuelle sur H . Si H est commutative (resp. cocommutative), Ψ^ζ est un automorphisme d'algèbre bigraduée (resp. de cogèbre bigraduée) de H d'après 3.6.

PROPOSITION 3.8. — *Soit H une bigèbre graduée ou une algèbre de Hopf, commutative ou cocommutative, connexe, sur un corps de caractéristique nulle; les opérations caractéristiques généralisées satisfont aux relations :*

$$\Psi^\zeta \circ \Psi^\gamma = \Psi^{\zeta \cdot \gamma}$$

$$\Psi^\zeta * \Psi^\gamma = \Psi^{\zeta + \gamma}.$$

La première égalité est immédiate.

La seconde est à peine plus délicate. On a, par définition,

$$\rho_n(\Psi^\zeta) = \rho_n\left(\sum_{i=1}^n \zeta^i \cdot e^i\right).$$

Comme, d'après 3.4,

$$\rho_n(e^i) * \rho_n(e^j) = \binom{i+j}{i} \rho_n(e^{i+j}),$$

on a :

$$\rho_n(\Psi^\zeta * \Psi^\gamma) = \sum_{i,j=1}^n \zeta^i \cdot \gamma^j \rho_n(e^i * e^j) = \sum_{i,j=1}^n \binom{i+j}{i} \zeta^i \cdot \gamma^j \rho_n(e^{i+j}),$$

ce qui permet de conclure.

Pour finir cette étude des propriétés des opérations caractéristiques, étudions leur comportement au regard de la dualité.

Considérons pour cela une bigèbre graduée ou une algèbre de Hopf H , commutative (resp. cocommutative) et connexe sur un corps de caractéristique nulle. On supposera H de type fini (i.e. on supposera que chacune de ses composantes H_n est un K -espace vectoriel de dimension finie). Il est alors possible d'associer à H une bigèbre graduée ou une algèbre de Hopf duale $H^{*\text{gr}}$, que nous appellerons *bigèbre graduée ou algèbre de Hopf duale* de H , dont les composantes sont les espaces vectoriels H_n^* (où H_n^* est le dual de H_n), le morphisme produit de $H^{*\text{gr}}$ étant l'adjoint du morphisme coproduit de H et le morphisme coproduit l'adjoint du morphisme produit de H . Cette bigèbre graduée ou cette algèbre de Hopf $H^{*\text{gr}}$ est cocommutative (resp. commutative) et connexe.

Si l'on remarque que les opérations caractéristiques sur H et $H^{*\text{gr}}$ sont deux à deux adjointes, la proposition 3.9 est immédiate.

PROPOSITION 3.9. — *Soit H une bigèbre graduée ou une algèbre de Hopf, commutative (resp. cocommutative), connexe, de type fini sur un corps K de caractéristique nulle et $H^{*\text{gr}}$ la bigèbre graduée ou l'algèbre de Hopf duale de H . Les opérations caractéristiques, les opérations caractéristiques généralisées et les projecteurs de poids i sur H et $H^{*\text{gr}}$ sont alors deux à deux adjoints et on a :*

$$(H^{(i)})^\perp = \bigoplus_{j \neq i} H^{*\text{gr}(j)}.$$

Nous verrons aux paragraphes 5 et 6 comment tirer profit des propriétés des opérations caractéristiques au regard de la dualité.

4. Structure des algèbres de Hopf en caractéristique nulle.

Les résultats de [MM] permettent de décrire la structure des algèbres de Hopf commutatives ou cocommutatives, et connexes. La question se pose de chercher à relier ces résultats à ceux du paragraphe 3. Les constructions qui suivent ne présentent pas de difficultés particulières, aussi nous nous contentons d'en donner une description sommaire.

Rappelons que, si H est une bigèbre, une bigèbre graduée ou une algèbre de Hopf, sa partie primitive, notée $\text{Prim } H$, est l'ensemble des éléments de H satisfaisant à :

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x.$$

LEMME 4.1. — *Soit H une bigèbre graduée ou une algèbre de Hopf, cocommutative et connexe sur un corps de caractéristique nulle, on a :*

$$\text{Prim } H = H^{(1)}.$$

L'inclusion $\text{Prim } H \subset H^{(1)}$ est immédiate.

D'après 3.6, H a une structure de cogèbre bigraduée et donc :

$$\Delta(H^{(1)}) \subset H^{(1)} \otimes H_0 \oplus H_0 \otimes H^{(1)}.$$

Comme H est cocommutative et connexe, on a donc :

$$\forall x \in H^{(1)}, \exists y \in H^{(1)}, \Delta(x) = y \otimes 1 + 1 \otimes y;$$

et comme $\Psi^2(x) = 2 \cdot x$, on a finalement :

$$x = \frac{\Psi^2(x)}{2} = \frac{\Pi \circ \Delta(x)}{2} = y. \quad \text{CQFD.}$$

Soit maintenant H une algèbre de Hopf cocommutative et connexe sur un corps de caractéristique nulle. Rappelons [MM] que, si on note $[\ , \]$ le crochet de Lie gradué sur H induit par la structure d'algèbre graduée de H , $\text{Prim } H$ est une sous-algèbre de Lie graduée de $(H, [\ , \])$. En outre, H est alors isomorphe à l'algèbre graduée enveloppante de $\text{Prim } H$. (On rappelle que, si A est une algèbre graduée, le crochet de Lie gradué induit sur A par la structure d'algèbre graduée de A est défini par :

$$\forall x \in A_n, \forall y \in A_m, [x, y] = x \otimes y - (-1)^{n \cdot m} y \otimes x.$$

Nous appelons ici *algèbre graduée enveloppante* d'une algèbre de Lie graduée L et notons $U_g(L)$ ce que [MM] appelle «algèbre enveloppante universelle» de L . Nous préférons réserver le terme *algèbre enveloppante* au cas d'une algèbre de Lie non graduée. L'algèbre $U_g(L)$ peut être réalisée comme le quotient de l'algèbre tensorielle sur L , $T(L)$, par l'idéal engendré par les éléments : $x \otimes y - (-1)^{n \cdot m} y \otimes x - [x, y]$, où $x \in L_n$ et $y \in L_m$.

PROPOSITION 4.2. — *Si H est une algèbre de Hopf cocommutative et connexe sur un corps de caractéristique nulle, H est isomorphe à l'algèbre graduée enveloppante $U_g(H^{(1)})$ de l'algèbre de Lie graduée $H^{(1)}$.*

La proposition 4.2 résulte de 4.1 et des résultats de [MM] que nous venons de rappeler.

PROPOSITION 4.3. — *Soit H une algèbre de Hopf commutative et connexe sur un corps de caractéristique nulle; alors H est isomorphe en tant qu'algèbre graduée, à l'algèbre symétrique graduée sur l'espace vectoriel gradué $H^{(1)}$.*

Cette proposition se déduit également des théorèmes de structure de [MM]. L'algèbre symétrique graduée sur un espace vectoriel gradué V est, par définition, l'algèbre graduée enveloppante de l'espace vectoriel gradué V , considéré comme une algèbre de Lie graduée commutative (i.e. de crochet de Lie gradué nul).

Il est possible de démontrer directement 4.2 et 4.3 sans avoir recours aux méthodes utilisées dans [MM]. Nous reviendrons plus en détail sur cette remarque dans [P3].

Les mêmes remarques s'appliquent aux bigèbres graduées. On a en particulier la proposition 4.4.

PROPOSITION 4.4. — Soit H une bigèbre graduée cocommutative (resp. commutative) et connexe, sur un corps de caractéristique nulle; H est isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie (non graduée) $H^{(1)}$ (resp. à l'algèbre symétrique (non graduée) sur l'espace vectoriel $H^{(1)}$).

5. Bigèbres tensorielles.

A titre d'exemple, nous allons voir comment les constructions que nous venons d'effectuer permettent de décrire les structures de bigèbre graduée et d'algèbre de Hopf associées à l'algèbre tensorielle. On renvoie à [R] et [GS2] comme références sur le sujet.

Considérons une famille d'objets $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. On notera $T(X)$ l'algèbre tensorielle sur K associée à X , où K est un corps de caractéristique nulle.

Il existe sur l'algèbre $T(X)$ une unique structure de bigèbre graduée (resp. d'algèbre de Hopf) cocommutative pour laquelle les éléments $x_1, \dots, x_n$ soient primitifs et de degré 1. Cela résulte immédiatement de ce que ces éléments engendrent l'algèbre $T(X)$. On notera encore $T(X)$ (resp. on notera $Th(X)$) cette bigèbre graduée (resp. cette algèbre de Hopf) et on l'appellera *bigèbre tensorielle* (resp. *algèbre de Hopf tensorielle*).

On notera $T_n(X)$ (resp. $Th_n(X)$) la composante de degré n de $T(X)$ (resp. de $Th(X)$).

Il est possible d'expliciter une formule pour les coproduits sur $T(X)$ et $Th(X)$ en termes d'opérateurs d'interclassement (shuffles). Le coproduit sur $Th(X)$ est par exemple donné par :

$$\Delta(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_k}) = \sum_{p+q=k} \sum_{\beta} \text{sgn}(\beta) (x_{i_{\beta(1)}} \otimes \dots \otimes x_{i_{\beta(p)}}) \otimes (x_{i_{\beta(p+1)}} \otimes \dots \otimes x_{i_{\beta(p+q)}})$$

où β parcourt l'ensemble des opérateurs d'interclassement d'indices p et q .

On rappelle qu'un opérateur d'interclassement d'indices p et q est un élément σ de S_{p+q} tel que :

$$\sigma^{-1}(1) < \dots < \sigma^{-1}(p)$$

et

$$\sigma^{-1}(p+1) < \dots < \sigma^{-1}(p+q).$$

Faisons maintenant opérer S_n sur les produits tensoriels $x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_n}$ par :

$$\sigma(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_n}) = x_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \dots \otimes x_{i_{\sigma^{-1}(n)}}.$$

Cette opération de S_n permet de définir une injection :

$$K[S_n] \hookrightarrow \text{End}(T_n(X))$$

(resp. de $K[S_n]$ dans $\text{End}(Th_n(X))$).

Appliquons à la bigèbre $T(X)$ (resp. à $Th(X)$) le théorème 3.5 : l'espace vectoriel $T(X)$ (resp. $Th(X)$) se décompose en sous-espaces propres sous l'action des opérations caractéristiques. On notera e^i (resp. f^i) le projecteur de poids i associé à $Th(X)$ (resp. à $T(X)$).

PROPOSITION 5.1. — *La famille $(e_n^i)_{1 \leq i \leq n}$ d'endomorphismes de $Th_n(X)$ (resp. $(f_n^i)_{1 \leq i \leq n}$ de $T_n(X)$) définit une famille d'idempotents orthogonaux de somme 1 dans l'algèbre $K[S_n]$.*

Les idempotents e_n^i et f_n^i de l'algèbre $K[S_n]$ se déduisent les uns des autres par l'involution d'algèbre de $K[S_n]$:

$$K[S_n] \longrightarrow K[S_n]$$

$$\sigma \longmapsto \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma.$$

En explicitant les formules pour le produit et le coproduit dans $T(X)$ (resp. $Th(X)$) en termes d'opérateurs d'interclassement, on vérifie facilement que :

$$\Psi_n^k \in K[S_n] \hookrightarrow \text{End}(T_n(X))$$

(resp. :

$$\Psi_n^k \in K[S_n] \hookrightarrow \text{End}(Th_n(X))).$$

Par définition, e_n^i (resp. f_n^i) est la restriction à $Th_n(X)$ (resp. $T_n(X)$) du morphisme

$$\frac{(\log_{n+1} \Psi^1)^{*i}}{i!}.$$

Ce morphisme peut, d'après 1.3 et 3.1, se réécrire comme une combinaison linéaire finie d'endomorphismes caractéristiques. Le fait que $e_n^i \in K[S_n]$

résulte donc de ce que les endomorphismes caractéristiques appartiennent à $K[S_n]$.

Le reste de la proposition ne présente pas de difficultés.

On trouvera dans [R], [L] et [GR] une description combinatoire de ces idempotents, et dans [P1] une description géométrique.

La structure d'algèbre associative de $T(X)$ (resp. d'algèbre graduée de $Th(X)$) induit sur $T(X)$ (resp. $Th(X)$) une structure d'algèbre de Lie (resp. d'algèbre de Lie graduée). Par définition, l'algèbre de Lie libre (resp. graduée) est la plus petite sous-algèbre de Lie (resp. graduée) de $T(X)$ (resp. de $Th(X)$) contenant X .

LEMME 5.2. — *La partie primitive de $T(X)$ (resp. de $Th(X)$) est l'algèbre de Lie libre (resp. graduée).*

Le lemme 5.2 est classique, il résulte du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, et de la proposition 4.4 (resp. et de la proposition 4.2).

Nous allons voir comment ces constructions permettent par exemple de généraliser au cas gradué un théorème de Ree (cité dans [R], introduction).

On note $Th^{*gr}(X)$ l'algèbre de Hopf duale de $Th(X)$. C'est une algèbre de Hopf commutative. On notera $x_{i_1}^* \otimes \dots \otimes x_{i_k}^*$ les éléments de la base de $Th_k^{*gr}(X)$, duale à la base $x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_k}$ de $Th_k(X)$.

Considérons alors le produit tensoriel complété :

$$\mathcal{T} := Th^*(X) \hat{\otimes} Th(X);$$

et considérons dans $\mathcal{T}$ l'élément :

$$T := \sum_{(i_1, \dots, i_k)} (x_{i_1}^* \otimes \dots \otimes x_{i_k}^*) \otimes (x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_k}),$$

où k parcourt $\mathbf{N}^*$ et $(i_1, \dots, i_k)$, l'ensemble des familles à k éléments de l'ensemble $[1, n]$. Posons enfin : $S := 1 \otimes 1 + T$.

Le logarithme de S est bien défini dans l'algèbre graduée $\mathcal{T}$, la somme des termes étant finie en chacun des degrés. On peut le décomposer sous

la forme :

$$\log S = \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} T^m = \sum_{k \geq 1} \sum_{i_1, \dots, i_k} (x_{i_1}^* \otimes \dots \otimes x_{i_k}^*) \otimes Q_{i_1, \dots, i_k},$$

où $Q_{i_1, \dots, i_k}$ est un élément de degré k de $Th(X)$.

PROPOSITION 5.3. — *Pour tout k -uplet ordonné $(i_1, \dots, i_k)$ d'éléments de $[1, n]$, l'élément $Q_{i_1, \dots, i_k}$ de degré k de $Th(X)$ appartient à $\text{Prim } Th(X)$, l'algèbre de Lie libre graduée sur X .*

Plus précisément, on a :

$$Q_{i_1, \dots, i_k} = e_k^1(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_k}).$$

Il s'agit de prouver que :

$$Q_{i_1, \dots, i_k} = \log(I)(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_k}),$$

où $\log(I)$ désigne le logarithme du morphisme identité dans l'algèbre associative unitaire $\mathcal{L}(Th(X))$; soit encore que :

$$Q_{i_1, \dots, i_k} = \sum_{j \geq 1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (I - \eta \circ \epsilon)^{*j}(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_k})$$

où η et ϵ sont les morphismes unité et co-unité de $Th(X)$.

Supposons $m \leq k$ et calculons le coefficient $Q_{i_1, \dots, i_k}^{(m)}$ dans la décomposition :

$$T^m = \sum_{l \geq m} \sum_{(j_1, \dots, j_l)} (x_{j_1}^* \otimes \dots \otimes x_{j_l}^*) \otimes Q_{j_1, \dots, j_l}^{(m)}.$$

On note $\Delta^{[m]}$ (resp. $\Delta^{*[m]}$, ...) l'itérée m -ième du coproduit dans $Th(X)$ (resp. du produit dans $Th^*(X)$, etc...).

Par définition du produit dans $Th^*(X)$ et du coproduit dans l'algèbre de Hopf duale $Th(X)$, $x_{i_1}^* \otimes \dots \otimes x_{i_k}^*$ apparaît dans la décomposition canonique dans $Th^*(X)$ de :

$$\Delta^{*[m]}[(x_{\alpha_1(1)}^* \otimes \dots \otimes x_{\alpha_1(l_1)}^*) \otimes \dots \otimes (x_{\alpha_m(1)}^* \otimes \dots \otimes x_{\alpha_m(l_m)}^*)]$$

si et seulement si le produit tensoriel :

$$(x_{\alpha_1(1)} \otimes \dots \otimes x_{\alpha_1(l_1)}) \otimes \dots \otimes (x_{\alpha_m(1)} \otimes \dots \otimes x_{\alpha_m(l_m)})$$

apparaît affecté du même coefficient dans la décomposition de $\Delta^{[m]}(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_k})$ dans la base canonique de $Tg(X)^{\otimes k}$.

On a finalement :

$$\begin{aligned} Q_{i_1, \dots, i_k}^{(m)} &= \Pi^{[m]} \circ (I - \eta \circ \epsilon)^{\otimes m} \circ \Delta^{[m]}(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_k}) \\ &= (I - \eta \circ \epsilon)^{*m}(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_k}). \end{aligned} \quad \text{CQFD.}$$

6. Opérations en caractéristique p .

Ce paragraphe étudie le comportement des opérations caractéristiques en caractéristique p . On notera H une algèbre de Hopf de type fini, commutative ou cocommutative, connexe, sur un corps commutatif K de caractéristique p .

On note, comme dans 3, E le monoïde commutatif des endomorphismes caractéristiques de H , ρ_n la K -représentation canonique de E dans $\mathcal{L}(H)_n$ et Ψ_n^k la restriction de Ψ^k à H_n , composante de degré n de H . On note $H^\bullet$ l'idéal d'augmentation de H et $Q(H)$ le K -espace vectoriel des indécomposables [MM] :

$$Q(H) := H^\bullet / \Pi(H^\bullet \otimes H^\bullet).$$

LEMME 6.1. — *La K -représentation ρ_n est unipotente de rang $n + 1$.*

L'argument est celui du lemme 3.1.

PROPOSITION 6.2. — *Soit H une algèbre de Hopf commutative ou cocommutative, connexe sur un corps de caractéristique p . Pour $n < p$ les composantes H_n de cette algèbre de Hopf se décomposent en sous-espaces propres sous l'action des opérations caractéristiques.*

Plus précisément, il existe une famille de projecteurs orthogonaux $(e_n^i)_{i \in [1, n]}$ dans $\text{End}_K(H_n)$ telle que :

$$H_n = \bigoplus_{i=1}^n H_n^{(i)},$$

où $H_n^{(i)} := e_n^i(H_n)$. En outre, Ψ_n^k opère comme k^i sur $H_n^{(i)}$.

La vérification de cette proposition est identique à celle du théorème 3.5.

Dès que n est supérieur ou égal à p , on ne dispose plus du logarithme pour étudier la K -représentation unipotente ρ_n .

Nous nous contenterons de montrer, à partir de $[K]$, comment il est malgré tout possible d'exhiber en degrés supérieurs ou égaux à p une décomposition « en poids » de H .

LEMME 6.3. — *Pour tout k , $k \not\equiv 0 [p]$, le morphisme $\Psi^{k^{p^{n-1}}}$ satisfait à l'égalité :*

$$\rho_n((\Psi^{k^{p^{n-1}}})^{p-1}) = \rho_n(I).$$

Nous poserons : $\Psi^{k,n} := \Psi^{k^{p^{n-1}}}$.

Le lemme se démontre par récurrence sur n .

Comme les opérations caractéristiques sur une algèbre de Hopf commutative sont adjointes aux opérations correspondantes sur l'algèbre de Hopf commutative duale, il suffit de prouver le lemme dans le cas où H est commutative.

Supposons donc H commutative et, par récurrence, supposons que :

$$\rho_{n-1}((\Psi^{k,n-1})^{p-1}) = \rho_{n-1}(I).$$

Comme les endomorphismes caractéristiques de H sont des endomorphismes d'algèbre, on a : $\rho_n((\Psi^{k,n-1})^{p-1}) = \rho_n(I)$ sur $\Pi(H^\bullet \otimes H^\bullet) \cap H_n$.

Par ailleurs, on vérifie immédiatement que, pour tout entier l , la restriction de Ψ^l à $Q(H)$ est bien définie et opère sur ce K -espace vectoriel comme $\hat{l}$, où on note $\hat{l}$ la classe de l dans le corps à p éléments F_p .

Considérons maintenant $x \in H_n$. On a :

$$\Psi^{k,n-1}(x) = \hat{k} \cdot x + y,$$

où $y \in \Pi(H^\bullet \otimes H^\bullet) \cap H_n$; d'où :

$$(\Psi^{k,n-1})^{p-1}(x) = \hat{k}^{p-1} \cdot x + z = x + z,$$

où z est un élément de $\Pi(H^\bullet \otimes H^\bullet) \cap H_n$.

Finalement, on a :

$$((\Psi^{k,n-1})^{p-1})^p(x) = x + \hat{p} \cdot z = x. \quad \text{CQFD.}$$

PROPOSITION 6.4. — Soit k entier, $k \not\equiv 0 [p]$, $k \not\equiv 1 [p]$. Soit H une algèbre de Hopf de type fini, commutative ou cocommutative, connexe, sur un corps K de caractéristique p . Le K espace vectoriel H se décompose en somme directe :

$$H = H^{(1)} \oplus \dots \oplus H^{(p-1)},$$

où $H_n^{(i)} := H_n \cap H^{(i)}$ est le sous-espace propre de H_n associé à la valeur propre $\hat{k}^i$ de l'opération caractéristique $\Psi^{k^{p^{n-1}}}$.

Si H est commutative (resp. cocommutative), cette décomposition est compatible à la structure d'algèbre (resp. de coalgèbre) graduée de H , au sens où :

$$\Pi : H^{(i)} \otimes H^{(j)} \longrightarrow H^{([i+j])}$$

(resp. :

$$\Delta : H^{(i)} \longrightarrow \bigoplus_{[j+k]=i} H^{(j)} \otimes H^{(k)},$$

où si $(a, b) \in [1, p-1]^2$, on pose $[a+b] = a+b$ si $a+b \in [1, p-1]$ et $[a+b] = a+b-p+1$ sinon.

Le polynôme minimal de $\Psi_n^{k,n}$ divise en effet d'après 6.3 le polynôme $\zeta^{p-1} - 1$, scindé dans F_p , dont les racines sont les éléments de F_p^* . Ces racines sont simples, $\Psi_n^{k,n}$ est donc diagonalisable. Le reste de la proposition en résulte immédiatement.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ba] M. BARR, Harrison homology, Hochschild homology and triples, J. of Algebra, 8 (1968), 314-323.
- [Bo] N. BOURBAKI, Eléments de mathématiques, Algèbre chapitre III. C.C.L.S. (1970).
- [GR] A.M. GARSIA et C. REUTENAUER, A decomposition of Solomon's descent algebra, Adv. in Math., 77 (1989), 189-262.
- [GS1] M. GERSTENHABER et S.D. SCHACK, A Hodge-type decomposition for commutative algebra cohomology, J. of Pure and Applied Alg., 48 (1987), 229-247.

- [GS2] M. GERSTENHABER et S.D. SCHACK, The shuffle-bialgebra and the cohomology of commutative algebras, *J. of Pure and Applied Alg.*, 70 (1991), 263-272.
- [K] R.M. KANE, The homology of Hopf spaces, *North-Holland Math. Lib.*, 1988.
- [Kn] D. KNUTSON, λ -rings and the representation theory of the symmetric group, *Springer Lect. Notes in Math.*, 308 (1973).
- [L] J.L. LODAY, Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives, *Invent. Math.*, 96 (1989), 205-230.
- [MM] J.W.MILNOR et J.C. MOORE, On the structure of Hopf algebras, *Ann. of Math.*, 81 (1965), 211-264.
- [P1] F. PATRAS, Construction géométrique des idempotents eulériens. Filtration des groupes de polytopes et des groupes d'homologie de Hochschild, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 119 (1991), 101-126.
- [P2] F. PATRAS, Homothéties simpliciales. Thèse de doctorat, Université Paris 7, Janvier 1992.
- [P3] F. PATRAS, L'algèbre des descentes d'une bigèbre graduée. *J. of Algebra* (à paraître).
- [R] C. REUTENAUER, Theorem of Poincaré-Birkhoff-Witt, logarithm and representations of the symmetric group whose orders are the Stirling numbers. *Colloque « Combinatoire Enumérative », Montréal Mai 1985*, Springer, *Lect. Notes in Math.*, 1234 (1986), 267-284.

Manuscrit reçu le 16 juin 1992,
révisé le 12 février 1993.

Frédéric PATRAS,
Université de Nice, Mathématiques
URA au CNRS 168
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2.