ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

RUI RODRIGUES

Décomposition formelle d'un système microdifférentiel aux points génériques

Annales de l'institut Fourier, tome 42, nº 4 (1992), p. 779-803

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1992__42_4_779_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
42, 4 (1992), 779-803

DÉCOMPOSITION FORMELLE D'UN SYSTÈME MICRODIFFÉRENTIEL AUX POINTS GÉNÉRIQUES

by Rui RODRIGUES

1. Introduction.

1.1. Soit X une variété analytique complexe et $T^*X \longrightarrow X$ son fibré cotangent. Soit M un Module cohérent sur l'Anneau des opérateurs microdifférentiels formels sur X. Dans le cas où le support (ou variété caractéristique) de M est une hypersurface, B. Malgrange a démontré dans [Ma1] que M se décompose en systèmes élémentaires au point générique et après tensorisation par l'Anneau des opérateurs microdifférentiels d'ordre q-fractionnaire avec q approprié.

Dans ce travail, on généralise le résultat cité : d'abord pour un système non holonome quelconque, et ensuite pour les systèmes holonomes.

Les décompositions qu'on obtient sont à mettre en rapport avec celles de [SKK] et [KK] pour les modules cohérents sur les opérateurs microdifférentiels convergents après tensorisation par l'Anneau des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini, ou celles de [KO] et [KK] dans le cadre des systèmes réguliers.

Je tiens à remercier B. Malgrange pour m'avoir proposé ce travail et pour ses suggestions multiples, et M. Kashiwara et Teresa Monteiro-Fernandes pour les discussions que j'ai eues avec eux.

1.2. Puisqu'on cherche des résultats de nature locale, il nous suffit de considérer des systèmes microdifférentiels sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Alors, sauf

Mots-clés : Système microdifférentiel – Décomposition dans un point générique – Opérateurs microdifférentiels d'ordre fractionnaire.
Classification A.M.S. : 35A27 – 32C38.

dans la section 3.2, X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $n>1$, avec les coordonnées $x=(x_1,\ldots,x_n)$ et on munit T^*X du système de coordonnées canoniques $(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_n)$.

De la même façon que dans [Ma1], on aura besoin de tensoriser nos systèmes par l'Anneau des opérateurs microdifférentiels (formels) d'ordre q-fractionnaire, pour un entier positif q approprié.

On désignera par $\mathcal{E}_q$ l'Anneau des opérateurs d'ordre q-fractionnaire.

Un germe de section P de $\mathcal{E}_q$ au voisinage de $w\in T^*X$ est défini par une série formelle, qu'on appelle symbole (ou symbole total) de P,

$$\sigma(P)=\sum_{\substack{\alpha\leq k\\ \alpha\in\frac{1}{q}Z}} a_\alpha(x,\xi)$$

où les $a_\alpha(x,\xi)$ sont analytiques dans une même voisinage de w, ξ-homogènes de degré α et l'entier k dépend de la section P choisie. On appellera les $a_\alpha(x,\xi)$ composantes homogènes de degré α; elles dépendent, en général, du choix des coordonnées. Si $a_k(x,\xi)\neq 0$, on dit que P est d'ordre k; alors, on appelle $a_k(x,\xi)$ le symbole principal de P et on le note aussi $\bar\sigma(P)$.

Si P et Q ont comme symboles respectivement $\sum\limits_{\substack{\alpha\leq k\\ \alpha\in\frac{1}{q}Z}} a_\alpha(x,\xi)$ et $\sum\limits_{\substack{\beta\leq r\\ \beta\in\frac{1}{q}Z}} b_\beta(x,\xi)$ alors le produit a comme symbole

$$\sigma(PQ)=\sum_{\gamma\in N^n}\frac{1}{\gamma!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\gamma a_\alpha(x,\xi)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\gamma b_\beta(x,\xi).$$

Avec la loi d'addition évidente, $\mathcal{E}_q$ a une structure de faisceau d'Anneaux. Il est un faisceau cohérent d'Anneaux et pour r multiple de q, $\mathcal{E}_r$ est un module fidèlement plat sur $\mathcal{E}_q$.

Pour $q=1$ on retrouve le faisceau $\mathcal{E}$ des opérateurs microdifférentiels formels.

Pour les propriétés les plus importantes de $\mathcal{E}$ (et qui sont encore valables pour $\mathcal{E}_q$), on renvoie le lecteur à [SKK] ou [Ma3], en faisant attention à ce que $\mathcal{E}$ désigne pour nous le faisceau des opérateurs microdifférentiels formels.

2. Décomposition formelle pour un système non holonome.

2.1 On décrit ici le résultat de décomposition en un point générique pour un système microdifférentiel dont le support est une hypersurface, qu'on trouve dans [Ma1], théorème 2.2.1.

On peut se ramener à la situation où $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}_r$-Module cohérent tel que $\operatorname{Supp} \mathcal{M} = \{(x, \xi) : \xi_1 = 0\}$. Soit r un entier positif. Pour w générique, i.e. w dans un ouvert conique dense de $\operatorname{Supp} \mathcal{M}$, et après tensorisation par $\mathcal{E}_q$, avec q multiple de r approprié, on obtient une décomposition

$$(2.1.1) \qquad \left(\mathcal{E}_q \underset{\mathcal{E}_r}{\otimes} \mathcal{M}\right)_w = \oplus \frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda_i)}$$

où $\lambda_i \in \mathcal{E}_{q,w}$ satisfait $[\lambda_i, x_1] = 0$ et $\operatorname{ord}(\lambda_i) < 1$.

Le résultat reste vrai si on ajoute des paramètres. On aura besoin de le généraliser aux situations suivantes pour démontrer le théorème 2.3.1 (resp. 2.3.1 bis) :

2.1.1 *Soit p un entier, $1 < p < n$. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert conique de*

$$\{(x, \xi) : \xi_2 = \ldots = \xi_p = 0\}$$
$$(resp. \{(x, \xi) : \xi_2 = \ldots = \xi_p = x_n = 0\}).$$

On munit $\mathcal{U}$ des coordonnées (x, η) (resp. (y, η))

$$\eta = (\xi_j) : j = 1, p+1, \ldots, n;$$
$$y = (x_i) : i = 1, \ldots, n-1.$$

Soit $\mathcal{E}'_r$ l'Anneau des opérateurs microdifférentiels dont le symbole dépend seulement de (x, η) (resp. (y, η)). Soit encore $\mathcal{M}$, défini dans $\mathcal{U}$, un Module cohérent sur $\mathcal{E}'_r$, avec

$$\operatorname{Supp} \mathcal{M} = \{(x, \eta) : \xi_1 = 0\}$$
$$(resp.\ \operatorname{Supp} \mathcal{M} = \{(y, \eta) : \xi_1 = 0\}).$$

Pour w générique dans Supp $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_w$ *sera décomposé (après tensorisation par $\mathcal{E}'_{q,w}$, avec q multiple de r), en somme directe de modules de la forme*

$$\frac{\mathcal{E}'_{q,w}}{\mathcal{E}'_{q,w}(\partial_1 - \lambda)}$$

oú $\lambda \in \mathcal{E}'_{q,w}$, $[\lambda, x_1] = 0$ *et* $\mathrm{ord}(\lambda) < 1$.

Les résultats qui suivent, ([Ma1], Proposition 2.1.1) donnent l'unicité de la décomposition (2.1.1) dans le sens de 2., ci-dessous.

2.1.2. — *Soient* $w \in T^*X\text{-}X$, *avec* $\xi_1(w)=0$, λ *et* $\lambda' \in \mathcal{E}_{q,w}$, *avec*

$$[\lambda, x_1] = [\lambda', x_1] = 0; \ \ \mathrm{ord}(\lambda) < 1 \ \ et \ \ \mathrm{ord}(\lambda') < 1.$$

1. $\dfrac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda)}$ *est indécomposable.*
2. $\dfrac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda)} \simeq \dfrac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda')} \Longleftrightarrow \mathrm{ord}(\lambda - \lambda') \leq 0.$
3. $\mathrm{Hom}\left(\dfrac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda)}, \dfrac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda')}\right) = 0 \quad si \ \ \mathrm{ord}(\lambda - \lambda') > 0.$

— *Les résultats précédents restent valables quand on considère les situations de 2.1.1, on remplace* $\mathcal{E}_{q,w}$ *par* $\mathcal{E}'_{q,w}$ *et on prend* λ *et* λ' *dans* $\mathcal{E}'_{q,w}$.

2.2. Si $\mathcal{M}$ est un système microdifférentiel sur X, dont le support est une variété (involutive) de T^*X de codimension p ($<$ dimension de X); on peut, dans un voisinage U d'un point générique, se ramener par une transformation canonique à la situation où :

$$\mathrm{Supp}\, \mathcal{M} \cap U = \{(x, \xi) : \xi_1 = \ldots = \xi_p = 0\}.$$

Alors, au cours des sections 2.2 et 2.3 on considère la situation suivante :

— On choisit p un entier positif , $p < n$ et on désigne par $\tilde{\mathcal{E}}_q$, le sous-anneau de $\mathcal{E}_q$ formé par les opérateurs dont le symbole ne dépend pas de $\xi_1, \ldots, \xi_p$.

Lemma 2.2.1. — *Soient* $w \in T^*X$ *et* $\lambda \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ *avec* $\mathrm{ord}(\lambda) < 1$. *Alors il existe* Ψ *un automorphisme de* $\mathcal{E}_{q,w}$, *qui satisfait :*

1. Ψ *préserve le symbole principal i.e.* $\overline{\sigma}(\Psi(P)) = \overline{\sigma}(P)$.
2. $\Psi(\partial_1 - \lambda) = \partial_1$.
3. *Si* $P \in \tilde{\mathcal{E}}_q$ *alors* $\psi(P) \in \tilde{\mathcal{E}}_q$.

Démonstration du lemme. — On utilisera la notation suivante :

Notation :

- Soient P et $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_{q,w}$. Comme d'habitude $\mathrm{ad}^i_{\mathcal{A}}(P)$ est défini de la façon suivante :

  $\mathrm{ad}^0_{\mathcal{A}}(P) = P$, $\mathrm{ad}^i_{\mathcal{A}}(P) = [\mathcal{A}, \mathrm{ad}^{i-1}_{\mathcal{A}}(P)]$ pour $i > 0$.
- $\bar{\mathcal{A}}_{k-1/q}$ désigne l'opérateur qui a pour composante homogène de degré j celle de $\mathcal{A}$ si $j > k - 1/q$ et, 0 si $j \leq k - 1/q$.

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_{q,w}$, avec $\mathrm{ord}(\mathcal{A}) < 1$. Si $P \in \mathcal{E}_{q,w}$ alors $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}^i_{\mathcal{A}}(P)}{i!}$ est un élément de $\mathcal{E}_{q,w}$, car le fait que pour $i > k$

$$\mathrm{ord}\left(\mathrm{ad}^i_{\mathcal{A}}(P)\right) < -\frac{k}{q} + \mathrm{ord}(P)$$

implique que la composante homogène de degré j de $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}^i_{\mathcal{A}}(P)}{i!}$ est la même que celle de la somme d'un nombre fini d'opérateurs de la forme $\mathrm{ad}^i_{\mathcal{A}}(P)$.

On peut déterminer par récurrence sur l'ordre des symboles, un opérateur $\mathcal{A} \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ qui satisfait

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}^i_{\mathcal{A}}(\partial_1 - \lambda)}{i!} = \partial_1$$

par le procédé suivant :

- On fait $\mathrm{ord}(\mathcal{A}) = \mathrm{ord}(\lambda)$ et $\dfrac{\partial \overline{\sigma}(\mathcal{A})}{\partial x_1} = -\overline{\sigma}(\lambda)$.
- Une fois déterminé la composante homogène de degré k de $\mathcal{A}$, on détermine celle de degré $k - 1/q$.
  - pour $i > 1$ la composante homogène de degré $k - 1/q$ de $\mathrm{ad}^i_{\mathcal{A}}(\partial_1 - \lambda)$, est la même que celle de $\mathrm{ad}^i_{\bar{\mathcal{A}}_{k-1/q}}(\partial_1 - \lambda)$.
  - Si on regarde la composante homogène de degré $k - 1/q$ de l'équation

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}^i_{\mathcal{A}}(\partial_1 - \lambda)}{i!} = \partial_1$$

on conclut que la composante homogène de degré $k-1/q$ de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_{k-1/q}$ doit satisfaire l'équation :

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{k-1/q}}{\partial x_1} = \left(\sum_{i=0}^{q(1-k+\frac{1}{q})} \frac{\mathrm{ad}^i_{\bar{\mathcal{A}}_{k-1/q}}(\partial_1 - \lambda)}{i!} - \partial_1 \right)_{k-1/q} .$$

On note ici $\left(\sum_{i=0}^{q(1-k+\frac{1}{q})} \frac{\mathrm{ad}^i_{\bar{\mathcal{A}}_{k-1/q}}(\partial_1 - \lambda)}{i!} - \partial_1 \right)_{k-1/q}$ la composante homogène de degré $k-1/q$ de

$$\sum_{i=0}^{q(1-k+\frac{1}{q})} \frac{\mathrm{ad}^i_{\bar{\mathcal{A}}_{k-1/q}}(\partial_1 - \lambda)}{i!} - \partial_1 .$$

Soit Ψ l'application de $\mathcal{E}_{q,w}$ dans $\mathcal{E}_{q,w}$ définie par

$$\Psi(P) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}^i_{\mathcal{A}}(P)}{i!} \, , \text{ pour } P \in \mathcal{E}_{q,w} .$$

Puisque pour $i > 0$ $\mathrm{ord}\left(\mathrm{ad}^i_{\mathcal{A}}(P)\right) \leq \mathrm{ord}(P) - 1/q$, on a $\mathrm{ord}\left(\Psi(P)\right) = \mathrm{ord}(P)$ et $\overline{\sigma}\left(\Psi(P)\right) = \overline{\sigma}(P)$.

Maintenant on vérifie que Ψ est un morphisme d'anneaux :

– Soient $P, Q \in \mathcal{E}_{q,w}$ il faut démontrer que

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}^i_{\mathcal{A}}(P)}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}^j_{\mathcal{A}}(Q)}{j!} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}^i_{\mathcal{A}}(PQ)}{i!}$$

mais pour cela il suffit de démontrer l'égalité

$$\sum_{i+j=k} \frac{\mathrm{ad}^i_{\mathcal{A}}(P)}{i!} \frac{\mathrm{ad}^j_{\mathcal{A}}(Q)}{j!} = \frac{\mathrm{ad}^k_{\mathcal{A}}(PQ)}{k!} .$$

Pour $k = 1$ c'est trivial. En la supposant vraie pour k on va la vérifier pour $k+1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}^{k+1}(PQ) &= k! \left[\mathcal{A}, \sum_{i+j=k} \frac{\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}^{i}(P)}{i!} \frac{\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}^{j}(Q)}{j!}\right] \\
&= k! \left(\left[\mathcal{A}, \frac{\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}^{i}(P)}{i!}\right] \frac{\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}^{j}(Q)}{j!} + \frac{\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}^{i}(P)}{i!} \left[\mathcal{A}, \frac{\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}^{j}(Q)}{j!}\right] \right) \\
&= k! \sum_{i+j=k+1} \left(\frac{1}{(i-1)!j!} + \frac{1}{i!(j-1)!} \right) \mathrm{ad}_{\mathcal{A}}^{i}(P)\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}^{j}(Q) \\
&= (k+1)! \sum_{i+j=k+1} \frac{\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}^{i}(P)}{i!} \frac{\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}^{j}(Q)}{j!}.
\end{aligned}$$

On conclut ainsi que Ψ est un morphisme d'anneaux. On a vu que Ψ préserve l'ordre, il est donc injectif.

Ψ est surjectif : on laisse au lecteur la vérification que l'inverse de Ψ est le morphisme Φ défini par

$$\Phi(P) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}_{-\mathcal{A}}^{i}(P)}{i!}. \qquad \square$$

Remarque 2.2.2. — L'énoncé du lemme précédent reste valable si $\tilde{\mathcal{E}}_q$ représente le sous-Anneau de $\mathcal{E}_q$ formé par les éléments dont le symbole dépend seulement de $(x_i)_{i\in I}(\xi_j)_{j\in J}$,

$$I \subseteq \{1,\ldots,n\},\ 1 \in I,\ \ J \subseteq \{2,\ldots,n\}.$$

L'opérateur $\mathcal{A}$, utilisé dans la démonstration, est dans $\tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$; donc on peut trouver Ψ dans les conditions de l'énoncé satisfaisant encore la condition : $\Psi(P) = P$, si P commute avec Q pour tout $Q \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$.

2.3.

Notation :

1. On reprend les notations de la section précédente : p est un entier positif, $p < n$ et on désigne par $\tilde{\mathcal{E}}_q$, le sous-Anneau de $\mathcal{E}_q$ formé par les opérateurs dont le symbole ne dépend pas de $\xi_1,\ldots,\xi_p$.

2. Soient

$$y=(x_i)_{i\in I},\ I\subset\{1,\ldots,n\}$$
$$\eta=(\xi_j)_{j\in J},\ J\subset\{1,\ldots,n\}.$$

En plus des notations déja introduites on notera $\mathcal{E}_q\{y;\eta\}$ le sous-Anneau de $\mathcal{E}_q$ qui contient les opérateurs dont le symbole total dépend uniquement de y et η.

3. Soient $\bar{x}=(x_2,\ldots,x_n)$, $\xi'=(\xi_2,\ldots,\xi_p)$, et $\xi''=(\xi_{p+1},\ldots,\xi_n)$.

On démontrera dans cette section le théorème suivant :

Théorème 2.3.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_r$ -Module cohérent tel que*

$$\operatorname{Supp}\mathcal{M}=\{\xi_1=\ldots=\xi_p=0\}.$$

Pour un point $w\in\operatorname{Supp}\mathcal{M}$, générique, il existe un nombre naturel q, tel que

$$\left(\mathcal{E}_q\underset{\mathcal{E}_r}{\otimes}\mathcal{M}\right)_w\simeq\bigoplus_{i\in I}\frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1-\lambda_{i,1},\ldots,\partial_p-\lambda_{i,p})}$$

où $\lambda_{i,j}\in\tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ et $\operatorname{ord}(\lambda_{i,j})<1$.

Pour chaque $i\in I$ les $\lambda_{i,j}$ satisfont la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial\lambda_{i,j}}{\partial x_k}-\frac{\partial\lambda_{i,k}}{\partial x_j}=[\lambda_{i,k},\lambda_{i,j}]\ \ j,k\in\{1,\ldots,p\}. \tag{2.3.1}$$

Les familles $(\lambda_{i,1},\ldots,\lambda_{i,p})$ sont bien définies à une permutation près de l'ensemble I et, modulo la relation d'équivalence $\sim$, définie ainsi :

Soient (λ_j) (resp. (λ'_j)) $j=1,\ldots,p$, deux familles d'éléments de $\tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ d'ordre ≤ 1 qui satisfont chacune la condition (2.3.1) *ci-dessus.*

$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\sim\left(\lambda'_1,\ldots,\lambda'_p\right)\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\operatorname{ord}(\lambda_j-\lambda'_j)\leq 0\ \ \forall j\in\{1,\ldots,p\}.$$

Avant de donner la démonstration du théorème, on introduit la définition suivante :

Définition 2.3.2. — *Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_q$ -Module cohérent avec*

$$\operatorname{Supp}\mathcal{M}=\{\xi_1=\ldots=\xi_p=0\}$$

$i \in \{1, \ldots, p\}$ *et* $w \in \mathrm{Supp}(\mathcal{M})$ *; soit encore,* $\lambda \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$, $\mathrm{ord}(\lambda) < 1$. *On dit que* $\mathcal{M}_w$ *est* $(\partial_i - \lambda)$*-régulier si :*

1. $\mathcal{M}_w$ *est un* $\tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$*-module libre*
2. $\mathcal{M}_w$ *admet une décomposition, comme* $\mathcal{E}_{q,w}\{x; \xi_i, \xi''\}$*-module en somme directe de copies de*

$$\frac{\mathcal{E}_{q,w}\{x; \xi_i, \xi''\}}{\mathcal{E}_{q,w}\{x; \xi_i, \xi''\}(\partial_i - \lambda)}.$$

Démonstration du théorème. — On va faire la démonstration par récurrence sur p=codim Supp $\mathcal{M}$.

Pour $p = 1$ on obtient le résultat cité ci-dessus de [Ma1]. Supposons maintenant le résultat vrai pour $p - 1$. On va le démontrer pour p.

On peut supposer que w est tel que $\mathcal{M}_w$ soit un $\tilde{\mathcal{E}}_{r,w}$-module libre.

Le problème est alors équivalent à trouver une base E de $\mathcal{M}_w$ comme $\tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$-module libre, tel que chaque élément de E soit vecteur propre pour les opérateurs ∂_i , $i=1,\ldots,p$.

$\mathcal{M}$ est aussi un $\mathcal{E}_r\{x; \xi_1, \xi''\}$ -Module cohérent (voir [Ma3], (3.4)a)) on peut alors appliquer le résultat de [Ma1]. On trouve q, multiple de r, tel qu'on a une décomposition

$$\left(\mathcal{E}_q \underset{\mathcal{E}_r}{\otimes} \mathcal{M}\right)_w = \bigoplus_i \mathcal{M}_{w,i}$$

où chaque $\mathcal{M}_{w,i}$ est un $\mathcal{E}_{q,w}\{x; \xi_1, \xi''\}$-module $(\partial_1 - \lambda_i)$-régulier. On peut supposer que pour $i \neq j$ $\mathrm{ord}(\lambda_i - \lambda_j) > 0$; dans ces conditions on a :

PROPOSITION 2.3.3. — *Les* $\mathcal{M}_{w,i}$ *sont des* $\mathcal{E}_{q,w}$*-modules.*

Démonstration de la proposition 2.3.3. — Soit $(e_k)_{k \in K}$ une base de $\mathcal{M}_w$ comme $\tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$-module (libre) tel que chaque e_k soit vecteur propre pour ∂_1 associé à la valeur propre λ_k.

Montrons d'abord que chaque $\mathcal{M}_i$ est stable par l'action de ∂_j pour $j \in \{2, \ldots, p\}$.

– Soit $l_o \in K$.

Supposons que $\partial_j e_{l_o} = \sum_k f_k e_k$, $f_k \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$. D'après (2.1.2-2) il nous faut vérifier que $f_k = 0$ si $\mathrm{ord}(\lambda_{l_o} - \lambda_k) > 0$. On a

$$\begin{aligned}\partial_1 \partial_j e_{l_o} &= \sum_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1} + f_k \lambda_k \right) e_k \\ \partial_j \partial_1 e_{l_o} &= \frac{\partial \lambda_{l_o}}{\partial x_j} e_{l_o} + \lambda_{l_o} \sum_k f_k e_k\end{aligned}$$

alors si $s \neq l_o$ on conclut que $\lambda_{l_o} f_s = \dfrac{\partial f_s}{\partial x_1} + f_s \lambda_s$.

Si $\mathrm{ord}(\lambda_{l_o} - \lambda_s) > 0$ en prenant les composantes homogènes de degré= $\mathrm{ord}(f_s) + \mathrm{ord}(\lambda_{l_o} - \lambda_s)$ on déduit que $\sigma(f_s) = 0$, donc $f_s = 0$. On conclut que chaque $\mathcal{M}_{w,i}$ est stable par ∂_j, $j \in \{2, \ldots, p\}$.

– Soit $\mathbf{m} \in \mathcal{M}_{w,i}$ on a

$$\mathrm{Supp}\mathcal{E}_q \mathbf{m} \subseteq \{\xi_1 = \ldots = \xi_p = 0\}.$$

Alors pour chaque $j \in \{1, \ldots, p\}$ $\mathcal{E}_q \mathbf{m}$ est un $\mathcal{E}_q\{x; \xi_j, \xi''\}$-Module cohérent et il existe $P_j \in \mathcal{E}_{q,w}\{x; \xi_j, \xi''\}$ tel que $\overline{\sigma}(P_j) = (\xi_j)^{r_j}$ et $P_j \mathbf{m} = 0$. Par application successive du théorème de préparation tout $Q \in \mathcal{E}_{q,w}$ s'écrit

$$Q = \sum_j Q_j P_j + R$$

avec $R \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}[\partial_1, \ldots, \partial_p]$.

L'action de Q sur $\mathbf{m}$ satisfait ainsi $Q\mathbf{m} = R\mathbf{m}$. On a vu que $\mathcal{M}_{w,i}$ est stable par l'action de ∂_j, $j \in \{2, \ldots, p\}$; donc $R\mathbf{m} \in \mathcal{M}_{w,i}$ et on conclut que $\mathcal{M}_{w,i}$ est un $\mathcal{E}_{q,w}$ -module. □

Suite de la démonstration du théorème 2.3.1. — On s'est ainsi réduit à démontrer le théorème pour $\mathcal{M}_w$ $(\partial_1 - \lambda)$-régulier, λ approprié.

D'après le lemme 2.2.1 il existe un automorphisme ψ de $\mathcal{E}_r$ tel que $\psi(\partial_1 - \lambda) = \partial_1$.

On note comme d'habitude $\mathcal{M}^\psi$ le $\mathcal{E}_r$-Module qui du point de vue ensembliste coïncide avec $\mathcal{M}$ mais sur lequel l'action de $\mathcal{E}_r$ est décrite de la façon suivante : soit $m \in \mathcal{M}^\psi$, l'action de $P \in \mathcal{E}_r$ sur m est la même que celle de $\psi(P)$ sur m en tant qu'élément de $\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{M}_w$ est $(\partial_1 - \lambda_1)$-régulier, alors $\mathcal{M}_w^{\psi}$ est ∂_1 -régulier et il suffit de démontrer le théorème pour $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}_w$ soit ∂_1-régulier.

Soit E une base de $\mathcal{M}$, comme $\tilde{\mathcal{E}}_{r,w}$-module libre, qui satisfait :

$$\partial_1 E = 0.$$

Soient A_i, $i = 2, \ldots, n$ les matrices à coeficients dans $\tilde{\mathcal{E}}_{r,w}$, définies par :

$$\partial_i E = A_i E \ , \ i = 2, \ldots, p.$$

On a $\dfrac{\partial A_i}{\partial x_1} E = \partial_1 \partial_i E = \partial_i \partial_1 E = 0$.

Donc $\dfrac{\partial A_i}{\partial x_1} = 0$, i.e., le symbole total de A_i ne dépend pas de x_1.

Soit $\bar{\mathcal{M}}_w$ le $\mathcal{E}_r\{\bar{x}; \xi', \xi''\}_w$-module défini sur $T^*(X \cap \{x_1 = 0\})$, avec les coordonnées $(\bar{x}, \xi', \xi'')$, qui a pour support l'ensemble

$$\{(\bar{x}, \xi', \xi'') : \xi_2 = \ldots = \xi_p = 0\}$$

et qui admet une base $\bar{E}$ comme $\mathcal{E}_r\{\bar{x}; \xi'\}_w$-module libre tel que :

$$\partial_i \bar{E} = A_i \bar{E}, \quad \text{pour} \quad i = 2, \ldots, p.$$

$\bar{\mathcal{M}}_w$ est ce qui est connu dans la littérature comme le germe en w de la restriction $\bar{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$ à $\{x_1 = 0\}$.

Comme la codimension de Supp $\bar{\mathcal{M}}$ est $p-1$ (dans $T^*(X \cap \{x_1 = 0\})$), par hypothèse d'induction il existe q entier tel que

$$\left(\mathcal{E}_q\{\bar{x}; \xi', \xi''\} \underset{\mathcal{E}_r\{\bar{x}; \xi', \xi''\}}{\otimes} \bar{\mathcal{M}}\right)_w \bigoplus_{i \in I} \frac{\mathcal{E}_q\{\bar{x}; \xi', \xi''\}_w}{\mathcal{E}_q\{\bar{x}; \xi', \xi''\}_w(\partial_2 - \lambda_{i,2}, \ldots, \partial_p - \lambda_{i,p})}$$

où I est un ensemble fini , $\lambda_{i,j} \in \mathcal{E}_q\{\bar{x}; \xi''\}$ et $\operatorname{ord}(\lambda_{i,j}) < 1$, i.e., il existe une base $\bar{F}$ de $\left(\mathcal{E}_q\{\bar{x}; \xi', \xi''\} \underset{\mathcal{E}_r\{\bar{x}, \xi', \xi''\}}{\otimes} \bar{\mathcal{M}}\right)_w$ qui satisfait

$$\partial_j \bar{F} = \begin{bmatrix} \lambda_{1,j} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{s,j} \end{bmatrix} \bar{F} \ , \quad j = 2, \ldots, p.$$

Alors il existe une matrice S inversible, à coefficients dans $\tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ (plus précisément dans $\mathcal{E}_q\{\bar{x}; \xi''\}_w$) telle que $\bar{E} = S^{-1}\bar{F}$.

Considérons, la base F de $(\mathcal{E}_q \otimes_{\mathcal{E}_r} \mathcal{M})_w$ définie par $F = SE$.

Alors, F satisfait :

– $\partial_1 F = 0$

– $\partial_j F = \begin{bmatrix} \lambda_{1,j} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{s,j} \end{bmatrix} F \qquad j = 2, \ldots, p;$

d'où la décomposition cherchée.

La condition d'intégrabilité pour les $\lambda_{i,j}$ peut être obtenue à partir du générateur $\mathbf{e}$ image de l'unité dans le quotient

$$\mathcal{N} = \frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda_{i,1}, \ldots, \partial_p - \lambda_{i,p})}.$$

Du fait que $\partial_j \mathbf{e} = \lambda_{i,j}\mathbf{e}$, il résulte que $\partial_k \partial_j \mathbf{e} = \dfrac{\partial \lambda_{i,j}}{\partial x_k}\mathbf{e} + \lambda_{i,j}\lambda_{i,k}\mathbf{e}$. De la même façon on obtient $\partial_j \partial_k \mathbf{e} = \dfrac{\partial \lambda_{i,k}}{\partial x_j}\mathbf{e} + \lambda_{i,k}\lambda_{i,j}\mathbf{e}$.

L'égalité $\dfrac{\partial \lambda_{i,j}}{\partial x_k} - \dfrac{\partial \lambda_{i,k}}{\partial x_j} = [\lambda_{i,k}, \lambda_{i,j}]$ résulte de ce que $\mathcal{N}$ est un $\tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$-module libre de rang 1 .

L'assertion sur l'unicité est une conséquence immédiate du lemme 2.3.4.

Lemme 2.3.4. — *Soient (λ_j) (resp. (λ'_j)) $j = 1, \ldots, p$, deux familles d'éléments de $\tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ d'ordre ≤ 1 qui satisfont chacune la condition d'intégrabilité du théorème 2.3.1 ; alors :*

1. *On a l'isomorphisme*

$$\frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda_1, \ldots, \partial_p - \lambda_p)} \simeq \frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda'_1, \ldots, \partial_p - \lambda'_p)}$$

si et seulement si $\operatorname{ord}(\lambda_j - \lambda'_j) \leq 0$ *pour tout* $j \in \{1, \ldots, p\}$.

2. $\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}_{q,w}}\left(\dfrac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda_1, \ldots, \partial_p - \lambda_p)}, \dfrac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda'_1, \ldots, \partial_p - \lambda'_p)} \right) = 0$

s'il existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ *tel que* $\operatorname{ord}(\lambda_j - \lambda'_j) > 0$.

3. $\dfrac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda_1, \ldots, \partial_p - \lambda_p)}$ *est indécomposable.*

Démonstration du lemme 2.3.4. — 2) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et $\lambda'_1, \dots, \lambda'_p$ comme dans l'énoncé. S'il existe i tel que $\operatorname{ord}(\lambda_i - \lambda'_i) > 0$ alors d'après 2.1.2-3 on a déjà

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}_q\{x;\xi_i,\xi''\}}\left(\frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda_1, \dots, \partial_p - \lambda_p)}, \frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda'_1, \dots, \partial_p - \lambda'_p)}\right) = 0$$

d'où le résultat.

1)Il suffit maintenant de considérer le cas $\operatorname{ord}(\lambda_i - \lambda'_i) \leq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. On va faire la démonstration par récurrence sur p. Pour $p = 1$ c'est l'énoncé de 2.1.2-2, il est donc démontré dans [Ma1]. Supposons le résultat vrai pour $p - 1$:

On reprend $\bar{x}, \xi', \xi''$ et $\mathcal{E}_q\{\bar{x}; \xi', \xi''\}$ comme ci-dessus. Par hypothèse de récurrence

$$\frac{\mathcal{E}_q\{\bar{x}; \xi', \xi''\}_w}{\mathcal{E}_q\{\bar{x}; \xi', \xi''\}_w(\partial_2 - \lambda_2, \dots, \partial_p - \lambda_p)}$$

est isomorphe à

$$\frac{\mathcal{E}_q\{\bar{x}; \xi', \xi''\}_w}{\mathcal{E}_q\{\bar{x}; \xi', \xi''\}_w(\partial_2 - \lambda'_2, \dots, \partial'_p - \lambda'_p)}.$$

On peut encore ajouter à l'hypothèse de récurrence que l'isomorphisme est défini par $\bar{P} \in \mathcal{E}_q\{\bar{x}; \xi''\}_w$, inversible , d'ordre 0 et tel que, pour tout $i \in \{2, \dots, p\}$,

$$(\partial_i - \lambda_i)\bar{P} = \bar{P}(\partial_i - \lambda'_i). \tag{2.3.2}$$

Cette condition est satisfaite pour $p = 1$ (voir [Ma1], démonstration de la proposition (2.1.1)).

Pour démontrer le résultat du lemme on va trouver $P \in \mathcal{E}_q\{x_1; \bar{x}, \xi''\}$ tel que :

$$\begin{cases} (\partial_1 - \lambda_1)P & = & P(\partial_1 - \lambda'_1) \\ P_{|x_1=0} & = & \bar{P}. \end{cases}$$

On démontre, par récurrence sur l'ordre des symboles, qu'on peut obtenir une solution de ce système; il faut résoudre l'équation

$$\frac{\partial \overline{\sigma}(P)}{\partial x_1} - \sigma_o(\lambda_1 - \lambda'_1)\overline{\sigma}(P) = A(x_1, \bar{x}, \xi'')$$

avec la condition initiale : $\sigma(P)_{|x_1=0} = \sigma(\bar{P})$.

On vérifie ensuite que P satisfait :

$$(\partial_i - \lambda_i)P = P(\partial_i - \lambda'_i) \quad i = 2, \dots, p.$$

– On commence par remarquer que les conditions d'intégrabilité satisfaites par les λ_i (resp. λ'_i) peuvent se traduire par

$$[\partial_i - \lambda_i, \partial_j - \lambda_j] = 0$$
$$(\textit{resp.}[\partial_i - \lambda'_i, \partial_j - \lambda'_j] = 0).$$

Soit $Q_i = (\partial_i - \lambda_i)P - P(\partial_i - \lambda'_i)$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_i}{\partial x_1} - \lambda_1 Q_i + Q_i\lambda'_1 &= (\partial_1 - \lambda_1)Q_i - Q_i(\partial_1 - \lambda'_1)\\ &= (\partial_1 - \lambda_1)(\partial_i - \lambda_i)P - (\partial_1 - \lambda_1)P(\partial_i - \lambda'_i)\\ &\quad - (\partial_i - \lambda'_i)P(\partial_1 - \lambda'_1) + P(\partial_i - \lambda'_i)(\partial_1 - \lambda'_1)\\ &= (\partial_i - \lambda_i)(\partial_1 - \lambda_1)P - (\partial_1 - \lambda_1)P(\partial_i - \lambda'_i)\\ &\quad - (\partial_i - \lambda_i)P(\partial_1 - \lambda'_1) + P(\partial_1 - \lambda'_1)(\partial_i - \lambda'_i)\\ &= (\partial_i - \lambda_i)[(\partial_1 - \lambda_1)P - P(\partial_1 - \lambda'_1)]\\ &\quad + [(\partial_1 - \lambda_1)P - P(\partial_1 - \lambda'_1)](\partial_i - \lambda'_i)\\ &= 0.\end{aligned}$$

On a construit P de façon que $\sigma(Q_i)_{|\{x_1=0\}} = 0$.

Alors $\overline{\sigma}(Q_i)$ satisfait le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{\sigma}(Q_i)}{\partial x_1} = 0 \\ \overline{\sigma}(Q_i)_{|\{x_1=0\}} = 0 \end{cases}$$

et on conclut que $\sigma(Q_i) = 0$ donc $Q_i = 0$.

3) $\dfrac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(\partial_1 - \lambda_1, \dots, \partial_p - \lambda_p)}$ est indécomposable comme $\mathcal{E}_{q,w}\{x;\ \xi_1, \xi''\}$-module (2.1.2-1) il est donc aussi indécomposable comme $\mathcal{E}_{q,w}$ - module. □

On aura besoin, pour trouver une décomposition des systèmes holonomes, d'une autre version du théorème 2.3.1, qui a d'ailleurs la même démonstration.

THÉORÈME 2.3.1 bis. — *Soient p un entier, $1 < p \leq n-1$, $y = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Soit, encore, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_r\{y;\xi\}$-module cohérent défini dans*

$$\{(x,\xi) : x_n = 0\} \subset T^*X$$

avec

$$\operatorname{Supp} \mathcal{M} = \{(y, \xi) : \xi_1 = \ldots = \xi_p = 0\}.$$

Pour un point $w \in \operatorname{Supp} \mathcal{M}$*, générique, il existe un nombre naturel* q*, tel que*

$$\left(\mathcal{E}_q\{y;\xi\} \underset{\mathcal{E}_r\{y;\xi\}}{\otimes} \mathcal{M} \right)_w \simeq \bigoplus_{i \in I} \frac{\mathcal{E}_{q,w}\{y;\xi\}}{\mathcal{E}_{q,w}\{y;\xi\}(\partial_1 - \lambda_{i,1}, \ldots, \partial_p - \lambda_{i,p})}$$

où $\lambda_{i,j} \in \mathcal{E}_{q,w}\{y; \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n\}$*, et* $\operatorname{ord}(\lambda_{i,j}) < 1$.

Pour chaque i*, les* $\lambda_{i,j}$ *satisfont la condition d'intégrabilité*

$$\frac{\partial \lambda_{i,j}}{\partial x_k} - \frac{\partial \lambda_{i,k}}{\partial x_j} = [\lambda_{i,k}, \lambda_{i,j}] \;\; j, k \in \{1, \ldots, p\}.$$

Les familles $(\lambda_{i,j})$ *sont bien définies à une permutation près de l'ensemble* I *et modulo la relation d'équivalence définie dans l'énoncé du théorème 2.3.1.*

3. Décomposition formelle pour les systèmes holonomes.

3.1. Un système microdifférentiel $\mathcal{M}$ est dit holonome si son support est une variété lagrangienne. Dans un voisinage U d'un point générique (avec $\xi_1 \neq 0$), on peut se ramener, par une transformation canonique à la situation :

$$\operatorname{Supp} \mathcal{M} \cap U = \{(x, \xi) : x_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0\}.$$

Notation :

- Dans les sections 3.1 et 3.3 on notera $\mathcal{E}'_q$ (resp. $\tilde{\mathcal{E}}_q$) l'Anneau des opérateurs dont le symbole ne dépend pas de x_1 (resp. $x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$). $\tilde{\mathcal{E}}_q$ est un Anneau commutatif.
- Soient β un élément de $\tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ d'ordre < 1, a un nombre complexe et p un entier positif, on désignera par $F(\beta, a, p)_w$ le $\mathcal{E}_{q,w}$-module

$$\frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}\left(\left(x_1 + \frac{\partial \beta}{\partial \xi_1} + \frac{a}{\xi_1} \right)^p, \partial_2 - \frac{\partial \beta}{\partial x_2}, \ldots, \partial_n - \frac{\partial \beta}{\partial x_n} \right)}.$$

Le résultat de décomposition pour les systèmes holonomes est le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_r$ -Module cohérent tel que*

$$\operatorname{Supp} \mathcal{M} = \{x_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0\}.$$

Pour un point $w \in$ Supp $\mathcal{M}$, générique, il existe un nombre naturel q, tel que

$$\left(\mathcal{E}_q \underset{\mathcal{E}_r}{\otimes} \mathcal{M}\right)_w \simeq \underset{i \in I}{\oplus} F(\beta_i, a_i, p_i)_w.$$

Les familles (β_i, a_i, p_i) sont déterminés à permutation près de l'ensemble I et, modulo la relation d'équivalence $\sim$ définie par

$$(\beta, a, p) \sim (\beta', a', p') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left(\operatorname{ord}(\beta - \beta') \leq 0;\ (a - a') \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}; p = p'\right).$$

Démonstration. — Si on regarde $\mathcal{M}$ en tant que $\mathcal{E}'_r$-module , il est cohérent et, on peut appliquer le théorème 2.3.1bis et ainsi obtenir une décomposition

$$\left(\mathcal{E}'_q \underset{\mathcal{E}'_r}{\otimes} \mathcal{M}\right)_w = \oplus \mathcal{M}_i$$

où chaque $\mathcal{M}_i$ est $(\partial_k - \lambda_{k,i})$-régulier, $\lambda_{k,i} \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$, $\operatorname{ord}(\lambda_{k,i}) < 1$, $k = 2, \ldots, n$ et pour un entier q multiple de r. Supposons que pour $i \neq j$ il existe $k \in \{2, \ldots, n\}$ tel que $\operatorname{ord}(\lambda_{i,k} - \lambda_{j,k}) > 0$.

On peut maintenant recopier la démonstration de la proposition 2.3.3 pour conclure que chacun des $\mathcal{M}_i$ est stable par l'action de x_1.

Chaque élément $\mathbf{m}$ de $\mathcal{M}_i$ satisfait : Supp $\mathcal{E}_q\mathbf{m} \subset \{x_1 = 0\}$. Il existe donc $P \in \mathcal{E}_q$ avec $\sigma(P) = (x_1)^s$, tel que $P\mathbf{m} = 0$. Pour $Q \in \mathcal{E}_q$, on a $Q = Q'P + \sum_{j=0,\ldots,s-1} Q_j x_1^j$, $Q_j \in \mathcal{E}'_q$. Alors, $Q\mathbf{m} = \sum_{j=0,\ldots,s-1} Q_j x_1^j \mathbf{m}$ et on peut ainsi conclure que chaque $\mathcal{M}_i$ est un $\mathcal{E}_{q,w}$ -module.

On se réduit ainsi à démontrer le théorème pour un Module $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}_w$ soit $(\partial_i - \lambda_i)$-régulier pour $i = 2, \ldots, n$.

On est dans les conditions du lemme suivant :

LEMME 3.1.2. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_q$-Module avec*

$$\operatorname{Supp} \mathcal{M} = \{(x, \xi) : x_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0\}$$

soient encore $w \in \operatorname{Supp} \mathcal{M}$, $\lambda_i \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$, $i = 2, \ldots, p$; $2 \leq p \leq n$, *satisfaisant les conditions d'intégrabilité du théorème 2.3.1. Supposons que* $\mathcal{M}_w$ *est* $(\partial_i - \lambda_i)$*-régulier pour* $i = 2, \ldots, p$; *alors il existe un automorphisme* Ψ *de* $\mathcal{E}_{q,w}$ *tel que :*

1. Ψ *préserve le symbole principal.*
2. $\Psi(\partial_i - \lambda_i) = \partial_i$ *pour* $i = 2, \ldots, p$.
3. $\mathcal{M}_w^\Psi$ *est* ∂_i*-régulier pour* $i = 2, \ldots, p$.

Démonstration du lemme 3.1.2. — D'abord on remarque que l'assertion 3. est une conséquence immédiate de l'assertion 2. Il nous suffit donc de prouver l'existence de Ψ dans les conditions 1. et 2..

On va démontrer le résultat par récurrence sur p. Pour $p = 2$ le résultat est démontré d'après le lemme 2.2.1 et la remarque 2.2.2.

Supposons maintenant le résultat valable pour $p - 1$. Soit Ψ' un automorphisme de $\mathcal{E}_{q,w}$ que satisfait 1. et tel que $\Psi'(\partial_i - \lambda_i) = \partial_i$ pour $i = 2, \ldots, p - 1$. Soit λ'_p tel que $\Psi'(\partial_p - \lambda_p) = \partial_p - \lambda'_p$.

On a déjà remarqué que les conditions d'intégrabilité sur les λ_i peuvent se traduire par

$$[\partial_i - \lambda_i, \partial_j - \lambda_j] = 0.$$

Si on applique Ψ' aux deux côtés de cette égalité on conclut que le symbole total de λ'_p ne dépend pas de $x_2, \ldots, x_{p-1}$.

D'après le lemme 2.2.1 et la remarque 2.2.2, on peut encore trouver Ψ'' tel que $\Psi''(\partial_p - \lambda'_p) = \partial_p$, $\Psi''(\partial_i) = \partial_i$ pour $i = 2, \ldots, p - 1$; et tel que Ψ'' satisfait la condition 1. de l'énoncé.

Alors on prend $\Psi = \Psi'' o \Psi'$. □

Suite de la démonstration du théorème 3.1.1. — On peut maintenant supposer que $\mathcal{M}_w$ est ∂_i-régulier pour $i = 2, \ldots, n$.

Soit donc E une base de $\mathcal{M}_w$, comme $\tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$-module libre, satisfaisant

$$\partial_i E = 0 \text{ pour } i = 2, \ldots, n.$$

On déduit comme dans la démonstration du théorème 2.3.1 que $x_1 E = AE$ où les coefficients de la matrice A, ne dépendent pas de $x_2, \ldots, x_n$ i.e. ils ne dépendent que de ξ_1.

On se réduit ainsi, en raisonnant comme dans 2.3, à considérer un $\mathcal{E}_r$-Module cohérent sur un ouvert de $T^* \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}$ dont le support soit $\{(x,\xi) : x = 0\}$.

3.2.

Notation :

- Soit X un ouvert de $\mathbb{C}$ de coordonnée x et les coordonnées correspondantes (x,ξ) dans T^*X.
- On désignera par $\mathcal{E}_q$ (resp. $\tilde{\mathcal{E}_q}$) l'Anneau des opérateurs microdifférentiels d'ordre q-fractionnaire sur X (resp. l'Anneau des opérateurs microdifférentiels d'ordre q-fractionaire dont le symbole ne dépend pas de x).
- On désigne par connexion méromorphe un espace vectoriel E sur $K = C[[x]][x^{-1}]$ muni d'une application $\mathbb{C}$-linéaire
$$\partial \left(= \frac{d}{dx} \right) : E \to E$$
qui satisfait $\partial(ae) = a\partial e + \dfrac{da}{dx} e$.
- Soit e un vecteur cyclique de E, i.e. un vecteur de E tel que les $\partial^k e$ engendrent E sur K. Soient $\delta = x\partial$ et $\delta^\mu e + \sum_{i=1}^{\mu} a_i \delta^{\mu-i} e = 0$ l'équation minimale de e, avec $a_i \in K$.

Le rang de Katz de la connexion E, peut être défini comme la plus grande pente du polygone de Newton de l'opérateur
$$\delta^\mu + \sum_{i=1}^{\mu} a_i \delta^{\mu-i}$$
dans le sens de [Ra] (voir [De] pour plus de détails).

On aura besoin d'une version formelle de l'équivalence de catégories (3.2) de [Ma2] ; elle s'énonce ainsi :

Soit $w \in T^*X - X$. Il existe une équivalence de catégories entre les germes de systèmes microdifférentiels holonomes au voisinage de w et les connexions méromorphes de rang de Katz < 1. Cette équivalence est associée à un isomorphisme d'anneaux, Φ, entre $\tilde{\mathcal{E}}_w$ et $\mathbb{C}[[y]][y^{-1}]$; l'image de ∂ par Φ est y^{-1}. La considération de $\mathcal{E}_{q,w}$ correspond à faire une ramification $y = t^q$. On renvoie le lecteur à la démonstration de [Ma2] qui s'applique aussi dans le cas formel (dans cette situation elle est même plus simple).

D'après les résultats connus pour les équations différentielles, voir [Le], section 6, après une transformation $y = t^q$, pour un entier positif q, on peut trouver une base $\mathbf{f}$ de la connexion tel que :

$$\frac{1}{q}t\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{f} = R\mathbf{f}$$

avec

$$R = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a_1 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} a_2 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} a_l & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a_l \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

où les a_i sont de la forme

$$a_i = a_{i,0} + \frac{a_{i,1}}{t} + \ldots + \frac{a_{i,\mu}}{t^\mu} + \sum_{k=1}^{\infty} a'_{i,k}t^k$$

$\mu < q$ et $\dfrac{\mu}{q}$ est le rang de Katz de la connexion.

Modulo une permutation de l'ensemble $\{1,\ldots,l\}$, la taille des blocs

$$\boxed{\begin{matrix} a_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a_i \end{matrix}}$$

est bien déterminée et les a_i sont déterminés modulo l'addition par un élément de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} b_{i,k} t^k$, où $b_0 \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.

D'après l'équivalence de catégories citée ci-dessus on trouve, pour tout $\mathcal{E}_r$-Module $\mathcal{M}$ holonome défini au voisinage de w, une décomposition

$$\left(\mathcal{E}_q \underset{\mathcal{E}_r}{\otimes} \mathcal{M}\right)_w = \bigoplus_i \frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(x-\alpha_i)^{s_i}}$$

où les s_i sont des entiers positifs, $\alpha_i \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ et $\operatorname{ord}(\alpha_i) < 0$.

3.3. On reprend maintenant les notations de la section 3.1. Jusqu'ici on a démontré que tout $\mathcal{E}_r$-Module cohérent M se décompose, en un point w générique, et après tensorisation par $\mathcal{E}_q$, avec q approprié, en somme directe :

$$\left(\mathcal{E}_q \underset{\mathcal{E}_r}{\otimes} M\right)_w = \bigoplus_i \frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}\left((x_1-\lambda_{i,1})^{p_i}, \partial_2 - \lambda_{i,2}, \dots, \partial_n - \lambda_{i,n}\right)}$$

où $\lambda_{i,j} \in \tilde{\mathcal{E}}_q$, $\operatorname{ord}(\lambda_{i,1}) < 0$ et $\operatorname{ord}(\lambda_{i,j}) < 1$ pour $j = 2, \dots, n$.

Le $\mathcal{E}_{q,w}$ -module $\dfrac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}\left((x_1-\lambda_{i,1})^{p_i}, \partial_2 - \lambda_{i,2}, \dots, \partial_n - \lambda_{i,n}\right)}$ admet un sous-module isomorphe à $\dfrac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}\left(x_1-\lambda_{i,1}, \partial_2 - \lambda_{i,2}, \dots, \partial_n - \lambda_{i,n}\right)}$.

On peut donc vérifier comme on a fait dans la démonstration du théorème 2.3.1 que pour chaque $i \in I$, les $\lambda_{i,j}$ satisfont les relations :

$$\frac{\partial \lambda_{i,j}}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial \lambda_{i,1}}{\partial x_j} \; ; j = 2, \dots, n \tag{3.3.1}$$

$$\frac{\partial \lambda_{i,k}}{\partial x_j} = \frac{\partial \lambda_{i,j}}{\partial x_k} \; ; j, k = 2, \dots, n. \tag{3.3.2}$$

Soit $\sum_{j<0} a_j(x_2, \dots, x_n)\xi_1^j$ le symbole de $\lambda_{i,1}$; il résulte de 3.3.1 que a_{-1} est indépendant de $x_2, x_3, \dots, x_n$, i.e. $a_{-1} \in \mathbb{C}$.

On peut alors trouver, par récurrence sur l'ordre des symboles, des sections $\beta_i \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ d'ordre < 1, telles que :

1. $\dfrac{\partial \beta_i}{\partial \xi_1} = -\lambda_{i,1} + \dfrac{a_{-1}}{\xi_1}$.

2. $\dfrac{\partial \beta_i}{\partial x_j} = \lambda_{i,j}$; $j = 2, \ldots, n$.

On doit à chaque pas résoudre un système d'équations différentielles à une inconnue, fonction holomorphe de $x_2, \ldots, x_n$, du type qu'on trouve quand on veut démontrer que toute connexion holomorphe sur un espace vectoriel de dimension p a p sections horizontales linéairement indépendantes.

L'assertion du théorème sur l'unicité résulte du lemme suivant. □

LEMME 3.3.1. — *Soient β et $\beta' \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$, a et a' nombres complexes, p et p' entiers positifs.*

1. *$F(\beta, a, p)_w$ est isomorphe à $F(\beta', a', p')_w$ si et seulement si $p = p'$, $\operatorname{ord}(\beta - \beta') \leq 0$ et $(a - a') \in \dfrac{1}{q}\mathbb{Z}$.*
2. *$F(\beta, a, p)_w$ est indécomposable.*

Démonstration. — 1) On commence par démontrer l'assertion suivante :

3.3.2. *Soient λ_i (resp. α_i) éléments de $\tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ pour $i = 1, \ldots, n$ (resp. $i = 2, \ldots, n$), avec $\operatorname{ord}(\lambda_1) < 0$, $\operatorname{ord}(\lambda_i) < 1$ et $\operatorname{ord}(\alpha_i - \lambda_i) < 0$ pour $i = 2, \ldots, n$; supposons aussi que les λ_i (resp. α_i) satisfont les relations 3.3.1 et 3.3.2 (resp. 3.3.2).*

Il existe $Q \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ inversible, avec $\operatorname{ord}(Q) = 0$ et tel que

$$\frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}\left((x_1 - \lambda_1)^p, \partial_2 - \lambda_2, \ldots, \partial_n - \lambda_n\right)}$$

est isomorphe à

$$\frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}\left(\left(x_1 - \lambda_1 - Q^{-1}\dfrac{\partial Q}{\partial \xi_1}\right)^p, \partial_2 - \alpha_2, \ldots, \partial_n - \alpha_n\right)}.$$

On remarque encore que $\operatorname{ord}\left(Q^{-1}\dfrac{\partial Q}{\partial \xi_1}\right) < -1$.

Démonstration de 3.3.2. — D'après le lemme 2.3.4

$$\frac{\mathcal{E}'_{q,w}}{\mathcal{E}'_{q,w}(\partial_2 - \lambda_2, \ldots, \partial_n - \lambda_n)}$$

est isomorphe à

$$\frac{\mathcal{E}'_{q,w}}{\mathcal{E}'_{q,w}(\partial_2 - \alpha_2, \ldots, \partial_n - \alpha_n)}.$$

On a démontré l'existence de $Q \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ avec $\operatorname{ord}(Q) = 0$ tel que

$$(\partial_i - \lambda_i)Q = Q(\partial_i - \alpha_i) \text{ pour } i = 2, \ldots, n.$$

On remarque maintenant qu'on a

$$\begin{aligned} &Q^{-1}(x_1 - \lambda_1)^p Q \\ &\qquad = Q^{-1}(x_1 - \lambda_1)QQ^{-1}(x_1 - \lambda_1)Q \ldots Q^{-1}(x_1 - \lambda_1)Q \\ &\qquad\qquad = \left(x_1 - \lambda_1 - Q^{-1}\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}\right)^p \end{aligned}$$

et que $\operatorname{ord}\left(Q^{-1}\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}\right) < 0$.

Alors la multiplication à droite par Q induit un isomorphisme de

$$\frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}\left((x_1 - \lambda_1)^p, \partial_2 - \lambda_2, \ldots, \partial_n - \lambda_n\right)}$$

dans

$$\frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}\left(\left(x_1 - \lambda_1 - Q^{-1}\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}\right)^p, \partial_2 - \alpha_2, \ldots, \partial_n - \alpha_n\right)}.$$

On fait maintenant la démonstration du lemme.

Si on regarde $F(\beta, a, p)_w$ (resp. $F(\beta', a', p')_w$) comme $\mathcal{E}'_{q,w}$-module il est isomorphe à p (resp. p') copies de

$$\frac{\mathcal{E}'_{q,w}}{\mathcal{E}'_{q,w}\left(\partial_2 - \frac{\partial \beta}{\partial x_2}, \ldots, \partial_n - \frac{\partial \beta}{\partial x_n}\right)}$$

$$\left(\text{resp. } \frac{\mathcal{E}'_{q,w}}{\mathcal{E}'_{q,w}\left(\partial_2 - \frac{\partial \beta'}{\partial x_2}, \ldots, \partial_n - \frac{\partial \beta'}{\partial x_n}\right)}\right).$$

D'après le lemme 2.3.4, on ne peut pas avoir l'isomorphisme si $p \neq p'$ ou si $\operatorname{ord}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x_i} - \frac{\partial \beta'}{\partial x_i}\right) > 0$, pour $i \in \{2, \ldots, n\}$.

Supposons donc $\operatorname{ord}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x_i} - \frac{\partial\beta'}{\partial x_i}\right) \leq 0$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$.

On va démontrer ensuite que si $F(\beta, a, p)_w \simeq F(\beta'.a', p)_w$ alors $\operatorname{ord}\left(\frac{\partial\beta}{\partial \xi_1} - \frac{\partial\beta'}{\partial \xi_1}\right) < -1$ et $(a - a') \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.

D'après l'assertion 3.3.2 on peut supposer $\frac{\partial\beta}{\partial x_i} = \frac{\partial\beta'}{\partial x_i}$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$; et, par application du lemme 3.1.2 on peut prendre $\frac{\partial\beta}{\partial x_i} = 0$ pour $i = 2, \ldots, n$.

Les conditions d'intégrabilité 3.3.1 entraînent que $\frac{\partial\beta}{\partial \xi_1}$ $\left(\text{resp. } \frac{\partial\beta'}{\partial \xi_1}\right)$ ne dépend pas de $x_2, \ldots, x_n$.

Avec ces hypothèses, les restrictions des deux systèmes à

$$\{(x, \xi) : x_2 = \ldots = x_n = 0\}$$

sont respectivement $\dfrac{\mathcal{E}_q}{\mathcal{E}_q\left(x_1 - \frac{\partial\beta}{\partial\xi_1}\right)^p}$ et $\dfrac{\mathcal{E}_q}{\mathcal{E}_q\left(x_1 - \frac{\partial\beta'}{\partial\xi_1}\right)^p}$.

En utilisant l'équivalence de catégories et les résultats de Levelt sur les connexions méromorphes énoncés dans la section 3.2 on conclut que $\operatorname{ord}\left(\frac{\partial\beta}{\partial \xi_1} - \frac{\partial\beta'}{\partial \xi_1}\right) < 0$ et $(a - a') \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.

On démontre maintenant que $F(\beta, a, p)_w$ est isomorphe à $F(\beta', a', p)_w$ si $\operatorname{ord}(\beta - \beta') \leq 0$ et $(a - a') \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.

En appliquant le lemme 3.1.2 on peut supposer que $\frac{\partial\beta}{\partial x_i} = 0$ pour $i = 2, \ldots, n$.

D'après l'assertion 3.3.2 il existe $Q \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ tel que $F(\beta', a', p)$ est isomorphe à

$$\frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}\left(\left(x_1 + \frac{\partial\beta'}{\partial\xi_1} + \frac{a'}{\xi_1} - Q^{-1}\frac{\partial Q}{\partial\xi_1}\right)^p, \partial_2, \ldots, \partial_n\right)}.$$

Les conditions d'intégrabilité satisfaites par

$$\frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}\left(\left(x_1+\frac{\partial\beta'}{\partial\xi_1}+\frac{a'}{\xi_1}-Q^{-1}\frac{\partial Q}{\partial\xi_1}\right)^p,\partial_2,\ldots,\partial_n\right)} \quad (\text{resp. } F(\beta,a,p))$$

impliquent que $\left(x_1+\frac{\partial\beta'}{\partial\xi_1}+\frac{a'}{\xi_1}-Q^{-1}\frac{\partial Q}{\partial\xi_1}\right)$ (resp. β) ne dépendent que de x_1 et ξ_1.

On s'est ainsi ramené à démontrer l'isomorphisme de 1. pour $\dim(X)=1$, qui est une conséquence de l'équivalence de catégories et des résultats sur les connexions méromorphes énoncés dans la section 3.2.

2) Pour démontrer que $F(\beta,a,p)_w$ est indécomposable, on peut comme on a fait dans la démonstration de l'existence de décomposition, se ramener à la situation d'un système sur $T^*\mathbb{C}$ de la forme

$$\frac{\mathcal{E}_{q,w}}{\mathcal{E}_{q,w}(x-\alpha)^p}$$

où $\alpha\in\tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ et $\operatorname{ord}(\alpha)<0$, avec les notations de la section 3.2.

D'après l'équivalence de catégories et en utilisant les résultats de [Le], cités dans la section 3.2, on conclut que $F(\beta,a,p)_w$ est indécomposable. □

Remarque 3.3.1. — $\mathcal{M}$ est à singularité régulière dans le sens de [KK] ssi tous les β_i peuvent être pris nuls.

BIBLIOGRAPHIE

[De] P. DELIGNE, Equations différentielles à points singuliers réguliers, Springer Lecture Notes, No.163, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1970.

[KK] M. KASHIWARA and T. KAWAI, On holonomic systems of microdifferential equations. III-Systems with regular singularities, Pub. of RIMS, vol 17, No. 3 (1981).

[KO] M. KASHIWARA and T. OSHIMA, Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems, Ann. of Math., 106 (1977), 145-200.

[Le] A. LEVELT, Jordan decomposition for a class of singular differential operators, Ark. Mat., 13 (1975), 1-27.

[Mal] B. MALGRANGE, Réduction d'un système microdifférentiel aux points génériques.1, Compositio Mathematica, vol. 44, Fasc. 1-3 (1981), 133-143.

[Ma2] B. MALGRANGE, Modules microdifférentiels et classes de Gevrey, Math. Anal. Apl., part B Adv. Math. Supl. Stud., vol 7B.

[Ma3] B. MALGRANGE, L'involutivité des caractéristiques des systèmes différentiels et microdifférentiels, Sem. Bourbaki, 1977-1978, No 522.

[Ra] J.-P. RAMIS, Dévissage Gevrey, Astérisque, 59/60 (1978), 173-204.

[SKK] M. SATO, T. KAWAI, and M. KASHIWARA, Microfunctions and Pseudodifferential Equations, Springer Lecture notes, No. 287, pp. 264-529, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1973.

Manuscrit reçu le 17 septembre 1991,
révisé le 3 février 1992.

Rui RODRIGUES,
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciencias e Tecnologia da
Universidade Nova de Lisboa
Quinta da Torre
2825 Monte da Caparica (Portugal)
&
CMAF
Complexo II
2, Av. Gama Pinto
1699 Lisboa Codex (Portugal).