

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

M. E. A. HADJAR

Sur un problème d'existence relatif de formes de contact invariantes en dimension trois

Annales de l'institut Fourier, tome 42, n° 4 (1992), p. 891-904

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1992__42_4_891_0

© Annales de l'institut Fourier, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN PROBLÈME D'EXISTENCE RELATIF DE FORMES DE CONTACT INVARIANTES EN DIMENSION TROIS

par M.E. Amine HADJAR

0. Introduction.

Le problème d'existence d'une forme de contact sur une variété M_3 compacte, orientable de dimension 3, c'est-à-dire d'une forme de Pfaff ω telle que $\omega \wedge d\omega$ soit partout non nulle, a été résolu par J. Martinet [M2] en utilisant des constructions de formes de contact invariantes sur des tores pleins introduites par R. Lutz [L1]. Celui-ci a classifié dans [L2] les structures de contact $\mathbb{S}^1$ -invariantes sur les variétés compactes de dimension 3 munies d'une action libre du groupe $\mathbb{S}^1$.

On résout ici le problème d'existence relatif de formes de contact $\mathbb{S}^1$ -invariantes, où l'on impose la valeur de la forme induite sur une surface invariante donnée de M_3 . Précisément, on aboutit au résultat suivant :

THÉORÈME 3.3. — *Soit un fibré principal en cercles $M_3 \rightarrow B_2$ avec M_3 et B_2 compactes et orientables, et une surface S réunion finie de tores disjoints munie de l'action libre du cercle sur le deuxième facteur $\mathbb{S}^1$ de chaque composante connexe $T_i = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ de S . Soit $p : S \rightarrow M$ un plongement tel que $p(S)$ soit $\mathbb{S}^1$ -invariant, et qui respecte les deux actions. Si η est une 1-forme $\mathbb{S}^1$ -invariante sur S , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

Mots-clés : Formes de contact invariantes – Fibrés principaux.
Classification A.M.S. : 53C15 – 55R10 – 55Q05 – 58A15 – 58C27.

(i) *Il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante ω sur M , qui induit $p^*\omega = \eta$ sur S .*

(ii) *η et $d\eta$ ne s'annulent pas simultanément.*

La démonstration requiert plusieurs lemmes techniques présentés selon le plan suivant :

Au §1, à partir d'une classification des germes de structures de contact le long d'une surface fermée (th. 1.2), on aboutit à une manière de raccorder deux formes de contact contiguës le long d'une surface et y induisant une même trace (lemme 1.3).

Au §2, on en tire une version particulière du théorème 3.3 sous l'hypothèse que η soit sans zéros (th. 2.1) en utilisant une technique rencontrée dans [L2].

Au §3, on construit un germe de formes de contact $\mathbb{S}^1$ -invariantes le long d'un voisinage fermé W de $p(S)$, $\mathbb{S}^1$ -invariant et isomorphe à $S \times [-1, 1]$, induisant η sur S et une 1-forme sans zéros sur ∂W (lemme 3.2). Moyennant le théorème 2.1 et le lemme 1.3, on pourra ainsi prolonger ce germe en une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante sur M (th. 3.3).

Tous les objets différentiels dont il est question sont supposés C^∞ .

1. Raccordement de deux formes de contact contiguës le long d'une surface.

1.1. Dans chaque partie de cet article, on considère un fibré principal en cercles $M_3 \xrightarrow{q} B_2$, avec M_3 et B_2 éventuellement à bord compactes orientables de dimensions 3 et 2, une surface S réunion finie de tores disjoints, et un plongement $p : S \rightarrow M_3$ tel que $p(S)$ soit $\mathbb{S}^1$ -invariant et $\partial M \cap p(S)$ soit ou bien vide ou bien réunion de tores $\mathbb{T}^2$. On considère l'action libre du cercle sur le deuxième facteur $\mathbb{S}^1$ de chaque composante connexe $T_i = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ de S , et η une 1-forme $\mathbb{S}^1$ -invariante sur S . On suppose que p respecte les deux actions, i.e. $p(x \cdot \theta) = p(x) \cdot \theta$ pour $x \in S$ et $\theta \in \mathbb{S}^1$.

L'action du groupe $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{T}^2$ induit une action libre sur tout produit $\mathbb{T}^2 \times I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, définie par :

$$(\theta_1, \theta_2, t) \cdot \theta = (\theta_1, \theta_2 + \theta, t) \quad \text{pour } (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2, t \in I \text{ et } \theta \in \mathbb{S}^1.$$

1.2. THÉORÈME. — Soit $i : N \rightarrow N \times \mathbb{R}$ le plongement d'une surface N fermée et orientable, défini par $i(x) = (x, 0)$.

(i) Si ω et ω' sont deux formes de contact sur $N \times \mathbb{R}$, telles que $i^*\omega = \mu i^*\omega'$, où μ est une fonction sans zéros sur N , alors il existe un germe de difféomorphismes ϕ le long de $i(N)$, tel que

$$\phi|_{i(N)} = \text{identité} \quad \text{et} \quad \omega \wedge \phi^*\omega' = 0.$$

(ii) Si, de plus, $N = \mathbb{T}^2$ et ω, ω' sont $\mathbb{S}^1$ -invariantes, ϕ peut être choisi équivariant.

La partie (i) est une conséquence d'un théorème de A. Givental (cf. [Ar]). On présente une preuve adaptée au cas invariant qui nous intéresse. La méthode de démonstration est basée sur une idée due à J. Moser [Mo]. Elle a souvent été utilisée, en particulier par J. Martinet, R. Lutz et A. Weinstein ([M1], [M2], [L1], [L2] et [We]).

Démonstration ([Ha]).

(i) On suppose $\mu = 1$ quitte à multiplier ω' par un facteur convenable.

— Cherchons tout d'abord, un difféomorphisme h d'un voisinage V de $i(N)$ sur un voisinage $h(V)$ et une fonction λ sans zéros sur V , tels que

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda|_{i(N)} = 1, & h|_{i(N)} = \text{identité}, \\ h^*\omega'|_{i(N)} = \omega|_{i(N)}, & \text{et} \\ h^*d(\lambda\omega')|_{i(N)} = d\omega|_{i(N)}. \end{cases}$$

Sachant que $i^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor(\omega \wedge d\omega)\right)$ et $i^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor(\omega' \wedge d\omega')\right)$ sont des formes volumes sur N , il existe deux fonctions uniques α et ν sur N vérifiant respectivement

$$(2) \quad \alpha \cdot i^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor(\omega' \wedge d\omega')\right) = i^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor(\omega \wedge d\omega)\right)$$

et

$$(3) \quad \nu \cdot i^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor(\omega' \wedge d\omega')\right) = i^*\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor d\omega\right) \wedge \left(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor d\omega'\right)\right).$$

De même, il existe un unique champ de vecteurs X sur N tel que

$$(4) \quad X \rfloor i^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor(\omega' \wedge d\omega')\right) = i^*\left(\omega' \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial t} \rfloor d\omega - \omega \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial t} \rfloor d\omega'\right).$$

Soit F son flot. On pose $h(x, t) = (F(x, t), \alpha(x)t)$ et $\lambda(x, t) = 1/(1 + \nu(x)t)$, pour $x \in N$ et $|t| < \varepsilon$, ε étant un réel positif arbitraire suffisamment petit

pour que $1 + \nu(x)t$ soit non nulle sur $N \times] - \varepsilon, \varepsilon[$. On choisit ε de façon que h soit un difféomorphisme de $N \times] - \varepsilon, \varepsilon[$ sur son image. Le couple (h, λ) vérifie alors (1).

— Les formes $\omega_t = \omega + t(h^*(\lambda\omega') - \omega)$, $t \in [0, 1]$, restreintes à un ouvert U suffisamment petit de $N \times \mathbb{R}$ contenant $i(N)$ sont de contact. En effet, $\omega_t \wedge d\omega_t|_{i(N)} = \omega \wedge d\omega|_{i(N)}$ qui est sans zéros. On sait, d'après [M2], qu'il existe, pour chaque t , un unique champ de vecteurs Z_t (sur U), que l'on peut prolonger en un champ complet sur $N \times \mathbb{R}$, tel que

$$(5) \quad \begin{cases} \omega_t(Z_t) = 0 \\ \omega_t \wedge (\dot{\omega}_t - L_{Z_t}\omega_t) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $\omega_t \wedge h_t^*\omega_0 = 0$, où h_t est la famille de difféomorphismes obtenue par intégration de l'équation différentielle $\frac{du}{dt} = Z_t(u)$, avec $h_0 =$ identité. De plus, on a $\dot{\omega}_t|_{i(N)} = 0$; ainsi, de (5), on déduit

$$\begin{cases} \omega_t(Z_t)|_{i(N)} = 0 \\ \omega_t \wedge (Z_t \lrcorner d\omega_t)|_{i(N)} = 0, \end{cases}$$

et donc, grâce à la condition de contact sur ω_t , $Z_t|_{i(N)} = 0$, ou encore $h_t|_{i(N)} =$ identité. Le difféomorphisme $\phi = h \circ h_1^{-1}$ vérifie alors (i).

(ii) Les objets α et X sont $\mathbb{S}^1$ -invariants, par conséquent h est équivariant. L'équivariance de h_1 résulte de l'invariance de Z_t due à celle des objets ν et h . Ainsi $\phi = h \circ h_1^{-1}$ est équivariant.

C.Q.F.D.

1.3. A présent, grâce au théorème 1.2, nous allons pouvoir raccorder deux formes de contact le long d'une surface fermée.

DÉFINITION. — On dira que $p(S)$ sépare M en deux ouverts disjoints U_1 et U_2 si $\overline{U}_1 \setminus U_1 = \overline{U}_2 \setminus U_2 = p(S)$ et $M = U_1 \cup U_2 \cup p(S)$.

Dans ce cas $\partial M \cap p(S)$ est vide.

LEMME. — On suppose que $p(S)$ sépare M en deux ouverts disjoints U_1 et U_2 . Soient ω_1 et ω_2 deux formes de contact $\mathbb{S}^1$ -invariantes, de même orientation et définies sur des voisinages de $\overline{U}_1$ et $\overline{U}_2$. Si $p^*\omega_1 = \mu p^*\omega_2$, où μ est une fonction strictement positive, alors il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante ω sur M , égale à ω_1 sur un voisinage de $\overline{U}_1$ et à ω_2 sur U_2 sauf peut-être sur un voisinage arbitrairement petit de $p(S)$.

Démonstration. — Sachant qu'il existe un voisinage arbitrairement petit de $p(S)$, $\mathbb{S}^1$ -invariant et isomorphe au fibré trivial $S \times \mathbb{R}$ de groupe $\mathbb{S}^1$ par un isomorphisme envoyant tout point $p(x)$ sur $(x, 0)$, le théorème 1.2 nous assure l'existence d'un difféomorphisme équivariant ϕ d'un voisinage ouvert $\mathbb{S}^1$ -invariant et arbitrairement petit V de $p(S)$, sur un voisinage $\phi(V)$, et d'une fonction λ $\mathbb{S}^1$ -invariante et sans zéros sur V , tels que $\phi|_{p(S)} = \text{identité}$ et $\omega_1 = \lambda \phi^* \omega_2$ sur V . On choisit V difféomorphe à $S \times]-1, 1[$; comme $\lambda \circ p = \mu > 0$, on en déduit que $\lambda > 0$. Les formes $\omega_1 \wedge d\omega_1$ et $\omega_2 \wedge d\omega_2$ ont la même orientation, par conséquent ϕ est positif. Il existe un voisinage compact V' de $p(S)$, $V' \subset V$, et un difféomorphisme $\tilde{\phi}$ de M équivariant tels que $\tilde{\phi}|_{V'} = \phi|_{V'}$ et $\tilde{\phi} = \text{identité}$ en dehors de V . Soit $\tilde{\lambda}$ une fonction $\mathbb{S}^1$ -invariante et sans zéros sur M telle que $\tilde{\lambda}|_{V'} = \lambda|_{V'}$ et $\tilde{\lambda} = 1$ en dehors de V .

On conclut en posant

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 & \text{sur } \overline{U}_1 \\ \omega = \tilde{\lambda} \tilde{\phi}^* \omega_2 & \text{sur } U_2. \end{cases}$$

La forme de contact ω est $\mathbb{S}^1$ -invariante sur M ; elle coïncide avec ω_1 sur $U_1 \cup V'$ et avec ω_2 sur $U_2 \setminus V$.

C.Q.F.D.

2. Le cas où η est sans zéros.

On démontre le résultat général (théorème 3.3) en se ramenant au cas particulier où η est sans zéros. Le théorème suivant est donc fondamental.

2.1. THÉORÈME ([Ha]). — *Pour toute 1-forme $\mathbb{S}^1$ -invariante et sans zéros η sur S , il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante ω sur M telle que $p^* \omega = \eta$. L'orientation de ω est arbitraire.*

Ceci est une conséquence immédiate des deux lemmes suivants :

2.2. LEMME. — *Soit η une 1-forme $\mathbb{S}^1$ -invariante et sans zéros sur S , et ω une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante sur M . Si $p^* \omega$ est homotope à η comme forme $\mathbb{S}^1$ -invariante et sans zéros, alors il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante $\tilde{\omega}$ sur M , induisant $p^* \tilde{\omega} = \eta$ sur S , et qui coïncide avec ω en dehors d'un voisinage arbitrairement petit de $p(S)$.*

2.3. LEMME. — *Pour chaque classe d'homotopie de 1-formes $\mathbb{S}^1$ -invariantes et sans zéros sur S , il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante ω sur M induisant sur S une 1-forme $p^*\omega$ dans cette classe. L'orientation de ω est arbitraire.*

2.4. Démonstration du lemme 2.2.

— Si $p(S)$ rencontre ∂M , on considère un voisinage $\mathbb{S}^1$ -invariant V_0 de $\partial M \cap p(S)$, difféomorphe à $(\partial M \cap p(S)) \times [0, 1[$ et tel que $\overline{V}_0$ soit disjoint de $p(S) \setminus \partial M$. Soit $F : M \rightarrow M \setminus V_0$ un difféomorphisme égal à l'identité en dehors d'un voisinage V_1 de $\partial M \cap p(S)$, et qui respecte les actions de $\mathbb{S}^1$ sur M et $M \setminus V_0$; l'ensemble $\partial M \cap (F \circ p)(S)$ est vide. Si $\tilde{\omega}$ est une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante sur M , égale à ω en dehors d'un voisinage V_2 de $p(S)$, et telle que $(F \circ p)^*\omega = \eta$, alors la forme de contact $\tilde{\omega}' = F^*(\omega|_{M \setminus V_0})$ est $\mathbb{S}^1$ -invariante, induit $p^*\tilde{\omega}' = \eta$ sur S et coïncide avec ω en dehors de $V_1 \cup V_2$. Les voisinages V_0 , V_1 et V_2 sont arbitrairement petits.

On est donc ramené au cas où $\partial M \cap p(S)$ est vide.

— Soit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le plongement $j_t : S \rightarrow S \times \mathbb{R}$ défini par $j_t(x) = (x, t)$. Soit $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ la base de 1-formes sur S dont la restriction à chaque composante connexe $T_i = \mathbb{T}^2$ de S est $\{d\theta_1, d\theta_2\}$. Soit V un voisinage de $p(S)$ $\mathbb{S}^1$ -invariant, arbitrairement petit et isomorphe au fibré trivial $S \times \mathbb{R}$ de groupes $\mathbb{S}^1$ par un isomorphisme $\varphi : S \times \mathbb{R} \rightarrow V$ tel que $\varphi \circ j_0 = p$ et $\varphi^*(\omega \wedge d\omega)$ soit de même sens que $\alpha_1 \wedge dt \wedge \alpha_2$. La forme $(\varphi \circ j_0)^*\omega = p^*\omega$ est sans zéros sur S . Il existe donc un réel ε , $0 < \varepsilon < 1$, tel que $(\varphi \circ j_t)^*\omega$ soit sans zéros sur S pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Comme $(\varphi \circ j_0)^*\omega$ est homotope à η comme forme $\mathbb{S}^1$ -invariante et sans zéros sur S , les formes $(\varphi \circ j_{-\varepsilon})^*\omega$ et $(\varphi \circ j_\varepsilon)^*\omega$ le sont aussi.

Soit $\eta_t = a_t\alpha_1 + b_t\alpha_2$, $t \in [-1, 1]$, une homotopie de 1-formes $\mathbb{S}^1$ -invariantes et sans zéros sur S telle que

$$(1) \quad \eta_{-\varepsilon} = (\varphi \circ j_{-\varepsilon})^*\omega, \quad \eta_0 = \eta \quad \text{et} \quad \eta_\varepsilon = (\varphi \circ j_\varepsilon)^*\omega.$$

Posons

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_t \\ \tilde{b}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi kt/\varepsilon) & -\sin(2\pi kt/\varepsilon) \\ \sin(2\pi kt/\varepsilon) & \cos(2\pi kt/\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$$

où $k \in \mathbb{N}$.

La forme $\omega'(x, t) = \tilde{a}_t(x)\alpha_1 + \tilde{b}_t(x)\alpha_2$ sur $S \times [-1, 1]$ est $\mathbb{S}^1$ -invariante et vérifie :

$$(2) \quad j_{-\varepsilon}^*\omega' = \eta_{-\varepsilon}, \quad j_0^*\omega' = \eta_0 \quad \text{et} \quad j_\varepsilon^*\omega' = \eta_\varepsilon.$$

Pour un choix convenable de k , ω' est de contact sur $S \times [-1, 1]$. En effet

$$\omega' \wedge d\omega' = \left(a_t \frac{\partial b_t}{\partial t} - b_t \frac{\partial a_t}{\partial t} + 2\pi k \frac{a_t^2 + b_t^2}{\varepsilon} \right) \alpha_1 \wedge dt \wedge \alpha_2$$

qui est sans zéros et de même sens que $\alpha_1 \wedge dt \wedge \alpha_2$ pour k assez grand, puisque la fonction $a_t \frac{\partial b_t}{\partial t} - b_t \frac{\partial a_t}{\partial t}$ est bornée et $a_t^2 + b_t^2 > 0$ sur le compact $S \times [-1, 1]$.

Les formes ω' et $\varphi^*\omega$ induisent une même forme sur $j_{-\varepsilon}(S) \cup j_\varepsilon(S)$ d'après (1) et (2). On peut donc les raccorder pour obtenir une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante ω'' sur $S \times \mathbb{R}$, égale à ω' au voisinage de $j_0(S)$ et à $\varphi^*\omega$ en dehors de $S \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ (lemme 1.3). Sachant que $\varphi \circ j_0 = p$, la forme de contact

$$\begin{cases} \tilde{\omega} = \omega & \text{sur } M \setminus V \\ \tilde{\omega} = (\varphi^{-1})^*\omega'' & \text{sur } V \end{cases}$$

induit bien η sur S . Elle est $\mathbb{S}^1$ -invariante sur M et de même orientation que ω .

C.Q.F.D.

2.5. Démonstration du lemme 2.3. — De même qu'en (2.4), on se ramène au cas où $\partial M \cap p(S)$ est vide. Soient $T_i, i = 1, \dots, r$, les composantes connexes de S . Une 1-forme $\mathbb{S}^1$ -invariante et sans zéros sur S s'écrit en tout point (θ_1, θ_2) de T_i

$$a_i(\theta_1)d\theta_1 + b_i(\theta_1)d\theta_2, \quad \text{où } (a_i, b_i) \text{ est un lacet dans } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Le groupe d'homotopie des 1-formes $\mathbb{S}^1$ -invariantes et sans zéros sur S est donc $\mathbb{Z}^r$, l'isomorphisme étant

$$(n_1, \dots, n_r) \longrightarrow \text{classe de } \eta_{n_1, \dots, n_r},$$

où

$$\eta_{n_1, \dots, n_r}(\theta_1, \theta_2) = \cos(n_i \theta_1) d\theta_1 + \sin(n_i \theta_1) d\theta_2 \quad \text{pour } (\theta_1, \theta_2) \in T_i.$$

Soit donc $(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^r$. Nous allons montrer qu'il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante ω sur M , d'orientation arbitraire et telle que $p^*\omega$ soit homotope, comme forme $\mathbb{S}^1$ -invariante et sans zéros, à $\eta_{n_1, \dots, n_r}$.

2.5.1. Rappelons que l'ensemble singulier d'une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante sur M est l'ensemble des points de B au-dessus desquels son noyau est tangent à la fibre; c'est une sous-variété compacte de dimension 1 de B . Soit Σ une réunion finie de cercles deux à deux disjoints plongés dans B . Alors on sait, d'après [L2], que :

THÉOREME. — Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante ω_0 sur M admettant Σ comme ensemble singulier. L'orientation de ω_0 est arbitraire.

(ii) Les composantes connexes de $B \setminus \Sigma$ peuvent être munies de signes $+$ ou $-$ de façon que deux composantes adjacentes aient des signes opposés.

On note Z le champ de vecteurs associé à l'action de $\mathbb{S}^1$ sur M , et α une forme de connexion telle que $\alpha(Z) = 1$ et $Z \rfloor d\alpha = 0$. L'invariance de ω_0 entraîne que $\omega_0 = (q^*f)\alpha + q^*\beta$, où f est une fonction et β est une 1-forme sur B .

Remarques [L2]. — On a $\Sigma = f^{-1}(0)$; la condition de contact implique que df est sans zéros sur Σ .

— La fonction f prolonge la fonction $(x, t) \rightarrow t$ définie sur un voisinage de Σ difféomorphe à $\Sigma \times]-1, 1[$.

— On attribue le signe $+$ à $f^{-1}(]0, +\infty[)$ et le signe $-$ à $f^{-1}(]-\infty, 0[)$.

2.5.2. Première étape.

Soient $q_i : T_i \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ les projections $(\theta_1, \theta_2, t) \rightarrow (\theta_1, t)$. Soit pour tout i , $i = 1, \dots, r$, un voisinage $\mathbb{S}^1$ -invariant V_i de $p(T_i)$ tel qu'il existe un isomorphisme de fibrés principaux $(\varphi_i, \psi_i) : (T_i \times \mathbb{R}, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \rightarrow (V_i, q(V_i))$ vérifiant $\varphi_i(x, 0) = p(x)$; les V_i sont supposés deux à deux disjoints.

Soit γ_i le cercle dans $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ image de l'application $\theta \rightarrow (\theta, \sin(-n_i\theta))$. Posons

$$\Sigma_i = \psi_i(\gamma_i), \quad \Sigma'_i = \psi_i(\mathbb{S}^1 \times \{-2\}), \quad \Sigma_i^+ = \psi_i(\mathbb{S}^1 \times \{2\}) \text{ et } \Sigma_i^- = \psi_i(\mathbb{S}^1 \times \{-3\}).$$

L'ensemble $\Sigma = \bigcup_i (\Sigma_i \cup \Sigma'_i \cup \Sigma_i^+ \cup \Sigma_i^-)$ vérifie la propriété (ii) du théorème 2.5.1. Par conséquent, il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante ω_0 sur M , d'orientation arbitraire et admettant Σ comme ensemble singulier.

D'après (2.5.1), elle s'écrit $\omega_0 = (q^*f)\alpha + q^*\beta$, où f peut être choisie telle que

$$(1) \quad (f \circ \psi_i)(\theta, t - \sin(n_i\theta)) = t \quad \text{pour } |t| \leq 1/3,$$

$$(2) \quad (f \circ \psi_i)(\theta, t + 2) = -t \quad \text{et} \quad (f \circ \psi_i)(\theta, t - 3) = t \quad \text{pour } |t| \leq 1/3.$$

2.5.3. Deuxième étape.

Soit k un réel positif quelconque. Les formes

$$\omega_1 = \omega_0 + k \, d(q^* f) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 - k \, d(q^* f)$$

sont de contact et $\mathbb{S}^1$ -invariantes sur M ; elles admettent Σ comme ensemble singulier et ont l'orientation de ω_0 .

PROPOSITION.

(i) Les formes ω_1 et ω_2 induisent la même forme sur chaque surface Σ_i^+ et Σ_i^- .

(ii) Pour k assez grand, la forme $\cos(n_i \theta_1) \, d\theta_1 + \sin(n_i \theta_1) \, d\theta_2$ est homotope à $p^* \omega_1|_{T_i}$ comme forme $\mathbb{S}^1$ -invariante et sans zéros sur T_i si $n_i \geq 0$, et à $p^* \omega_2|_{T_i}$ si $n_i \leq 0$.

Preuve. — On a $\omega_1 - \omega_2 = 2k \, d(q^* f)$; d'après (2), le noyau de cette forme est tangent aux surfaces Σ_i^+ et Σ_i^- , d'où (i).

Soit $(\theta_1, \theta_2) \in T_i$, alors

$$p^* \omega_1(\theta_1, \theta_2) = (k\mu_1 + \mu_3)(\theta_1) \, d\theta_1 + \mu_2(\theta_1) \, d\theta_2$$

et

$$p^* \omega_2(\theta_1, \theta_2) = (-k\mu_1 + \mu_3)(\theta_1) \, d\theta_1 + \mu_2(\theta_1) \, d\theta_2$$

où μ_1, μ_2 et μ_3 sont les fonctions sur le cercle définies par

$$\mu_1(\theta_1) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(\psi_i^* f)(\theta_1, 0), \quad \mu_2(\theta_1) = (\psi_i^* f)(\theta_1, 0),$$

et

$$\mu_3(\theta_1) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \right] (\psi_i^* \beta) (\theta_1, 0).$$

Si $n_i = 0$, γ_i coïncide avec $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Donc $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et μ_3 est sans zéros vu la condition de contact sur ω_0 . Par conséquent $p^* \omega_1|_{T_i}$ et $p^* \omega_2|_{T_i}$ sont homotopes à $d\theta_1$ comme formes $\mathbb{S}^1$ -invariantes et sans zéros sur T_i .

Si $n_i \neq 0$, pour k assez grand

$$t(k \cdot (|n_i|/n_i) \cdot \mu_1 + \mu_3, \mu_2) + (1-t)(k \cdot (|n_i|/n_i) \cdot \mu_1, \mu_2)$$

est une homotopie de lacets dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, car $\mu_1^2 + \mu_2^2 > 0$. D'autre part, on a

$$\begin{cases} k \cdot (|n_i|/n_i) \cdot \mu_1(\theta_1) \cdot \cos(n_i \theta_1) = k \cdot |n_i| \cdot \cos^2(n_i \theta_1) > 0 & \text{si } (\theta_1, 0) \in \gamma_i \cap \mathbb{S}^1 \times \{0\} \\ \mu_2(\theta_1) \cdot \sin(n_i \theta_1) > 0 & \text{si } (\theta_1, 0) \notin \gamma_i \cap \mathbb{S}^1 \times \{0\}. \end{cases}$$

Il en résulte que

$$t(k \cdot (|n_i|/n_i) \cdot \mu_1(\theta_1), \mu_2(\theta_1)) + (1-t)(\cos(n_i\theta_1), \sin(n_i\theta_1))$$

est une homotopie de lacets dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Par conséquent, les lacets

$$(k \cdot (|n_i|/n_i) \cdot \mu_1 + \mu_3, \mu_2) \quad \text{et} \quad (\cos(n_i\theta_1), \sin(n_i\theta_1))$$

sont homotopes dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; d'où (ii). $\square$

2.5.4. Troisième étape.

Soit l'ouvert de M , $U_1 = q^{-1}\left(\bigcup_{i, n_i > 0} C_i\right)$, où C_i est la couronne ouverte de B contenant Σ_i et délimitée par les cercles Σ_i^+ et Σ_i^- . Posons $U_2 = M \setminus \overline{U}_1$. La surface $\bigcup_{i, n_i > 0} (\Sigma_i^+ \cup \Sigma_i^-)$ sépare M en U_1 et U_2 . De plus, ω_1 et ω_2 induisent la même forme sur cette surface (prop. 2.5.3).

D'après le lemme 1.3, il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante ω sur M , égale à ω_1 sur U_1 et à ω_2 sur U_2 sauf peut-être sur un voisinage arbitrairement petit de $\overline{U}_2 \setminus U_2$.

Ainsi

$$p^*\omega|_{T_i} = \begin{cases} p^*\omega_1|_{T_i} & \text{si } n_i > 0 \\ p^*\omega_2|_{T_i} & \text{si } n_i \leq 0. \end{cases}$$

La forme $p^*\omega|_{T_i}$ est donc homotope à la forme $\cos(n_i\theta_1) d\theta_1 + \sin(n_i\theta_1) d\theta_2$ comme forme $\mathbb{S}^1$ -invariante et sans zéros sur T_i (prop. 2.5.3). De plus, ω est de même orientation que ω_0 ; ce qui achève la démonstration.

C.Q.F.D.

3. Le cas général invariant.

3.1. Soit $j : N_2 \rightarrow M'_3$ un plongement d'une surface N dans une variété M' de dimension 3, et ω une forme de contact sur M' . Alors les formes $j^*\omega$ et $dj^*\omega$ ne s'annulent pas simultanément. En effet, si v_1 et v_2 sont deux vecteurs tangents à N en un point x et linéairement indépendants, la condition de contact au point $j(x)$ donne

$$j_*v_1 \rfloor j_*v_2 \rfloor (\omega \wedge d\omega)_{j(x)} \neq 0,$$

ce qui implique que

$$(dj^*\omega)_x(v_1, v_2) \neq 0 \quad \text{si} \quad (j^*\omega)_x = 0.$$

Si η_0 est une 1-forme sur N , il est donc nécessaire que η_0 et $d\eta_0$ ne s'annulent pas simultanément pour que η_0 puisse être induite par une forme de contact sur M' . Il est facile de construire un germe de formes de contact le long de $j(N)$ qui induise une telle forme η_0 (cf. [Ha]). Le germe de structures de contact associé est unique (à difféomorphisme près laissant fixes les points de $j(N)$).

On montrera dans ce paragraphe que dans le cas invariant (hypothèses dans 1.1), la condition " η et $d\eta$ ne s'annulent pas simultanément" est aussi suffisante.

3.2. Construisons tout d'abord le long de $p(S)$ un germe de formes de contact $\mathbb{S}^1$ -invariantes et induisant sur S une 1-forme $\mathbb{S}^1$ -invariante donnée.

On considère les actions libres du groupe $\mathbb{S}^1$ définies dans (1.1).

LEMME. — Soit η une 1-forme $\mathbb{S}^1$ -invariante sur $\mathbb{T}^2$ ne s'annulant pas simultanément avec $d\eta$. Alors il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante ω (d'orientation arbitraire) sur $\mathbb{T}^2 \times]-1, 1[$ induisant η sur $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$, et deux plongements $p_1 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times]0, 1[$ et $p_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times]-1, 0[$ qui respectent les actions de $\mathbb{S}^1$, tels que

(i) $p_1(\mathbb{T}^2) \cup p_2(\mathbb{T}^2)$ soit le bord d'un voisinage compact de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ dans $\mathbb{T}^2 \times]-1, 1[$:

(ii) les formes $p_1^* \omega$ et $p_2^* \omega$ soient sans zéros sur $\mathbb{T}^2$.

Démonstration. — La forme η étant $\mathbb{S}^1$ -invariante s'écrit, en tout point $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2$, $\eta(\theta_1, \theta_2) = a(\theta_1) d\theta_1 + b(\theta_1) d\theta_2$, où a et b sont des fonctions sur le cercle. Soit la forme de Pfaff sur $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ définie par

$$\omega(\theta_1, \theta_2, t) = (a(\theta_1) - tb(\theta_1)) d\theta_1 + (b(\theta_1) + ta(\theta_1)) d\theta_2 + c(\theta_1) dt,$$

où c est une fonction arbitraire sur le cercle. Elle est $\mathbb{S}^1$ -invariante et induit bien η sur $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$. Elle est de contact en tout point de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ si et seulement si la fonction

$$a^2 + b^2 - c \frac{db}{d\theta_1} + b \frac{dc}{d\theta_1} \text{ est sans zéros sur le cercle.}$$

On pose $K = a^{-1}(0) \cap b^{-1}(0)$. Le fait que η et $d\eta$ ne s'annulent pas simultanément signifie que $\frac{db}{d\theta_1}|_K$ est sans zéros; donc K est fini. Soit J un voisinage ouvert de K dans $\mathbb{S}^1$ tel que $\frac{db}{d\theta_1}|_J$ et $b|_{J \setminus K}$ ne s'annulent pas,

et J' un voisinage fermé de K tel que $J' \subset J$. Soit m un réel positif et c une fonction sur le cercle telle que

$$\begin{cases} |c| = \text{constante} & \text{sur } J' \\ c = 0 & \text{en dehors de } J \\ c \cdot \frac{db}{d\theta_1} < 0 & \text{sur } J \\ c \text{ et } \frac{dc}{d\theta_1} & \text{soient bornées par } m. \end{cases}$$

Pour m suffisamment petit, on a $a^2 + b^2 - c \frac{db}{d\theta_1} + b \frac{dc}{d\theta_1} > 0$ partout; donc ω est de contact sur tout un voisinage de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$.

— Soit ε un réel positif suffisamment petit pour que ω soit de contact sur $\mathbb{T}^2 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. On considère un plongement $p_1 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times]0, \varepsilon[$ défini par $p_1(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2, f(\theta_1))$, où f est une fonction sur le cercle. La forme $p_1^* \omega$ est sans zéros pour un choix convenable de f . En effet :

Cette forme est sans zéros si et seulement si la fonction

$$\varphi = \left(a - fb + c \frac{df}{d\theta_1} \right)^2 + (b + fa)^2 \text{ est strictement positive.}$$

Sur $\mathbb{S}^1 \setminus J$, on a $\varphi > 0$ quel que soit f ; sur K , cette condition se réduit à $\frac{df}{d\theta_1}$ sans zéros.

Sur $J \setminus K$, $|a/b|$ est bornée par un réel positif m' . Soit donc $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow]0, \varepsilon[$ telle que $0 < f < 1/m'$ et $\frac{df}{d\theta_1}$ soit sans zéros sur K . La condition $\varphi > 0$ est vérifiée sauf peut-être sur $J \setminus K$. Or, sur $J \setminus K$, on a $|a/b| \leq m' < 1/f$, ce qui implique que $b + fa$ est sans zéros sur $J \setminus K$, d'où $\varphi > 0$ sur $J \setminus K$.

— Le plongement p_2 sera par exemple $(\theta_1, \theta_2) \rightarrow (\theta_1, \theta_2, -f(\theta_1))$.

— L'ensemble $\{(\theta_1, \theta_2, t), |t| \leq f(\theta_1)\}$ est un voisinage compact de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$, dont le bord est $p_1(\mathbb{T}^2) \cup p_2(\mathbb{T}^2)$.

— L'image réciproque de ω par le difféomorphisme $(\theta_1, \theta_2, t) \rightarrow (\theta_1, \theta_2, -t)$ est de sens opposé à ω . Elle aussi vérifie (i) et (ii).

On se ramène au cas $\varepsilon = 1$ grâce au difféomorphisme $(x, t) \rightarrow (x, \varepsilon t)$.

C.Q.F.D.

3.3. On oriente M de manière arbitraire. Du théorème 2.1 joint aux lemmes 1.3 et 3.2, découle le

THÉORÈME. — Soit η une forme de Pfaff $\mathbb{S}^1$ -invariante sur S . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante ω sur M qui induit $p^*\omega = \eta$ sur S . L'orientation de ω est positive.
- (ii) η et $d\eta$ ne s'annulent pas simultanément.

Démonstration. — La propriété (ii) découle de (i) d'après 3.1. Inversement, soit η une 1-forme $\mathbb{S}^1$ -invariante sur S et vérifiant (ii). L'ensemble $S' = p^{-1}(\partial M \cap p(S))$ est soit vide soit réunion finie de tores $\mathbb{T}^2$ disjoints. Soit V (resp. V') un voisinage de $p(S \setminus S')$ (resp. de $p(S')$) $\mathbb{S}^1$ -invariant et isomorphe au fibré trivial $(S \setminus S') \times]-1, 1[$ (resp. $S' \times [0, 1[$) de groupe $\mathbb{S}^1$ par un isomorphisme envoyant tout point $p(x)$ sur $(x, 0)$. On choisit V et V' suffisamment petits pour que $\overline{V} \cap \overline{V}'$ soit vide. D'après le lemme 3.2, il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante ω_1 sur $V \cup V'$ induisant $p^*\omega_1 = \eta$ sur S , et deux plongements $p_1 : S \rightarrow V \cup V'$ et $p_2 : S \setminus S' \rightarrow V$ respectant les actions de $\mathbb{S}^1$, tels que :

- $p_1(S)$ et $p_2(S \setminus S')$ soient disjoints,
- $p(S') \cup p_1(S) \cup p_2(S \setminus S')$ soit le bord d'un voisinage fermé $W \subset (V \cup V')$ de $p(S)$,
- $p_1^*\omega_1$ et $p_2^*\omega_1$ soient sans zéros sur S et $S \setminus S'$.

Soient S_1 et S_2 deux exemplaires de $S \setminus S'$. Soit $p' : S_1 \cup S' \cup S_2 \rightarrow M$ le plongement qui envoie les points de $S_1 \cup S'$ par p_1 et ceux de S_2 par p_2 . On pose $U_1 = W \setminus \text{Im}(p')$ et $U_2 = M \setminus W$. Ainsi $\text{Im}(p')$ sépare M en deux ouverts disjoints qui sont U_1 et U_2 . La 1-forme $\eta' = p'^*\omega_1$ sur $S_1 \cup S' \cup S_2$ est $\mathbb{S}^1$ -invariante et sans zéros. Il existe donc une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante ω_2 sur M telle que $p'^*\omega_2 = \eta'$ (th. 2.1).

Les formes ω_1 et ω_2 sont choisies d'orientation positive. A présent, on raccorde ω_1 et ω_2 le long de $\text{Im}(p')$ pour obtenir une forme de contact $\mathbb{S}^1$ -invariante ω sur M , égale à ω_1 sur W (lemme 1.3).

On a donc : $p^*\omega = p^*\omega_1 = \eta$.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ar] V.I. ARNOLD, Singularities of caustics and wave fronts, M.I.A. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [E1] Y. ELIASHBERG, Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds, *Invent. Math.*, 98 (1989), 623–637.
- [E2] Y. ELIASHBERG, Contact 3-manifolds twenty years since Martinet’s work, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 42-1 & 2 (1992).
- [Ha] A. HADJAR, Sur les plongements des surfaces fermées dans les variétés de contact de dimension trois, Thèse de Magistère, Oran, 1990.
- [L1] R. LUTZ, Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension trois, Thèse, Strasbourg, 1971.
- [L2] R. LUTZ, Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension trois, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 27-3 (1977), 1–15.
- [M1] J. MARTINET, Sur les singularités des formes différentielles, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 20-1 (1970), 95–178.
- [M2] J. MARTINET, Formes de contact sur les variétés de dimension 3, *Springer Lect. Notes in Math.*, 209 (1971), 142–163.
- [Mo] J. MOSER, On the volume elements on a manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120 (1965), 286–294.
- [We] A. WEINSTEIN, Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds, *Advances in Math.*, 6 (1965), 329–346.

Manuscrit reçu le 23 octobre 1991,
révisé le 20 janvier 1992.

M.E. Amine HADJAR,
Laboratoire de Mathématiques
Université de Haute Alsace
4, rue des Frères Lumière
68093 Mulhouse Cedex (France).