

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

TAN LEI

Voisinages connexes des points de Misiurewicz

Annales de l'institut Fourier, tome 42, n° 4 (1992), p. 707-735

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1992__42_4_707_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1992__42_4_707_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VOISINAGES CONNEXES DES POINTS DE MISIUREWICZ

par TAN Lei

1. Introduction.

Soit $f_c : z \mapsto z^2 + c$, $z, c \in \mathbb{C}$. On note K_c , l'ensemble de Julia rempli de f_c , l'ensemble des points z ayant une orbite bornée, par les itérés de f_c . On pose $J_c = \partial K_c$, et $M = \{ c \in \mathbb{C} \mid 0 \in K_c \}$, l'ensemble de Mandelbrot. Un point $c_0 \in M$ est appelé point de Misiurewicz si 0 est non périodique mais tombe en un temps fini dans une orbite périodique pour f_{c_0} . Exemple : $c_0 = -2$, $f_{-2}(0) = -2$ et $f_{-2}^2(0) = f_{-2}^3(0) = 2$; $c_0 = i$, $f_i(0) = i$, $f_i^2(0) = f_i^4(0) = i - 1$. Il est connu que l'ensemble des points de Misiurewicz forme une partie dense de ∂M .

Dans ce travail on se propose de montrer le résultat suivant :

THÉOREME 1.1. — *Tout point de Misiurewicz possède un système fondamental de voisinages connexes dans M .*

Ce résultat est un modeste pas vers la conjecture de la connexité locale de M . Par une méthode d'estimation de modules d'anneaux, différente de celle utilisée ici, J.-C. Yoccoz obtient un résultat bien plus important vers cette même conjecture. Mais notre méthode est bien plus simple, et d'ailleurs, à ma connaissance, la méthode de modules d'anneaux s'applique mal à certains points de Misiurewicz (par exemple ceux pour lesquels 0 tombe en un temps fini sur le point fixe non extrémal).

Mots-clés : Ensemble de Mandelbrot – Points de Misiurewicz – Ensembles de Julia – Points périodiques réulsifs – Connexité locale – Systèmes dynamiques holomorphes.
Classification A.M.S. : 30C10 – 30C20 – 39B10.

L'idée originale de notre démonstration est due à A. Douady. La méthode est apparentée à celle de [T], où on montre qu'au voisinage d'un point de Misiurewicz c_0 , l'ensemble M ressemble à J_{c_0} au voisinage de c_0 .

On va construire une base de voisinages fermés $\{C\Omega_n\}$ dans \mathbb{C} d'un point de Misiurewicz c_0 , telle que $M \cap C\Omega_n$ soit connexe pour tout $C\Omega_n$. Le bord CT_n de $C\Omega_n$ est composé d'arcs de rayons externes et d'arcs d'équipotentiels de $\mathbb{C} - M$.

Pour ceci, on commence par construire une base de voisinages connexes $\Omega_n(c_0)$ de c_0 , dans le plan dynamique de f_{c_0} , avec le bord $\Gamma_n(c_0)$ composé d'arcs de rayons externes et d'arcs d'équipotentiels de $\mathbb{C} - K_{c_0}$, et avec certaines propriétés de non retour (section 2.1).

La propriété de non retour du point $x_0 \in \Gamma_0(c_0) \cap J_{c_0}$ ((6)) nous permet de construire un voisinage \mathcal{C} de c_0 , dans le plan des paramètres (section 2.2), et la propriété de non retour des points de $\Gamma_n(c_0) \cap J_{c_0}$, $n \in \mathbb{N}$ (lemme 2.6) nous permet de construire les rayons externes correspondants, dans le plan dynamique de f_c , pour tout $c \in \mathcal{C}$ (section 2.3), ainsi que des points de Misiurewicz $c_{j,n}$ dans M , avec des rayons externes correspondants de $\mathbb{C} - M$ (section 2.4). On peut donc définir une courbe de Jordan CT_n dans le plan des paramètres, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La courbe CT_n délimite un voisinage fermé borné $C\Omega_n$ de c_0 . Ces voisinages sont emboîtés les uns dans les autres, et on voit facilement que $C\Omega_n \cap M$ est connexe (section 2.4).

Pour montrer que les $C\Omega_n \cap M$ forment une base de voisinages de c_0 dans M , il reste à montrer $\text{diam}(CT_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Pour cela, on retourne dans le plan dynamique de f_c , mais cette fois-ci pour $c \in \text{Int}(C\Omega_0) \subset \mathcal{C}$ (section 2.5). Le fait que $\text{Int}(C\Omega_0)$ est borné garantit l'existence des arcs d'équipotentiels de $\mathbb{C} - K_c$ correspondants, pour tout $c \in \text{Int}(C\Omega_0)$. Les courbes $\Gamma_n(c)$, composé d'arcs de rayons externes et d'arcs d'équipotentiels de $\mathbb{C} - K_c$ correspondants, sont donc bien définies pour tout $c \in \text{Int}(C\Omega_0)$. On vérifie ensuite que $\text{diam}(\Gamma_n(c)) \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$, uniformément dans un voisinage $W \subset \text{Int}(C\Omega_0)$ de c_0 .

Finalement il suffit de remarquer que $CT_n = \{c \in \text{Int}(C\Omega_0) | c \in \Gamma_n(c)\}$, et d'appliquer une fois le théorème de Rouché, pour montrer $\text{diam}(CT_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ (section 2.6).

Je tiens à remercier A. Douady pour son encouragement tout au long de ce travail, E. Ghys, P. Lavaurs et M. Shishikura et tous ceux qui ont discuté avec moi de façon utile et amicale. Je remercie également l'aimable

hospitalité de B. Branner et de l'Université technique du Danemark où une étape essentielle de ce travail a été réalisée.

2. Preuve du théorème 1.1.

On va construire des voisinages connexes en utilisant des courbes équipotentielles et des rayons externes. Rappelons d'abord quelques notations et résultats de Douady et Hubbard ([DH]) :

Soit $c \in \mathbb{C}$. On pose $\text{Or}_c(z) = \{f_c^n(z) | n \geq 0\}$, l'orbite de z par f_c , et $\text{Or}_c^+(z) = \text{Or}_c(f_c(z))$. Un point $z \in K_c$ est appelé *point périodique répulsif* s'il existe un entier $p > 0$ tel que $f_c^p(z) = z$, $|(f_c^p)'(z)| > 1$. Un tel entier minimal est dit la *période* de z .

Pour $c \in \mathbb{C}$, il existe une application conforme ψ_c définie dans un voisinage de ∞ qui conjugue f_c à $\tilde{f} : z \mapsto z^2$, avec $\psi_c(z)/z \rightarrow 1$ ($z \rightarrow \infty$). Pour $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on appelle $R_c(\theta) = \psi_c^{-1}\{e^{r+2i\pi\theta} \mid r > r_{c,\theta}\}$ le *rayon externe* d'argument θ de K_c , où $r_{c,\theta}$ est minimal pour que $\psi_c^{-1}(e^{r+2i\pi\theta})$ ($r > r_{c,\theta}$) soit bien défini. On a $r_{c,\theta} \geq 0$. On dit que $R_c(\theta)$ se casse si $r_{c,\theta} > 0$, *aboutit* si l'on a en même temps $r_{c,\theta} = 0$ et $\lim_{r \rightarrow 0^+} \psi_c^{-1}(e^{r+2i\pi\theta})$ existe, et est *errant* sinon. Dans le cas d'aboutissement, on note $\gamma_c(\theta) = \psi_c^{-1}(e^{2i\pi\theta})$. On a $\gamma_c(\theta) \in J_c$. Remarquons que

$$(1) \quad f_c(\gamma_c(\theta)) = \gamma_c(2\theta), \quad f_c^{-1}(\gamma_c(\theta)) = \left\{ \gamma_c\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \cup \left\{ \gamma_c\left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\right) \right\}$$

si les points sont bien définis. On appelle *l'ensemble des arguments externes* de z , l'ensemble $\text{Arg}_c(z) = \{\theta \in \mathbb{T} \mid \gamma_c(\theta) = z\}$.

Si $c \in M$, ψ_c s'étend en une représentation conforme de $\mathbb{C} - K_c$ sur $\mathbb{C} - \overline{D}$, où D est le disque unité.

Notons $\varphi_c = \psi_c^{-1}$ là où elle est définie. On a :

$$(2) \quad f_c \circ \varphi_c = \varphi_c \circ \tilde{f}.$$

2.1. Dynamique de f_{c_0} , construction de x_0 , $x_{j,n}$, L_n et Γ_n .

Soit c_0 un point de Misiurewicz. Dans la suite de cette section on néglige parfois l'indice c_0 . Toutes les notations seront pour f_{c_0} .

I. Analyse générale.

Par définition d'un point de Misiurewicz, pour $f = f_{c_0} : z \mapsto z^2 + c_0$, il existe deux entiers $l > 0, p > 0$ minimaux tels que

$$(3) \quad f^p(f^l(c_0)) = f^l(c_0), \quad f^p(f^{l-1}(c_0)) \neq f^{l-1}(c_0).$$

Notons $\alpha = f^l(c_0)$, $\rho = (f^p)'(\alpha)$. Douady et Hubbard ont montré ([DH]) que dans ce cas $K_{c_0} = J_{c_0}$, cet ensemble est compact connexe et localement connexe, plein (c'est-à-dire $\mathbb{C} - J_{c_0}$ est connexe), d'intérieur vide. Le point α est répulsif, et l'application f^p restreinte au voisinage de α est conjuguée à sa partie linéaire. Plus précisément, pour tout $\theta \in \mathbb{T}$ le point $\gamma(\theta)$ est bien défini, continu en θ , et $J_{c_0} = \{\gamma(\theta) \mid \theta \in \mathbb{T}\}$. On a $|\rho| > 1$. Il existe V un voisinage de α , une application holomorphe injective $\kappa : V \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \kappa(z)$, vérifiant $\kappa(\alpha) = 0$, $\kappa'(\alpha) = 1$ et pour tout z tel que $z, f^p(z) \in V$, on a $\kappa(f^p(z)) = \rho \cdot \kappa(z)$. On dit que V est un *domaine de linéarisation* de α . L'application inverse $h = \kappa^{-1}$ se prolonge en une application entière, vérifiant $h(0) = \alpha$, $h'(0) = 1$, et $h(\rho z) = f(h(z))$.

Soit E un sous-ensemble de \mathbb{C} , compact connexe localement connexe, plein, d'intérieur vide. On rappelle que si z, z' sont deux points de E , il existe un unique chemin injectif (modulo reparamétrage) dans E , joignant z et z' . On note ce chemin par $[z, z']$. Si $\{z_1, \dots, z_n\}$ est un sous-ensemble fini de E , l'ensemble $\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} [z_i, z_j]$ est un arbre topologique fini, appelé *enveloppe connexe* des z_i dans E .

Dans le cas où $E = J_{c_0}$, avec c_0 un point de Misiurewicz, on définit *arbre de Hubbard* H l'enveloppe connexe de $\{f^n(c_0)\}_{n \geq 0}$ dans J_{c_0} . D'après Douady et Hubbard ([DH]), le point c_0 est une extrémité de H , $0 \in H$, $f(H) \subset H$, et si $z, z' \in H$, on a $[z, z'] \subset H$. De plus, H contient tout point périodique ayant plus qu'un argument externe.

On note $\pi_0(E)$ l'ensemble des composantes connexes d'un espace E . Soient X un espace métrisable, $Y \subset X$, $w \in \overline{Y}$, et (V_n) une suite décroissante fondamentale de voisinages de w . On définit

$$\{\text{bouts de } Y \text{ en } w\} = \{(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n, b_n \in \pi_0(V_n \cap Y), b_{n+1} \subset b_n\}.$$

Soit T un arbre topologiquement fini, plongé dans \mathbb{C} . Alors on définit

$$\{\text{brins de } T \text{ en } \alpha\} = \{\text{bouts de } T - \{\alpha\} \text{ en } \alpha\}$$

et

$$\{\text{accès de } \mathbb{C} - T \text{ en } \alpha\} = \{\text{bouts de } \mathbb{C} - T \text{ en } \alpha\}.$$

Soit z un point de l'arbre de Hubbard H . Un résultat de Douady et Hubbard montre que dans chaque accès de $\mathbb{C} - H$ en z il existe au moins un rayon externe de f aboutissant en z , et z a un nombre fini de rayons externes. En particulier, si $z \in H$ est périodique, $\#\text{Arg}(z) = \#\{\text{brins de } H \text{ en } z\} = \#\{\text{accès de } \mathbb{C} - H \text{ en } z\}$. Si $z \in \mathbb{C}$ est prépériodique avec $f^m(z) \in H$ périodique, et si $0 \notin \{z, f(z), \dots, f^{m-1}(z)\}$, alors f^m est injective au voisinage de z , et $\#\text{Arg}(z) = \#\text{Arg}(f^m(z)) = \#\{\text{brins de } f^{-m}(H) \text{ en } z\}$.

Citons d'abord un lemme purement topologique :

LEMME 2.1. — *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un ensemble compact connexe. Supposons que L_1, L_2, \dots, L_k sont k plongements propres disjoints de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , formant le bord d'une région ouverte U de \mathbb{C} , avec $L_i \cap K = \{a_i\}$. Alors $K \cap \overline{U} = (K \cap U) \cup \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ est connexe.*

Démonstration. — $K \cap \overline{U} = (K \cap U) \cup (K \cap \partial U) = (K \cap U) \cup \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Supposons que $K \cap \overline{U}$ n'est pas connexe. Alors $K \cap \overline{U} = D' \cup D''$ avec D', D'' disjoints, ouverts, fermés, non vides dans $K \cap \overline{U}$. L'ensemble $I = \{1, \dots, k\}$ est réparti en deux parties (dont l'une peut être vide) $I' \cup I''$ avec $a_i \in D'$ pour $i \in I'$ et $a_i \in D''$ pour $i \in I''$. Notons C' l'union des composantes de $\mathbb{C} - \bigcup_{i \in I'} L_i$ qui sont disjointes de U , et C'' l'union des composantes de $\mathbb{C} - \bigcup_{i \in I''} L_i$ qui sont disjointes de U . Alors $D' \cup (K \cap C')$ et $D'' \cup (K \cap C'')$ forment deux parties disjointes, ouvertes, fermées, non vides dans K . Ce qui contredit le fait que K est connexe. \square

Le lemme suivant consiste à élargir un domaine de linéarisation d'un point périodique $z \in H$ à un domaine borné par des rayons externes.

LEMME 2.2. — *Supposons que z est un point périodique de H de période p et ayant k brins dans H . Soit \tilde{V} un domaine de linéarisation de f^p en z avec κ la conjugaison. Soit $s_0 > 0$ assez petit pour que $\kappa(\tilde{V}) \supset \overline{D}_{s_0}$ et que $\kappa^{-1}(D_{s_0}) - \{z\}$ ne contient aucun point de branchement de H . Prenons $0 < s \leq s_0$. Posons $V' = \kappa^{-1}(D_s)$, $V = \kappa^{-1}(D_{s/|\rho|^k})$. Alors $\overline{V} \subset V'$ et $f^{kp} : V \rightarrow V'$ est un homéomorphisme.*

Notons $H_{V'}$ la composante connexe de $H \cap V'$ qui contient z . Alors $H_{V'}$ est une étoile à k branches centrée en z . Notons $f^{-kp}(H)_V$ la

composante connexe de $f^{-kp}(H) \cap V$ qui contient z . Alors $f^{-kp}(H)_V$ est aussi une étoile à k branche centrée en z , et $f^{kp} : f^{-kp}(H)_V \rightarrow H_{V'}$ est un homéomorphisme.

Soit T une sous étoile fermée à k branches de $f^{-kp}(H)_V$, ayant y_0, y_1, \dots, y_{k-1} comme extrémités. Alors $T' = f^{kp}(T)$ est une sous étoile fermée de $H_{V'}$, ayant $f^{kp}(y_0), f^{kp}(y_1), \dots, f^{kp}(y_{k-1})$ comme extrémités. De plus, $T \subset T'$.

L'ensemble $f^{-kp}(H)_V$ coïncide avec la composante connexe H_V de $H \cap V$ qui contient z .

Pour chaque j , il existe deux rayons externes $R(\eta_j^-), R(\eta_j^+)$ de y_j adjacents à $[y_j, z]$. Les k courbes $L_j = R(\eta_j^-) \cup R(\eta_j^+) \cup \{y_j\}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$ bornent un domaine B avec $z \in B$ et $\overline{B} \cap H = \overline{B} \cap f^{-kp}(H) = T$. Pour chaque j , les rayons $R(2^{kp}\eta_j^-), R(2^{kp}\eta_j^+)$ sont les deux rayons externes de $f^{kp}(y_j)$ adjacents à $[f^{kp}(y_j), z]$. Les k courbes $L'_j = R(2^{kp}\eta_j^-) \cup R(2^{kp}\eta_j^+) \cup \{f^{kp}(y_j)\}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$ bornent un domaine B' avec $z \in B'$ et $\overline{B'} \cap H = T'$. De plus, $\overline{B} \subset B'$.

On a $f^{kp}(B) = B'$, et $f^{kp} : B \rightarrow B'$ est un homéomorphisme. Notons g l'application inverse. La conjugaison κ s'étend en une application conforme définie dans $\overline{B'} \cup V$ qui conjugue g à $z \mapsto z/\rho^k$. Et, uniformément sur tout compact de \overline{B} ,

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{nk} (g^n(x) - z) = \kappa(x).$$

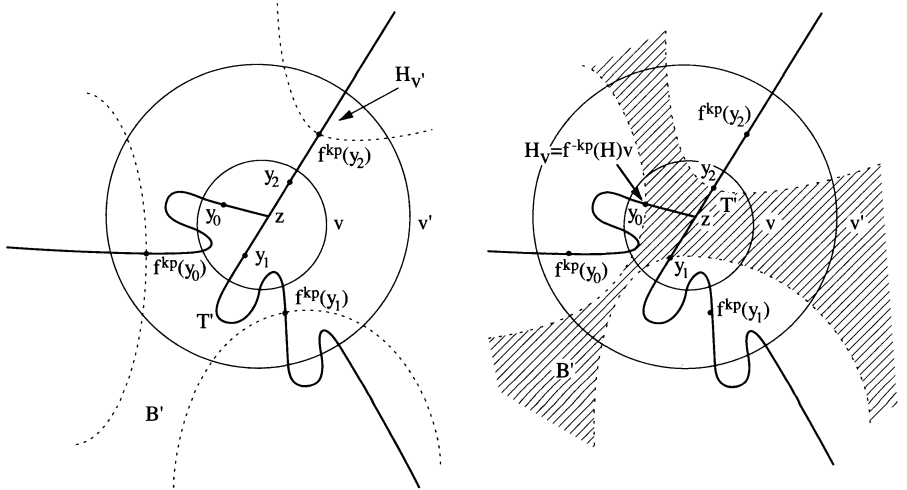


Figure 1 : $H_V, H_{V'}, T, T', B$

Démonstration. — Comme $|\rho| > 1$, on a $\overline{D}_s/|\rho|^k \subset D_s$, et $\overline{V} \subset V'$. L'application $f^{kp} : V \rightarrow V'$ est conjuguée par κ à $z \mapsto \rho^k z$. Elle est donc un homéomorphisme.

Le fait que $H_{V'}$ soit une étoile centrée en z à k branches est déduit du fait que $V' - \{z\}$ ne contienne aucun point de branchement de H , et que H ait k brins en z . L'application $f^{kp} : f^{-kp}(H) \cap V \rightarrow H \cap V'$ est aussi un homéomorphisme, et elle fixe z . Elle envoie donc homéomorphiquement la composante connexe de $f^{-kp}(H) \cap V$ qui contient z à la composante connexe de $H \cap V'$ qui contient z . Autrement dit, $f^{kp} : f^{-kp}(H)_V \rightarrow H_{V'}$ est un homéomorphisme. En particulier, $f^{-kp}(H)_V$ est aussi une étoile à k branches centrée en z .

Soit T une sous étoile fermée à k branches de $f^{-kp}(H)_V$ ayant y_0, y_1, \dots, y_{k-1} comme extrémités. Alors $T = \bigcup_{j=0}^{k-1} [y_j, z]$, avec $y_j \in V$ et $[y_j, z] \cap [y_{j'}, z] = \emptyset$ lorsque $j \neq j'$.

Le fait que $T \subset H$ nous donne $T' = f^{kp}(T) \subset H$. Puisque $T \subset V$, $f^{kp}|_T$ est injective. En particulier, $f^{kp} : [y_j, z] \rightarrow [f^{kp}(y_j), z]$ est un homéomorphisme. D'où $T' = \bigcup_{j=0}^{k-1} [f^{kp}(y_j), z]$, c'est une étoile à k branches. On va montrer $T \subset T'$. Puisque f^{kp} préserve les brins, $[y_j, z] \cap [f^{kp}(y_j), z] \neq \emptyset$. Puisque $V' - \{z\}$ ne contient pas de point de branchement de H , l'ensemble $V - \{z\}$ ne contient pas de point de branchement de $f^{-kp}(H)_V$. On a soit $y_j \in [f^{kp}(y_j), z]$ soit $f^{kp}(y_j) \in [y_j, z]$. Le deuxième cas n'est pas possible car sinon $f^{nkp}(y_j) \in [y_j, z] \subset V$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $\kappa(f^{nkp}(y_j)) = \rho^{nk}\kappa(y_j)$ devrait être borné pour tout n ($\kappa(f^{nkp}(y_j)) \in \kappa([y_j, z])$), en contradiction avec $|\rho| > 1$. On a alors $y_j \in [f^{kp}(y_j), z]$, $j = 0, 1, \dots, k-1$. Par conséquent, $T \subset T'$.

On veut montrer $f^{-kp}(H)_V = H_V$. D'une part, par le paragraphe ci-dessus, pour toute sous étoile T de $f^{-kp}(H)_V$, on a $T \subset f^{kp}(T) \subset H$. Ainsi $f^{-kp}(H)_V \subset H_V$. D'autre part, comme $H \subset f^{-1}(f(H)) \subset f^{-1}(H)$, on a $H \subset f^{-kp}(H)$. Par conséquent, $H_V \subset f^{-kp}(H)_V$. D'où $f^{-kp}(H)_V = H_V$.

Soit $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. L'arbre H en y_j a deux accès. En vertu d'un résultat de Douady et Hubbard, il existe au moins un rayon externe aboutissant à y_j dans chaque accès. Comme y_j n'a qu'un nombre fini de rayons, il en a deux $R(\eta_j^-)$, $R(\eta_j^+)$ adjacents à $[y_j, z]$. Posons $L_j = R(\eta_j^-) \cup R(\eta_j^+) \cup \{y_j\}$. Alors $f^{kp}(y_j)$ et $T - \{y_j\}$ se trouvent dans des composantes différentes de $\mathbb{C} - L_j$. Comme les rayons externes ne se coupent

pas, les courbes L_j , $j = 0, 1, \dots, k-1$ sont deux-à-deux disjoints. Il y a une composante connexe de $\mathbb{C} - \bigcup_{j=0}^{k-1} L_j$ qui contient $T - \bigcup_{j=0}^{k-1} \{y_j\}$, qu'on note B .

Alors $z \in B$ et $\partial B = \bigcup_{j=0}^{k-1} L_j$. En particulier, $\partial B \cap H = \partial B \cap f^{-kp}(H) =$

$\bigcup_{j=0}^{k-1} \{y_j\}$. D'après le lemme 2.1, $B \cap H$ et $B \cap f^{-kp}(H)$ sont connexes

(H et $f^{-kp}(H)$ sont connexes compacts). Comme $f^{-kp}(H)_V \cap \overline{B} = T$, et $T \subset (f^{-kp}(H) \cap \overline{B})_V \subset f^{-kp}(H)_V \cap \overline{B}$, on a $T = (f^{-kp}(H) \cap \overline{B})_V$. Autrement dit, T est la composante connexe de $f^{-kp}(H) \cap \overline{B} \cap V$ qui contient z . Comme $T \subset V$, T est fermé, T est aussi une composante connexe de $f^{-kp}(H) \cap \overline{B}$. Mais $f^{-kp}(H) \cap \overline{B}$ est lui-même connexe, on a finalement $T = f^{-kp}(H) \cap \overline{B}$.

Le même raisonnement montre qu'il existe deux rayons externes $R(\eta_j'^{\pm})$ de $f^{kp}(y_j)$ adjacents à $[f^{kp}(y_j), z]$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, et que $L'_j = R(\eta_j'^{-}) \cup R(\eta_j'^{+}) \cup \{f^{kp}(y_j)\}$ $j = 0, 1, \dots, k-1$ bornent un domaine B' avec $\overline{B'} \cap H = T'$. Reste à montrer $\overline{B} \subset B'$ et $\eta_j'^{\pm} = 2^{pk}\eta_j^{\pm}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$.

Montrons d'abord $\overline{B} \subset B'$. Le fait que $T \subset T'$, et que pour tout j , L_j soit disjoint de $\bigcup_{j=0}^{k-1} L'_j$ nous dit que pour tout j , B est dans la même composante connexe de $\mathbb{C} - L'_j$ que T . D'où $\overline{B} \subset B'$.

Comme f^{kp} est injective au voisinage de chaque y_j , elle envoie les deux rayons externes de y_j adjacents à $[y_j, z]$ à ceux de $f^{kp}(y_j)$ adjacents à $[f^{kp}(y_j), z]$. On a donc $\eta_j'^{\pm} = 2^{pk}\eta_j^{\pm}$ et $L'_j = f^{kp}(L_j)$.

Montrons $f^{kp}(B) = B'$. Comme $T' \cap \partial V' = \emptyset$, l'ensemble T est une composante connexe de $f^{-kp}(T')$. Comme $f^{-kp}(H) \cap \overline{B} = T$ et $f^{-kp}(T') \subset f^{-kp}(H)$, \overline{B} ne contient pas d'autre composante connexe de $f^{-kp}(T')$. Il est évident que la composante connexe de $f^{-kp}(B')$ qui contient z est contenue dans B . Si B n'est pas égale à celle-là, il existe une courbe $L \subset B$ telle que $f^{kp}(L)$ soit l'une des $f^{kp}(L_j)$. Mais ceci donne par conséquent deux préimages de $f^{kp}(y_j)$ dans \overline{B} par f^{kp} . Ils sont dans $f^{-kp}(H) \cap \overline{B}$. En contradiction avec $f^{-kp}(H) \cap \overline{B} = T$ et $f^{kp}|_T$ est injective. On a montré alors $f^{kp}(B) = B'$, et $f^{kp} : B \rightarrow B'$ est un homéomorphisme.

Posons $g : B' \rightarrow B$ l'application inverse de f^{kp} . Alors g contracte la métrique de Poincaré de B' . Pour tout point x de B' , la suite $g^n(x)$ tend donc vers z . En particulier il existe n tel que $g^n(x) \in B \cap V$.

On étend alors κ de la façon suivante : pour $x \in B'$ on pose $\kappa(x) = \rho^{nk} \kappa(g^n(x))$ avec un n suffisamment grand pour que $g^n(x) \in B \cap V$. Cette définition ne dépend pas du choix de n car pour $x \in B \cap V$, $\kappa(g(x)) = \kappa(x)/\rho^k$. Il est clair que κ est encore holomorphe. Reste à montrer qu'elle est injective. Si $\kappa(x) = \kappa(x')$, il existe un n tel que $g^n(x), g^n(x') \in B \cap V$. Ainsi $\kappa(g^n(x)) = \kappa(x)/\rho^{nk} = \kappa(g^n(x'))$. Comme κ est injective dans V , on a $g^n(x) = g^n(x')$. Mais g est elle-même injective, on conclut finalement $x = x'$.

Rappelons que $\kappa'(z) = 1$. Pour tout $x \in B'$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\kappa(g^n(x)) - \kappa(z)}{g^n(x) - z} = 1.$$

En remplaçant $\kappa(g^n(x))$ par $\kappa(x)/\rho^{nk}$ et $\kappa(z)$ par 0 on obtient (4), et la convergence est uniforme pour tout compact de B' , et par suite pour tout compact de \bar{B} . \square

II. Existence de x_0, x_1, \dots, x_{k-1} au voisinage de c_0 .

Voici la première étape pour construire les voisinages de c_0 .

LEMME 2.3. — Soit U un voisinage de c_0 dans \mathbb{C} , qui ne contient aucun point de branchement de $f^{-l}(H)$ distinct de c_0 . Supposons de plus

$$(5) \quad U \cap \text{Or}^+(c_0) = \emptyset \quad \text{et} \quad U \cap \bigcup_{q=1}^l f^q(U) = \emptyset.$$

Alors

1. Soit $f^{-l}(H)_U$ la composante connexe de $U \cap f^{-l}(H)$ qui contient c_0 . Alors $f^{-l}(H)_U$ est une étoile à k branches centrée en c_0 , où $k = \#\text{Arg}(\alpha)$.
2. Il existe un point $x_0 \in U \cap H$ périodique répulsif, ayant exactement deux arguments externes ξ^\pm , avec

$$(6) \quad [x_0, c_0] \cap \text{Or}(x_0) = \{x_0\}.$$

3. Sur chaque branche de $f^{-l}(H)_U$, il existe un point x_j ayant les deux propriétés suivantes :

- (a) x_j est une préimage de x_0 , il n'a que deux arguments externes.
- (b) pour ξ^\pm les deux arguments externes de x_0 et \mathcal{A} la composante connexe de $\mathbb{C} - R(\xi^-) \cup R(\xi^+) \cup \{x_0\}$ qui contient c_0 , on a $\text{Or}^+(x_j) \cap \mathcal{A} = \emptyset$, $j = 0, 1, \dots, k-1$.

Démonstration. — Le choix que $U - \{c_0\}$ ne contient aucun point de branchements de $f^{-l}(H)$ et le fait que $k = \#\{\text{brins de } f^{-l}(H) \text{ en } c_0\} = \#\{\text{brins de } H \text{ en } \alpha\}$ nous garantit bien que $f^{-l}(H)_U$ est une étoile à k branches.

Soient $\eta, \eta + 1/2$ deux arguments externes de 0, et $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Alors $\mathbb{T} - \{\eta, \eta + 1/2\}$ a deux composantes connexes. B. Wittner ([W]) a montré le résultat suivant : pour $\theta, \theta' \in \mathbb{T}$, $\gamma(\theta) = \gamma(\theta')$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $2^n\theta, 2^n\theta' \in \text{Arg}(0)$, soit $2^n\theta, 2^n\theta'$ sont dans la même composante connexe de $\mathbb{T} - \{\eta, \eta + 1/2\}$. Pour toute paire de points $z, z' \in J$, $z \neq z'$, il existe $\theta, \theta' \in \mathbb{T}$ tels que $z = \gamma(\theta)$ et $z' = \gamma(\theta')$. Il existe donc un m minimal tel que soit $f^m(z) = 0$, $f^m(z') \neq 0$ (ou vice versa), soit $f^m(z), f^m(z')$ sont dans des composantes différentes de $J - \{0\}$. Dans les deux cas, on a $0 \in [f^m(z), f^m(z')]$, et $f^m : [z, z'] \rightarrow [f^m(z), f^m(z')]$ est un homéomorphisme. Par conséquent, il existe $x \in [z, z']$ avec $f^m(x) = 0$.

Rappelons que c_0 est une extrémité de H . Donc $f^{-l}(H)_U$ a exactement une branche qui appartient à H . Prenons $z = c_0$, $z' \in H \cap f^{-l}(H)_U$ tel que $[z', c_0] \cap \text{Or}^+(c_0) = \emptyset$. Prenons $x \in [c_0, z']$ tel que $f^m(x) = 0$ pour m minimal. Il est évident que $x \neq c_0$, car c_0 n'est pas périodique. Comme $f(0) = c_0$, l'application

$$f^{m+1} : [c_0, x] \rightarrow [f^{m+1}(c_0), c_0]$$

est un homéomorphisme. Comme $[f^{m+1}(c_0), c_0] \supset [c_0, x]$, il existe un point $x_0 \in [c_0, x]$ fixé par f^{m+1} , donc périodique pour f . On a $x_0 \in [c_0, z'] \subset H \cap U$. Le point x_0 est répulsif du fait que tout point périodique de f est répulsif ([DH]). Il a exactement deux arguments externes car pour les points périodiques, le nombre d'arguments externes est égal au nombre de brins de H , et H a deux brins en x_0 . Quitte à choisir un autre point dans $\text{Or}(x_0) \cap [z', c_0]$, on peut supposer (6).

Soit $[c_0, z']$ une branche de $f^{-l}(H)_U$, avec $z' \in \partial U$. Appliquons le résultat de B. Wittner à $[c_0, z']$. Il existe alors $x \in [c_0, z']$ tel que $f^m(x) = 0$ et que $f^{m+1} : [x, c_0] \rightarrow [c_0, f^{m+1}(c_0)]$ soit un homéomorphisme. Comme

$c_0 \in U$, $f^{m+1}(c_0) \notin U$, $[c_0, f^{m+1}(c_0)] \subset H$, le segment $[c_0, f^{m+1}(c_0)]$ contient l'unique branche de H dans $f^{-l}(H)_U$. En particulier, $x_0 \in [c_0, f^{m+1}(c_0)]$. Il existe donc $x' \in [x, c_0]$ tel que $f^{m+1}(x') = x_0$. Ceci montre qu'il existe $q \geq 1$ tel que $f^{-q}(\{x_0\}) \cap [c_0, x] \neq \emptyset$. Soit q' l'entier minimal des q et prenons $x' \in [c_0, x]$ tel que $f^{q'}(x') = x_0$. Le point x' n'a que deux arguments externes parce que x_0 n'en a que deux.

Il nous reste à montrer $\text{Or}^+(x') \cap \mathcal{A} = \emptyset$, et $\text{Or}^+(x_0) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Le fait que c_0 est une extrémité de H nous dit que $\mathcal{A} \cap H = [x_0, c_0] - \{x_0\}$. Comme $\text{Or}(x_0) \subset H$, la relation (6) implique $\text{Or}(x_0) \cap \mathcal{A} = \text{Or}^+(x_0) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. On montre maintenant $f^q(x') \notin \mathcal{A}$, $q = 1, 2, \dots, q' - 1$. S'il existe $q < q'$ tel que $f^q(x') \in \mathcal{A}$, alors $f^q([c_0, x']) = [f^q(c_0), f^q(x')]$ intersecte $\partial\mathcal{A}$. C'est-à-dire $x_0 \in [f^q(c_0), f^q(x')] \subset [f^q(c_0), f^q(x)]$. Ceci contredit le choix que q' soit minimal. \square

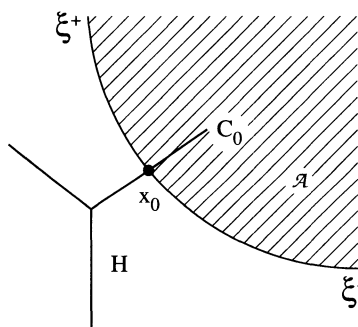
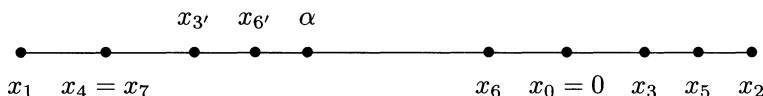


Figure 2 : \mathcal{A}

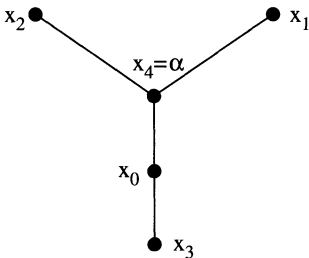
Remarque. — L'existence de x_0 ne résulte pas du résultat de Fatou : les points périodiques répulsifs sont denses dans J , car ces points ne sont malheureusement pas toujours denses dans H . Voici un exemple, avec une valeur de c_0 réelle, où $f(x_j) = x_{j+1}$, $f(\alpha) = \alpha$, $f(x_{3'}) = x_3$ et $f(x_{6'}) = x_6$. De plus

$$f([x_{3'}, x_{6'}]) = [x_3, x_6] \subset [x_1, x_4] \cup [x_3, x_6] \cup [x_5, x_2]$$

et $f([x_1, x_4] \cup [x_3, x_6] \cup [x_5, x_2]) = [x_1, x_4] \cup [x_3, x_6] \cup [x_5, x_2]$. Il n'y a donc pas de point périodique dans $[x_{3'}, x_{6'}]$.



On verra dans la suite de la démonstration qu’il suffit de choisir x_0 comme un point prépériodique répulsif, non précritique (i.e. $0 \notin \text{Or}(x_0)$). Le point fixe α autre que $\beta = \gamma(0)$ est le point périodique répulsif le plus remarquable dans H . Mais on ne peut pas essayer de choisir x_0 comme une préimage de α . Par exemple, dans l’arbre ci-dessous, toute préimage de α dans H est soit une extrémité de H , soit précritique. \square



III. Existence de $x_{j,n}$, A_n .

Les points x_0, x_1, \dots, x_{k-1} nous permettent de construire une suite de voisinages de c_0 , avec un comportement asymptotique bien contrôlé.

Soit $V = \kappa^{-1}(D_{s/|\rho|^k})$ un voisinage de α vérifiant les conditions du lemme 2.2, c’est-à-dire $0 < s \leq s_0$, $\kappa^{-1}(D_{s_0})$ est inclus dans un domaine de linéarisation de f^{kp} en α , et $\kappa^{-1}(D_{s_0}) - \{\alpha\}$ ne contient aucun point de branchement de H . Soit U le voisinage simplement connexe de c_0 avec $f^l(U) = V$. Choisissons s assez petit pour que $f^l|_U$ soit injective, et que

$$(7) \quad U \cap \text{Or}^+(c_0) = \emptyset, \text{ et } U \cap \bigcup_{i=1}^{l+p-1} f^i(U) = \emptyset.$$

Alors U vérifie les conditions du lemme 2.3. Plus précisément $U - \{c_0\}$ ne contient aucun point de branchement de $f^{-l}(H)$, et U vérifie (5) (qui est un cas particulier de (7)). Posons $F = f^l|_U$. Soient x_0, x_1, \dots, x_{k-1} les points obtenus par le lemme 2.3. Posons $y_j = F(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, k-1$.

Alors $T = \bigcup_{j=0}^{k-1} [\alpha, y_j]$ est une sous étoile fermée de $H_V = f^{-kp}(H)_V$ à k branches.

Pour B, B' les régions obtenues dans le lemme 2.2, et g l’application inverse de $f^{kp} : B \rightarrow B'$, et pour $n \in \mathbb{N}$, posons successivement $B_0 = B$, $B_n = g(B_{n-1})$, $y_{0,j} = y_j$, $y_{n,j} = g(y_{n-1,j})$, $L_{0,j} = L_j$, $L_{n,j} =$

$g(L_{n-1,j})$. Alors $\overline{B}_n \subset B_{n-1}$, $\partial B_n = \bigcup_{j=0}^{k-1} L_{j,n}$, $f^{nkp} : B_n \rightarrow B_0$ est un homéomorphisme, et

$$f^{-nkp}(H) \cap \overline{B}_n = H \cap \overline{B}_n = \bigcup_{j=0}^{k-1} [y_{j,n}, \alpha] \subset V.$$

LEMME 2.4. — Notons A_0 la région bornée par les x_j et leurs rayons externes. Alors $f^l(A_0) = B_0$ et $f^l : A_0 \rightarrow B_0$ est un homéomorphisme.

Démonstration. — D'abord A_0 contient la composante connexe de $f^{-l}(B_0)$ qui contient c_0 . Mais A_0 coïncide avec cette composante connexe pour la même raison que $f^{kp}(B) = B'$, dans la démonstration du lemme 2.2. \square

DÉFINITION. — Notons $F = f^l : A_0 \rightarrow B_0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = F^{-1}(B_n)$, $x_{j,n} = F^{-1}(y_{j,n})$, $S_{j,n} = F^{-1}(L_{j,n})$, $j = 0, 1, \dots, k-1$.

COROLLAIRE 2.5. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{A}_n \subset A_{n-1}$, $\partial A_n = \bigcup_{j=0}^{k-1} S_{j,n}$, les deux applications $f^l : A_n \rightarrow B_n$, $f^{l+nkp} : A_n \rightarrow B_0$ sont bijectives, et

$$f^{-(nkp+l)}(H) \cap \overline{A}_n = f^{-l}(H) \cap \overline{A}_n = \bigcup_{j=0}^{k-1} [x_{j,n}, c_0], \text{ et } H \cap \overline{A}_n = [x_{0,n}, c_0].$$

On a $S_{j,n} = R(\delta_{j,n}^-) \cup R(\delta_{j,n}^+) \cup \{x_{j,n}\}$, avec $\delta_{j,n}^\pm$ les deux arguments externes de $x_{j,n}$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$). On suppose $\delta_{j,n}^- \leq \delta_{j,n}^+$.

LEMME 2.6. — Soit \mathcal{A} le domaine défini comme dans le lemme 2.3 (figure 2). On a $\text{Or}^+(c_0) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $1 \leq q \leq l + nkp$, $f^q(\overline{A}_n) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $\text{Or}^+(x_{j,n}) \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

Démonstration. — $\text{Or}^+(c_0) \subset H$, $\mathcal{A} \cap H = [x_0, c_0] - \{x_0\} \subset U$. D'après (7), $\text{Or}^+(c_0) \cap U = \emptyset$. Donc $\text{Or}^+(c_0) \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq l + nkp$. On remarque d'abord

$$f^q(\overline{A}_n) \cap H = f^q(f^{-q}(H) \cap \overline{A}_n) = \bigcup_{j=0}^{k-1} [f^q(x_{j,n}), f^q(c_0)] \subset \bigcup_{i=1}^{l+p-1} f^i(U).$$

Si $f^q(\overline{A}_n) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, alors $f^q(\overline{A}_n) \cap \partial\mathcal{A} \neq \emptyset$ car $f^q(c_0) \notin \mathcal{A}$. Comme les rayons externes ne se coupent pas, on a $\partial\mathcal{A} \subset f^q(\overline{A}_n)$, et $x_0 \in f^q(\overline{A}_n) \cap H \subset$

$\bigcup_{i=1}^{l+p-1} f^i(U)$. Ceci contredit la condition (7).

Quant à $\text{Or}^+(x_{j,n})$, pour $1 \leq q \leq l + nkp$, on a $f^q(x_{j,n}) \in f^q(\overline{A}_n)$ qui est disjoint de \mathcal{A} . Pour $q > l + nkp$,

$$f^q(x_{j,n}) = f^{q-l-nkp}(y_j) \in \text{Or}(y_j) = \text{Or}(f^l(x_j)) \subset \text{Or}^+(x_j).$$

Et enfin $\text{Or}^+(x_j) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ par le lemme 2.3. \square

IV. Définition et paramétrage de Γ_n . Invariance asymptotique.

Notons h la fonction de Green de $K = K_{c_0}$. On a $h|_{\mathbb{C}-K} = \log|\psi|$ et $h|_K = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\Omega_n = \{z \in \overline{A}_n | h(z) \leq 1/2^{nkp}\}$, et $\Gamma_n = \partial\Omega_n$. On remarque que $\Omega_n \subset \mathcal{A}$, il est simplement connexe, Γ_n est une courbe de Jordan formée d'arcs de rayons externes et d'arcs d'équipotentiellles (figure 3).

Le fait que $[c_0, \gamma(0)] \cap \overline{A}_n = [c_0, x_{0,n}]$ et $\partial A_n = \bigcup_{j=0}^{k-1} S_{j,n}$ nous dit que pour tout $1 \leq j \leq k-1$, on a $0 < \delta_{0,n}^- < \delta_{j,n}^- < \delta_{j,n}^+ < \delta_{0,n}^+ < 1$, et pour $1 \leq j, j' \leq k-1$, $j \neq j'$, $[\delta_{j,n}^-, \delta_{j,n}^+] \cap [\delta_{j',n}^-, \delta_{j',n}^+] = \emptyset$ (figure 3). Posons

$$(8) \quad \Delta_n = \{\delta_{0,n}^\pm, \delta_{1,n}^\pm, \dots, \delta_{k-1,n}^\pm\}, \Theta_n = [0, 1] - [0, \delta_{0,n}^- \cup]\delta_{0,n}^+, 1] \cup \bigcup_{j=1}^{k-1}]\delta_{j,n}^-, \delta_{j,n}^+[,$$

on a

$$(9) \quad \Delta_n = \bigcup_{j=0}^{k-1} \text{Arg}(x_{j,n}),$$

$$(9) \quad \partial A_n = \bigcup_{\eta \in \Delta_n} R(\eta) \cup \{\gamma(\eta)\},$$

$$(10) \quad R(\eta) \subset \overline{A}_n \iff \eta \in \Theta_n,$$

sinon $R(\eta) \cap \overline{A}_n = \emptyset$.

Posons $\mathcal{D}'_n = \{e^{r+2i\pi\eta} \mid 0 \leq r \leq 1/2^{nkp}, \eta \in \Delta_n\} / \sim$, où \sim est la relation d'équivalence définie par $e^{2i\pi\delta_{j,n}^-} \sim e^{2i\pi\delta_{j,n}^+}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$. Posons $\mathcal{D}''_n = \{e^{r+2i\pi\eta} \mid r = 1/2^{nkp}, \eta \in \Theta_n\}$. Et posons enfin $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}'_n \cup \mathcal{D}''_n$. Alors $\mathcal{D}_n = \{w \in \mathbb{C} \mid \varphi(w) \in \Gamma_n\} / \sim$. La représentation conforme

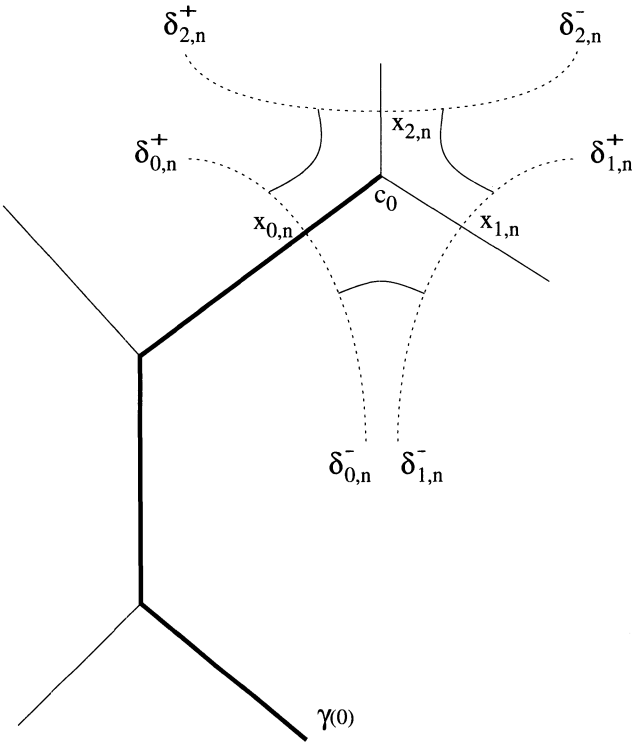


Figure 3 : Γ_n , $[c_0, \gamma(0)]$

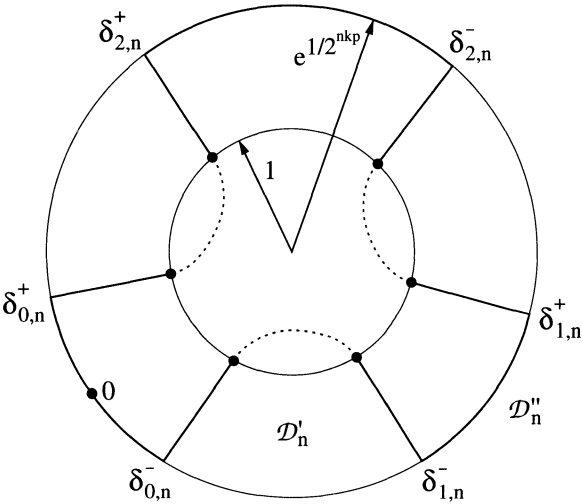


Figure 4 : \mathcal{D}_n

$\varphi : \mathbb{C} - \overline{D} \rightarrow \mathbb{C} - K$ induit un homéomorphisme $\mathcal{D}_n \rightarrow \Gamma_n$, que nous notons, par abus de notation, φ . Ainsi $\varphi(\mathcal{D}_n) = \Gamma_n$, avec $\varphi(\mathcal{D}'_n)$ la partie de rayons externes et $\varphi(\mathcal{D}''_n)$ la partie d'équipotentielle.

LEMME 2.7. — On a

$$g^n \circ F(\Gamma_0) = F(\Gamma_n),$$

et $F^{-1} \circ g^{-n} \circ F = F^{-1} \circ f^{l+nkp} : \Gamma_n \rightarrow \Gamma_0$ est un homéomorphisme.

Démonstration. — C'est évident pour la partie $\varphi(\mathcal{D}'_n)$. Puisque ψ conjugue f à $z \rightarrow z^2$, $F = f^l$, g est une branche de $(f^{-1})^{kp}$, et $g^n(\overline{B}_0) = \overline{B}_n$, on a $F \circ \varphi(\mathcal{D}''_n) = \{z \in \overline{B}_n | h(z) = 2^l/2^{nkp}\}$, $F \circ \varphi(\mathcal{D}''_0) = \{z \in \overline{B}_0 | h(z) = 2^l\}$ et $g^n \circ F \circ \varphi(\mathcal{D}''_0) = \{z \in \overline{B}_n | h(z) = 2^l/2^{nkp}\}$. \square

On peut extraire de ce lemme des informations combinatoires : Soit $\tau : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, $\theta \mapsto 2\theta$.

LEMME 2.8. — Les deux applications $\tau^l : \Theta_n \rightarrow \tau^l(\Theta_n)$ et $\tau^{nkp} : \tau^l(\Theta_n) \rightarrow \tau^l(\Theta_0)$ sont bijectives.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{A}_n \cap \overline{B}_n = \emptyset$, $R(\eta) \subset \overline{A}_n$ si et seulement si $\eta \in \Theta_n$, $R(\eta) \subset \overline{B}_n$ si et seulement si $\eta \in \tau^l(\Theta_n)$. Sinon $R(\eta) \cap (\overline{A}_n \cup \overline{B}_n) = \emptyset$.

Démonstration. — Rappelons que $\varphi : \mathbb{C} - \overline{D} \rightarrow \mathbb{C} - K$ est une application conforme qui vérifie (2), avec $\tilde{f} : z \mapsto z^2$. Plus généralement, on a

$$(12) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f^n \circ \varphi = \varphi \circ \tilde{f}^n.$$

Notons $\mu_{n,m} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, $\eta \mapsto e^{2^m/2^{nkp} + 2i\pi\eta}$. Analysons le diagramme suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{ccccc} \Theta_n & \xrightarrow{\mu_{n,0}} & \mathcal{D}''_n & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(\mathcal{D}''_n) \\ \tau^l \downarrow & \mathbf{1} & \downarrow \tilde{f}^l & \mathbf{2} & \downarrow F \\ \tau^l(\Theta_n) & \xrightarrow{\mu_{n,l}} & \tilde{f}^l(\mathcal{D}''_n) & \xrightarrow{\varphi} & F(\varphi(\mathcal{D}''_n)) \\ \tau^{nkp} \downarrow & \mathbf{3} & \downarrow \tilde{f}^{nkp} & \mathbf{4} & \downarrow f^{nkp} \\ \tau^l(\Theta_0) & \xrightarrow{\mu_{n,l+nkp}} & \tilde{f}^l(\mathcal{D}''_0) & \xrightarrow{\varphi} & F(\varphi(\mathcal{D}''_0)) \end{array}.$$

On prétend que toutes les applications dans ce diagramme sont bijectives, et que tous les sous-diagrammes commutent.

Remarquons que $\varphi(\mathcal{D}''_n) \subset \overline{A}_n$. D'après le corollaire 2.5, $f^{nkp+l}|_{\varphi(\mathcal{D}''_n)} = f^{nkp} \circ F|_{\varphi(\mathcal{D}''_n)}$ est injective. Comme f envoie les rayons externes aux rayons

externes, les équipotentiels aux équipotentiels, on a $f^{nkp}(F(\varphi(\mathcal{D}_n''))) = F(\varphi(\mathcal{D}_0''))$ (11).

D'après (12), $F \circ \varphi(\mathcal{D}_n'') = \varphi \circ \tilde{f}^l(\mathcal{D}_n'')$, donc le diagramme **2** commute pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme φ, F sont bijectives dans **2**, \tilde{f}^l l'est aussi. Quand au diagramme **4**, $f^{nkp}(F(\varphi(\mathcal{D}_n''))) = F(\varphi(\mathcal{D}_0''))$ est cité dans le paragraphe ci-dessus, $\varphi^{-1}(F(\varphi(\mathcal{D}_0''))) = f^l(\mathcal{D}_0'')$ est exactement le diagramme **2** appliqué à $n = 0$. En vertu de (12), $\varphi \circ \tilde{f}^{nkp}(\tilde{f}^l(\mathcal{D}_n'')) = f^{nkp} \circ \varphi(\tilde{f}^l(\mathcal{D}_n'')) = F(\varphi(\mathcal{D}_0''))$, le diagramme **4** est bien défini, commutatif. De plus \tilde{f}^{nkp} est bijective puisque f^{nkp} l'est.

Pour le diagramme **1**, par définition de $\mu_{n,m}$, $\mu_{n,0}(\Theta_n) = \mathcal{D}_n''$ et $\tilde{f}^l \circ \mu_{n,0}(\Theta_n) = \mu_{n,l} \circ \tau^l(\Theta_n)$. Comme $\tilde{f}^l, \mu_{n,l}$ sont bijectives, τ^l est bijective. Par suite, le diagramme **1** est bien défini, commutatif. Quand au diagramme **3**, il est clair que $\mu_{n,l+nkp} \circ \tau^{nkp}(\tau^l(\Theta_n)) = \tilde{f}^{nkp} \circ \mu_{n,l}(\tau^l(\Theta_n)) = \tilde{f}^l(\mathcal{D}_0'')$. Comme $\tilde{f}^l(\mathcal{D}_0'') = \{e^{2^l+2i\pi \cdot 2^l\eta} | \eta \in \Theta_0\}$, on a $\mu_{n,l+nkp}^{-1}(\tilde{f}^l(\mathcal{D}_0'')) = \{2^l\eta | \eta \in \Theta_0\} = \tau^l(\Theta_0)$. Donc le diagramme **3** est bien défini, commutatif, et chacune des quatre applications est bijective.

$\overline{A}_n \cap \overline{B}_n = \emptyset$ est évident. L'équivalence entre $R(\eta) \subset \overline{A}_n$ et $\eta \in \Theta_n$ est une conséquence de la formule (10).

Le fait $R(\eta) \subset \overline{B}_n$ est équivalent à $\varphi(e^{2^l/2^{nkp}+2i\pi\eta}) \in \overline{B}_n$, qui est équivalent à $\varphi \circ \mu_{n,l}(\eta) \in F(\varphi(\mathcal{D}_n''))$. Et ce dernier est équivalent à $\eta \in \tau^l(\Theta_n)$. \square

On va paramétrer maintenant les Γ_n . Soit $\sigma_0 : S^1 \rightarrow \Gamma_0$ un homéomorphisme quelconque. Alors (11) induit un homéomorphisme $\sigma_n = F^{-1} \circ g^n \circ F \circ \sigma_0$ de S^1 à Γ_n :

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \xrightarrow{\sigma_0} & \Gamma_0 & \longrightarrow & \Gamma_n \\ & & F \downarrow & & \uparrow F^{-1} \\ & & F(\Gamma_0) & \xrightarrow{g^n} & F(\Gamma_n). \end{array}$$

On prétend que $\sigma_n(t)$ est uniformément asymptotiquement invariant. Plus précisément,

LEMME 2.9. — Pour tout $t \in S^1$,

$$(13) \quad f^{l+nkp}(\sigma_n(t)) = f^l(\sigma_0(t)).$$

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{nk}(\sigma_n(t) - c_0) = \frac{1}{F'(c_0)} \kappa \circ F \circ \sigma_0(t)$$

uniformément pour tout $t \in S^1$.

Démonstration. — (13) résulte de la définition de $\sigma_n(t)$. De plus,

$$\rho^{nk}(\sigma_n(t) - c_0) = \rho^{nk}(F^{-1} \circ g^n(F \circ \sigma_0(t)) - F^{-1}(\alpha)).$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{nk}(\sigma_n(t) - c_0) = \frac{1}{F'(c_0)} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{nk}(g^n(F \circ \sigma_0(t)) - \alpha) = \frac{1}{F'(c_0)} \kappa(F \circ \sigma_0(t)),$$

uniformément pour tout $t \in S^1$, où la dernière égalité est une conséquence de (4). \square

2.2. Plan des paramètres. Définition du voisinage \mathcal{C} de c_0 .

Supposons toujours que c_0 est un point de Misiurewicz.

L'existence du point x_0 pour f_{c_0} (lemme 2.3) nous permet de trouver un certain voisinage \mathcal{C} de c_0 dans le plan des paramètres tel que, pour tout $c \in \mathcal{C}$, le polynôme f_c possède les points $x_{j,n}(c)$ analogues aux points $x_{j,n}$ de f_{c_0} et les courbes $S_{j,n}(c)$ analogues aux courbes $S_{j,n}$ de f_{c_0} . Dans cette section on va construire \mathcal{C} . Et on ne montre les propriétés de f_c pour $c \in \mathcal{C}$ que dans la section suivante.

Rappelons que ψ_c est l'application conforme qui conjugue f_c à $z \mapsto z^2$ au voisinage de ∞ . En vertu d'un résultat de Douady et Hubbard ([DH]), si $c \notin M$, $\psi_c(c)$ est bien défini, l'application $\Psi_M : c \mapsto \psi_c(c)$ réalise une représentation conforme de $\mathbb{C} - M$ sur $\mathbb{C} - \overline{D}$. On appelle $R_M(\theta) = \Psi_M^{-1} \{ e^{r+2i\pi\theta} \mid r > 0 \}$ le *rayon externe* d'argument θ de M . Si $R_M(\theta)$ aboutit, on note $\gamma_M(\theta) \in \partial M$ le point d'aboutissement. On pose

$$\text{Arg}_M(z) = \{ \theta \in \mathbb{T} \mid \gamma_M(\theta) = z \}.$$

LEMME 2.10 ([DH]). — *Pour tout c point de Misiurewicz, $\text{Arg}_c(c) = \text{Arg}_M(c) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.*

L'idée principale de la construction de $x_{j,n}(c)$, $\Gamma_n(c)$, $C\Gamma_n$ dans cette section ainsi que dans les sections suivantes est de déduire des *informations combinatoires* sur \mathcal{D}_n , Δ_n et Θ_n , en utilisant l'ordre cyclique des rayons externes près de l'infini, les propriétés dynamiques de Γ_n par f_{c_0} et la conjugaison $\psi = \psi_{c_0}$, ainsi que son inverse φ . Ensuite en combinant ces informations combinatoires et la conjugaison ψ_c et l'application Ψ_M on obtient des propriétés ressemblantes pour la dynamique du polynôme $f_c : z \mapsto z^2 + c$, pour $c \in \mathcal{C}$, et pour le plan des paramètres.

La clef du passage du plan dynamique au plan des paramètres est le lemme suivant, en vertu d'un résultat de P. Lavaurs :

LEMME 2.11 ([L2]). — Soit $x \in H_{c_0}$ périodique répulsif, non-extrémité, avec $[x, c_0] \cap \text{Or}(x) = \{x\}$. Alors pour η, η' les deux arguments externes de x adjacents à $[x, c_0]$, on a $\gamma_M(\eta) = \gamma_M(\eta')$. En particulier, pour x_0 choisi dans le lemme 2.3 et ξ^\pm les deux arguments externes de x_0 , on a $\gamma_M(\xi^-) = \gamma_M(\xi^+)$.

DÉFINITION. — On note \mathcal{C} la composante connexe de $\mathbb{C} - R_M(\xi^-) \cup R_M(\xi^+) \cup \{\gamma_M(\xi^-)\}$ contenant c_0 .

Le résultat suivant est évident, en vertu de l'ordre cyclique des rayons à l'infini :

LEMME 2.12. — Soit $\eta \in \mathbb{T}$. Alors $R_M(\eta) \subset \mathcal{C}$ si $\xi^- < \eta < \xi^+$, et $R_M(\eta) \cap \mathcal{C} = \emptyset$ sinon.

2.3. Dynamique de f_c pour $c \in \mathcal{C}$. Existence de $x_{j,n}(c)$, $\nu(c)$, $S_{j,n}(c)$.

On a besoin d'abord d'un résultat préliminaire :

THÉORÈME 2.13 (Douady-Hubbard et P. Lavaurs ([DH],[L1])). — Pour $\theta \in \mathbb{T}$ rationnel, le rayon $R_M(\theta)$ aboutit. Pour θ rationnel pour tout c dans

$$(15) \quad E(\theta) = \mathbb{C} - \bigcup_{n \geq 1} R_M(2^n \theta) \cup \{\gamma_M(2^n \theta)\}$$

$R_c(\theta)$ aboutit, avec $\gamma_c(\theta)$ prépériodique répulsif, non précritique (i.e. $0 \notin \text{Or}_c^+(\gamma_c(\theta))$), et l'application $(c, s) \mapsto \varphi_c(e^{s+2i\pi\theta})$ est continue dans $E(\theta) \times [0, \infty)$, holomorphe en c . En particulier, $c \mapsto \gamma_c(\theta)$ est holomorphe dans $E(\theta)$.

Posons $\Delta' = \text{Arg}_{c_0}(c_0)$. Les ensembles Δ_n , Θ_n sont définis comme dans (8).

LEMME 2.14. — Soit $c \in \mathcal{C}$. Le rayon $R_c(\eta)$ aboutit en un point $\nu(c)$ pour tous $\eta \in \Delta'$. L'application $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $c \mapsto \nu(c)$ est holomorphe.

Soit $c \in \mathcal{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, les deux rayons $R_c(\delta_{j,n}^-)$, $R_c(\delta_{j,n}^+)$ (rappelons que $\delta_{j,n}^\pm \in \Delta_n$) aboutissent au même point, noté $x_{j,n}(c)$. C'est un point prépériodique répulsif. Pour toute paire (j, n) ,

on a $\nu(c) \neq x_{j,n}(c)$. Si $(j, n) \neq (j', n')$, alors $x_{j,n}(c) \neq x_{j',n'}(c)$. Pour tout $\eta \in \Delta_n$, l'application $(c, s) \mapsto \varphi_c(e^{s+2i\pi\eta})$ est continue dans $\mathcal{C} \times [0, \infty)$, et est holomorphe en c . Par conséquent, $(c, z) \mapsto \varphi_c(z)$ est continue dans $\mathcal{C} \times \mathcal{D}'_n$, holomorphe en c .

On a de plus,

$$(16) \quad f_c^{l+p}(\nu(c)) = f_c^l(\nu(c)).$$

L'ensemble $S_{j,n}(c) = R_c(\delta_{j,n}^-) \cup R_c(\delta_{j,n}^+) \cup \{x_{j,n}(c)\}$ est un arc connexe. Et $S_{j,n}(c)$ et $S_{j',n'}(c)$ sont disjoints si $(j, n) \neq (j', n')$. Pour $A_n(c)$ la composante connexe de $\mathbb{C} - \bigcup_{j=0}^{k-1} S_{j,n}(c)$ qui contient $\nu(c)$, on a

$$(17) \quad \partial A_n(c) = \bigcup_{j=0}^{k-1} S_{j,n}(c) = \bigcup_{\eta \in \Delta_n} R_c(\eta) \cup \{\gamma_c(\eta)\}.$$

(Comparer avec la formule (9).)

Démonstration. — Soient $c \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que η est dans

$$(18) \quad \Delta' \cup \Delta_n = \text{Arg}_{c_0}(c_0) \cup \bigcup_{j=0}^{k-1} \text{Arg}_{c_0}(x_{j,n}).$$

On va montrer d'abord que $R_c(\eta)$ aboutit, et $\gamma_c(\eta)$ dépend de façon holomorphe de c . On montre ensuite que pour $\eta, \eta' \in \Delta' \cup \Delta_n$, $\gamma_c(\eta) = \gamma_c(\eta')$ si et seulement si $\gamma_{c_0}(\eta) = \gamma_{c_0}(\eta')$.

Soit $\eta \in \Delta' \cup \Delta_n$. Alors η est rationnel car $\gamma_{c_0}(\eta)$ est prépériodique. Pour que $R_c(\eta)$ aboutisse pour tout $c \in \mathcal{C}$, il suffit que \mathcal{C} soit contenu dans $E(\eta)$ ((15)). En vertu du lemme 2.6,

$$\text{Or}_{c_0}^+(c_0) \cap \mathcal{A} = \emptyset, \quad \text{Or}_{c_0}^+(x_{j,n}) \cap \mathcal{A} = \emptyset, \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Par conséquent, pour tout $q \geq 1$, on a $R_{c_0}(2^q\eta) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Combinatoirement,

$$(19) \quad 2^q\eta \cap]\xi^-, \xi^+[= \emptyset, \quad q \geq 1.$$

Dans le plan des paramètres, $R_M(2^q\eta) \cap \mathcal{C} = \emptyset$, $q \geq 1$ (lemme 2.12). De plus $R_M(2^q\eta)$ aboutit car $2^q\eta$ est rationnel (théorème 2.13). Comme \mathcal{C} est ouvert, $\gamma_M(2^q\eta) \notin \mathcal{C}$, $q \geq 1$. Donc $\mathcal{C} \subset E(\eta)$. D'après le théorème 2.13, pour tout $c \in \mathcal{C}$, $R_c(\eta)$ aboutit à $\gamma_c(\eta)$, avec $\gamma_c(\eta)$ prépériodique répulsif, non

précritique. Et $c \mapsto \gamma_c(\eta)$ est holomorphe dans \mathcal{C} , ainsi que $c \mapsto \varphi_c(e^{s+2i\pi\eta})$, pour tout $s \geq 0$.

Existence de $x_{0,0}(c)$. Rappelons que $\xi^- = \delta_{0,0}^-$, $\xi^+ = \delta_{0,0}^+$ sont les deux arguments externes de $x_0 = x_{0,0}$ adjacents à $[x_0, c_0]$. L'ensemble $\{c \in \mathcal{C} \mid \gamma_c(\xi^-) = \gamma_c(\xi^+)\}$ est non vide (il contient c_0), ouvert ($\gamma_c(\xi^\pm)$ sont périodiques répulsifs, donc la relation $\gamma_c(\xi^-) = \gamma_c(\xi^+)$ est stable par rapport à c d'après le théorème des fonctions implicites), et fermé ($c \mapsto \gamma_c(\eta)$ est continue en c). Il est donc tout \mathcal{C} (l'ensemble \mathcal{C} est connexe).

Posons $x_{0,0}(c) = \gamma_c(\xi^-) = \gamma_c(\xi^+)$. Pour $\eta, \eta' \in \Delta' \cup \Delta_n$, l'ensemble $\{c \in \mathcal{C} \mid \gamma_c(\eta) = \gamma_c(\eta')\}$ est ouvert ($\gamma_c(\eta)$ est pré périodique, répulsif et non précritique), fermé ($c \mapsto \gamma_c(\eta)$ est continue). Il est non vide si et seulement si $\gamma_{c_0}(\eta) = \gamma_{c_0}(\eta')$. Donc pour tout $c \in \mathcal{C}$, $\gamma_c(\eta) = \gamma_c(\eta')$ si et seulement si $\gamma_{c_0}(\eta) = \gamma_{c_0}(\eta')$. Posons $\nu(c) = \gamma_c(\eta)$ avec $\eta \in \Delta'$, et $x_{j,n}(c) = \gamma_c(\delta_{j,n}^-) = \gamma_c(\delta_{j,n}^+)$, $j = 0, 1, \dots, k-1$. On a donc $\nu(c) \neq x_{j,n}(c)$ pour tout (j, n) , et $x_{j,n}(c) \neq x_{j',n'}(c)$ si $(j, n) \neq (j', n')$.

Pour $\eta \in \Delta_n$, comme $\mathcal{C} \subset E(\eta)$, d'après le théorème 2.13, l'application $(c, s) \mapsto \varphi_c(e^{s+2i\pi\eta})$ est continue dans $\mathcal{C} \times [0, \infty)$, holomorphe en c . Par la définition de \mathcal{D}'_n , et le fait que $\varphi_c(e^{2i\pi\delta_{j,n}^-}) = \varphi_c(e^{2i\pi\delta_{j,n}^+})$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, on conclut finalement que $(c, z) \mapsto \varphi_c(z)$ est continue dans $\mathcal{C} \times \mathcal{D}'_n$, holomorphe en c .

Pour montrer (16), posons $\alpha(c) = f_c^l(\nu(c))$. On examine la dynamique de $\eta \in \Delta' = \text{Arg}_{c_0}(c_0) \subset \text{Arg}_c(\nu(c))$ par $\tau : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \eta \mapsto 2\eta$. Le fait que $\eta \in \text{Arg}_{c_0}(c_0)$ nous donne $2^l\eta \in \text{Arg}_{c_0}(f_{c_0}^l(c_0)) = \text{Arg}_{c_0}(\alpha(c_0))$. Comme $f_{c_0}^p(\alpha(c_0)) = \alpha(c_0)$, on a $2^{p+l}\eta \in \text{Arg}_{c_0}(\alpha(c_0))$. Comme $\text{Arg}_{c_0}(\alpha(c_0)) = \tau^l(\text{Arg}_{c_0}(c_0))$, il existe $\eta' \in \text{Arg}_{c_0}(c_0) \subset \text{Arg}_c(\nu(c))$ tel que $2^l\eta' = 2^{p+l}\eta$. Ainsi $\gamma_c(\eta) = \gamma_c(\eta')$, et

$$\alpha(c) = \gamma_c(2^l\eta) = \gamma_c(2^l\eta') = \gamma_c(2^p \cdot 2^l\eta) = f_c^p(\gamma_c(2^l\eta)) = f_c^p(\alpha(c)).$$

D'où (16).

Les courbes $S_{j,n}(c) = R_c(\delta_{j,n}^-) \cup R_c(\delta_{j,n}^+) \cup \{x_{j,n}(c)\}$ sont disjointes si $(j, n) \neq (j', n')$, et $A_n(c)$ vérifie bien (17). \square

2.4. Plan des paramètres.

Définition du voisinage $C\Omega_0 \subset \mathcal{C}$ de c_0 .

Construction de $c_{j,n}$, CT_n .

Les points $x_{j,n}(c)$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, $n \in \mathbb{N}$ pour chaque $c \in \mathcal{C}$ nous permettent de définir une suite de voisinages $C\Omega_n$ de c_0 dans le plan des

paramètres. On montrera dans la section 2.6 que $\text{diam}(C\Omega_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

LEMME 2.15. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, les rayons externes du plan des paramètres $R_M(\delta_{j,n}^-)$, $R_M(\delta_{j,n}^+)$ (rappelons que $\delta_{j,n}^\pm \in \Delta_n$) aboutissent au même point, noté $c_{j,n}$. On a $c_{j,n} = x_{j,n}(c_{j,n})$. Si $(j, n) \neq (j', n')$, $c_{j,n} \neq c_{j',n'}$. Par suite, Ψ_M^{-1} induit une application injective sur \mathcal{D}'_n .

Pour CA_n la composante connexe de $\mathbb{C} - \bigcup_{j=0}^{k-1} R_M(\delta_{j,n}^-) \cup R_M(\delta_{j,n}^+) \cup \{c_{j,n}\}$ qui contient c_0 , on a

$$(20) \quad \partial CA_n = \bigcup_{\eta \in \Delta_n} R_M(\eta) \cup \{\gamma_M(\eta)\}.$$

(Comparer avec les formules (9) et (17).)

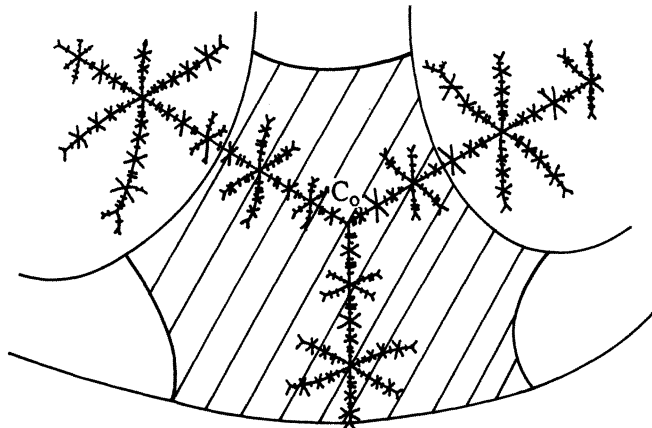
Démonstration. — Le cas $n = 0, j = 0$ est déjà traité dans le lemme 2.11. Dans les autres cas, les rayons $R_M(\delta_{j,n}^\pm)$ aboutissent puisque les arguments sont rationnels (théorème 2.13). Posons $c_{j,n} = \gamma_M(\delta_{j,n}^-)$. Alors $c_{j,n} \in \mathcal{C}$. C'est un point de Misiurewicz car $\delta_{j,n}^-$ est à dénominateur pair (cf. Douady et Hubbard, [DH]). Ainsi $\text{Arg}_M(c_{j,n}) \cap \mathbb{Q} = \text{Arg}_{c_{j,n}}(c_{j,n})$ (lemme 2.10). En particulier, $\delta_{j,n}^- \in \text{Arg}_{c_{j,n}}(c_{j,n})$, i.e. $\gamma_{c_{j,n}}(\delta_{j,n}^-) = c_{j,n}$. Or le fait que $c_{j,n} \in \mathcal{C}$ implique $\gamma_{c_{j,n}}(\delta_{j,n}^\pm) = x_{j,n}(c_{j,n})$ (lemme 2.14). On en déduit que $c_{j,n} = x_{j,n}(c_{j,n})$. Ainsi $\delta_{j,n}^+ \in \text{Arg}_{c_{j,n}}(c_{j,n}) \subset \text{Arg}_M(c_{j,n})$. Et finalement, $\gamma_M(\delta_{j,n}^+) = c_{j,n} = \gamma_M(\delta_{j,n}^-)$.

Si $c_{j,n} = c_{j',n'}$, on a $x_{j,n}(c_{j,n}) = x_{j',n'}(c_{j',n'}) = x_{j',n'}(c_{j,n})$, et par conséquent, $(j, n) = (j', n')$ (lemme 2.14). Les $c_{j,n}$ sont donc deux-à-deux disjoints. Puisque les rayons externes ne se coupent pas, on a bien (20). \square

Soit h_M la fonction de Green de $\mathbb{C} - M$. On a $h_M(c) = \log |\Psi_M(c)|$ pour $c \notin M$ et $h_M(c) = 0$ pour $c \in M$.

DÉFINITION. — Pour $n = 0, 1, 2, \dots$, on définit $C\Omega_n = \{c \in \overline{CA_n} | h_M(z) \leq 1/2^{nkp}\}$, et $CT_n = \partial C\Omega_n = \Psi_M^{-1}(\mathcal{D}_n)$. En particulier, $C\Omega_0 = \{c \in \overline{CA_0} | h_M(z) \leq 1\}$ (figure 5).

On remarque que $C\Omega_n$ est simplement connexe, $C\Omega_n \subset \text{Int}(C\Omega_{n-1})$, $c_0 \in \text{Int}(C\Omega_n)$. De plus, pour tout n , $M_n = M \cap \overline{CA_n} = M \cap C\Omega_n$ est connexe d'après le lemme 2.1. Ainsi, la suite M_n forme une suite décroissante de voisinages connexes de c_0 dans M . Reste à montrer $\text{diam}(CT_n) \rightarrow$

Figure 5 : $C\Omega_0$

0, et par suite $\text{diam}(M_n) \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$, pour que les M_n forment une base de voisinages connexes de c_0 dans M . Pour cela, il nous faut étudier de plus près la dynamique de f_c pour c dans un voisinage de c_0 plus petit que \mathcal{C} . Le voisinage $\text{Int}(C\Omega_0)$ suffira pour notre but. Remarquons que $\text{Int}(C\Omega_0) \subset \mathcal{C}$.

2.5. Dynamique de f_c pour $c \in \text{Int}(C\Omega_0)$.

Construction et propriétés de $\Gamma_n(c)$.

Les ensembles Δ_n , Θ_n , \mathcal{D}'_n , \mathcal{D}''_n , \mathcal{D}_n sont définis comme dans 2.1.IV.

LEMME 2.16. — Pour tout $c \in \text{Int}(C\Omega_0)$, tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma_n(c) = \varphi_c(\mathcal{D}_n)$ est bien défini, et vérifie les propriétés suivantes :

1. $\Gamma_n(c)$ est une courbe de Jordan, avec $\nu(c)$ dans la composante bornée de $\mathbb{C} - \Gamma_n(c)$.
2. Il existe un paramétrage $\sigma_{n,c} : S^1 \rightarrow \Gamma_n(c)$ tel que $(c, t) \mapsto \sigma_{n,c}(t)$ soit continue dans $\text{Int}(C\Omega_0) \times S^1$, holomorphe en c .
3. Pour $\alpha(c) = f_c^l(\nu(c))$, on a $f_c^p(\alpha(c)) = \alpha(c)$. Les applications $c \mapsto \alpha(c)$ et $c \mapsto \rho(c) = (f_c^p)'(\alpha(c))$ sont holomorphes dans $\text{Int}(C\Omega_0)$, avec $|\rho(c)| > 1$.
4. Pour tout $t \in S^1$, $f_c^{l+nkp}(\sigma_{n,c}(t)) = f_c^l(\sigma_{0,c}(t))$ (comparer avec la formule (13)).

Démonstration. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}'_n \cup \mathcal{D}''_n$.

En vertu du lemme 2.14, pour chaque $z \in \mathcal{D}'_n$, l'application $c \mapsto \varphi_c(z)$ est holomorphe dans \mathcal{C} , en particulier dans $\text{Int}(C\Omega_0)$.

Reste à montrer l'existence de $\varphi_c(\mathcal{D}''_n)$ pour tout $c \in \text{Int}(C\Omega_0)$, i.e. l'existence de $\varphi_c(e^{1/2^{nkp}+2i\pi\eta})$ avec $\eta \in \Theta_n$.

Une variation du théorème 2.13 montre que pour $I \subset \mathbb{T}$ un intervalle, et $s > 0$, l'application $(c, \eta) \mapsto \varphi_c(e^{s+2i\pi\eta})$ est bien définie et continue dans

$$(\mathbb{C} - \bigcup_{\theta \in I} \bigcup_{q \geq 1} \bigcup_{r \geq 2^q \cdot s} \{\Psi_M^{-1}(e^{r+2i\pi(2^q\theta)})\}) \times I,$$

et est holomorphe en c .

Si $c \in M$, φ_c est bien défini sur $\mathbb{C} - \overline{D}$, en particulier sur \mathcal{D}''_n .

Dans le cas $c \in \text{Int}(C\Omega_0) - M$, on a $c = \Psi_M^{-1}(e^{r_0+2i\pi\theta})$, avec, combinatoirement, $0 < r_0 < 1$, $\xi^- < \theta < \xi^+$. Supposons qu'il existe $\eta \in \Theta_n$ tel que $\varphi_c(e^{1/2^{nkp}+2i\pi\eta})$ ne soit pas bien défini. Alors il existe $q \geq 1$, $r \geq 2^q/2^{nkp}$ tels que $c = \Psi_M^{-1}(e^{r+2i\pi \cdot 2^q\eta})$. Ainsi

$$(21) \quad 2^q/2^{nkp} < r = r_0 < 1,$$

$$(22) \quad 2^q\eta = \theta \in]\xi^-, \xi^+[.$$

La formule (21) nous donne $q < nkp$. Mais la formule (22) avec le lemme 2.6 vont nous donner $q > nkp + l$, et par conséquent une contradiction. En effet $\eta \in \Theta_n$ nous garantit $R_{c_0}(\eta) \subset \overline{A}_n(c_0)$ ((10)). En vertu du lemme 2.6, pour $1 \leq q' \leq nkp + l$, $f_{c_0}^{q'}(\overline{A}_n(c_0)) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. En particulier, $R_{c_0}(2^{q'}\eta) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Combinatoirement, $2^{q'}\eta \cap]\xi^-, \xi^+[= \emptyset$. Ainsi $q > nkp + l$ par (22).

On peut conclure que pour $s = 1/2^{nkp}$,

$$\text{Int}(C\Omega_0) \cap \bigcup_{\theta \in \Theta_n} \bigcup_{q \geq 1} \bigcup_{r \geq 2^q \cdot s} \{\Psi_M^{-1}(e^{r+2i\pi(2^q\theta)})\} = \emptyset.$$

Ainsi $(c, \eta) \mapsto \varphi_c(e^{s+2i\pi\eta})$ est bien définie et continue dans $\text{Int}(C\Omega_0) \times \Theta_n$, holomorphe en c . L'application $(c, z) \mapsto \varphi_c(z)$ est donc continue dans $\text{Int}(C\Omega_0) \times \mathcal{D}''_n$, holomorphe en c .

L'ensemble $\Gamma_n(c) = \varphi_c(\mathcal{D}_n)$ est donc bien défini, pour tout $c \in \text{Int}(C\Omega_0)$, avec $(c, z) \mapsto \varphi_c(z)$ continue dans $\text{Int}(C\Omega_0) \times \mathcal{D}_n$, holomorphe en c .

$\Gamma_n(c)$ est une courbe de Jordan parce que \mathcal{D}_n en est une, et que $\varphi_c|_{\mathcal{D}_n}$ est un homéomorphisme. Le point $\nu(c)$ est dans la composante bornée de $\mathbb{C} - \Gamma_n(c)$ car $\nu(c) \notin \Gamma_n(c)$, $\text{Arg}_c(\nu(c)) \supset \text{Arg}_{c_0}(c_0)$ et $\text{Arg}_{c_0}(c_0) \subset \text{Int}(\Theta_n)$.

Le paramétrage : pour $c = c_0$, on possède déjà $\sigma_n = \sigma_{n,c_0} : S^1 \rightarrow \Gamma_n = \Gamma_n(c_0)$ (2.1.IV). Pour $c \in \text{Int}(C\Omega_0)$, on définit $\sigma_{n,c} : S^1 \rightarrow \Gamma_n(c)$ par

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\sigma_{n,c}} & \Gamma_n(c) \\ \sigma_{n,c_0} \downarrow & & \uparrow \varphi_c \\ \Gamma_n(c_0) & \xrightarrow{\psi_{c_0}} & \mathcal{D}_n. \end{array}$$

C'est bien un homéomorphisme. Fixant n et t , le point $\psi_{c_0} \circ \sigma_{n,c_0}(t)$ est dans \mathcal{D}_n . L'application $(c, t) \mapsto \sigma_{n,c}(t)$ est donc continue dans $\text{Int}(C\Omega_0) \times S^1$, holomorphe en c pour tout n .

Soit $c \in \text{Int}(C\Omega_0)$. Le fait $f_c^p(\alpha(c)) = \alpha(c)$ est une conséquence de la formule (16). Comme $c \mapsto \nu(c)$ est holomorphe dans $\text{Int}(C\Omega_0)$, les applications $c \mapsto \alpha(c)$ et $c \mapsto \rho(c)$ sont aussi holomorphes.

Montrons $|\rho(c)| > 1$.

Rappelons que $A_n(c)$ est la composante connexe de $\mathbb{C} - \bigcup_{\eta \in \Delta_n} R_c(\eta) \cup \{\gamma_c(\eta)\}$ qui contient $\nu(c)$, avec $\partial A_n(c) = \bigcup_{\eta \in \Delta_n} R_c(\eta) \cup \{\gamma_c(\eta)\}$ ((17)).

Posons $B_n(c)$ la composante connexe de

$$\mathbb{C} - \bigcup_{\eta \in \Delta_n} R_c(2^l \eta) \cup \{\gamma_c(2^l \eta)\} = \mathbb{C} - \bigcup_{j=0}^{k-1} \varphi_c \circ \psi_{c_0}(\partial B_n(c_0))$$

qui contient $f_c^l(\nu(c)) = \alpha(c)$. Alors $R_c(\eta) \subset \overline{A}_n(c) \iff \eta \in \Theta_n$, $R_c(\eta) \subset \overline{B}_n(c) \iff \eta \in \tau^l(\Theta_n)$. On prétend que $f_c^l : A_n(c) \rightarrow B_n(c)$, $n \geq 0$, et $f_c^{nkp} : B_n(c) \rightarrow B_0(c)$, $n \geq 1$ sont des homéomorphismes.

Examinons par exemple $f_c^l : A_n(c) \rightarrow B_n(c)$. Comme $f_c^l(\partial A_n(c)) = \partial B_n(c)$, $A_n(c)$ contient au moins une composante connexe A' de $f_c^{-l}(B_n(c))$. Si $f_c^l(A_n(c)) \neq B_n(c)$, ou $f_c^l|_{A'}$ n'est pas injective, il existe $\eta, \eta' \in \Theta_n$ tels que $f_c^l(R_c(\eta)) = f_c^l(R_c(\eta')) = R_c(\tau^l(\eta)) = R_c(\tau^l(\eta')) \subset \overline{B}_n$, i.e. il existe $\eta, \eta' \in \Theta_n$ avec $\tau^l(\eta) = \tau^l(\eta')$. Ceci contredit l'injectivité de τ^l sur Θ_n (lemme 2.8). On peut montrer de façon analogue que $f_c^{nkp} : B_n(c) \rightarrow B_0(c)$ est un homéomorphisme, $n \geq 1$.

On peut donc définir $F_c = f_c^l|_{A_0(c)} : A_0(c) \rightarrow B_0(c)$, et $g_c : B_0(c) \rightarrow B_1(c)$ l'application inverse de $f_c^{kp}|_{B_1(c)}$. On a $F_c'(\nu(c)) \neq 0$ car F_c est un homéomorphisme holomorphe. Comme $\overline{B_1(c)} \subset B_0(c)$, l'application g_c contracte la métrique de Poincaré de $B_0(c)$, avec l'unique point fixe $\alpha(c)$. On a donc $|g_c'(\alpha(c))| < 1$. Mais $g_c'(\alpha(c)) = 1/\rho(c)^k$, on en déduit que $|\rho(c)| > 1$ pour tout $c \in \text{Int}(C\Omega_0)$.

Montrons 4. Par la conjugaison entre f_c et \tilde{f} , la définition de $\sigma_{n,c}(t)$ et la formule (13), on obtient :

$$\begin{aligned} f_c^{kpn+l} \circ \sigma_{n,c}(t) &= f_c^{kpn+l} \circ \varphi_c \circ \psi_{c_0} \circ \sigma_{n,c_0}(t) = \varphi_c \circ \tilde{f}^{kpn+l} \circ \psi_{c_0} \circ \sigma_{n,c_0}(t) \\ &= \varphi_c \circ \psi_{c_0} \circ f_{c_0}^{kpn+l} \circ \sigma_{n,c_0}(t) = \varphi_c \circ \psi_{c_0} \circ f_{c_0}^l \circ \sigma_{0,c_0}(t) \\ &= \varphi_c \circ \tilde{f}^l \circ \psi_{c_0} \circ \sigma_{0,c_0}(t) = f_c^l \circ \varphi_c \circ \psi_{c_0} \circ \sigma_{0,c_0}(t) = f_c^l \circ \sigma_{0,c}(t). \end{aligned}$$

D'où 4. □

LEMME 2.17. — *Il existe un voisinage compact W de c_0 tel que la suite des fonctions :*

$$\rho(c)^{nk}(\sigma_{n+2,c}(t) - \nu(c))$$

converge uniformément sur $W \times S^1$, lorsque n tend vers ∞ (la fonction limite sera explicitée dans la formule (24)). Par conséquent,

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_{n,c}(t) - \nu(c)| = 0$$

uniformément sur $W \times S^1$.

Démonstration. — Un résultat classique de l'analyse complexe montre que si α est un point périodique répulsif, de période p , de multiplicateur ρ , d'un polynôme P , il existe une unique application holomorphe h telle que $h(0) = \alpha$, $h'(0) = 1$, $h(\rho z) = P^p(h(z))$. De plus, h est entière et dépend analytiquement des coefficients de P (tant que α reste répulsif).

Dans notre cas $\alpha(c)$ est répulsif pour tout $c \in \text{Int}(C\Omega_0)$. Il existe donc une application holomorphe en deux variables :

$$H : \text{Int}(C\Omega_0) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

avec $H(c, 0) = \alpha(c)$, $H(c, \rho(c)z) = f_c^p(H(c, z))$. Et pour l'application $h_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h_c(z) = H(c, z)$, on a $h'_c(0) = 1$. De plus, il existe une application inverse $\kappa_c = h_c^{-1}$ définie dans $B_0(c)$, holomorphe injective, dépendant analytiquement de c .

Par la compacité des $\overline{\Omega}_n(c)$, il existe un voisinage ouvert $W \subset \text{Int}(C\Omega_0)$ de c_0 tel que pour tout $c \in W$, on ait $|\rho(c)| \geq \rho > 1$, et

$$\kappa_c \circ f_c^l(\overline{\Omega}_2(c)) \subset \kappa_{c_0} \circ f_{c_0}^l(\Omega_1(c_0)), \text{ et } \kappa_{c_0} \circ f_{c_0}^l(\overline{\Omega}_1(c_0)) \subset \kappa_c \circ f_c^l(\Omega_0(c)).$$

Pour $c \in W$, $z \in \kappa_{c_0} \circ f_{c_0}^l(\overline{\Omega}_1(c_0))$, on a $h_c(z) \in f_c^l(\Omega_0(c)) \subset B_0(c)$. Notons $G_c : B_0(c) \rightarrow A_0(c)$ l'application inverse de $f_c^l|_{A_0(c)}$.

L'application $(c, z) \mapsto G_c(h_c(z))$ est donc bien définie et continue dans $W \times \kappa_{c_0} \circ f_{c_0}^l(\overline{\Omega}_1(c_0))$, holomorphe dans $W \times \kappa_{c_0} \circ f_{c_0}^l(\Omega_1(c_0))$. L'application

$$(c, z) \mapsto \frac{G_c \circ h_c(z) - \nu(c)}{z}, \text{ si } z \neq 0, \text{ et } (c, 0) \mapsto (G_c \circ h_c)'(\nu(c))$$

est donc aussi continue dans $W \times \kappa_{c_0} \circ f_{c_0}^l(\overline{\Omega}_1(c_0))$.

Soit W' un voisinage compact de c_0 inclus dans W . Par la continuité uniforme, pour tout ε positif, il existe η positif, tel que pour tout $c \in W'$, et tout z vérifiant $0 < |z| < \eta$, on ait

$$\left| \frac{G_c \circ h_c(z) - \nu(c)}{z} - (G_c \circ h_c)'(\nu(c)) \right| < \varepsilon.$$

Pour $n \geq 2$, $c \in W_1$, $t \in S^1$, posons $w_{n,c}(t) = \kappa_c \circ f_c^l(\sigma_{n,c}(t))$. Comme $\sigma_{n,c}(t) \in \overline{\Omega}_2(c)$ ($n \geq 2$), on a $w_{n,c}(t) \in \kappa_{c_0} \circ f_{c_0}^l(\Omega_1(c_0))$. De plus, $\rho(c)^{nk} w_{n+2,c}(t) = w_{2,c}(t)$. Ainsi

$$|w_{n+2,c}(t)| \leq \text{diam}(\kappa_{c_0} \circ f_{c_0}^l(\overline{\Omega}_1(c_0))) / \rho^{nk}.$$

Pour ε, η ci-dessus, il existe N positif, tel que pour tout $n > N$, $c \in W'$, $t \in S^1$, on ait

$$\left| \frac{G_c \circ h_c(w_{n+2,c}(t)) - \nu(c)}{w_{n+2,c}(t)} - (G_c \circ h_c)'(\nu(c)) \right| < \varepsilon.$$

Par conséquent

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(c)^{nk} (\sigma_{n+2,c}(t) - \nu(c)) = \frac{1}{(f_c^l)'(\nu(c))} \kappa_c \circ f_c^l(\sigma_{2,c}(t))$$

uniformément sur $W' \times S^1$. □

2.6. Conclusion.

THÉORÈME 2.18. — On a $\text{diam}(C\Gamma_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Ainsi $M_n = C\Omega_n \cap M$ est connexe et $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base de voisinages connexes de c_0 dans M .

Démonstration. — Il s'agit d'une simple application du théorème de Rouché.

On définit d'abord $\sigma_{n,M} : S^1 \rightarrow C\Gamma_n$ par $\sigma_{n,M}(t) = \Psi_M^{-1} \circ \psi_{c_0} \circ \sigma_{n,c_0}(t)$. C'est un paramétrage car Ψ_M^{-1} induit un homéomorphisme de \mathcal{D}_n à $C\Gamma_n$. Soit $c = \sigma_{n,M}(t)$. Alors $\Psi_M(c) = \psi_{c_0} \circ \sigma_{n,c_0}(t)$. Comme $\Psi_M(c) = \psi_c(c)$, on a également $c = \varphi_c \circ \psi_{c_0} \circ \sigma_{n,c_0}(t) = \sigma_{n,c}(t)$.

Pour $c \in \text{Int}(C\Omega_0)$, $t \in S^1$, $n \in \mathbb{N}$, posons $\Sigma_n(c, t) = \sigma_{n,c}(t) - c$, et $\Sigma(c) = c - \nu(c)$. Ce sont des fonctions holomorphes en c . On a $\Sigma_n(c, t) - \Sigma(c) = \sigma_{n,c}(t) - \nu(c)$.

On voit facilement que Σ a un zéro isolé en c_0 , sinon $f_c^l(c) = f_c^{l+p}(c)$ pour tout c , ce qui contredit le fait que f_c est un polynôme non-linéaire.

Soit W le voisinage de c_0 donné par le lemme 2.17. Fixons $\varepsilon > 0$ petit, tel que $\overline{D(c_0, \varepsilon)} \subset W$, et que Σ ne s'annule pas dans $\overline{D(c_0, \varepsilon)} - \{c_0\}$. Alors

$$\lambda = \min_{|c-c_0|=\varepsilon} |\Sigma(c)|$$

est positif non nul. Par la convergence uniforme de $\sigma_{n,c}(t) - \nu(c)$ sur $W \times S^1$ ((23)), il existe N , tel que pour tout $n > N$, tout $t \in S^1$, et tout $c \in W$ (en particulier pour tout $c \in \partial D(c_0, \varepsilon)$), $|\sigma_{n,c}(t) - \nu(c)| < \lambda \leq |\Sigma(c)|$. D'après le théorème de Rouché, $\Sigma_n(c, t)$ a au moins un zéro $c(n, t)$ dans le disque $D(c_0, \varepsilon)$. On a alors $c(n, t) = \sigma_{n,c(n,t)}(t) = \varphi_{c(n,t)} \circ \psi_{c_0} \circ \sigma_{n,c_0}(t)$. Ainsi $\Psi_M(c(n, t)) = \psi_{c(n,t)}(c(n, t)) = \psi_{c_0} \circ \sigma_{n,c_0}(t)$. Par définition de $\sigma_{n,M}(t)$, on a $c(n, t) = \sigma_{n,M}(t)$. Par conséquent, quand t parcourt S^1 , $c(n, t)$ parcourt $C\Gamma_n$. Autrement dit, $C\Gamma_n \subset D(c_0, \varepsilon)$, pour tout $n > N$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(C\Gamma_n) = 0$.

Le fait que $M_n = M \cap C\Omega_n$ est connexe pour tout n est garanti par le lemme 2.1.

Comme corollaire, on retrouve le résultat de Douady et Hubbard : l'application Σ a un zéro simple en c_0 ([DH]). Il y a plusieurs démonstrations de ce résultat. Notre raisonnement est très proche de l'une d'elles. \square

Ainsi se termine la démonstration de notre résultat principal. Comme corollaire, on cite ici une propriété de continuité de γ_M :

COROLLAIRE 2.19. — Soit $\theta \in \mathbb{T}$ un rationnel de dénominateur pair. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $\theta' \in \mathbb{T}$ rationnel, vérifiant $|\theta' - \theta| < \delta$, on a $|\gamma_M(\theta') - \gamma_M(\theta)| < \varepsilon$.

Démonstration. — Notons $c_0 = \gamma_M(\theta)$. C'est un point de Misiurewicz. En utilisant notre notation, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$, tel que pour

tout $n > N$, $\text{diam}(C\Omega_n \cap M) < \varepsilon$. On a de plus, $\theta \in \Theta_n$ pour tout n .
Posons

$$\delta = \min_{\eta \in \Delta_n} |\eta - \theta|.$$

Alors pour $\theta' \in \mathbb{T}$ rationnel avec $|\theta' - \theta| < \delta$, le rayon $R_M(\theta')$ aboutit en $\gamma_M(\theta')$, et $R_M(\theta') \subset CA_n$. Ainsi $\gamma_M(\theta') \in C\Omega_n \cap M$. Et finalement, $|\gamma_M(\theta') - \gamma_M(\theta)| < \varepsilon$. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [DH] A. DOUADY et J.H. HUBBARD, Etude dynamique des polynômes complexes, première partie, 84-02, deuxième partie, 85-04, Publications Mathématiques d'Orsay, France, 1984-1985
- [L1] P. LAVAURS, Une propriété de continuité, inséré dans [DH]
- [L2] P. LAVAURS, Systèmes dynamiques holomorphes : explosion de points périodiques paraboliques, thèse de doctorat, Université de Paris Sud, Orsay, France, 1989
- [T] TAN LEI, Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets, Commun. Math. Phys., 134 (1990), 587-617.
Version préliminaire, dans [DH].
- [W] B. WITTNER, On the bifurcation loci of rational maps of degree two, Ph.D. thesis, Cornell University, Ithaca, U.S.A., 1986

Manuscrit reçu le 7 janvier 1991.

TAN Lei,
Laboratoire de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 Lyon cedex 07 (France).