Annales de l'institut Fourier

Jean-Pierre Ramis

Les derniers travaux de Jean Martinet

Annales de l'institut Fourier, tome 42, nº 1-2 (1992), p. 15-47
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1992__42_1-2_15_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
42, 1-2 (1992), 15-47

LES DERNIERS TRAVAUX DE JEAN MARTINET

présentés par Jean-Pierre RAMIS

PRÉSENTATION

Le manuscrit "Introduction à la théorie de Cauchy sauvage" est une version préliminaire (inachevée) du Chapitre 4 d'un livre "Théorie de Galois différentielle et resommation" que Jean Martinet et Jean-Pierre Ramis étaient en train d'écrire. Pour situer ce texte, il devait suivre trois chapitres reprenant pour l'essentiel [MR1], et être suivi d'autres chapitres qui sont très partiellement résumés dans [MR2]. Le texte a été écrit par Jean Martinet durant l'année scolaire 1988–89. Il n'en était pas satisfait et souhaitait le remanier quand la maladie l'a frappé. Il avait parlé de ces modifications avec chacun d'entre nous : elles portaient sur des points mineurs. Nous avons renoncé à remanier ce texte; d'une part pour ne pas ternir la fraîcheur de pensée de Jean, d'autre part parce qu'il aurait fallu tenir compte des nouveaux développements de la théorie de la multisommabilité (on comparera utilement de ce point de vue l' "Introduction à la Théorie de Cauchy Sauvage" et [MaR]).

Le texte "Remarques sur le retard à la bifurcation" a été écrit par Jean Martinet au printemps 1989. Il n'était pas destiné à la publication sous sa forme initiale. Dans ce papier Jean Martinet explique que le phénomène

---

Mots-clés : Cauchy sauvage – Sommabilité – Développements asymptotiques – Gevrey – Décroissance exponentielle – Quasi-fonctions – Phragmen-Lindelöf – Prolongement analytique – Perturbations singulières – Retard à la bifurcation.
Classification A.M.S. : 30B10 – 30C80 – 30D60 – 30E15 – 30G06 – 40E05 – 40E10 – 40H05 – 34E05 –34E10 – 34E15.

de “retard à la bifurcation” [N] s’explique très simplement par l’existence d’une “quasi-surface invariante” (“quasi surface” est ici à comprendre par analogie avec la notion de “quasi-fonction” introduite dans l’ “Introduction à la Théorie de Cauchy Sauvage.”) liée à des estimations Gevrey. Ce texte apporte une nouvelle perspective sur le problème et a stimulé de nouveaux travaux ([CDD], [DD] par exemple). Nous avous pensé qu’il était utile de le publier. Techniquement le résultat central était seulement conjecturé (“J’affirme l’existence...”) et justifié par quelques arguments heuristiques. En fait très peu de temps après avoir écrit ce texte Jean Martinet avait appris l’existence d’un résultat de Y. Sibuya qui montre en particulier le résultat souhaité (cf [S]). Comme l’aurait fait sans doute Jean nous avons donc décidé de supprimer les quelques pages d’arguments heuristiques (remplacées par la référence à [S]). Nous avons également ajouté la référence [N].

Ce dernier travail a été exposé par F. Fauvet à Paris (Journées résurgentes) et à Nice au printemps 1990. Jean, très peu de temps avant sa mort, avait aidé F. Fauvet dans la préparation de ces conférences.

Frédéric Fauvet, Jean-Pierre Ramis

I. INTRODUCTION À LA THÉORIE DE CAUCHY SAUVAGE

1. Exposés des motifs et définitions de base.

Notre but est ici de montrer comment la théorie des classes de Gevrey, de la sommabilité et, ultimement, celle des fonctions résurgentes d'Ecalle, sont des généralisations *naturelles* de la théorie classique de Cauchy.

La première idée en vue de cette généralisation vient de l'analyse numérique : une machine à calculer fournit une précision limitée dans le calcul des valeurs numériques d'une fonction, et dispose d'une capacité limitée à maîtriser les grands nombres; un nombre trop petit est déclaré nul, et un nombre trop grand est considéré comme infini. Si l'on se place, avec cette idée, dans le contexte de la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe, on est conduit à s'interroger sur le comportement de "quasi-fonctions holomorphes", décrites grossièrement de la façon suivante : une quasi-fonction holomorphe f sur un domaine U (grand) consiste en une collection de données locales (U_i, f_i) (en nombre fini), où les f_i sont des fonctions holomorphes sur les domaines U_i (petits), déterminées à une précision donnée près et pas trop grandes, se "recollant" sur les intersections à la précision imposée près. Le point est qu'en précisant de manière convenable cette notion, on va obtenir des classes de quasi-fonctions qui sont régies par les *mêmes lois* que les fonctions holomorphes usuelles; de plus, et c'est là l'essentiel, on éclaire ainsi de façon très suggestive la théorie des développements asymptotiques, et l'étude des singularités des quasi-fonctions conduira à une idée claire de développement *trans-asymptotique* (c'est-à-dire relatif à une échelle transfinie d'ordres de grandeurs).

Pour préciser les idées précédentes, nous emprunterons un peu de vocabulaire à l'Analyse non Standard (ANS), qui a représenté pour nous une commodité remarquable. L'ouvrage de Van den Berg [V] est ici une excellente référence. Que le lecteur ignorant de l'ANS se rassure : nous en ferons un usage uniquement heuristique ici; toutes les définitions et démonstrations seront classiques. Quant aux spécialistes, nous espérons éveiller leur intérêt, car il nous paraît clair que l'ANS pourrait apporter à la théorie des contributions qui ne soient pas seulement "d'exposition".

Nous considérerons que la précision, et le dépassement de capacité numérique, sont fixés par le choix, fait une fois pour toutes, d'un nombre réel $\varepsilon > 0$ *infiniment petit*. Toutes les fonctions que nous envisagerons seront *standard*, c'est-à-dire définies sans recours aux prédicats propres à l'ANS. Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert U, et si x est un point de U (standard ou non), nous considérerons f comme nulle en $x(f =_\varepsilon 0)$ dès que $f(x) \simeq \varepsilon$, c'est-à-dire que $|f(x)/\varepsilon|$ est *limité* (non infiniment grand), autrement dit si $f(x)$ est, en module, *de l'ordre de* ε. D'autre part, nous ne considérerons $f(x)$ comme bien défini que si $f(x)$ est, en module, infiniment petit devant $1/\varepsilon$, autrement dit $|\varepsilon \cdot f(x)| \approx 0$; ainsi, f ne sera vue comme "vraiment" holomorphe que sur le "domaine" où $\varepsilon \cdot f(x)$ est infiniment petit.

Avec ces conventions, si $f = g \pmod{\varepsilon}$ sur un domaine U contenant un ouvert *standard*, il est clair qu'en fait $f = g$ (deux nombres standard de différence infiniment petite sont égaux). Cela veut dire que, pour sortir du cadre classique, nous devrons utiliser des conditions de recollement "à ε près" sur des domaines *infinitésimaux* contenant au plus un point standard. A titre d'introduction, nous allons décrire rapidement un premier exemple très simple (mais pauvre).

1.1. *Quasi-fonctions et développements asymptotiques.*

La théorie classique de Cauchy utilise comme domaines "élémentaires" les disques $|x - x_0| < r$. Nous allons commencer par travailler sur les disques infinitésimaux d'ordre n et de centre 0. Précisément, étant donné un entier n (standard), posons $D_n = \{x | x^{n+1} \approx \varepsilon\}$; c'est un ensemble *externe* au sens de l'ANS, ce qui n'importe pas pour nos besoins; nous le regarderons comme un disque (au bord mal défini) de centre 0, infiniment petit, mais de rayon *infiniment grand* par rapport à ε : c'est le disque d'*ordre* n et de centre 0. Cherchons à préciser la notion de quasi-fonction (*nous dirons aussi désormais : ε-fonction*) holomorphe sur D_n. Une remarque préliminaire est ici essentielle. Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de 0; nous affirmons qu'elle est nulle sur D_n, en tant que ε-fonction, si et seulement si $|f(x)|$ est un $O(|x^{n+1}|)$ au voisinage de 0. (En fait il suffit pour cela qu'elle soit nulle "près" du bord de D_n). C'est là un exercice très simple d'ANS, que nous ne ferons pas, ayant promis que ce texte ne contiendrait aucune démonstration non classique; l'important est de dire que cette remarque repose essentiellement sur le *principe du maximum*. Ainsi, deux fonctions f et g, holomorphes au voisinage de 0, sont "égales" sur D_n si et seulement si elles ont même développement de Taylor à l'ordre n en 0.

Ces remarques conduisent à une définition raisonnable (mais cependant provisoire : nous la modifierons légèrement un peu plus bas) des ε-fonctions holomorphes sur D_n.

Une telle fonction f (notation : $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(D_n)$) consiste en la donnée d'une collection (U_i, f_i) $(i = 1, \ldots, k)$ où :

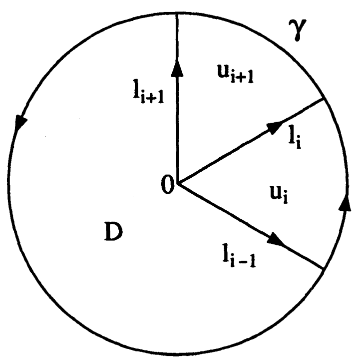
a) les U_i sont des secteurs ouverts de sommet 0 (de rayon arbitraire), recouvrant un voisinage de 0, et bien enchaînés : $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset (U_{k+1} = U_1)$, et les intersections 3 à 3 sont vides.

b) f_i est une fonction holomorphe bornée sur U_i.

c) Sur $U_i \cap U_{i+1}$ la fonction $f_{i+1} - f_i = \varphi_i$ est un $O(|x^{n+1}|)$.

Deux telles collections (U_i, f_i) et (V_j, g_j) définissent le même f, si, en se ramenant au cas des mêmes recouvrements (par raffinement), on a $|g_i - f_i| = O(|x^{n+1}|)$ sur chaque U_i.

Cette définition fournit bien des ε-fonctions sur le disque infinitésimal D_n (et elle est classique) dont l'ensemble $\mathcal{O}_\varepsilon(D_n)$ forme clairement un *anneau*. Pour en comprendre les propriétés, on va utiliser l'intégrale de Cauchy, en imitant le cas usuel. Soit γ un petit cercle de centre 0 situé dans la réunion des U_i, bord d'un disque fermé D, et choisissons des rayons ℓ_i de γ situés dans les intersections $U_i \cap U_{i+1}$; ces rayons découpent D en des triangles T_i. La collection (U_i, f_i) détermine une fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur $D' = D \setminus \cup \ell_i$.



Pour x intérieur à D', la formule de Cauchy donne :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \sum_i \int_{\partial T_i} \frac{\tilde{f}(u)}{u - x} du$$

(une seule de ces intégrales compte; les autres sont nulles) soit aussi, de façon évidente :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\tilde{f}(u)}{u-x}du + \frac{1}{2i\pi}\sum_i \int_{\ell_i} \frac{\varphi_i(u)}{u-x}du$$

où, rappelons-le, les φ_i représentent les "discontinuités" de f le long des rayons ℓ_i. Au second membre de cette égalité :

a) la première intégrale définit une fonction holomorphe $g_{\gamma,\ell}$ sur l'intérieur du disque D; désignons par $\hat{g}_{\gamma,\ell}$ son polynôme de Taylor à l'ordre n en 0;

b) le second terme détermine un polynôme $\hat{h}_{\gamma,\ell} = \sum_{p\leq n} b_p x^p$ où :

$$b_p = \frac{1}{2i\pi}\sum_i \int_{\ell_i} \frac{\varphi_i(u)}{u^{p+1}}du.$$

On a ainsi associé à f un polynôme de degré n : $\hat{f}_{\gamma,\ell} = \hat{g}_{\gamma,\ell} + \hat{h}_{\gamma,\ell}$. Si l'on renforce un peu les conditions de la définition des quasi-fonctions sur D_n, *en remplaçant partout les* $O(x^{n+1})$ *par des* $O(x^{n+1+\alpha})$ ($\alpha > 0$ aussi petit que l'on voudra), on montre facilement que tous les éléments f_i constitutifs de f sont *asymptotes en* 0, *sur leur secteur de définition, au polynôme* $\hat{f}_{\gamma,\ell}$ défini ci-dessus; ceci signifie ici que $f_i - \hat{f}_{\gamma,\ell}$ est un $O(x^{n+1})$ sur U_i. En particulier, ce polynôme est indépendant des choix faits pour l'obtenir : on peut simplifier sa notation en $\hat{f}$. On remarquera que la définition renforcée revient à considérer les quasi-fonctions holomorphes sur les disques $D_{n+1+\alpha}$ ($\alpha > 0$ arbitrairement petit), c'est-à-dire comme des *germes* de quasi-fonctions "*au voisinage*" de D_n; elles forment un anneau $\mathcal{O}_\varepsilon(D_n^+)$.

En conclusion, nous avons associé à chaque $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(D_n^+)$, par la formule de Cauchy, un polynôme $\hat{f}$ de degré n qui est égal à f sur D_n (au sens des quasi-fonctions). L'application $f \mapsto \hat{f}$ est évidemment un homomorphisme d'anneaux, pour le produit tronqué des polynômes, c'est-à-dire le produit des n-jets. Il est essentiel d'observer que les coefficients de $\hat{f}$ sont donnés par les formules de Cauchy classiques :

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-x}du$$

à condition de choisir le cercle γ "dans le disque infinitésimal D_n" (nous revenons ici au vocabulaire de l'ANS); en effet, dans ce cas, les intégrales de Cauchy radiales des discontinuités (ou ambigüités) φ_i sont de l'ordre de ε, et par conséquent vues comme nulles.

(En termes usuels, les coefficients du polynôme $\hat{h}_{\gamma,\ell}$ sont des $O(r^{n+1})$ où r est le rayon de γ). On peut poursuivre ce scénario, mais il offre assez peu d'intérêt : la théorie des développements asymptotiques d'ordre fini est "molle" (ainsi, l'homomorphisme $f \to \hat{f}$ n'est pas injectif). Nous allons au contraire voir apparaître une théorie riche et passionnante en développant les mêmes idées, mais en remplaçant l'échelle $\{x^n\}$ des ordres de grandeurs usuels par celle des ordres de grandeurs *exponentiels*.

1.2. *Domaines infinitésimaux associés aux ordres de grandeur exponentiels.*

Nous allons décrire ici les ingrédients de base d'une "topologie non standard" de la droite complexe (ou de toute surface de Riemann), plus grossière que la topologie usuelle, mais beaucoup plus fine lorsqu'elle est appliquée à l'analyse d'objets *standard*. Insistons sur le fait que ce paragraphe ne joue qu'un rôle heuristique (mais important) dans le développement que nous proposons. Nous suggérons d'ailleurs au lecteur de passer rapidement sur cette liste de descriptions un peu fastidieuse, et de s'y reporter en lisant directement la suite, selon les besoins.

Les disques. — Outre les disques usuels D_R de centre 0 et de rayon $R > 0$ dans $\mathbf{C}$, nous introduisons les *disques infinitésimaux* de centre 0, de niveau $k > 0$, de type $\rho > 0$, notés $D_{k,\rho}$. Il s'agit des ensembles (externes) définis par :

$$D_{k,\rho} = \{x \mid \exp -|\rho/x|^k \approx \varepsilon\}.$$

Tout point standard peut être pris comme centre de tels disques. Si besoin est, on utilisera la notation $D_*(a)$ pour préciser le centre a ($*$ désignant un rayon R standard, ou un couple (k,ρ)). On notera les inclusions évidentes :

$$D_{k,\rho} \Subset D_{k',\rho'} \quad \text{et} \quad D_{k,\rho} \Subset D_R$$

dès que $(k,\rho) < (k',\rho')$ (ordre lexicographique des couples : le niveau est prioritaire sur le type), et quel que soit $R > 0$ (standard). Le symbole $\Subset$ signifie que le premier ensemble est infiniment petit par rapport au second.

Nous appellerons naturellement *couronnes* de centre 0 les différences de deux disques, en utilisant si nécessaire la notation $C_{k,\rho}^{k',\rho'} = D_{k',\rho'} \setminus D_{k,\rho}$ où $(k.\rho) < (k'.\rho')$.

Les croissants. — Ce sont, au contraire des précédents, des domaines dont la définition est *polarisée* : ils ont un axe. Un *croissant* d'axe d (demi-droite issue de 0, sur la surface de Riemann C_∞ du logarithme) et de *niveau angulaire* $t > 0$ est l'intersection d'une des couronnes précédentes (de centre 0) avec le secteur angulaire *fermé* $V(d,\pi/t) = \{x \mid |\operatorname{Arg} x - \operatorname{Arg} d| \leq \pi/t\}$. On le notera, C étant une couronne, $C(d,t)$.

Disques de Borel et gros croissants. — Les définitions précédentes cachent le rôle fondamental que jouent, dans la théorie, les disques de Borel. Rappelons qu'un disque de Borel (ordinaire) est défini ainsi :

$$\mathcal{D}^R_{k,\rho}(d) = \{x | \exp -(a/x)^k| \leq R \text{ et } |\operatorname{Arg} x - \operatorname{Arg} d| < \frac{\pi}{k}\}$$

où $a \in d$, $|a| = \rho$.

Le *disque de Borel infinitésimal* d'axe d, de niveau k et de type ρ sera l'ensemble (externe) défini de manière analogue, mais avec la condition $|\exp -(a/x)^k| \approx \varepsilon$ (donc de la forme $M \cdot \varepsilon$, où M est un nombre (standard) > 0 arbitraire). On le notera $\mathcal{D}^\varepsilon_{k,\rho}(d)$. La *couronne infinitésimale de Borel* d'axe d, de niveau k et de type ρ est le complémentaire de ce disque dans le secteur fermé (illimité) $V(d, \pi/k)$, et nous la notons $\mathcal{T}^\varepsilon_{k,\rho}(d)$. Remarquer que, bien qu'elle soit qualifiée d'infinitésimale, elle est immense; mais elle pénètre dans le voisinage infinitésimal de 0.

Nous appellerons *croissant de Borel* d'axe d toute intersection d'un disque de Borel (infinitésimal ou non) et d'une couronne de Borel *infinitésimale* de même axe d; ceci n'a de sens que si le symbole (k', ρ') du disque est *supérieur*, au sens lexicographique, au symbole (k, ρ) de la couronne : sinon, l'intersection est vide.

Pour en finir avec cette zoologie, nous appellerons *gros croissant* tout croissant contenant un croissant de Borel (de même axe).

Tous ces objets peuvent être définis, comme les disques, au voisinage de tout point standard de C.

Dans la théorie de Cauchy *sauvage* que nous allons décrire, les gros croissants de Borel vont jouer le rôle des disques ordinaires de la théorie de Cauchy élémentaire. Malgré le grand nombre de paramètres nécessaires à leur description (six!), ils ne sont pas difficiles à mémoriser, si l'on garde à l'esprit les faits essentiels :
A niveau et axe donné, un disque de Borel grandit avec son type, et garde une ouverture fixe; à axe fixe, si le niveau augemente, le disque s'étire infiniment et son ouverture s'amenuise, tout ceci "indépendamment" des types. Quant aux disques non polarisés, leur hiérarchie par inclusion correspond à l'ordre lexicographique des couples $(s.\rho)$ formés par le niveau (toujours prioritaire) et le type.

Nous allons donc chercher à comprendre ce que sont les quasi-fonctions holomorphes sur les domaines qui viennent d'être introduits. Avant d'en donner une définition précise, il est indispensable de faire quelques rappels sur le comportement des fonctions holomorphes par rapport aux ordres de grandeur exponentiels.

2. Quelques faits relatifs aux ordres de grandeur exponentiels.

2.1. *Deux avatars du principe du maximum de Phragmén-Lindelöf.*

Nous les énonçons, intentionnellement, dans le langage de l'ANS.

PROPRIÉTÉ 2.1.1. — *Soit f une fonction holomorphe et bornée sur un k-disque de Borel D (non infinitésimal) d'axe d. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *il existe $a \in d$ et $C > 0$ tels que $|f(x)| \leq C|\exp -(a/x)^k|$ sur D.*

ii) *$f(x) \approx \varepsilon$ sur le disque infinitésimal de Borel $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\varepsilon}_{k,\rho}(d)$ pour un $\rho > 0$.*

La condition (ii) signifie évidemment que f est nulle, en tant que ε-fonction, sur $\mathcal{D}$.

PROPRIÉTÉ 2.1.2. — *Soit f une fonction holomorphe sur un k-disque de Borel D d'axe d (non infinitésimal), qui est bornée sur le bord ∂D de D. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *on a $|f(x)| \leq C|\exp(a/x)^k|$ pour un point $a \in d$ et un nombre $C > 0$.*

ii) *$\varepsilon.f(x)$ est infiniment petit sur la couronne de Borel $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\varepsilon}_{k,\rho}(d)$ pour un $\rho > 0$.*

La condition (ii) signifie ici que f est holomorphe, en tant que ε-fonction sur la couronne de Borel $\mathcal{T}$.

Nous ne démontrerons pas ces propriétés, car elles n'interviendront pas dans les preuves des résultats à venir (voir cependant l'ouvrage de Titschmarch, *The Theory of Functions*, qui donne de ces questions un exposé très proche de notre point de vue) ; mais elles motivent les définitions que nous donnerons plus bas des ε-fonctions.

2.2. *Intégrale de Cauchy radiale d'une fonction exponentiellement petite.*

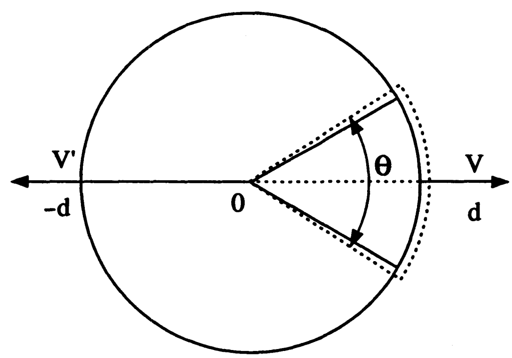
PROPOSITION 2.2. — *Soit φ une fonction holomorphe sur un secteur $V(d,\theta,r)$, telle que $|\varphi(x)| \leq \exp -|\rho/x|^k$ sur V, pour un $k > 0$ et un nombre $\rho > 0$. Posons :*

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^b \frac{\varphi(u)}{u-x}du \qquad a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_0^b \frac{\varphi(u)}{u^{n+1}}du \qquad \hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

où $|b| = r$ et $b \in d$.

i) *La fonction f est holomorphe sur le secteur ouvert $V' = V(-d,\theta+2\pi,r)$ ($-d$ désigne la demi-droite opposée à d); la différence de ses deux déterminations sur V est égale à φ.*

ii) *Elle est, sur V', G^k-asymptote (Gevrey de niveau k) à la série formelle $\hat{f}$.*



La démonstration est bien connue (voir par exemple Malgrange ou [MR1]). Le premier point est évident en modifiant le chemin d'intégration dans V, à extrémités fixes. Pour le second point, on écrit $f - \hat{f}_n$ ($\hat{f}_n$ est le polynôme obtenu en tronquant $\hat{f}$ à l'ordre n)

$$f(x) - \hat{f}_n(x) = \frac{1}{2i\pi}x^n \int_0^b \frac{\varphi(u)}{u^n(u-x)}du.$$

On majore cette quantité, pour x appartenant à un rayon fixé de V', et assez petit, par :

$$|f(x) - \hat{f}_n(x)| \leq \frac{C}{\rho^n}|x^n| \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n/k}\frac{dt}{t} = C\frac{\Gamma(n/k)}{\rho^n}|x|^n$$

où C est une constante convenable.

2.3. *Les fonctions entières à croissance exponentielle.*

On rappelle le classique résultat suivant :

Soit une fonction f entière, définie par la série $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, et un nombre $k > 0$; les conditions suivantes sont équivalentes :

i) *il existe des nombres ρ, $C > 0$ tels que $|f(x)| \leq C \exp |\rho x|^k$ pour tout $x \in \mathbf{C}$.*

ii) *On a $|a_n| \leq C' \rho^n / \Gamma(n/k)$ pour tout n, et des constantes ρ', $C' > 0$ convenables. De plus, dans ces conditions, on a l'égalité :*

$$\mathrm{Sup}\{\rho \mid \exists C > 0, \forall n : |a_n| \leq C\rho^n/\Gamma(n/k)\}$$
$$= \mathrm{Sup}\{\rho \mid \exists C > 0 : |f(x)| \leq C \exp |\rho x|^k\}.$$

(Ce nombre R peut être infini.)

Observons que la condition (i) définit précisément des ε-fonctions qui sont holomorphes sur le complémentaire du disque infinitésimal $D_{k,\rho}(\infty)$ *centré au point à l'infini de* $\mathbf{C}$. Cette couronne $C_{k,\rho}(\infty)$ qui se referme en 0 mérite évidemment d'être considérée comme un disque de centre 0 et de "rayon infiniment grand". Nous le noterons $D_{-(k,\rho)}$; l'emploi de la notation $-k$ (*niveau négatif*) sera justifié au paragraphe 5.1. Les fonctions entières vérifiant la condition (i) forment un *anneau*; mais il faut remarquer que le type ρ n'est pas invariant par multiplication ($e^{\rho x}.e^{\rho x} = e^{2\rho x}$); de plus, cet anneau est *stable par dérivation*; nous le noterons $\mathcal{O}_\varepsilon(D^+_{-k})$, et nous l'appellerons anneau des ε-fonctions holomorphes sur le germe de disque de centre 0 et de niveau $-k$ (germe parce que le type peut être arbitrairement grand, ce qui correspond à des domaines de plus en plus petits). Il est identique à l'anneau des séries entières vérifiant la condition ii), que nous noterons $C[[x]]_{-1/k}$.

3. L'anneau des ε-fonctions holomorphes sur le disque infinitésimal de niveau k.

3.1. *Définitions.*

Nous allons d'abord nous placer dans $\mathbf{C}$ (par opposition à $\mathbf{C}^*_\infty$). Fixons d'abord un niveau positif k, et un type ρ. Par définition, une ε-fonction holomorphe f sur $D_{k,\rho}$, soit $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(D_{k,\rho})$, consiste *en la donnée d'une famille finie* (U_i, f_i) *telle que :*

(i) *les U_i sont des secteurs ouverts de sommet 0, recouvrant un voisinage (épointé) de l'origine, et bien enchaînés (cf. 1.1).*

(ii) *Pour tout* i, f_i *est une fonction holomorphe* bornée *sur* U_i.

(iii) *Pour tout* i, *la fonction* $\varphi_i = f_{i+1} - f_i$ *est majorée en module par* $C \exp -|\rho/x|^k$ ($C > 0$ dépendant de f).

En outre, deux familles (U_i, f_i) *et* (V_j, g_j) *définissent la même* ε-*fonction* f *si, en se ramenant par raffinement au même recouvrement, les différences* $g_i - f_i$ *vérifient, sur* U_i, *la majoration (iii).*

L'ensemble $\mathcal{O}_\varepsilon(D_{k,\rho})$ ainsi défini est un anneau que nous nommerons anneau des germes de ε-fonctions sur D_k^+, et nous le noterons $\mathcal{O}_\varepsilon(D_k^+)$. $\mathcal{O}_\varepsilon(D_k^+) = \bigcup_\rho \mathcal{O}_\rho(D_{k,\rho})$.

Par contre, il n'est pas clair a priori que cet anneau soit stable par dérivation (à cause de la condition (ii)). En fait c'est vrai, et conséquence du

THÉORÈME 3.2. — *Tout* $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(D_k^+)$ *est* G^k-*asymptote en 0 à une série* $\hat{f} \in C[[x]]_{1/k}$ *(séries entières Gevrey d'ordre* $1/k$, *ou de niveau* k*). L'application* $f \mapsto \hat{f}$ *est un isomorphisme d'anneaux de* $\mathcal{O}_\varepsilon(D_k^+)$ *sur* $C[[x]]_{1/k}$.

Noter que la signification de l'expression "f est G^k-asymptote à $\hat{f}$" est évidente : elle traduit l'asymptoticité de tous les f_i à la *même* série $\hat{f}$; la cohérence vient de ce que les "discontinuités" φ_i sont G^k-plates.

La nature de l'isomorphisme annoncé (c'est-à-dire les algorithmes qui le définissent) est pratiquement plus importante que l'énoncé lui-même; nous allons donc le décrire en détails. On verra que cet isomorphisme se construit par des procédures en *tous points* analogues à l'identification classique des fonctions holomorphes en 0 avec les séries entières convergentes.

3.3. *Définition de l'homomorphisme canonique* $\mathcal{O}_\varepsilon(D_k^+)$ *dans* $C[[x]]_{1/k}$.

Soit $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(D_k^+)$, représenté par une famille (U_i, f_i). On lui applique la procédure déjà décrite au § 1.1 : on choisit un disque D de rayon r contenu dans la réunion des U_i, de bord γ, puis un rayon ℓ_i de D dans chaque secteur $U_i \cap U_{i+1}$; on note T_i le triangle limité par ℓ_{i-1}, ℓ_i et γ, on note f la fonction, holomorphe par morceaux, égale à f_i sur T_i ; on garde à l'esprit que f se prolonge analytiquement des deux côtés de chaque coupure ℓ_i.

Le fait que les f_i sont *bornées* permet d'écrire, en utilisant l'intégrale de Cauchy :

$$f(x) = \sum_i \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial T_i} \frac{f(u)}{u-x} du = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u-x} du + \frac{1}{2i\pi} \sum_i \int_{\ell_i} \frac{\varphi_i(u)}{u-x} du.$$

Cette égalité vaut a priori pour tout x dans D privé des coupures ℓ_i. La première intégrale du membre de droite définit une fonction $g_{\gamma,\ell}$ holomorphe sur D, et par conséquent G^∞-asymptote à sa série de Taylor en 0. Le second groupe d'intégrales est justifiable de la Proposition (2.2) : la fonction $h_{\gamma,\ell}$ qu'il définit est, dans toute direction, G^k-asymptote à la série $\Sigma b_n x^n$ où :

$$b_n = \frac{1}{2i\pi} \sum_i \int_{\ell_i} \frac{\varphi_i(u)}{u^{n+1}} du.$$

Nous avons ainsi établi que chaque f_i est bien G^k-asymptote à une même série $\hat{f} \in C[[x]]_{1/k}$. La série f est indépendante des choix faits dans la construction, par unicité du développement asymptotique. Elle ne dépend pas non plus du représentant choisi de la quasi-fonction f puisque ces représentants sont déterminés modulo des fonctions exponentiellement plates de niveau k.

Il est clair que l'application $f \to \hat{f}$ est un homomorphisme d'anneaux.

Enfin, c'est une *injection*. En effet, $f = 0$ implique, comme nous l'avons rappelé au Chapitre 2 (§ 1), que chaque f_i est G^k-plate sur U_i (c'est une conséquence de la formule de Stirling). Il nous reste à voir que toute série $\hat{f} \in C[[x]]_{1/k}$ représente effectivement un élément de $\mathcal{O}_\varepsilon(D_k^+)$. Avant d'y venir, il nous faut donner quelques

3.4. *Compléments à la construction précédente.*

1) Avec les notations du paragraphe précédent, posons :

$$a_n(r) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u^{n+1}} du \qquad \alpha_n(r) = \frac{1}{2i\pi} \sum_i \int_{\ell_i} \frac{\varphi_i(u)}{u^{n+1}} du.$$

(On imagine ici les rayons ℓ_i fixés, et le rayon r du cercle γ variable.)

Le coefficient a_n de la série f est $a_n = a_n(r) + \alpha_n(r)$ quel que soit r. Nous affirmons que $a_n(r) \to a_n$ quand $r \to 0$. Mais cette convergence n'est naturellement pas uniforme en n, et il est important de la préciser. On a l'inégalité :

$$|\alpha_n(r)| \leq C \cdot \frac{e^{-(\rho/r)^k}}{r^{n-k}} \quad \text{pour une constante } C > 0 \text{ convenable}$$

(rappelons qu'ici ρ désigne le type de f, définie comme ε-holomorphe sur le disque $D_{k,\rho}$). Cette inégalité se démontre facilement comme conséquence de l'estimation asymptotique classique de la fonction de Prym :

$$\Gamma(a,u) = \int_u^\infty e^{-t}t^{a-1}dt \leq \frac{e^{-u}u^a}{u-a+1} \qquad (a>1,\ u>a-1)$$

(*cf.* [Ol], p. 70).

Cette inégalité a une interprétation très agréable si nous revenons au vocabulaire ANS. Choisissons le rayon r de façon que le cercle γ soit intérieur au domaine $D_{k\rho}$ de définition de f. Cela veut dire que r est infiniment petit, et plus précisément tel que :

$$\exp -(\rho/r)^k \approx \varepsilon.$$

On en déduit alors, par des calculs faciles, que :

$$a_n - a_n(r) \approx \varepsilon$$

tant que l'entier n ne dépasse pas l'ordre de grandeur défini par l'*infiniment grand* :

$$\frac{\ell n 1/\varepsilon}{\ell n \ell n 1/\varepsilon}.$$

Ceci signifie que les coefficients a_n de f sont effectivement donnés par les intégrales de Cauchy usuelles pour *tous les entiers n standard* (et même au-delà, mais ce phénomène est normal par le principe de permanence). On a ici une jolie illustration d'un des aphorismes de Reeb pour définir les vertus de l'ANS : elle permet de remplacer une expression $\forall x\exists y$ par $\exists y\forall x$, dans des conditions appropriées bien sûr. Dans notre cas, la propriété "$\forall n\exists r$ tel que $a_n \approx a_n(r)$" se trouve remplacée par "$\exists r\forall n$ *standard* : $a_n \approx a_n(r)$".

2) Le cas des ε-fonctions ramifiées.

On peut considérer l'anneau $\mathcal{O}_\varepsilon(D_k^+)$ des ε-fonctions holomorphes sur le revêtement universel D_k^+ de $D_k\backslash\{0\}$, avec une définition analogue. Mais on est obligé alors d'avoir recours à des recouvrements infinis, et il n'y a aplus d'analogue du théorème 2.2. Par contre, disons que $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(D_k^+)$ est *α-ramifiée* (α = nombre >0 donné) si $f(x) = g(x^\alpha)$ pour un $g \in \mathcal{O}_\varepsilon(D_{k/\alpha}^+)$ ($g = \rho_\alpha f$ avec les notations relatives à la ramification posées au chapitre 2). Alors il est clair que les ε-fonctions α-ramifiées constituent un anneau isomorphe par définition à $\mathcal{O}_\varepsilon(D_{k/\alpha}^+)$, et que nous noterons $\mathcal{O}_\varepsilon^\alpha(D_k^+)$. Les constructions précédentes plongent cet anneau dans l'anneau des séries formelles α-ramifiées $C^\alpha[[x]]_{1/k}$, de niveau Gevrey k (ordre Gevrey $1/k$ dans les notations classiques). La suite va montrer que ce plongement est aussi un isomorphisme.

3.5. *Sommation dans D_k^+ des éléments de $C[[x]]_{1/k}$.*

Il s'agit ici de montrer que toute série entière $\hat{f} \in C[[x]]_{1/k}$ est la G^k-série de Taylor en 0 d'une ε-fonction $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(D_k^+)$, unique d'après 3.3. Nous avons déjà donné en remarque au chapitre 2 l'indication principale : on utilise la transformation de Borel-Laplace *tronquée*. Il nous faut maintenant préciser ceci.

On va d'abord étudier le cas où $k = 1$. On passera ensuite au cas général à l'aide des opérateurs de ramification. Le recours à Borel-Laplace semble nous éloigner de la théorie de Cauchy classique; nous verrons au contraire que cette technique correspond très exactement à la philosophie de Cauchy, mais ceci ne deviendra pleinement apparent qu'avec l'étude des anneaux de ε-fonctions holomorphes *polarisés* (c'est-à-dire sur des croissants).

Soit $\hat{f} = \sum_{n\geq 1} a_n x^n \in C[[x]]_1$ (on prend $f(0) = 0$ pour des raisons vues au chapitre 2); précisons la croissance des coefficients en posant :

$$R = \mathrm{Sup}\{r \mid \exists C > 0 : |a_n| \leq C.\Gamma(n)/r^n\}. \tag{3.5.1}$$

Le nombre R sera appelé, pour une raison qui va bientôt apparaître, le rayon de convergence de $\hat{f}$ au niveau 1.

On considère maintenant la série $\hat{f}(\xi) = \mathcal{B}\hat{f} = (1/\xi)\sum_{n\geq 1} a_n \xi^n/\Gamma(n)$ (transformée de Borel de $\hat{f}$). Par définition, elle converge sur le disque ouvert D_R de centre 0 et de rayon R, et nous désignerons sa somme par f. Soit a un point de D_R et posons :

$$f_a(x) = \int_0^a e^{-\xi/x} f(\xi)d\xi \quad \text{(transformée de Laplace tronquée)}. \tag{3.5.2}$$

LEMME 3.5.1. — *La fonction f_a est holomorphe dans $\mathbf{C}^*$; étant donné $0 < r < |a|$, on a, sur tout secteur $V(d,\theta)$ ($d = \mathbf{R}^+.a$; θ assez petit) :*

$$|f_a(x) - f_n(x)| \leq K(r,\theta)\Gamma(n)|\frac{x}{r}|^n$$

pour tout n, où K ne dépend que de r et θ.

La démonstration repose sur des estimations simples, du même type que celles déjà rencontrées; nous la laisserons au lecteur.

Ce lemme signifie que f_a est G^1-asymptote à $\hat{f}$ au voisinage de la direction d déterminée par a : il implique plus précisément que, étant donné $r < R$, si l'on choisit assez de points a équirépartis sur un cercle de centre 0 et de rayon $\rho \in]r, R[$, la famille des fonctions f_a définit une ε-fonction holomorphe sur le disque infinitésimal $D_{1,r}$, admettant $\hat{f}$ comme série de Taylor en 0.

Ceci achève la démonstration du Théorème 3.1 dans le cas $k = 1$. Comme l'anneau $C[[x]]_1$ est stable par la dérivation d/dx, on en déduit qu'il en est de même de $\mathcal{O}_\varepsilon(D_1^+)$. L'algorithme précédent explique aussi pourquoi nous avons appelé R le rayon de convergence de niveau 1 de la série $\hat{f}$: pour tout $r < R$, il associe à $\hat{f}$ une ε-fonction sur le disque $D_{1,r}$, et ces fonctions sont naturellement compatibles avec les inclusions $D_{1,r} \subset D_{1,r'}$ $(r < r')$; le nombre R précise donc jusqu'où la série $\hat{f}$ "converge" dans l'"ensemble" des points de niveau strict 1 c'est-à-dire les points x tels que $\exp -(r/x)/\varepsilon$ soit infiniment proche d'un nombre standard).

Montrons maintenant comment on passe au cas général des séries entières de niveau $k \neq 1$. Il n'y aura plus d'analyse à faire ici, mais seulement des manipulations symboliques avec la ramification. On notera d'abord que l'algorithme précédent fonctionne sans changement pour les séries ramifiées $C^\alpha[[x]]_1$ (séries entières en x^α, $\alpha > 0$ donné).

Soit donc $\hat{f} = \sum_{n\geq 1} a_n x^n \in C[[x]]_{1/k}$. Introduisons la série $\rho_k \hat{f} \in C^{1/k}[[x]]_1$ (série ramifiée, mais Gevrey 1), puis sa transformée de Borel $\mathcal{B}\rho_k f = (1/\xi)\Sigma a_n \xi^{n/k}/\Gamma(n/k)$, ou mieux la *forme différentielle* $\mathcal{B}\rho_k f.d\xi$ (nous nous expliquerons sur cette variation conceptuelle un peu plus bas). Au chapitre 2, nous avons défini la somme d'une série k-sommable dans la direction d comme l'intégrale (de Laplace) sur d^k de la forme $(\exp -\xi/x)\mathcal{B}\rho_k f.d\xi$, "déramifiée" ensuite par application de la transformation $(\rho_k)^{-1} = \rho_{1/k}$. Comme dans le cas $k = 1$, nous allons employer ici une intégrale de Laplace tronquée. Ceci suffit à justifier l'extension cherchée.

Nous allons cependant préciser un peu plus les formules définissant l'homomorphisme $C[[x]]_{1/k} \to \mathcal{O}_\varepsilon(D_k^+)$ inverse de 3.3.

Du point de vue "symbolique", on écrira :

$$\hat{f} \to f_k.d\xi = \rho_{1/k}[\mathcal{B}\rho_k f.d\xi] = \mathcal{B}_k f \to f_a = \mathcal{L}_{k,a}[f_k.d\xi] \tag{3.5.3}$$

où :

(3.5.4)

$$\mathcal{B}_k f = k\Big(\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\Gamma(n/k)}\xi^n\Big)\frac{d\xi}{\xi} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{k,a}[\mathcal{B}_s f] = \int_0^a e^{-(\xi/x)^k} f_k(\xi) d\xi.$$

La définition de $\mathcal{L}_{k,a}$ est, symboliquement, de la forme :

$$\mathcal{L}_{k,a} = \rho_{1/k}\mathcal{L}\rho_k$$

où $\mathcal{L}$ est une intégrale de Laplace ordinaire, tronquée en un point dépendant de a et de k. Ces formules, proches de la *transformation de Leroy*, ont l'avantage de ne pas introduire de ramification dans la forme $\mathcal{B}_k f$, que nous appellerons désormais :

Le mineur d'Ecalle, au niveau k, de la série $\hat{f}$.

Nous reviendrons plus tard sur les propriétés algébriques de l'application qui, à chaque $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{1/k}$ associe son mineur, forme différentielle analytique sur un disque (*non* infiniment petit !) de centre 0. Nous expliquerons alors aussi de quelle façon les formules sommatoires (3.5.2) et (3.5.4) sont de même nature que la sommation usuelle des séries convergentes. Ceci fait, il deviendra parfaitement naturel de *considérer toute série de niveau Gevrey k comme une série convergente, dont le domaine de convergence est le disque infiniment petit* D_k^+. Nous aurons ainsi donné un sens précis à certaines des considérations d'E. Borel dans son célèbre mémoire sur les séries divergentes.

3.6. *Complément : la procédure de sommation "au plus petit terme".*

Considérons d'abord, pour simplifier, le cas de la série d'Euler (*cf.* Chap. 2 § 5) :

$$f = \sum_{n\geq 1} \Gamma(n)x^n = \sum_{n\geq 0} n!x^{n+1} \in C[[x]]_1$$

qui joue, pour les séries Gevrey 1, le rôle de la série géométrique pour les séries convergentes. Le rayon de convergence G^1 de f est égal à 1 : elle définit une ε-fonction f sur le disque $D_{1,1}$. La fonction d'Euler étudiée au Chapitre 2 apparaîtra plus loin, dans un sens naturel, comme le prolongement analytique de cette ε-fonction et le phénomène de Stokes sera provoqué par la présence d'une *singularité infiniment proche de* 0 sur l'axe $\mathbf{R}^+$; pour l'instant, ici, nous ne nous occupons que de la sommation, à ε près, de f à l'intérieur de son disque de convergence $D_{1,1}$. Considérons donc, pour fixer les idées, la fonction f_a définie par (3.5.2), où a est un point de $\mathbf{R}^+$, $a < 1$: on a donc, par le Lemme 3.5.1 :

$$|f_a(x) - f_n(x)| \leq K(r).\Gamma(n)(x_0/r)^n \qquad (x_0 \in \mathbf{R}^+)$$

pour tout $x \in [0, x_0]$ et tout $]0, a[$.

Choisissons alors $x_0 \in D_{1,r} \cap \mathbf{R}^+$, par exemple le point défini par $\exp -r/x_0 = \varepsilon$. Le second membre de l'inégalité ci-dessus est *minimum* lorsque $n \approx r/x_0 = \ell n(1/\varepsilon)$; dans ce cas, on obtient :

$$|f_a(x) - f_n(x)| \leq K(r)\Gamma(u)u^{-u} \quad \text{où } u = r/x_0.$$

Il en résulte immédiatement, par Stirling, que ce nombre est $\approx \varepsilon$ (et en fait infiniment plus petit que ε). Ces mêmes estimations valent dans toutes les directions. Conclusion : *La ε-fonction f est aussi définie, sur tout disque $D_{1,r}$ $(r < 1)$, par le polynôme (non standard) f_n, où $n \approx \ell n(1/\varepsilon)$* (tout n différent de $\ell n 1/\varepsilon$ par un nombre standard convient).

C'est là le principe classique de la "sommation au plus petit terme". Il s'étend facilement au cas des séries Gevrey de niveau k quelconque; on est amené dans ce cas à prendre le polynôme f_n avec $n \approx k.\ell n(1/\varepsilon)$.

Ce principe prolonge celui, trivial, de la sommation d'une série formelle arbitraire $\Sigma a_n x^n$ dans le voisinage infinitésimal d'ordre n de 0 (*cf.* ce Chap., § 1.1), qui est définie par le polynôme f_n évidemment.

Nous le verrons réapparaître plus tard dans des contextes bien plus généraux.

4. Les ε-fonctions holomorphes sur les couronnes de centre 0.

4.1. *Remarques préliminaires et définitions.*

Notre but est ici d'étendre le théorème classique (séries de Laurent) : si f est une fonction holomorphe sur la couronne $C = C_{R''}^{R'}$ $(R'' < |x| < R')$ de centre 0, alors $f = \hat{f}_0 - \hat{f}_\infty$ où $\hat{f}_0 \in C\{x\}$ est holomorphe sur le disque $|x| < R'$, et $\hat{f}_\infty \in C\{1/x\}$ est holomorphe sur le disque $|x| > R''$; les coefficients a_n, $n > 0$ (resp $n < 0$) de $\hat{f}_0$ (resp $\hat{f}_\infty$) sont donnés par :

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u^{n+1}} du$$

où γ est un cercle situé dans $\mathbb{C}$, entourant une fois l'origine.

Une première extension évidente consiste à envisager le cas d'une couronne $C = C_{k'',\rho''}^{R'}$ dont le rayon extérieur reste fini, mais qui pénètre dans le voisinage infinitésimal de 0 jusqu'au niveau k''. Nous *définirons $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(C)$ comme une fonction holomorphe* (usuelle puisque le domaine contient un ouvert standard) *satisfaisant une majoration* :

$$|f(x)| \leq M . \exp |\rho''/x|^{k''} .$$

Cette condition est naturellement suggérée par les faits rappelés au § 2.

Le théorème précédent montre qu'alors, dans la décomposition canonique $f = \hat{f}_0 - \hat{f}_\infty$, la série $\hat{f}_\infty$ appartient à $C[[1/k]]_{-k''}$, en vertu de 2.3.

Si, allant encore plus loin, nous remplaçons *en outre* R' par le symbole $-(k', \rho')$ (la couronne C pénètre aussi dans le voisinage infinitésimal de l'infini, jusque dans le niveau k'), nous dirons que $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(C)$ si elle vérifie la majoration précédente au voisinage de 0, et $|f(x)| \le M.\exp|\rho' x|^{k'}$ au voisinage de l'infini : la série $\hat{f}_0$ représentera alors une fonction entière, et plus précisément $\hat{f}_0 \in C[[x]]_{-k'}$, toujours d'après 2.3 (situation inchangée pour $\hat{f}_\infty$).

Le fait nouveau consiste à prendre maintenant une couronne $C = C^{k',\rho'}_{k'',\rho''} = D_{k',\rho'} \backslash D_{k'',\rho''}$ entièrement contenue dans le voisinage infinitésimal de l'origine. A cause de ce qui précède et du § 3, nous définirons $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(C)$ comme une famille finie (U_i, f_i) telle que :

i) *Les U_i sont des secteurs ouverts de sommet 0, recouvrant un voisinage (épointé) de l'origine, et bien enchaînés.*

ii) *Pour tout i, f_i est holomorphe sur U_i, et $|f_i(x)| \le M \exp|\rho''/x|^{k''}$* ($M$ dépend de f).

iii) *Pour tout i, $\varphi_i = f_{i+1} - f_i$ est majorée en module, sur $U_i \cap U_{i+1}$, par $M \exp -|\rho'/x|^{k'}$.*

En outre (comme dans 3.1), *deux telles familles définissent le même f si, en se ramenant au même recouvrement, leur différence vérifie (iii).*

Attention : les espaces $\mathcal{O}_\varepsilon(C)$ de ε-fonctions holomorphes sur les couronnes "sauvages" que nous avons introduits *ne sont pas des anneaux* (mais seulement des espaces vectoriels), au contraire des $\mathcal{O}_\varepsilon(D)$ du § 3; ceci est dû à la présence des *conditions de croissance*, dont les types ne sont pas stables par multiplication. Nous reviendrons là dessus un peu plus bas.

Voici le résultat qui généralise le développement en série de Laurent dans ce contexte.

THÉORÈME 4.2. — *Soit*

$$C = D_{k',\rho'} \backslash D_{k'',\rho''} = D_{k',\rho'}(0) \cap D_{-(k'',\rho'')}(\infty)$$

une couronne infinitésimale de centre 0 ($(k'',\rho'') < (k',\rho')$). Toute ε-fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(C)$ se décompose en :

$$f = \hat{f}_0 - \hat{f}_\infty$$

où $\hat{f}_0 \in C[[x]]_{1/k'}$ et $\hat{f}_\infty \in C[[1/x]]_{-1/k''}$ (plus précisément : $f_0 \in \mathcal{O}_\varepsilon[D_{k',\rho'}(0)]$ et $f_\infty \in \mathcal{O}_\varepsilon[D_{-(k'',\rho'')}(\infty)]$. Cette décomposition est unique aux constantes près.

Passons à la démonstration. Soit f définie comme en 4.1, avec les niveaux et types (k',ρ') et (k'',ρ''). On choisit une couronne Γ de centre

0, limitée par deux cercles γ'' et γ', contenus dans la réunion des U_i. On choisit des rayons ℓ_i de Γ contenus dans les secteurs $U_i \cap U_{i+1}$: $\ell_i = \ell_i' - \ell_i''$ où ℓ_i' et ℓ_i'' sont les rayons correspondants de γ' et γ''. On désigne par f la fonction holomorphe par morceaux égale à f_i sur la partie Γ_i de Γ située entre ℓ_{i-1} et ℓ_i.

En appliquant la formule de Cauchy à f sur les contours $\partial\Gamma_i$, comme dans la démonstration du Th. 3.2, on aboutit à :

$$(4.2.1) \qquad 2i\pi f(x) = \int_\gamma \frac{f(u)}{u-x}du + \sum_i \int_{\ell_i'} \frac{\varphi_i(u)}{u-x}du - \int_{\gamma'} \frac{f(u)}{u-x}du - \int_{\ell_i''} \frac{\varphi_i(u)}{u-x}du = f_0' - f_\infty''$$

pour $x \in \Gamma \backslash \cup \ell_i$ a priori, mais l'égalité se conserve en traversant les coupures, comme nous l'avons déjà vu. Dans cette formule, f_0' est une ε-fonction holomorphe sur le disque $D_{k',\rho'}$ de centre 0 par le Th. 3.2; quant à f_∞'', elle est holomorphe sur $C\backslash\{0\}$, bornée à l'infini (l'intégrale de Cauchy sur γ'' donne une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ privé des coupures ℓ_i'', et la correction par les intégrales de Cauchy radiales sur les ℓ_i' supprime les singularités); c'est donc une fonction entière de $1/x$, et l'égalité (4.1.1) montre qu'elle est majorée en module par $C.\exp|\rho''/x|^{k''}$; elle est donc définie par une série $f_\infty \in C[[1/x]]_{-1/k''}$, d'après 2.3. Nous avons ainsi établi l'existence de la décomposition annoncée.

Pour l'unicité aux constantes près de cette décomposition, supposons que :

$$f_0 - f_\infty = g_0 - g_\infty$$

au sens des ε-fonctions, avec $f_0, g_0 \in C[[x]]_{1/k'}$ et $f_\infty, g_\infty \in C[[1/x]]_{-1/k''}$.

Cette égalité implique immédiatement que $f_\infty - g_\infty$, fonction entière de $1/x$, est bornée au voisinage de 0, et c'est donc une constante par le Théorème de Liouville. Ceci achève la démonstration.

Compléments.

1) Posons, en conservant les notations précédentes :

(4.2.2)

$$a_n(r') = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'} \frac{f(u)}{u^{n+1}}du \quad \text{et} \quad b_n(r'') = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma''} f(u)u^{n+1}du \quad (n \geq 0)$$

où r est le rayon d'un cercle γ contenu dans la couronne Γ. Notons d'autre part, a_n et b_n les coefficients des séries f_0 et f_∞ respectivement. Alors, pour tout n, $a_n(r)$ et $b_n(r)$ tendent vers a_n et b_n quand $r \to 0$. C'est clair pour les a_n, car la première intégrale (4.2.2) est inchangée quand on y remplace la quasi-fonction f par f_0, et l'on applique alors 3.4.1. Pour les b_n, on écrit évidemment :

$$b_n(r) = b_n - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f_0(u)u^{n+1}du$$

où la dernière intégrale se majore trivialement par $M.r^{n+2}$ $(M > 0)$.

Il en résulte, comme dans la remarque 3.4.1, que l'on a :

$$(4.2.3) \qquad \begin{aligned} a_n(r) &= a_n (\operatorname{mod} \varepsilon) \quad \text{pour tout entier } n \text{ standard} \\ b_n(r) &= b_n (\operatorname{mod} \varepsilon) \quad \text{pour tout entier } n \end{aligned}$$

dès que r est un infiniment petit tel que le cercle γ soit situé dans la couronne d'holomorphie C de la ε-fonction f.

2) Comme nous l'avons vu plus haut, l'espace $\mathcal{O}_\varepsilon(C)$ n'est pas un anneau si C est une couronne de types *précisés*. Par contre, il est immédiat de voir que, si l'on fixe deux niveaux $k'' < k'$, la réunion des $\mathcal{O}_\varepsilon(C_{\sigma''}^{\sigma'})$ où $\sigma'' = (k'', \rho'')$ et $\sigma' = (k', \rho')$, sur tous les types ρ'' et ρ', constitue bien un anneau différentiel. Nous désignerons dans la suite cet anneau par le symbole au sens évident $\mathcal{O}_\varepsilon(C_{k''}^{k'})$: $C_{k''}^{k'}$ désigne la couronne infinitésimale non précisée qui pénètre, aussi peu qu'on le voudra, dans les niveaux k' (vers l'extérieur) et k'' (vers l'intérieur).

Il est également très commode d'introduire l'anneau $\mathcal{O}_\varepsilon(C_k)$, réunion des précédents pour tous les $k'' < k$ et les $k' > k$. Ses éléments seront considérés comme les germes de ε-fonctions holomorphes au voisinage de la couronne de *niveau strict* $k > 0$.

3) Les ε-fonctions ramifiées sur les couronnes de centre 0 : de même qu'au § 3, on définit $\mathcal{O}_\varepsilon^\alpha(C)$, espace des ε-fonctions holomorphes α-ramifiées sur une couronne C de centre 0 (infinitésimale ou non) située sur le revêtement universel $\mathbf{C}_\infty$ de $\mathbf{C}\setminus\{0\}$. On a un énoncé analogue au théorème 4.2, avec les modifications évidentes dues à la ramification.

5. Les ε-fonctions sur les croissants infinitésimaux.

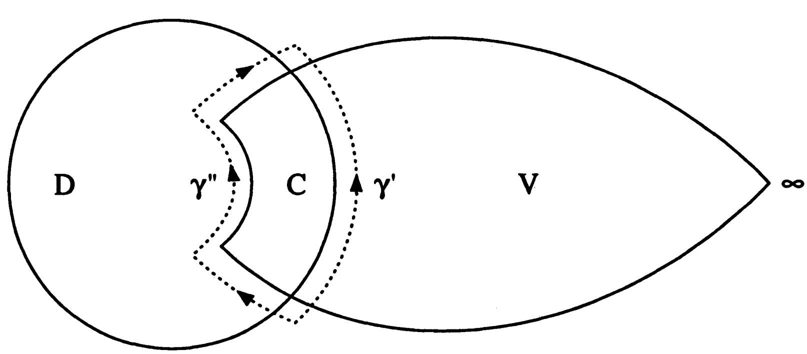
5.1. *Définitions et remarques préliminaires.*

Rappelons qu'un *croissant* de sommet 0 est l'intersection d'une couronne C de centre 0 et d'un secteur V de sommet 0; la couronne est définie par ses symboles (rayons, ou niveaux et types), et le secteur par son axe d et son ouverture π/t (t étant aussi appelé le niveau angulaire : on verra au chapitre suivant la commodité de ce nom); il est entendu qu'on travaille ici sur la surface de Riemann $\mathbf{C}_\infty$ du logarithme. Les difféomorphisme de ramification ρ_α $(\alpha > 0)$ de $\mathbf{C}_\infty$ transforment tout croissant en un croissant, avec des règles évidentes de modification de leurs caractéristiques géométriques. Dans l'immédiat, nous allons considérer seulement des croissants pour lesquels $t > 1/2$, c'est-à-dire qui font *moins de un tour*. (On peut toujours se ramener à cette situation par ramification).

Dans l'étude des quasi-fonctions holomophes sur les croissants, les *phénomènes de bords* vont jouer un rôle qui n'est pas encore apparu dans les cas précédents. Pour obtenir des énoncés commodes, nous n'évoquerons que des croissants "fermés", en suivant la convention usuelle : une fonction sur un fermé est définie sur un voisiange arbitrairement petit de ce fermé.

Envisageons d'abord le cas d'un croissant standard $C = \{x | R'' \leq |x| \leq R', |\operatorname{Arg} x - \operatorname{Arg} d| \leq \pi/t\}$. Bien entendu, une ε-fonction holomorphe f sur C est une fonction holomorphe au sens ordinaire, sur un croissant (ouvert) un peu plus grand. Considérons C comme l'intersection du disque D de centre 0 et de rayon R' et du secteur V de sommet ∞, d'axe d, et de rayon $1/R''$ $(V = \{x \mid 1/|x| \leq 1/R'', |\operatorname{Arg} x - \operatorname{Arg} d| \leq \pi/t\}$.) Toute fonction $f \in \mathcal{O}(C)$ se décompose en $f = f_0 - f_\infty$ avec $f_0 \in \mathcal{O}(D) \in \mathbf{C}\{x\}$ et $f_\infty \in \mathcal{O}(V)$, nulle à l'infini (et toujours la même convention quant aux fonctions holomorphes sur un fermé); attention : f_∞ n'a maintenant aucune raison d'être définie par une série en $1/x$. Cette décomposition s'obtient par la technique usuelle déjà employée pour les couronnes, avec la formule de Cauchy (figure ci-dessous) :

$$f_0(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u-x} du \qquad f_\infty(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \frac{f(u)}{u-x} du$$



Cette décomposition est *unique* modulo les fonctions holomorphes sur le fermé $D \cup V$, nulles à l'infini.

Notre objectif est d'étendre cette remarque au cas des croissants *non standard*, c'est-à-dire qui pénètrent dans le voisinage infinitésimal de 0 (et aussi, éventuellement, de l'infini).

Tant que le croissant C contient des points standard, $\mathcal{O}_\varepsilon(C)$ sera défini comme précédemment, en ajoutant les conditions de croissance imposées par la position des bords interne et externe de C. Le même calcul montre alors que :

1) Soit $C = D \cap V$, avec $D = D(0, R')$ et V est le secteur de sommet ∞, d'axe d, d'angle π/t, de symbole externe $-(k'', \rho'')$ (c'est-à-dire qui pénètre dans le voisinage infinitésimal de 0 jusqu'au niveau k'' et type ρ''). Alors tout $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(C)$ s'écrit $f = f_0 - f_\infty$, où $f_0 \in \mathcal{O}(D)$ et $f_\infty \in \mathcal{O}_\varepsilon(V)$ est nulle à l'infini : par définition, f_∞ est majorée en module par $M.\exp|\rho''/x|^{k''}$ pour tout x tel que $|\operatorname{Arg} x - \operatorname{Arg} d| \leq \theta$ ($\theta > \pi/t$, dépendant de f).

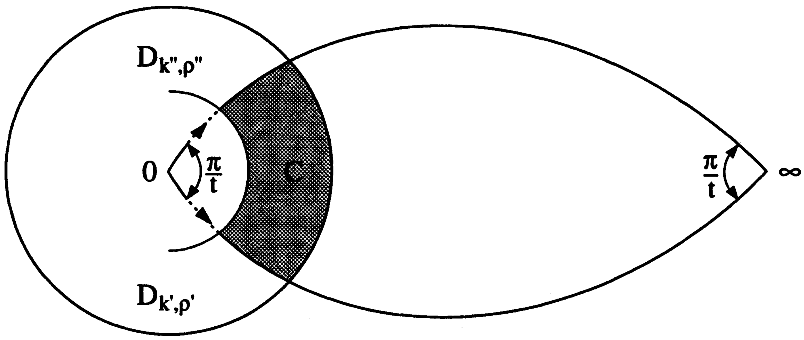
2) Si C pénètre *aussi* dans le voisinage de l'infini, c'est-à-dire si nous remplaçons R' par un symbole $-(k', \rho')$, la remarque précédente vaut toujours, mais f_0 est dans ce cas une fonction entière majorée par $M.\exp|\rho' x|^{k'}$. Remarquons que, dans cette situation, nous pourrions aussi décomposer f en nous plaçant du point de vue de l'infini (différence d'une fonction entière centrée à l'infini, et d'une fonction holomorphe sur un secteur de sommet 0).

Venons-en maintenant à l'essentiel, c'est-à-dire les ε-fonctions holomorphes sur les croissants contenus dans le voisinage infinitésimal de 0. Nous regardons toujours un tel croissant comme intersection d'un disque *infinitésimal* $D_{k',\rho'}$ de centre 0 et d'un secteur V *infiniment long* de sommet ∞, limité par le symbole $-(k'', \rho'')$, avec $(k'', \rho'') \prec (k', \rho')$.

Nous définirons alors $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(C)$ de façon analogue aux ε-fonctions holomorphes sur la couronne infinitésimale limitée par les symboles (k'', ρ'') et (k', ρ') (*cf.* 4.1), avec la seule modification que voici :

Les secteurs ouverts U_i (toujours bien enchaînés) recouvrent un secteur fermé de sommet 0, d'axe d, d'angle π/t, de rayon arbitrairement petit.

(On notera qu'avec cette définition tout représentant de f "vit" sur un secteur d'ouverture légèrement supérieure à π/t).



On a alors le

THÉORÈME 5.2. — *Soit $C = D \cap V$ un croissant infinitésimal de sommet 0, limité radialement par les symboles $(k'', \rho'') \prec (k', \rho')$, d'axe d et d'angle π/t.*

i) *Si $t > k'$, l'application de restriction $\mathcal{O}_\varepsilon(V) \to \mathcal{O}_\varepsilon(C)$ est surjective. Son noyau est formé des $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(D \cup V)$ nulles sur $D(|f(x)| \leq M.\exp -|\rho'/x|^{k'})$.*

ii) *Si $t \leq k'$, tout $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(C)$ se décompose en :*

$$f = f_0 - f_\infty \qquad f_0 \in \mathcal{O}_\varepsilon(D) \subset C[[x]]_{1/k'} \quad f_\infty \in \mathcal{O}_\varepsilon(V) \text{ (bornée à l'infini).}$$

Cette décomposition est unique modulo les éléments de $\mathcal{O}_\varepsilon(D \cup V)$, c'est-à-dire les fonctions homorphes sur le secteur illimité $V(d, \pi/t)$, bornée à l'infini, définies par des séries k'-sommables dans les directions δ telles que $|\operatorname{Arg}\delta - \operatorname{Arg} d| < \theta$ ($\theta > \pi/k' - \pi/t$, dépendant de f).

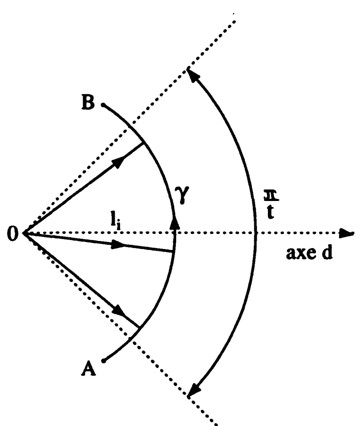
La différence entre les cas $t > k'$ et $t \leq k'$ est essentielle; le premier correspond à un phénomène "mou", comme avec les fonctions C^∞. Le second (cas des *gros croissants*) respecte la logique de l'holomorphe; la décomposition obtenue correspond à ce qu'Ecalle appelle décomposition en *pro-fonction* (notre f_0) et *rétro-fonction* (notre f_∞).

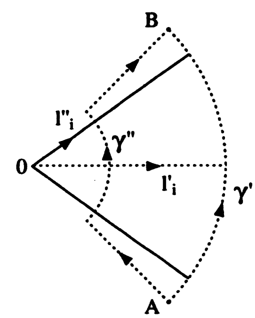
Démonstration. — C'est naturellement toujours le même jeu avec l'intégrale de Cauchy, mêlant ce que nous avons fait pour les couronnes infinitésimales et les croissants standard.

La quasi-fonction f étant définie par la famille (U_i, f_i), on va travailler dans le secteur ouvert U réunion des U_i. Nous notons toujours $\varphi_i = f_{i+1} - f_i$ la "discontinuité" de f sur le secteur $U_i \cap U_{i+1}$. Soit γ un arc joignant deux points situés près des bords latéraux de U (voir figure ci-dessous), et des rayons $\ell_i \subset U_i \cap U_{i+1}$ d'origine 0 et d'extrémités situées sur γ. Considérons l'expression :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-x}du + \frac{1}{2i\pi}\sum_i \int_{\ell_i} \frac{\varphi_i(u)}{u-x}du \tag{5.2.1}$$

où f est incarnée, sur le chemin γ, par les f_i successifs sur les arcs limités par les extrémités des rayons ℓ_i.





La Proposition 2.3 montre que cette expression définit une ε-fonction $f_0 \in \mathcal{O}_\varepsilon(D)$, repréentée par (5.2.1) et ses prolongements analytiques à travers les coupures ℓ_i, pour x voisin de 0. Noter que f_0 ne dépend que des extrémités de l'arc γ.

D'autre part, (5.2.1) définit aussi une fonction holomorphe $f_\infty \in \mathcal{O}_\varepsilon(V)$, en la considérant avec x plus éloigné de 0 que γ, et $|\operatorname{Arg} x - \operatorname{Arg} d| <$ angle$(U)/2$, et en remarquant qu'elle ne dépend aussi que des extrémités de γ.

Ceci dit, la formule de Cauchy montre que $f = f_0 - f_\infty$: on exprimera par exemple f_0 avec un arc de cercle γ' d'extrémités A et B, et f_∞ avec un arc γ'' de mêmes extrémités, mais formé de deux segments d'origines A et B se dirigeant vers 0, et d'un arc de cercle plus proche de 0 que γ'.

On peut maintenant conclure :

Si $t > k'$, la sommation tronquée (*cf.* § 3.5) des séries Gevrey montre que f_0 est représentable par un élément de $\mathcal{O}_\varepsilon(V)$ qui est borné. La première partie du théorème suit trivialement.

Supposons maintenant $t \leq k'$, et que l'on ait $f_0 - f_\infty = g_0 - g_\infty$ avec $f_0, g_0 \in \mathcal{O}_\varepsilon(D)$ et $f_\infty, g_\infty \in \mathcal{O}_\varepsilon(V)$. L'égalité de ε-fonctions $f_0 - g_0 = f_\infty - g_\infty$ signifie que la fonction holomorphe (ordinaire) $f_\infty - g_\infty$ est $G^{k'}$-asymptote à la série $f_0 - g_0$ sur un secteur d'axe d et d'ouverture $> \pi/t \geq \pi/k'$. Il en résulte bien que $f_0 - g_0$ est k'-sommable sur ce secteur, de somme $f_\infty - g_\infty$.

5.3. *Remarques et compléments.*

1) Le théorème précédent va nous être très utile techniquement, mais il faut noter qu'il représente un "codage" assez *artificiel* des ε-fonctions sur un gros croissant infinitésimal; ne serait-ce qu'en faisant jouer un rôle privilégié aux séries entières de la variable x, alors que la théorie se place naturellement sur $\mathbf{C}_\infty$! De plus, sa démonstration n'a de sens que si le niveau angulaire t du croissant est $> 1/2$. Nous allons lever cette seconde critique, et voir en même temps que toute ε-fonction holomorphe sur un gros croissant (infinitésimal ou non) admet une infinité de codages en pro- et rétro-fonctions (f_0 et f_∞), si l'on joue avec la ramification.

2) Soit donc $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(C)$, où C est un gros croissant de niveau angulaire t. Son transformé par le difféomorphisme $\rho_\alpha : \mathbf{C}_\infty \to \mathbf{C}_\infty$ est un gros croissant C_α de niveau angulaire t/α, et $\rho_\alpha f \in \mathcal{O}_\varepsilon(C_\alpha)$. A condition de choisir α tel que $t/\alpha > 1/2$, le théorème 5.2 s'applique à $f_\alpha = \rho_\alpha f$, que l'on peut donc décomposer en $f_\alpha = f_{\alpha,0} - f_{\alpha,\infty}$. Il suffit maintenant de revenir à f en appliquant le difféomorphisme inverse $\rho_{1/\alpha}$ pour obtenir une décomposition :

$$f = f_0 - f_\infty$$

avec $f_0 \in \mathbf{C}^\alpha[[x]]_{1/k'}$ (rappelons que cette notation désigne les séries entières de x^α, donc des séries ramifiées si α n'est pas entier, qui sont Gevrey de niveau k', ou d'ordre $1/k'$), et f_∞ est holomorphe sur un secteur V de sommet ∞, d'ouverture $> \pi/k'$, avec une majoration globale sur $V : |f(x)| \leq M.\exp|\rho''/x|^{k''}$. L'indice $\alpha > 0$ étant *fixé*, cette décomposition est unique modulo les éléments de $\mathbf{C}^\alpha[[x]]_{1/k'}$ qui sont k'-sommables en une fonction holomorphe et bornée sur V.

Finalement, tout $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(C)$ admet une infinité de codages ramifiés en 0 : tous les indices de ramification α tels que $\alpha > 1/2t$ (t = niveau angulaire de C) conviennent.

3) Si C est un croissant infinitésimal dont les "bords" interne et externe sont définis par des niveaux k'', k' et des types ρ'', ρ', alors l'espace $\mathcal{O}_\varepsilon(C)$ n'est pas stable par multiplication, comme dans le cas des couronnes infinitésimales. Par contre, si l'on fixe un axe d, des niveaux $k'' < k'$ et un niveau angulaire t, la réunion des espaces $\mathcal{O}_\varepsilon(C)$ sur tous les croissants $C^{k',\rho'}_{k'',\rho''}(d,t)$ (les types ρ'' et ρ' prenant toutes les valeurs) est évidemment un anneau différentiel, que nous noterons, si besoin est, $\mathcal{O}_\varepsilon[C^{k'}_{k''}(d,t)]$.

4) Nous verrons plus bas que les codages vraiment naturels des ε-fonctions sur un gros croissant sont ceux définis par les transformations intégrales $\mathcal{B}_k$ déjà introduites au § 3. Mais nous allons d'abord voir comment le théorème 5.2 permet, avec un minimum d'utilisation de la transformation de Borel-Laplace et de ses variantes, de justifier les règles élémentaires du *prolongement analytique sauvage.*

5.4. *Le théorème fondamental du prolongement analytique sauvage.*

Soient $C_1 \subset C_2$ deux gros croissants; l'application de restriction $\mathcal{O}_\varepsilon(C_2) \to \mathcal{O}_\varepsilon(C_1)$ est une injection : si f est une quasi-fonction holomorphe sur C_2, nulle sur C_1, elle est nulle sur C_2.

Avant de le démontrer, précisons la signification de l'inclusion $C_1 \subset C_2$; elle veut dire, par définition, que :

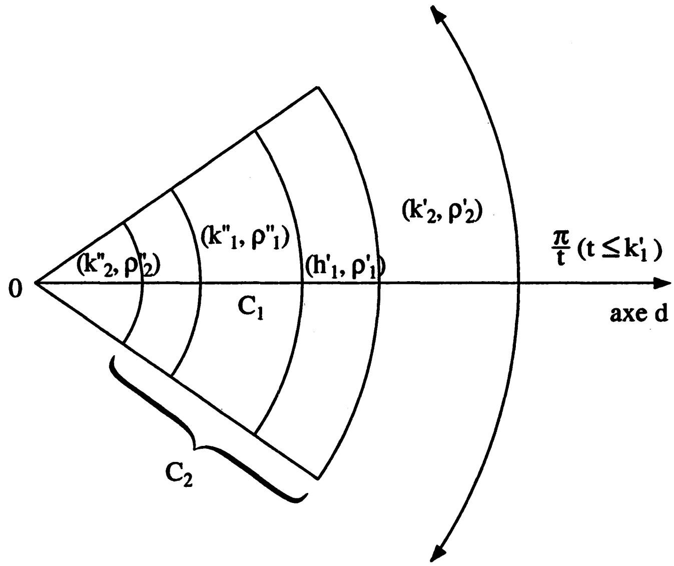
$$\begin{array}{lll}(k''_1,\rho''_1) & > (k''_2,\rho''_2) & \text{(symboles internes des deux croissants)}\\ (k'_1,\rho'_1) & < (k'_2,\rho'_2) & \text{(symboles externes des deux croissants)}\\ \quad t_1 & \geq t_2 & \text{(niveaux angulaires).}\end{array}$$

Si C_1 n'est pas infinitésimal (*i.e.* contient des points standard), l'inclusion signifie que les symboles externes, qui sont maintenant des rayons finis, sont tels que $R_1 < R_2$.

En fait, comme nous l'avons déjà laissé entendre, l'utilisation des domaines infinitésimaux n'est pas indispensable à la théorie; elle fournit cependant une image très précieuse pour guider l'intuition. C'est pourquoi nous insistons dessus.

La démonstration de ce théorème utilise 5.2 et les résultats de base sur la sommabilité énoncés au chapitre 2. Il est commode, et pédagoqique, de la décomposer en deux étapes.

LEMME DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE RADIAL. — *Le théorème est vrai si $C_1 \subset C_2$ ont même axe et même ouverture angulaire π/t (i.e. ne diffèrent que par leurs symboles internes et externes).*



En effet, soit $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(C_2)$ telle que $f = 0$ comme élément de $\mathcal{O}_\varepsilon(C_1)$; nous voulons montrer que $f = 0$ dans $\mathcal{O}_\varepsilon(C_2)$. Appliquons à f le théorème 5.2 sur le croissant C_2 (par ramification, on peut toujours se ramener au cas où le niveau angulaire commun f est $> 1/2$) ; on a donc :

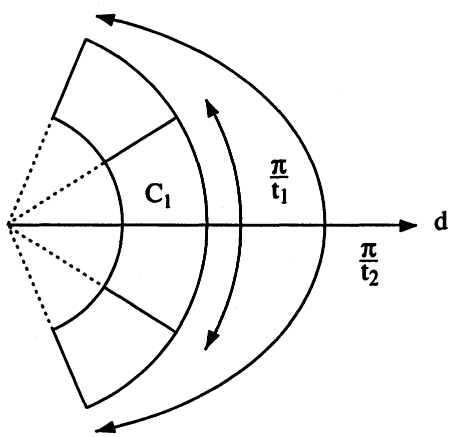
$$f = f_0 - f_\infty \qquad \text{où } f_0 \in \mathcal{O}_\varepsilon(D_2) \subset \mathbf{C}[[x]]_{1/k'} \quad \text{et} \quad f_\infty \in \mathcal{O}_\varepsilon(V_2)$$

avec les notations du théorème 5.2.

Puisque $(k'_1, \rho'_1) < (k'_2, \rho'_2)$ et $(k''_1, \rho''_1) > (k''_2, \rho''_2)$, la décomposition précédente est *aussi* une décomposition canonique de f, au sens du théorème 5.2, sur le croissant C_1. Dire que f est nulle sur C_1 signifie que la série f_0 est *k'_1-sommable sur le secteur* V_1, de somme f_∞. Mais elle est Gevrey-k'_2 et donc aussi k'_2-sommable sur V_2, de somme f_∞, d'après la Proposition 4.3 du chapitre 2. Ceci établit bien que $f = 0$ sur C_2.

Remarque. — Nous n'avons envisagé que le cas où C_1 et C_2 sont des croissants infinitésimaux. Si C_1 seul est infinitésimal, et C_2 est de rayon externe fini R_2, l'argument est encore plus simple : la quasi-fonction $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(C_2)$ est, par définition, une fonction holomorphe usuelle sur un secteur V d'ouverture π/t où $t < k'_1$, avec $|f(x)| \leq M.\exp|\rho''_2/x|^{k''}$; l'hypothèse $f = 0$ sur C_1 signifie que $|f(x)| \leq M.\exp-|\rho'_1/x|^{k'}$, et donc que f est identiquement nulle d'après le principe de Phragmén-Lindelöf.

LEMME DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE ANGULAIRE. — *Le théorème est vrai si $C_1 \subset C_2$ ont mêmes symboles radiaux (i.e. ne diffèrent que par le niveau angulaire).*



Il n'y a quelque chose à démontrer que si les deux croissants sont infinitésimaux. Soit donc $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(C_2)$; appliquons-lui 5.2 : $f = f_0 - f_\infty$; cette décomposition vaut encore sur C_1. Comme dans le cas précédent, $f = 0$ sur C_1 signifie que la série f_0 est k'-sommable sur le secteur V_1 (k' = niveau externe commun aux deux croissants), et de somme f_∞. Mais la fonction holomorphe f_∞ vit, par construction, sur le secteur V_2, où elle vérifie une majoration $|f_\infty(x)| \leq M.\exp|\rho''/x|^{k''}$ (k'', ρ'' = niveau et type internes communs à C_1 et C_2). La Proposition 4.2 du chapitre 2 montre alors, puisque $(k'', \rho'') < (k', \rho')$, que f_0 reste k'-sommable sur V_2, de somme égale à f_∞; ceci signifie précisément que f est nulle sur C_2.

6. Les principes du prolongement analytique sauvage.

Les principes du prolongement analytique élémentaire (en une variable complexe) peuvent se résumer ainsi :

1) Tout germe de fonction f holomorphe en un point 0 détermine un objet *global*. Cet objet se définit à partir des chemins continus γ issus de 0; si l'on peut construire une chaîne finie (D_i, f_i) où les D_i sont des disques recouvrant γ, et chaque f_i une fonction holomorphe sur D_i, de façon que $f_0 = f$, $f_i = f_{i+1}$ sur $D_i \cap D_{i+1}$, le dernier élément de la chaîne est un

germe de fonction holomorphe à l'extrémité A de γ, indépendant des choix faits. De plus, ce germe ne dépend pas du chemin γ (à extrémités fixes 0 et A), tant qu'on le déforme continûment sans causer de rupture dans la construction du prolongement. Tout ceci conduit à la notion de surface de Riemann de la fonction analytique globale engendrée par le germe f. On sait bien que l'emploi des chemins n'est pas essentiel à ces constructions : tout ce qui précède peut s'exprimer avec des chaînes de disques (ce qui revient aussi à se limiter à des chemins polygonaux) et des relations d'équivalence appropriées.

2) Il y a une algorithmique très simple du prolongement, utilisant le développement en série des germes de fonctions holomorphes. Partant de la série $f_0 = \Sigma a_n x^n$ définissant f sur un disque D de centre 0, on peut calculer la série f_A représentant le germe de f en un autre point $A \in D$, voisin du bord de D; si le rayon de convergence de f_A est assez grand, on aura le départ d'une chaîne que l'on pourra éventuellement poursuivre.

La technique du *prolongement analytique sauvage* consiste à travailler exactement de la même façon avec les objets que nous avons définis tout au long de ce chapitre. Nous allons dans ce paragraphe justifier l'analogue "sauvage" de la description topologique du prolongement analytique. Nous développerons la description algorithmique au chapitre suivant.

Les "objets élémentaires" que nous utiliserons sont d'abord évidemment les couples (D, f) où D est un disque (standard) de $\mathbf{C}$ et f une fonction holomorphe sur D. Mais nous y ajoutons maintenant les couples (C, f) où C est un gros croissant basé en un points standard $0 \in \mathbf{C}$ (défini par son axe, ses niveaux interne et externe, et son niveau angulaire), et $f \in \mathcal{O}_\varepsilon(C)$ une quasi-fonction holomorphe sur C. Nous dirons que deux couples (C_1, f_1) et (C_2, f_2) sont *enchaînés* si $C_1 \cap C_2$ contient un *gros* croissant C (cette expression n'étant qu'une formulation géométrique commode d'inégalités reliant les symboles internes, externes, et angulaires de C_1 et C_2), avec $f_1 = f_2$ sur C; le théorème fondamental du prolongement analytique sauvage garantit que chacun des couples détermine l'autre.

... *(Inachevé)*

II. REMARQUES SUR LE RETARD A LA BIFURCATION

Après avoir écouté la version de Neishtadt par Wallet et Fruchard, je veux attirer l'attention sur quelques remarques simples; la plus importante étant que le phénomène principal n'a rien à voir avec la bifurcation, et qu'il ne s'agit pas en général de résurgence, mais d'asymptoticité Gevrey.

1. Remarque générale sur des champs lents-rapides.

Soit dans $\mathbb{C}^{p+1}(\lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}^p)$ le champ de vecteurs :

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(\lambda, x) && f(0,0) = 0 \quad f \textit{ holomorphe} \\ &\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda} = \varepsilon && \varepsilon = \text{ petit paramètre } \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

vérifiant les deux hypothèses suivantes :

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \in GL(n, \mathbb{C})$ est une matrice *inversible*.

(ii) La courbe lente $x = C_0(\lambda)$ est *transverse au champ* [$C_0(\lambda)$ solution de $f(\lambda, x) = 0$]. Il suffit en fait que $C_0 \not\equiv 0$.

Pour $\varepsilon = 0$, la courbe $C_0 : x = C_0(\lambda)$ est *invariante* par le champ de vecteurs (lieu de singularités).

J'affirme l'existence (et l'unicité) d'une surface formelle $\widehat{C}$

$$(2) \qquad \begin{aligned} x = \widehat{C}(\varepsilon, \lambda) \qquad & \widehat{C}(0, \lambda) = C_0(\lambda) \\ = C_0(\lambda) + \varepsilon C_1(\lambda) + \ldots & + \varepsilon^n C_n(\lambda) + \ldots \end{aligned}$$

invariante par (1). Les coefficients C_n sont holomorphes sur un disque D fixe de centre 0. La série $\widehat{C}$ est *Gevrey* 1 en ϵ. Elle définit donc, par sommation de Borel-Laplace *tronquée*, ou par "sommation au plus petit terme'", une "*quasi-surface*" *holomorphe* C dans $\mathbb{C}^{p+2}(\varepsilon, \lambda, x)$ définie sur $D_1 \times D$ ($D_1 =$ voisinage infinitésimal de niveau 1 de 0 dans $\mathbb{C}(\varepsilon)$). Cette quasi-surface est "quasi-invariante" par le champ (1) ...
Je n'ai pas démontré cette affirmation [1].

Signification concrète.

---

[1] *cf.* [S] Theorem 2.1.

Si la transformée de Borel (en ε) $\Gamma(\eta, \lambda)$ est holomorphe sur le polydisque $|\eta| \leq \rho$, $|\lambda| \leq R$, la sommation tronquée de Borel-Laplace (ou la "sommation au plus petit terme") définit une *quasi-fonction* holomorphe

$$x = C(\varepsilon, \lambda) \sim \widehat{C}(\varepsilon, \lambda).$$

C'est une collection *finie* (U_i, C_i) avec :

$$\cdot \ U_i = V_i \times D \begin{cases} V_i = & \text{secteur de sommet 0 dans } \mathbb{C}(\varepsilon) \\ D = & |\lambda| \leq R \end{cases}$$

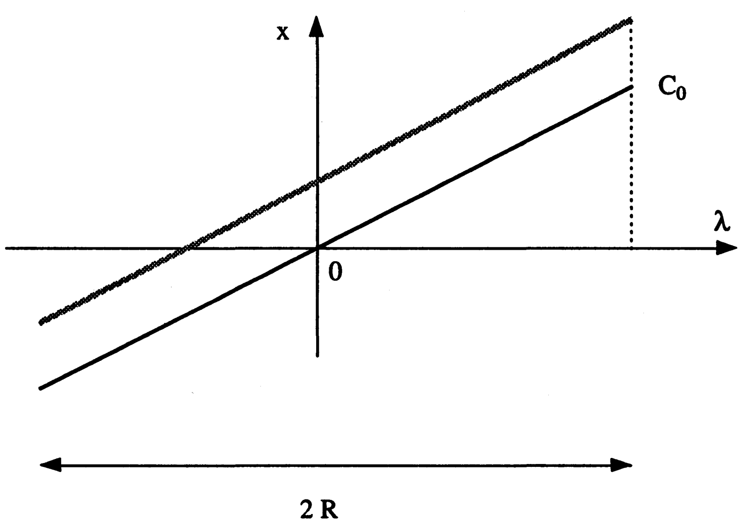
les V_i recouvrant un voisinage de 0.

- $C_i(\varepsilon, \lambda)$ est holomorphe sur $V_i \times D$ (et $C_i \sim \widehat{C}$).
- $|C_{i+1} - C_i| \leq M.\ e^{-\rho/|\varepsilon|}$ sur $(U_i \cap U_{i+1})$.

Les morceaux C_i sont eux-mêmes définis *modulo* $M \cdot e^{-\rho/|\varepsilon|}$ individuellement : cette ambiguïté est *essentielle au problème*. Le "graphe" de C est une "*quasi-surface*" invariante par le champ (1) dans le sens suivant :

$$\left[(f(\lambda, x)\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \lambda}\right] \cdot \left[x - C\right] = O(e^{\frac{-\rho}{|\varepsilon|}}).$$

Numériquement, on veut, pour $\varepsilon = \dfrac{1}{20}$ (je prends $\rho = 1$) une *quasi-courbe invariante* dont les points seront connus à e^{-20} près, soit 10^{-8} environ. (Alors que, si $C_1 \simeq 1$, la courbe C sera à distance de C_0 de l'ordre de $\dfrac{1}{20}$.)



2. L'application au retard à la bifurcation.

Elle est évidente avee le truc clé : *équation aux variations* (le long de la quasi courbe C).

Ces données supplémentaires conduisent à la loi entrée-sortie. Je ne l'écris pas : c'est familier à tout le monde; on suppose que le champ (1) passe pour $\lambda = 0$ par une *résonnance*, et on analyse le comportement des trajectoires du point de vue du monôme caractéristique de cette résonnance.

BIBLIOGRAPHIE

[CDD] B. CANDELPERGHER, F. DIENER, M. DIENER, Retard à la bifurcation: du local au global, in Bifurcations of Planar Vector Fields, J.P. Françoise and R. Roussarie, ed., Springer, 1990, p. 1–19.

[DD] F. DIENER, M. DIENER, Maximal Delay in Dynamical Bifurcations, E. Benoit ed., Springer, 1991.

[MaR] B. MALGRANGE, J.P. RAMIS, Fonctions Multisommables, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 42, 1-2 (1992).

[MR1] J. MARTINET, J.P. RAMIS, Théorie de Galois différentielle et resommation, Computer Algebra and Differential Equations, E. Tournier ed., Acad. Press, 1989.

[MR2] J. MARTINET, J.P. RAMIS, Elementary acceleration and multisummability, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Th., Vol. 54, n° 4 (1991), p. 331–401.

[N] A.I. NEISHTADT, Persistence of stability loss for dynamical bifurcations 1,2 Differential'nye Uravneniya (Differential Equations), 23 (12): 2060–2067, (1385-1390), 1987/88) and 24(2) : 226–233 (171–176), 1988 (88).

[Ol] F.W.J. OLVER, Asymptotics and Special Functions, Academic Press, 1974.

[S] Y. SIBUYA, Gevrey property of formal solutions in a parameter. Preprint, School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, Minn. 55455 U.S.A., 1989.

[V] I. VAN DEN BERG, Non Standard Asymptotic Analysis, Lecture Notes in Math. 1249, Springer-Verlag, Berlin et New-York, 1987.

Jean-Pierre RAMIS,
Université de Strasbourg I
Département de Mathématiques
7, rue Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex.