

BITJONG NDOMBOL

**Sur la catégorie de Lusternik-Schnirelmann
des algèbres de cochaînes**

Annales de l'institut Fourier, tome 41, n° 4 (1991), p. 937-987

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_4_937_0

© Annales de l'institut Fourier, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CATÉGORIE DE LUSTERNIK-SCHNIRELMANN DES ALGÈBRES DE COCHAÎNES

par Bitjong NDOMBOL

Introduction.

La catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'un espace topologique X , notée $\text{cat}(X)$ est le plus petit entier naturel n tel qu'il existe un recouvrement de X par $n + 1$ ouverts contractiles dans X ; s'il n'existe un tel recouvrement pour aucun n , on pose que $\text{cat}(X)$ est infini. Cet invariant, initialement défini par Lusternik et Schnirelmann en 1934 [23] pour estimer le nombre de points critiques d'une fonction différentiable sur une variété, s'est révélé être d'une grande importance en homotopie. Il est évident, d'après la définition, que les sphères S^k , $k \geq 1$, sont de catégorie un; tandis que les espaces contractiles sont de catégorie zéro.

Pour deux espaces topologiques X et Y , on a l'inégalité

$$\text{cat}(X \times Y) \leq \text{cat}(X) + \text{cat}(Y),$$

qui peut être stricte.

Lorsque Y est une sphère S^k , T. Ganéa a énoncé la conjecture suivante :

Conjecture de Ganéa : $\text{cat}(X \times S^k) = \text{cat}(X) + 1$.

Cette conjecture n'est toujours pas résolue, même pour des c.w. complexes 1-connexes de type fini; elle illustre la difficulté que constitue la détermination de la catégorie d'un espace topologique: ainsi on ne sait pas la calculer pour tous les groupes de Lie compacts.

Mots-clés : Catégorie de L.-S. - Algèbres de cochaînes - Bimodules différentiels - Conjecture de Ganéa.

Classification A.M.S. : 55P50 - 18G55 - 17A50.

Cette difficulté a conduit plusieurs auteurs à définir des invariants homotopiques qui approximent la catégorie par défaut.

Parmi ces approximations, rappelons la définition purement algébrique donnée par Y. Félix et S. Halperin [6] :

Soit X un c.w. complexe 1-connexe de type fini, de modèle de Sullivan $\Lambda(V)$, on construit un diagramme commutatif

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \Lambda(V) & \xrightarrow{p} & \Lambda(V)/\Lambda^{>n}(V) \\ & \searrow i & \uparrow \Psi \\ & & \Lambda(V) \otimes \Lambda(W) \end{array}$$

où p est la projection, i l'inclusion et Ψ un quasi-isomorphisme : alors $\text{cat}_0(X)$ est le plus petit entier naturel n tel que i admette une rétraction d'algèbres différentielles. Ces auteurs montrent que $\text{cat}_0(X)$ est exactement la catégorie du rationalisé de X et minore la catégorie de tous les espaces 1-connexes ayant le même type d'homotopie rationnelle que X . Les travaux de Y. Félix, S. Halperin et J. C. Thomas [7], [8], [9] ont montré que cette notion était fondamentale en homotopie rationnelle ; elle leur a permis en particulier de dégager des propriétés remarquables de l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle $\pi_*\Omega(X) \otimes \mathbf{Q}$ pour des espaces X tels que $\text{cat}_0(X)$ soit fini.

Motivés par la richesse des applications de cette définition, S. Halperin et J. M. Lemaire [13] l'ont étendue aux algèbres de cochaînes sur un corps $\mathbf{k}$ de caractéristique quelconque, en remplaçant les modèles de Sullivan par les « T -modèles », dans le but d'étudier les algèbres de Hopf $H_*(\Omega X; \mathbf{k})$ pour des c.w. complexes X 1-connexes de type et de catégorie finis. Ils ont défini trois invariants $Acat$, $lMcat$ et $rMcat$ suivant que dans l'analogie du diagramme (1), le morphisme i admet une rétraction d'algèbres différentielles, de modules différentiels à gauche ou de modules différentiels à droite. Ces trois invariants minorent pour une algèbre des cochaînes d'un espace topologique X la catégorie de tous les espaces ayant le même modèle d'Adams-Hilton que X . Les deux invariants $lMcat$ et $rMcat$ ont l'avantage de ramener le problème de la catégorie de Lusternik-Schnirelmann dans des catégories abéliennes qui sont en principe plus maniables. En effet en 1987, B. Jessup [18] a montré que la conjecture de Ganéa est vraie pour $lMcat$ pour des algèbres commutatives à coefficients dans $\mathbf{Q}$ (dans ce cas $lMcat = rMcat$ et cet invariant est noté $Mcat_0$) et que $Mcat_0$ est invariant par extension

de corps. En 1988 K. Hess [16] a établi l'égalité $\text{cat}_0 = \text{Mcat}_0$, et obtenu ainsi la conjecture de Ganéa et l'invariance par extension de corps pour cat_0 .

Le présent travail étend ceux de ces deux derniers auteurs à un corps de caractéristique quelconque. A cet effet, on introduit une nouvelle définition d'un invariant biMcat en exigeant l'existence d'une rétraction de bimodules dans l'analogue du diagramme (1), et on démontre les deux théorèmes suivants, qui étendent à un corps de caractéristique quelconque les théorèmes de Jessup et Hess respectivement :

THÉOREME 1. — Soient A et B deux k -algèbres de cochaînes 1-connexes de type fini ; alors

$$\text{biMcat}_k(A) + e_k(B) \leq \text{biMcat}_k(A \otimes B) \leq \text{biMcat}_k(A) + \text{biMcat}_k(B).$$

THÉOREME 2. — Soit A une k -algèbre de cochaînes 1-connexe de type fini ; alors

$$\text{Acat}_k(A) = \text{biMcat}_k(A).$$

Ces deux résultats montrent qu'en particulier Acat est invariant par extension de corps et vérifie la conjecture de Ganéa.

Notons que le théorème 2 est le meilleur possible, car au moins dans le cas des algèbres différentielles générales E. Idrissi ([17]) construit des exemples d'algèbres différentielles telles que IMcat et rMcat soient distincts et tous les deux strictement majorés par biMcat . Ces exemples justifient l'introduction de biMcat . On ignore toutefois si les invariants IMcat , rMcat et biMcat peuvent prendre des valeurs différentes sur les cochaînes d'un espace topologique.

La démonstration de ces théorèmes passe par des constructions de modèles algébriques qui nécessitent parfois une certaine technicité (par exemple la construction du T -modèle libre minimal d'un T -modèle libre minimal tronqué). Ces calculs auraient pu être en partie évités en dégageant les propriétés *ad hoc* de la différentielle comme le fait K. Hess dans [16], mais nous avons estimé que des formules explicites pouvaient être utiles pour des travaux ultérieurs.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à Y. Félix et à J. M. Lemaire dont les conseils ont permis l'aboutissement de ce travail.

Cet article comporte six paragraphes :

— dans la section 0, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les algèbres de cochaînes ;

– l'un des problèmes qu'on observe lorsqu'on étudie des algèbres non commutatives est qu'une algèbre A n'est pas libre comme A -bimodule. Pour contourner cette difficulté, nous construisons dans la section 1, une résolution « quasi-libre » d'un T -modèle libre minimal $T(V)$ comme $T(V)$ -bimodule différentiel et nous en tirons une résolution quasi-libre de $T(V)/T^{>n}(V)$ comme $T(V)$ -bimodule différentiel, en utilisant une construction de [9]: ce qui nous permet d'avoir une caractérisation plus maniable de biMcat ;

– dans la section 2, nous présentons une construction du T -modèle libre minimal du produit tensoriel de deux algèbres de cochaînes 1-connexes de type fini;

– les constructions des paragraphes 1 et 2 conduisent à la démonstration du théorème 3.5 qu'on trouve au section 3;

– la section 4 est consacrée à la construction d'un T -modèle libre minimal explicite d'un T -modèle libre minimal tronqué. Cette construction nous permet d'obtenir une démonstration du théorème 5.3 qu'on trouve à la section 5.

Signalons pour conclure cette introduction quelques propriétés qui montrent l'intérêt et les limites de l'invariant Acat . Tout d'abord, comme le théorème 5.3 montre $\text{Acat}_{\mathbf{k}}$ ne dépend que de la caractéristique p du corps $\mathbf{k}$, nous le noterons Acat_p . Pour chaque p , $\text{Acat}_p(X)$ est un minorant de $\text{cat}(X)$, qui peut être plus précis que la catégorie rationnelle: ainsi pour un espace de Moore $M = M(G, n)$ où G est un groupe abélien fini et $n \geq 2$, on a $\text{Acat}_p(M) = 1$ si p divise l'ordre de G et $\text{Acat}_p(M) = 0$ sinon, alors que bien entendu $\text{cat}_0(M) = 0$. On montre aisément que $\text{Acat}_p(X) = 1$ si et seulement si l'algèbre $H_*(\Omega X; \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est une algèbre tensorielle.

Une généralisation de cette observation est le théorème principal de [9], qui affirme que $\text{Acat}_p(X)$ majore la profondeur de l'algèbre de Hopf $H_*(\Omega X; \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ et qui permet d'établir des résultats remarquables sur la structure de cette algèbre de Hopf lorsque X est de catégorie finie.

En revanche Acat_p , qui ne dépend que du modèle d'Adams-Hilton de X , ne permet pas de distinguer la catégorie d'espaces tels que $X_f = S_3 \cup_f e^7$ par exemple, lorsque f parcourt $\pi_6(S^3) = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$; tous ces espaces vérifient $\text{Acat}_p = 1$ pour tout p , alors que $\text{cat}(X_f) = 2$ si f est un multiple impair d'un générateur de $\pi_6(S^3)$.

0. Rappels et notations.

Toutes les algèbres différentielles que nous considérons dans ce texte sont des algèbres de cochaînes (la différentielle est de degré 1) sur un corps de base $\mathbf{k}$ de caractéristique quelconque et sont supposées connexes, 1-connexes et de type fini. La catégorie formée de tels objets et des morphismes idoines sera notée $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$.

Dans tout ce qui suit, étant donné un $\mathbf{k}$ -espace vectoriel gradué W , nous noterons $s: W \rightarrow W$ l'opérateur de suspension (de degré -1) défini par $(sW)^n = W^{n+1}$ et $s^{-1}: W \rightarrow W$ la désuspension définie par $(s^{-1}W)^{n+1} = W^n$: c'est un opérateur de degré 1. On notera enfin W' le dual de W . Les produits tensoriels sur $\mathbf{k}$ seront notés simplement par $\otimes$.

Soit A fixé dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$; nous noterons ${}_A\text{Mod}_A$ la catégorie des A -bimodules différentiels, munie des morphismes *ad hoc*.

0.1. DÉFINITION. — Soit A dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$; une extension libre élémentaire de A est une injection de $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$ de la forme

$$i) \quad A \rightarrow A \coprod T(V) \text{ telle que } dv \in A \text{ pour tout } v \in V,$$

où V est un $\mathbf{k}$ -espace vectoriel gradué et $\coprod$ désigne le coproduit dans la catégorie des $\mathbf{k}$ -algèbres graduées connexes.

0.2. DÉFINITION. — On appelle extension libre de A toute composée (éventuellement infinie) d'extensions libres élémentaires: de façon précise, $i: A \rightarrow A \coprod T(V)$ est une extension libre si

1) $V = \bigcup_{i \in I} V(i)$ est une suite croissante de $\mathbf{k}$ -espaces vectoriels gradués vérifiant $V(0) = \{0\}$,

2) l'inclusion $i_n: A \coprod T(V(n)) \rightarrow A \coprod T(V(n+1))$ est une extension libre élémentaire,

3) pour tout $i \in I$, il existe n_i tel que pour tout $n \geq n_i$, $(V(n))^{\leq i} = (V(n+1))^{\leq i}$.

0.3. DÉFINITION. — Soit M dans ${}_A\text{Mod}_A$, une extension libre élémentaire de M est une injection de ${}_A\text{Mod}_A$ de la forme

$$i) \quad M \rightarrow M \oplus A \otimes X \otimes A$$

où X est un $\mathbf{k}$ -espace vectoriel gradué, tel que $\forall x \in X, dx \in M$.

On définit de manière évidente les extensions libres dans ${}_A\text{Mod}_A$.

0.4. Remarque. — D'après H. Baues [2], la catégorie $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$ (resp. ${}_A\text{Mod}_A$) est une catégorie de cofibrations : l'objet initial est $\mathbf{k}$ (resp. $\mathbf{0}$), les cofibrations sont les extensions libres et les équivalences faibles, les quasi-isomorphismes.

Pour la commodité du lecteur nous énonçons les lemmes suivants, qui font partie des axiomes définissant une catégorie de cofibrations.

0.6. LEMME.

(ia) La colimite d'un morphisme $\Phi : A \rightarrow B$ dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$ et d'une extension libre $A \rightarrow A \amalg T(V)$ est une extension libre $B \rightarrow B \amalg T(V)$. Si de plus Φ est un quasi-isomorphisme, il en est de même de $\Phi \amalg \text{Id} : A \amalg T(V) \rightarrow B \amalg T(V)$.

(iia) Soit $\Phi : A \rightarrow B$ dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$; si $(B \amalg T(V), d)$ est une extension libre de B , alors il existe une extension libre $(A \amalg T(V), d')$ de A dont la colimite avec Φ est isomorphe à $(B \amalg T(V), d)$.

(ib) La colimite d'un morphisme $\Phi : M \rightarrow N$ dans ${}_A\text{Mod}_A$ et d'une extension libre $i : M \rightarrow M \oplus A \otimes X \otimes A$ est une extension libre $N \rightarrow N \oplus A \otimes X \otimes A$. Si de plus Φ est un quasi-isomorphisme, il en est de même de $\Phi \oplus \text{Id}$.

(iib) Soit $\Phi : M \rightarrow N$ dans ${}_A\text{Mod}_A$; si $(N \oplus A \otimes X \otimes A, d)$ est une extension libre de N , alors il existe une extension libre $(M \oplus A \otimes X \otimes A, d')$ de M dont la colimite avec Φ est isomorphe à $(N \oplus A \otimes X \otimes A, d)$. $\square$

0.7. LEMME. — a) Soit $\Phi : A \rightarrow C$ dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$; il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi} & C \\ & \searrow i & \uparrow \Psi \\ & & A \amalg T(V) \end{array}$$

où i est une extension libre et Ψ un quasi-isomorphisme. $\square$

b) Soit $\Phi : M \rightarrow N$ dans ${}_A\text{Mod}_A$; il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & N \\ & \searrow i & \uparrow \Psi \\ & & M \oplus A \otimes X \otimes A \end{array}$$

où i est une extension libre et Ψ un quasi-isomorphisme. $\square$

0.8. Remarque et définition ([13]). — Soit A dans $\mathbf{k}\text{-}ADG_1^*$; d'après le lemme 0.7, l'unité $\eta: \mathbf{k} \rightarrow A$ factorise à travers le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k} & \xrightarrow{\eta} & A \\ & \searrow i & \uparrow \Psi \\ & & \mathbf{k} \perp\!\!\!\perp T(V) \end{array}$$

Or $\mathbf{k} \perp\!\!\!\perp T(V) \cong T(V)$. L'algèbre différentielle $(T(V), d)$ est alors appelée T -modèle libre de A .

Si en outre $dV \subset T^{\geq 2}(V)$, on dit que c'est un T -modèle libre minimal; il est unique à isomorphisme près. Pour un T -modèle libre minimal de $\mathbf{k}\text{-}ADG_1^*$, on a $V^0 = V^1 = 0$ et V est de dimension finie en chaque degré.

De plus V est isomorphe à $s^{-1}(\bar{H}_* \Omega A)'$, Ω désignant le dual de la bar construction (au sens de [13]) et lorsque A est l'algèbre des cochaînes d'un espace topologique X , l'espace vectoriel V est isomorphe à $s^{-1}(\bar{H}_* \Omega X)'$ où ΩX est l'espace des lacets de X .

0.9. Remarque. — Étant donné des algèbres de cochaînes (resp. de chaînes) A et B , nous dirons que A et B sont quasi-isomorphes et nous noterons (abusivement) $A \sim B$, s'il existe une suite finie (A_i) , $0 \leq i \leq n$ dans $\mathbf{k}\text{-}ADG_1^*$ (resp. dans la catégorie des algèbres de chaînes) avec $A_0 = A$ et $A_n = B$ telle qu'il existe un quasi-isomorphisme entre A_i et A_{i+1} . Le foncteur Ω est compatible avec la relation d'équivalence ainsi définie; de sorte que $A \sim B$ équivaut à $\Omega A \sim \Omega B$. Cette propriété se traduit sur les c.w. complexes 1-connexes de type fini par : deux c.w. complexes 1-connexes de type fini ont même T -modèle libre minimal si et seulement s'ils ont même modèle (minimal) d'Adams-Hilton.

0.10. LEMME. — (i) Pour tout diagramme commutatif dans $\mathbf{k}\text{-}ADG_1^*$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi} & B \\ i \downarrow & \searrow \theta & \downarrow \pi \\ A \perp\!\!\!\perp T(V) & \xrightarrow{\Psi} & C \end{array}$$

où i est une extension libre et π un quasi-isomorphisme, il existe $\theta: A \perp\!\!\!\perp T(V) \rightarrow B$ tel que $\pi \circ \theta \sim \Psi$ et $\theta \circ i = \Phi$.

(ii) Pour tout diagramme commutatif dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\Phi} & B \\
 i \downarrow & \searrow \theta & \downarrow \pi \\
 A \perp\!\!\!\perp T(V) & \xrightarrow{\psi} & C
 \end{array}$$

où i est une extension libre et π un quasi-isomorphisme, il existe $\theta : A \perp\!\!\!\perp T(V) \rightarrow B$ tel que $\pi \circ \theta \sim \psi$ et $\theta \circ i = \Phi$.

Dans (i) et (ii), si π est surjectif, on peut choisir θ de façon que $\pi \circ \theta = \psi$.

0.11. LEMME. — (i) Pour tout diagramme commutatif dans ${}_A\text{Mod}_A$:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\Phi} & N \\
 i \downarrow & \searrow \theta & \downarrow \pi \\
 M \oplus A \otimes X \otimes A & \xrightarrow{\psi} & P
 \end{array}$$

où i est une extension libre qui est un quasi-isomorphisme ; il existe $\theta : M \oplus A \otimes X \otimes A \rightarrow N$ tel que $\pi \circ \theta \sim \psi$ et $\theta \circ i = \Phi$.

(ii) Pour tout diagramme commutatif dans ${}_A\text{Mod}_A$

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\Phi} & N \\
 i \downarrow & \searrow \theta & \downarrow \pi \\
 M \oplus A \otimes X \otimes A & \xrightarrow{\psi} & P
 \end{array}$$

où i est une extension libre et π un quasi-isomorphisme, il existe $\theta : M \oplus A \otimes X \otimes A \rightarrow N$ tel que $\pi \circ \theta \sim \psi$ et $\theta \circ i = \Phi$.

(iii) Dans (i) et (ii), si π est surjective, on peut choisir θ de façon que $\pi \circ \theta = \psi$. $\square$

0.12. DÉFINITION. — Soit (M, δ) dans ${}_A\text{Mod}_A$. Une résolution quasi-libre de (M, δ) est un morphisme de A -bimodules différentiels $\psi : (A \otimes X \otimes A, d) \rightarrow (M, \delta)$ qui factorise $0 \rightarrow (M, \delta)$ comme dans le lemme 0.7.

C'est donc un modèle cofibrant de (M, δ) dans ${}_A\text{Mod}_A$. On observera que l'on a $X = \bigcup_n X(n)$

- 1) $dX(n+1) \subset A \otimes X(n) \otimes A$,
- 2) ψ est un quasi-isomorphisme.

Soit $(T(V), \partial)$ un T -modèle libre dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$ et considérons

$$(0.13) \quad \begin{array}{ccc} (T(V), \partial) & \xrightarrow{P} & (T(V)/T^{>n}(V), \partial) \\ & \searrow r & \uparrow \psi \\ & T(V) \perp\!\!\!\perp T(W) \end{array}$$

une factorisation de la projection donnée par le lemme 0.7 a).

C'est un diagramme commutatif dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$, ${}_A\text{Mod}_A$, $\mathbf{k}\text{-Vect}_d$ ($\mathbf{k}$ -espaces vectoriels différentiels gradués) où $A = (T(V), \partial)$.

Une rétraction linéaire r de i est un morphisme $r : T(V) \perp\!\!\!\perp T(W) \rightarrow T(V)$ dans $\mathbf{k}\text{-Vect}_d$ tel que $r \circ i = \text{Id}$.

Si r est un morphisme dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$ (respectivement ${}_A\text{Mod}_A$), on dit que r est une rétraction d'algèbres différentielles (respectivement A -bimodules différentiels).

0.14. Remarque. — De l'isomorphisme

$$T(V) \perp\!\!\!\perp T(W) \simeq T(V) \oplus [W \oplus W \otimes T(V \oplus W) \otimes W] \otimes T(V) \quad \text{dans } {}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$$

on déduit que le foncteur d'oubli

$$\mathcal{U} : \mathbf{k}\text{-ADG}_1^* \rightarrow {}_A\text{Mod}_A \rightarrow \mathbf{k}\text{-Vect}_d$$

transforme les cofibrations en cofibrations et les équivalences faibles en équivalences faibles, c'est-à-dire que c'est un foncteur modèle au sens de Baues [2].

0.15. DÉFINITION. — (i) Soit $(T(V), \partial)$ dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$ un T -modèle libre minimal. Alors $\text{Acat}(T(V), \partial)$ (respectivement $\text{biMcat}(T(V), \partial)$, $\mathbf{e}_k(T(V), \partial)$) est le plus petit entier naturel n tel que le morphisme i de (0.13) admette une rétraction dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$ (respectivement ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$, $\mathbf{k}\text{-Vect}_d$). S'il n'existe de rétraction dans une de ces catégories pour aucun n , on pose l'invariant correspondant égal à $+\infty$.

(ii) Soit A dans $\mathbf{k}\text{-}ADG_1^*$ de T -modèle libre minimal $(T(V), \partial)$; l'égalité ordonnée ci-dessous définit ces invariants sur A :

$$\begin{aligned} (\text{Acat } A, \text{biMcat } A, \mathbf{e}_k(A)) \\ = (\text{Acat } (T(V), \partial), \text{biMcat } (T(V), \partial), \mathbf{e}_k(T(V), \partial)). \end{aligned}$$

0.16. Remarques. — (i) Nous avons la suite d'inégalités :

$$\text{Acat } A \geq \text{biMcat } A \geq \mathbf{e}_k A$$

(ii) ces nombres sont invariants par quasi-isomorphisme ;

(iii) $\mathbf{e}_k(T(V), \partial)$ est le plus grand entier naturel n tel qu'il existe une classe de cohomologie non nulle dans $H^*(T(V))$ représentée par un cycle dans $T^{\geq n}(V)$;

(iv) soit $(T(V), \partial)$ un T -modèle libre non minimal de $A \in \mathbf{k}\text{-}ADG_1^*$. Alors $\text{Acat } A$ (respectivement comme ci-dessus) est le plus petit n tel que le morphisme i de (0.13) admette une rétraction à homotopie près dans $\mathbf{k}\text{-}ADG_1^*$ (respectivement comme ci-dessus).

Soit $\mathbf{q}$ un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques 1-connexes à valeurs dans une catégorie de cofibrations $\mathcal{C}$ tel que $\mathbf{q}$ transforme les équivalences d'homotopie en équivalences faibles et les fibrations en cofibrations : on peut définir pour un c.w. complexe X de type fini l'invariant $\mathbf{qcat}(X)$ comme suit :

si $p_n : X(n) \rightarrow X$ est la $n^{\text{ième}}$ fibration de Ganéa de X (voir section 4), $\mathbf{qcat}(X)$ est le plus petit entier naturel n tel qu'il existe

$r : \mathbf{q}X(n) \rightarrow \mathbf{q}X$ morphisme de $\Pi_{\mathcal{C}_{cf}}$ (suivant les notations de [2]) vérifiant $r \circ \mathbf{q}(p_n) \sim \text{Id}$. S'il n'existe de r pour aucun n on pose $\mathbf{qcat}(X) = +\infty$. Il est clair que $\mathbf{qcat}(X) \leq \text{cat}(X)$.

Lorsque le corps $\mathbf{k}$ est de caractéristique zéro et $\mathcal{C}$ la catégorie des algèbres commutatives à coefficients dans $\mathbf{k}$, $\mathbf{qcat}(X) = \text{cat}_0(X)$. Dans [5] J. P. Doeraene montre que si $(T(V), \partial)$ est le T -modèle libre minimal de X alors $(T(V)/T^{>n}(V), \partial)$ est dans la même classe d'homotopie que $C^*(X(n), \mathbf{k})$ de sorte que lorsque le corps $\mathbf{k}$ est de caractéristique quelconque

$$\mathbf{qcat}(X) = \text{Acat}(X) \quad \text{si } \mathcal{C} \text{ est } \mathbf{k}\text{-}ADG_1^*$$

et

$$\mathbf{qcat}(X) = \mathbf{e}_k(X), \quad \text{si } \mathcal{C} \text{ est } \mathbf{k}\text{-Vect}_d.$$

L'invariant biMcat n'a pas d'interprétation évidente en termes de $\mathbf{qcat}$: nous verrons qu'en fait il coïncide avec Acat .

**1. Résolutions quasi-libres d'un T -modèle libre minimal
et d'un T -modèle libre minimal tronqué
comme bimodules différentiels.**

Soit $(T(V), \partial)$ un T -modèle libre minimal. Posons $M = s(V^{\otimes n+1})$ et considérons les isomorphismes de $\mathbf{k}$ -espaces vectoriels gradués :

$$w'_{n+1} : T(V) \otimes M' \rightarrow T^{>n}(V) \quad \text{où } M' \text{ est une copie de } M$$

$$\Phi \otimes s\psi_1 \rightarrow (-1)^{\Phi} \Phi \otimes \psi_1$$

et

$$w''_{n+1} : M'' \otimes T(V) \rightarrow T^{>n}(V) \quad \text{où } M'' \text{ est une copie de } M$$

$$s\psi_2 \otimes \Phi \rightarrow \psi_2 \otimes \Phi$$

on définit des différentielles δ'_{n+1} et δ''_{n+1} sur $T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus M']$ et $[\mathbf{k} \oplus M''] \otimes T(V)$ respectivement, en posant :

$$\delta'_{n+1}(\Phi \otimes s\psi_1) = (w'_{n+1} + d_{n+1})(\Phi \otimes s\psi_1) \quad \text{où } d'_{n+1} = -(w'_{n+1})^{-1} \partial w'_{n+1}$$

$$\delta''_{n+1}(s\psi_2 \otimes \Phi) = (w''_{n+1} + d''_{n+1})(s\psi_2 \otimes \Phi) \quad \text{où } d''_{n+1} = -(w''_{n+1})^{-1} \partial w''_{n+1}.$$

Nous savons d'après [9] que $(T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus M'], \delta'_{n+1})$ est une résolution quasi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V), d)$ comme $T(V)$ -module différentiel à gauche. De même, $([\mathbf{k} \oplus M''] \otimes T(V), \delta''_{n+1})$ est une résolution quasi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V), d)$ comme $T(V)$ -module différentiel à droite.

En particulier, nous avons :

- (i) $F_g : (T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus M'], \delta'_{n+1}) \rightarrow (T(V)/T^{>n}(V), d)$ définie par
 $F_g|_{T(V) \otimes \mathbf{k}} = P \otimes \text{Id}$ où $P : T(V) \rightarrow T(V)/T^{>n}(V)$ est la projection canonique
 $F_g|_{\mathbf{k} \otimes M'} = 0$
 F_g est un quasi-isomorphisme.
- (ii) $F_d : [\mathbf{k} \oplus M''] \otimes T(V), \delta''_{n+1}) \rightarrow (T(V)/T^{>n}(V), d)$ définie par
 $F_d|_{\mathbf{k} \otimes T(V)} = \text{Id} \otimes P$ où P est défini en (i)
 $F_d|_{M'' \otimes \mathbf{k}} = 0$
 F_d est un quasi-isomorphisme.

Résolution quasi-libre de $(T(V), \partial)$ comme $T(V)$ -bimodule différentiel.

Considérons le $T(V)$ -bimodule libre $T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V)$ sur lequel on définit une dérivation d_1 de degré un de la manière suivante :

pour tout $v \in V$:

$$d_1(v \otimes 1 \otimes 1) = \partial v \otimes 1 \otimes 1$$

$$d_1(1 \otimes 1 \otimes v) = 1 \otimes 1 \otimes \partial v$$

$$d_1(1 \otimes sv \otimes 1) = v \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes v - S(\partial v)$$

où l'application

$S: T^+(V) \rightarrow T(V) \otimes sV \otimes T(V)$ est définie par :

pour tous $v_1, \dots, v_m \in V$

$$\begin{aligned} S(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) &= 1 \otimes sv_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_m \\ &+ \sum_{j=2}^{m-2} (-1)^{|v_1| + \dots + |v_{m-1}|} v_1 \otimes \dots \otimes v_{j-1} \otimes sv_j \otimes v_{j+1} \otimes \dots \otimes v_m \\ &+ (-1)^{|v_1| + \dots + |v_{j-1}|} v_1 \otimes \dots \otimes v_{m-1} \otimes sv_m \otimes 1. \end{aligned}$$

Soit enfin le morphisme de $T(V)$ -bimodules :

$H_1: T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V) \rightarrow T(V)$ défini par :

$$H_1(1 \otimes 1 \otimes 1) = 1$$

$$H_1(1 \otimes sv \otimes 1) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Nous avons le :

1.1. LEMME. — (i) $(d_1)^2 = 0$,

(ii) $(T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V), d_1)$ est une résolution quasi-libre de $(T(V), \partial)$ comme $T(V)$ -bimodule différentiel.

Démonstration. — (i) Considérons le cylindre sur $(T(V), \partial)$ à savoir $(T(V' \oplus V'' \oplus sV), d)$ (cf. [3]) où V' et V'' sont deux copies de V et la différentielle d est définie comme suit : si on note ∂' (respectivement ∂'') la différentielle canonique de $T(V')$ (respectivement $T(V'')$) et j' (respectivement j'') l'identification de $T(V)$ à $T(V')$ (respectivement à $T(V'')$).

On pose :

$$\begin{aligned} dv' &= \partial' v', \quad \forall v' \in V' \\ dv'' &= \partial'' v'', \quad \forall v'' \in V'' \\ dsv &= v'' - v' - S(\partial v) \end{aligned}$$

où l'application : $S: T^+(V) \rightarrow T(V' \oplus V'' \oplus sV)$ est la (j', j'') -dérivation de degré + 1 qui prolonge l'identité de V sur sV ; explicitement si a et b sont dans $T^+(V)$:

$$S(a \otimes b) = S(a) \otimes j''(b) + (-1)^{|a|j'}(a) \otimes S(b).$$

Soit en outre j le morphisme de $T(V)$ -bimodules de $T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V)$ dans le $T(V)$ -bimodule $T(V' \oplus V'' \oplus sV)$ défini par :

$$\begin{aligned} j(v \otimes 1 \otimes 1) &= v'', \quad \forall v \in V \\ j(1 \otimes 1 \otimes 1) &= v', \quad \forall v \in V \\ j(1 \otimes sv \otimes 1) &= sv, \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

j est un isomorphisme sur le sous- $T(V)$ -bimodule différentiel des mots de poids inférieur ou égal à 1 en sV et $d_1 = j^{-1} dj$; d'où la partie (i) du lemme.

(ii) Il nous suffit de montrer que H_1 est un quasi-isomorphisme. Pour ce faire, filtrons $T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V)$ par la longueur des mots à droite, c'est-à-dire posons :

$$F_p(T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V)) = T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T^{\geq p}(V);$$

cette filtration décroissante définit une suite spectrale du premier quadrant qui converge vers $H^*(T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V))$. Le terme E^1 de cette suite spectrale est $H^*(T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V), d_0)$ où $d_0 = \delta_1 \otimes 1$, δ_1 étant la différentielle de $T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV]$ en tant que résolution quasi-libre de $\mathbf{k}$ comme $T(V)$ -module différentiel à gauche; autrement dit, le terme E^1 de cette suite spectrale est exactement $\mathbf{k} \otimes T(V) \cong T(V)$.

En outre, la suite spectrale obtenue en filtrant $T(V)$ par la longueur des mots a son terme E^1 isomorphe à $T(V)$, car ∂ est minimale. Le morphisme de suites spectrales induit par H_1 est l'identité au niveau E^1 , c'est-à-dire que H_1 est un quasi-isomorphisme. $\square$

Résolution quasi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V), d)$ comme $T(V)$ -bimodule différentiel.

On définit une structure de $T(V)$ -module à droite (respectivement à gauche sur $T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus M']$ (respectivement $[\mathbf{k} \oplus M''] \otimes T(V)$) de la manière suivante :

soient

$$\begin{aligned} v \in V, \quad \Phi \in T(V), \quad s\psi_1 \in M', \quad s\psi_2 \in M'', \\ \psi_1 = \psi_1^1 \otimes \cdots \otimes \psi_1^{n+1}, \quad \psi_2 = \psi_2^1 \otimes \cdots \otimes \psi_2^{n+1} \\ (\alpha') \quad \begin{cases} (\Phi \otimes 1) \times v = \Phi \otimes v \otimes 1 \\ (\Phi \otimes s\psi_1) \times v = \Phi \otimes (w'_{n+1})^{-1}(\psi_1 \otimes v) \end{cases} \\ (\alpha'') \quad \begin{cases} v \times (1 \otimes \Phi) = 1 \otimes v \otimes \Phi \\ v \times (s\psi_2 \otimes \Phi) = (w''_{n+1})^{-1}(v \otimes \psi_2). \end{cases} \end{aligned}$$

On prolonge ensuite ces actions par additivité et $\mathbf{k}$ -linéarité.

1.2. LEMME. — (i) *Les actions définies en (α') et (α'') sont compatibles avec les différentielles.*

(ii) F_g et F_d sont des morphismes de $T(V)$ -bimodules différentiels.

Démonstration.

(ii) La vérification est immédiate, dès que (i) est établi.

(i) On le vérifie pour (α') . Il suffit de montrer que

$$\delta'_{n+1}(\Phi \otimes s\psi_1 \times v) = \delta'_{n+1}(\Phi \otimes s\psi_1) \times v - (-1)^{|\Phi| + |\psi_1|} \Phi \otimes s\psi_1 \times \partial v$$

en remarquant que pour tout η dans $T^{>n}(V)$

$$(w'_{n+1})^{-1}(\eta) \times v = (w'_{n+1})^{-1}(\eta \times v)$$

on a :

$$\begin{aligned} \delta'_{n+1}(\Phi \otimes s\psi_1 \times v) &= (-1)^{|\Phi|} \delta'_{n+1}(w'_{n+1})^{-1}(\Phi \otimes \psi_1 \otimes v) \\ &= (-1)^{|\Phi|} \Phi \otimes \psi_1 \otimes v - (-1)^{|\Phi|} (w'_{n+1})^{-1}(\partial(\Phi \otimes \psi_1 \otimes v)) \\ &= (-1)^{|\Phi|} \Phi \otimes \psi_1 \otimes v - (-1)^{|\Phi|} (w'_{n+1})^{-1}(\partial(\Phi \otimes \psi_1) \otimes v) \\ &\quad - (-1)^{|\psi_1|} (w'_{n+1})^{-1}(\Phi \otimes \psi_1 \otimes \partial v) \\ &= (w'_{n+1})^{-1}(\Phi \otimes \psi_1) \times v - (w'_{n+1})^{-1} \partial w'_{n+1}(\Phi \otimes s\psi_1) \times v \\ &\quad - (-1)^{|\Phi| + |\psi_1|} \Phi \otimes s\psi_1 \times \partial v \\ &= \delta'_{n+1}(\Phi \otimes s\psi_1) \times v - (-1)^{|\Phi| + |\psi_1|} \Phi \otimes s\psi_1 \times \partial v \end{aligned}$$

ce qui montre que l'action définie en (α') commute aux différentielles. Le cas de (α'') se vérifie de manière analogue. $\square$

Considérons le produit tensoriel de $T(V)$ -bimodules différentiels :

$$T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus M'] \otimes_{T(V)} T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V),$$

muni de la différentielle du produit tensoriel qu'on note D_{n+1} . Ce produit tensoriel, en tant que $T(V)$ -bimodule est isomorphe au $T(V)$ -bimodule libre $T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV \oplus M' \oplus M' \oplus sV] \otimes T(V)$.

DÉFINITION (cf. [8]). — Soient A dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1$, M un A -module différentiel à droite et N un A -module différentiel à gauche, on définit

$$\mathrm{Tor}^A(M, N) = H^*(P \otimes_A N) = H^*(M \otimes_A Q)$$

où P est une résolution quasi-libre de M comme A -module différentiel à droite et Q une résolution quasi-libre de N comme A -module différentiel à gauche.

1.3. LEMME. — Soient M et M' deux A -modules différentiels à droite, N, N' deux A -modules différentiels à gauche et $f: M \rightarrow M'$ un quasi-isomorphisme alors, $f \otimes \mathrm{Id}: M \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_A N$ est un quasi-isomorphisme si

i) N est quasi-libre ou ii) M et M' sont quasi-libres.

De même si $g: N \rightarrow N'$ est un quasi-isomorphisme alors $\mathrm{Id} \otimes g: M \otimes_A N' \rightarrow M \otimes_A N'$ est un quasi-isomorphisme si

1) M est un quasi-libre ou 2) N et N' sont quasi-libres.

Démonstration. — f induit un isomorphisme entre $\mathrm{Tor}^A(M, N)$ et $\mathrm{Tor}^A(M', N)$. Si i) ou ii) est vrai on a $H^*(M \otimes_A N) = \mathrm{Tor}^1(M, N) \cong \mathrm{Tor}^A(M', N) = H^*(M' \otimes_A N)$; d'où le lemme. $\square$

1.4. PROPOSITION. — $(T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV \oplus M' \oplus M' \otimes sV] \otimes T(V), D_{n+1})$ est une résolution quasi-libre de $(T(V) | T^{>n}(V), d)$ comme $T(V)$ -bimodule différentiel.

Démonstration. — H_1 et F_g sont des quasi-isomorphismes dans ${}_{T(V)}\mathrm{Mod}_{T(V)}$ et $F_g \otimes_{T(V)} H_1$ est un morphisme de $T(V)$ -bimodules différentiels : c'est en fait la composée $F_g \otimes_{T(V)} \mathrm{Id} \circ \mathrm{Id} \otimes_{T(V)} H_1$. Par le lemme 1.3 chacun de ces morphismes est un quasi-isomorphisme comme morphisme de $T(V)$ -modules à gauche ; autrement dit $F_g \otimes_{T(V)} H_1: T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV \oplus M' \oplus M' \otimes sV] \rightarrow T(V)/T^{>n}(V)$ est un quasi-isomorphisme, d'où la proposition. $\square$

Notons ci-dessous l'écriture explicite de la différentielle D_{n+1} sur les générateurs : elle nous sera utile dans la suite.

Soient $v \in V$, $s\psi \in M'$

$$D_{n+1}(1 \otimes sv \otimes 1) = d_1(1 \otimes sv \otimes 1)$$

$$D_{n+1}(1 \otimes s\psi \otimes 1) = \delta_{n+1}(1 \otimes s\psi) \otimes 1.$$

Si on pose :

$$\psi = \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{n+1} \quad X = |\psi_2| + \cdots + |\psi_{n+1}|$$

$$\partial v = \sum_1 v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \quad a(j) = |v_{i_1}| \otimes \cdots \otimes |v_{i_{j-1}}|$$

$$\begin{aligned} (1.5) \quad D_{n+1}(1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1) &= \psi \otimes sv \otimes 1 - (-1)^x \psi_1 \otimes s(\psi_2 \otimes \cdots \otimes \psi_{n+1} \otimes v) \otimes 1 \\ &+ (-1)^{|\psi|} 1 \otimes s\psi \otimes v - (w'_{n+1})^{-1}(\partial\psi) \otimes sv \otimes 1 \\ &+ \sum_I (-1)^{|\psi|} 1 \otimes s\psi \otimes sv_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \\ &+ \sum_I \sum_{j=2}^{k-1} (-1)^{|\psi| + a(j)} (w'_{n+1})^{-1} (\psi \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \\ &\quad \otimes v_{i_{j-1}}) \otimes sv_{i_j} \otimes v_{i_{j+1}} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \\ &+ \sum_I (-1)^{|\psi| + a(k)} (w'_{n+1})^{-1} (\psi \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_{k-1}}) \otimes sv_{i_k} \otimes 1. \end{aligned}$$

Dans la catégorie $\mathbf{k}\text{-}ADG_1^*$, tout objet est fibrant et les objets cofibrants sont les T -modèles libres. Dans les catégories ${}_A\text{Mod}_A$, tout objet est fibrant et les objets cofibrants sont les résolutions quasi-libres, tandis que dans $\mathbf{k}\text{-Vect}_d$ tout objet est fibrant ou cofibrant.

Les lemmes qui suivent sont un cas particulier du résultat plus général suivant : les invariants $Acat$, $biMcat$, et e_k sont des invariants homotopiques dans les différentes catégories homotopiques sous-jacentes.

1.5. LEMME. — Soit $\Phi : T(V) \otimes X \otimes T(V) \rightarrow T(V)/T^{>n}(V)$ une résolution quasi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V), \partial)$ comme $T(V)$ -bimodule différentiel telle que :

a) Φ est surjective

b) sV est un facteur direct de X et l'inclusion :

$i_0 : (T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V), d_1) \rightarrow T(V) \otimes X \otimes T(V)$ est différentielle

c) le diagramme suivant est commutatif dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$

$$\begin{array}{ccc} T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V) & \xrightarrow{H_1} & (T(V)) \\ \downarrow i_0 & & \downarrow P \\ T(V) \otimes X \otimes T(V) & \xrightarrow{\Phi} & T(V)/T^{>n}(V) \end{array}$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{biMcat}(T(V), \partial) \leq n$.
- (ii) Il existe $r : T(V) \otimes X \otimes T(V) \rightarrow T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V)$ dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$ tel que $r \circ i_0 = \text{Id}$.
- (iii) Il existe $R : T(V) \otimes X \otimes T(V) \rightarrow T(V)$ dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$ tel que $R(1 \otimes 1 \otimes 1) = 1$ et $R(1 \otimes sv \otimes 1) = 0$.

Démonstration. — Soient

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \longrightarrow & T(V)/T^{>n}(V) \\ & \searrow i & \uparrow \psi \\ & & T(V \oplus W) \end{array}$$

et l'isomorphisme de $T(V)$ -bimodules différentiels :

$$T(V \oplus W) \cong T(V) \oplus T(V) \otimes [W \oplus W \otimes T(V \oplus W) \oplus W] \otimes T(V).$$

Le diagramme suivant est cocartésien dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$:

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \xrightarrow{i} & T(V) \oplus T(V) \otimes [W \oplus W \otimes T(V \oplus W) \otimes W] \otimes T(V) \\ \uparrow H_1 \sim & & \uparrow \sim h = H_1 \oplus \text{Id} \\ T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V) & \xrightarrow{i_1} & T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V) \oplus T(V) \\ & & \otimes [W \oplus W \otimes T(V \oplus W) \otimes W] \otimes T(V) \end{array}$$

de sorte que i admet une rétraction si et seulement si i_1 en admet une.

Examinons ensuite dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$ le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V) & \xrightarrow{i_1} & T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V) \oplus T(V) \\ \uparrow i_0 \sim & \nearrow \gamma & \uparrow \psi \circ h \\ T(V) \otimes X \otimes T(V) & \xleftarrow{\Phi} & T(V)/T^{>n}(V) \end{array}$$

D'après le lemme 0.11, il existe :

$$\begin{aligned} \gamma : T(V) \otimes X \otimes T(V) \\ \rightarrow T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V) \oplus T(V) \otimes [W \oplus W \otimes T(V \oplus W) \otimes W] \otimes T(V) \end{aligned}$$

dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$ tel que $\gamma \circ i_0 = i_1$ et $\psi \circ h \circ \gamma = \Phi$

$$\eta : T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV \oplus W \oplus W \otimes T(V \oplus W) \otimes W] \otimes T(V) \rightarrow T(V) \otimes X \otimes T(V)$$

dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$ tel que $\eta \circ i_1 = i_0$ et $\Phi \circ \eta = \psi \circ h$.

Supposons qu'il existe $r : T(V \oplus W) \rightarrow T(V)$ dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$ tel que $r \circ i = \text{Id}$.

On a le diagramme commutatif dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$:

$$\begin{array}{ccc} T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V) & \xrightarrow{\quad = \quad} & T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V) \\ i_0 \downarrow & \nearrow r & \downarrow \sim H_1 \\ T(V) \otimes X \otimes T(V) & \xrightarrow{\quad r \circ h \circ \gamma \quad} & T(V) \end{array}$$

D'après le lemme 0.11, il existe r :

$$T(V) \otimes X \otimes T(V) \rightarrow T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V)$$

dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$ tel que $r \circ i_0 = \text{Id}$ d'où (ii).

Réciproquement, supposons qu'on a r :

$$T(V) \otimes X \otimes T(V) \rightarrow T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V)$$

dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$ tel que $r \circ i_0 = \text{Id}$.

On a $r = r \circ \eta$ qui est un rétracte de i_1 ; autrement dit, i admet un rétracte et (ii) $\Rightarrow$ (i).

Montrons que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : supposons que i_0 admet un rétracte r dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$; on prend $R = H_1 \circ r$ et l'on a $R(1 \otimes 1 \otimes 1) = 1$ et $R(1 \otimes sv \otimes 1) = 0$ d'où (iii).

Réciproquement, si on a $R : T(V) \otimes X \otimes T(V) \rightarrow T(V)$ dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$ tel que $R(1 \otimes 1 \otimes 1) = 1$ et $R(1 \otimes sv \otimes 1) = 0$, on a le diagramme commutatif dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$

$$\begin{array}{ccc} T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V) & \xrightarrow{\quad = \quad} & T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V) \\ i_0 \downarrow & \nearrow r & \downarrow \sim H_1 \\ T(V) \otimes X \otimes T(V) & \xrightarrow{\quad R \quad} & T(V) \end{array}$$

D'après le lemme 0.11, il existe r :

$$T(V) \otimes X \otimes T(V) \rightarrow T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V)$$

dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$ tel que $r \circ i_0 = \text{Id}$ d'où (ii).

2. T -modèle libre minimal d'un produit tensoriel.

Soient (A, d) et (B, δ) dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$ de T -modèles libres minimaux respectifs $(T(V), \partial)$ et $(T(U), \delta)$; on a un quasi-isomorphisme :

$$(T(V) \otimes T(U), \partial \otimes \delta) \rightarrow (A \otimes B, d \otimes \delta).$$

Il suffit donc, pour avoir le T -modèle libre minimal de $(A \otimes B, d \otimes \delta)$ de construire le T -modèle libre minimal de $(T(V) \otimes T(U), \partial \otimes \delta)$. Le T -modèle libre minimal de $(T(V) \otimes T(U), \partial \otimes \delta)$ a pour espace des générateurs :

$$\begin{aligned} W &\cong s^{-1}(\bar{\mathbf{H}}_* \Omega T(V) \otimes T(U))' \cong s^{-1}(\bar{\mathbf{H}}_*(\Omega T(V) \otimes \Omega T(U)))' \\ &\cong s^1(\bar{H}_* \Omega T(V) \otimes \bar{H}_* \Omega T(U))'. \end{aligned}$$

Mais nous savons que $(\bar{\mathbf{H}}_* \Omega T(V))' \cong sV$ et que $(\bar{\mathbf{H}}_* \Omega T(U))' \cong sU$; de sorte que $W \cong V \oplus U \oplus s^{-1}(sV \otimes sU)$.

Définissons ensuite sur $T(W)$ une dérivation D de degré un par : $\forall v \in V$ et $u \in U$:

$$Dv = \partial v, \quad Du = \delta u,$$

$$Ds^{-1}(sv \otimes su) = v \otimes u - (-1)^{|v||u|} u \otimes v - [(\partial v) \# u + (-1)^{|v|} v \# (\delta u)].$$

Expliquons la notation $\#$ introduite ci-dessus.

Soient $v, v_1, \dots, v_p \in V$ et $u, u_1, \dots, u_p \in U$; nous posons

$$\begin{aligned} 1) \quad &(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) \# u \\ &= \sum_{j=1}^p (-1)^{c_j} v_1 \otimes \dots \otimes v_{j-1} \otimes s^{-1}(sv_j \otimes su) \otimes v_{j+1} \otimes \dots \otimes v_p \end{aligned}$$

où $c_j = |v_1| + \dots + |v_{j-1}| + (|v_{j+1}| + \dots + |v_p|)|u|$

$$\begin{aligned}
 2) \quad v \# (u_1 \otimes \cdots \otimes u_k) \\
 = \sum_{i=1}^k (-1)^{d_i} u_1 \otimes \cdots \otimes u_{i-1} \otimes s^{-1}(sv \otimes su_i) \otimes u_{i+1} \otimes \cdots \otimes u_k
 \end{aligned}$$

où $d_j = (|v|+1)(|u_1| + \cdots + |u_{i-1}|)$

$$\begin{aligned}
 3) \quad (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \# (u_1 \otimes \cdots \otimes u_k) \\
 = (-1)^{f_{pk}} [v_1 \# (u_1 \otimes \cdots \otimes u_k)] \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_p \\
 + \sum_{j=2}^{p-1} (-1)^{g_{pk}} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{j-1} \otimes [v_j \# (u_1 \otimes \cdots \otimes u_k)] \otimes v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_p \\
 + (-1)^{|v_1| + \cdots + |v_{p-1}|} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p-1} \otimes [v_p \# (u_1 \otimes \cdots \otimes u_k)]
 \end{aligned}$$

où $f_{pk} = (|u_1| + \cdots + |u_k|)(|v_2| + \cdots + |v_p|)$ et

$$g_{pk} = |v_1| + \cdots + |v_{j-1}| + (|v_{j+1}| + \cdots + |v_p|)(|u_1| + \cdots + |u_k|).$$

On impose de plus à $\#$ d'être $\mathbf{k}$ -linéaire.

Considérons le morphisme d'algèbres $\psi : T(W) \rightarrow T(V) \otimes T(U)$ défini par :

$$\begin{aligned}
 \psi(v) &= v \otimes 1, \quad \forall v \in V \\
 \psi(u) &= 1 \otimes u, \quad \forall u \in U \\
 \psi(s^{-1}(sv \otimes su)) &= 0, \quad \forall v \in V \text{ et } u \in U.
 \end{aligned}$$

2.1. LEMME. — Lorsque $\partial = \delta = 0$:

- (i) $D^2 = 0$
- (ii) ψ est un quasi-isomorphisme et $(T(W), D)$ est le T -modèle libre minimal de $(T(V) \otimes T(U), 0)$.

Démonstration. — Posons $\hat{V} = \mathbf{k} \oplus sV$ et $\hat{U} = \mathbf{k} \oplus sU$. Ce sont deux coalgèbres à différentielles et à comultiplications réduites triviales. Nous avons $(T(V), 0) = \Omega \hat{V}$ et $(T(U), 0) = \Omega \hat{U}$ où Ω est la cobar construction : considérons ensuite

$$\begin{aligned}
 (T(V) \otimes T(U), 0) &= \Omega \hat{V} \otimes \Omega \hat{U} \leftarrow \Omega B(\Omega \hat{V} \otimes \Omega \hat{U}) \rightarrow \Omega(B\Omega \hat{V} \otimes B\Omega \hat{U}) \\
 &\rightarrow \Omega(\hat{V} \otimes \hat{U})
 \end{aligned}$$

où toutes les flèches sont des quasi-isomorphismes et B la bar construction. Comme $\Omega(\hat{V} \otimes \hat{U}) = T(U \oplus V \oplus s^{-1}(sV \otimes sU))$, il suffit alors de montrer que $T(U \oplus V \oplus s^{-1}(sV \otimes sU))$ muni de la différentielle d de

la cobar construction est isomorphe à $(T(U \oplus V \oplus s^{-1}(sV \otimes sU)), D)$ lorsque $\partial = \delta = 0$. Mais on sait que d est complètement déterminé par la comultiplication réduite de $\hat{V} \otimes \hat{U}$ qui est donnée par la composée :

$$\text{Id} \otimes T \otimes \text{Id} \circ \Delta \otimes \Delta : \\ \hat{V} \otimes \hat{U} \rightarrow \hat{V} \otimes \hat{V} \otimes \hat{U} \otimes \hat{U} \rightarrow \hat{V} \otimes \hat{U} \otimes \hat{V} \otimes \hat{U}.$$

Cette différentielle est évidemment nulle sur U et V ; de plus on a :

$$ds^{-1}(sv \otimes su) = s^{-1} \otimes s^{-1} \circ \Delta \circ s(s^{-1}(sv \otimes su)) \quad \text{comme} \quad \bar{\Delta}(sv \otimes su) = \\ (-1)^{(|v|+1)(|u|+1)} 1 \otimes sv \otimes su \otimes 1 + sv \otimes 1 \otimes 1 \otimes su \otimes 1 \quad \text{on a alors :} \\ ds^{-1}(sv \otimes su) = (-1)^{|v|} v \otimes u - (-1)^{|v||u|} u \otimes v \quad \text{et partant l'isomorphisme} \\ \text{cherché.} \quad \square$$

3. Conjecture de Ganéa pour biMcat.

3.1. DÉFINITION. — Soient A et B dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$: on dit que A est un rétracte homotopique de B dans ${}_A\text{Mod}_A$ s'il existe $f: A \rightarrow B$ dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$ tel que, dans le diagramme suivant, i admette une rétraction r dans ${}_A\text{Mod}_A$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow i \quad \swarrow r & \uparrow \psi \\ & A \perp\!\!\!\perp T(V) & \end{array}$$

3.2. LEMME. — Soient A et B dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$ tels que A est un rétracte homotopique de B comme A -bimodule différentiel : Alors

$$\text{biMcat}(A) \leq \text{biMcat}(B).$$

Démonstration. — Supposons que $A = (T(V), \partial)$ et $B = (T(U), \delta)$ sont des T -modèles libres minimaux et que $\text{biMcat}(T(U), \delta) = n$.

Considérons

$$H_1 : (T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V), d_1) \rightarrow (T(V), \partial)$$

et

$$F : T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV \oplus M' \oplus M' \otimes sV] \otimes T(V) \rightarrow T(V)/T^{>n}(V)$$

les résolutions quasi-libres construites dans la section 1. L'algèbre $T(V)$ étant un rétracte homotopique de $T(U)$ comme $T(V)$ -bimodule différentiel,

on a le diagramme commutatif suivant dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$:

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \xrightarrow{f} & T(U) \\ & \searrow i \quad \nearrow r_0 & \uparrow \psi_0 \\ & & T(V \otimes W) \end{array}$$

avec $r_0 \circ i_0 = \text{Id}$.

L'égalité $\text{biMcat}(T(U) = n$ entraîne qu'on a le diagramme commutatif suivant dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$:

$$\begin{array}{ccc} T(U) & \xrightarrow{P_1} & T(U)/T^{>n}(U) \\ & \searrow i_1 \quad \nearrow r_1 & \uparrow \psi_1 \\ & & T(U \otimes Y) \end{array} \quad \text{avec} \quad r_1 \circ i_1 = \text{Id}.$$

Notons $f: T(V)/T^{>n}(V) \rightarrow T(U)/T^{>n}(U)$ le passage de f au quotient.

Nous avons le diagramme commutatif suivant dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$:

$$\begin{array}{ccc} T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V) & \xrightarrow{i_1 \circ f \circ H_1} & T(U \oplus Y) \\ \downarrow i & \nearrow \theta & \downarrow \psi_1 \\ T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV \oplus M' \oplus M' \oplus sV] \otimes T(V) & \xrightarrow{\bar{f} \circ F} & T(U)/T^{>n}(U) \end{array}$$

D'après le lemme 0.11, il existe θ dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$ qui relève $f \circ F$ et étend $i_1 \circ f \circ H_1$.

Considérons enfin le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV] \otimes T(V) & \xrightarrow{i_0 \circ H_1} & T(V \oplus W) \\ \downarrow i & \nearrow \beta & \downarrow \psi_0 \\ T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV \oplus M' \oplus M' \oplus sV] \otimes T(V) & \xrightarrow{r_1 \circ \theta} & T(U)/T^{>n}(U) \end{array}$$

dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$. D'après le lemme 0.11, il existe β dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$ qui étend $i_0 \circ H_1$ et relève $r_1 \circ \theta$ à homotopie près. $\square$

3.3. LEMME. — Soit A dans $k\text{-}ADG_1^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{biMcat}(A) < n$,
- (ii) A est rétracte homotopique comme A -bimodule différentiel d'une algèbre B dans $k\text{-}ADG_1^*$ de longueur de produit inférieure ou égale à n .

Démonstration. — Supposons que $A = (T(V), \partial)$ est un T -modèle libre minimal.

$\text{biMcat}(T(V), \partial) \leq n$ entraîne que $(T(V), \partial)$ est rétracte homotopique de $(T(V)/T^{>n}(V), \partial)$ comme $T(V)$ -bimodule différentiel, via la projection, et $T(V)/T^{>n}(V)$ est de longueur de produit n , d'où (i) $\Rightarrow$ (ii).

Réciproquement, supposons que $(T(V), \partial)$ est un rétracte homotopique en tant que $T(V)$ -bimodule différentiel d'une $k\text{-}ADG_1^*(B, d_B)$ de longueur de produit inférieure ou égale à n ; nous avons le diagramme commutatif dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$:

$$\begin{array}{ccc}
 T(V) & \xrightarrow{f} & B \\
 & \searrow i_B & \uparrow \psi_B \\
 & & T(V \oplus W)
 \end{array}$$

(avec une flèche en pointillés r_B de $T(V)$ vers $T(V \oplus W)$)

tel que $r_B \circ i_B = \text{Id}$.

Signalons que f est un morphisme d'algèbres différentielles. Comme B est de longueur de produit inférieure ou égale à n , f envoie $T^{>n}(V)$ sur zéro, donc factorise à travers $T(V)/T^{>n}(V)$; c'est-à-dire qu'on a les diagrammes commutatifs suivant dans $k\text{-}ADG_1^*$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{---} f \text{---} & & \\
 & \text{---} P \text{---} & T(V)/T^{>n}(V) & \xrightarrow{\bar{f}} & B \\
 & & & & \\
 T(V) & \xrightarrow{i_B} & T(V \oplus W) & & \\
 \downarrow i & & \downarrow \psi & & \\
 T(V \oplus X) & \xrightarrow{f \circ \psi} & B & &
 \end{array}$$

Dans ce dernier diagramme, on a utilisé la factorisation de la projection

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \xrightarrow{P} & T(V)/T^{>n}(V) \\ & \searrow i & \uparrow \psi \\ & & T(V \oplus X) \end{array}$$

D'après le lemme 0.10, il existe :

$$\theta : T(V \oplus X) \rightarrow T(V \oplus W) \text{ tel que } \theta \circ i = i_B \text{ et } \psi_B \circ \theta \sim f \circ \psi.$$

Prenons $r = r_B \circ \theta$; on a $r \circ i = r_B \circ \theta \circ i = r_B \circ i_B = \text{Id}$ d'où $\text{biMcat}(T(V), \partial) \leq n$. $\square$

3.4. LEMME. — Soient $(T(V), \partial)$ et $(T(U), \delta)$ dans $k\text{-ADG}_1^*$ alors

$$\text{biMcat}(T(V) \otimes T(U)) \leq \text{biMcat}(T(V)) + \text{biMcat}(T(U)).$$

Démonstration. — Posons

$$\text{biMcat}(T(V)) = n \quad \text{et} \quad \text{biMcat}(T(U)) = m;$$

nous avons par conséquent les diagrammes suivants dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$:

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \xrightarrow{P_V} & T(V)/T^{>n}(V) \\ & \searrow i_V & \uparrow \psi_V \\ & & T(V \oplus W) \end{array} \quad \text{tel que } r_V \circ i_V = \text{Id}.$$

$$\begin{array}{ccc} T(U) & \xrightarrow{P_U} & T(U)/T^{>m}(U) \\ & \searrow i_U & \uparrow \psi_U \\ & & T(U \oplus X) \end{array} \quad \text{tel que } r_U \circ i_U = \text{Id}.$$

Ce qui donne dans ${}_{T(V)}\text{Mod}_{T(V)}$:

$$\begin{array}{ccc} T(V) \otimes T(U) & \xrightarrow{P_V \otimes P_U} & T(V)/T^{>n}(V) \otimes T(U)/T^{>m}(U) \\ & \searrow r_V \otimes r_U & \uparrow \psi_V \otimes \psi_U \\ & & T(V \oplus W) \otimes T(U \oplus X) \\ & \searrow i_V \otimes i_U & \uparrow \psi \\ & & T(V) \otimes T(U) \perp\!\!\!\perp T(Z) \end{array}$$

I

En posant $r = r_V \otimes r_U \circ \psi$, nous avons $r \circ i = r_V \otimes r_U \circ \psi \circ I = r_V \otimes r_U \circ i_V \otimes i_U = \text{Id}$, de sorte que $T(V) \otimes T(U)$ est rétracte homotopique de $T(V)/T^{>m}(U) \otimes T(U)/T^{>m}(U)$ comme $T(V) \otimes T(U)$ -bimodule différentiel et $T(V)/T^{>n}(V) \otimes T(U)/T^{>m}(U)$ est de longueur de produit $m + n$; on a alors $\text{biMcat}(T(V) \otimes T(U)) \leq m + n$ d'après le lemme 3.3. $\square$

Soient $(T(V), \partial)$ un T -modèle libre minimal dans ADG'_1 , M et N deux $T(V)$ -bimodules différentiels.

3.5. DÉFINITION. — Une application $f: M \rightarrow N$ est un morphisme de $T(V)$ -bimodules différentiels si :

(i) Pour tous α, β dans $T(V)$ et m dans M

$$f(\alpha.m.\beta) = (-1)^{|\alpha||f|} \alpha.f(m).\beta$$

où $|f|$ désigne le degré de f et $|\alpha|$ celui de α

$$df = (-1)^p fd.$$

Considérons le produit $T(V) \otimes T(U)$ où $(T(V), \partial)$ et $(T(U), \delta)$ sont deux T -modèles libres minimaux; nous nous proposons d'établir la double inégalité

$$\begin{aligned} \text{biMcat}(T(V), \partial) + e_k(T(U)) &\leq \text{biMcat}(T(V) \otimes T(U)) \\ &\leq \text{biMcat}(T(V)) + \text{biMcat}(T(U)). \end{aligned}$$

Pour cela, nous adoptons les notations suivantes: soient n et p deux entiers naturels; posons:

$$\begin{aligned} W &= V \oplus U \oplus s^{-1}(sV \otimes sU) \\ M_n &= s(V^{\otimes n+1}) \\ M_{n+p} &= s(W^{\otimes n+p+1}) \\ \hat{V} &= \mathbf{k} \oplus sV \\ \hat{W} &= \mathbf{k} \oplus sW \\ \hat{M}_n &= \mathbf{k} \oplus sV \oplus M_n \oplus M_n \otimes sV \\ \hat{M}_{n+p} &= \mathbf{k} \oplus sV \oplus M_{n+p} \oplus M_{n+p} \otimes sV \end{aligned}$$

et considérons les résolutions quasi-libres suivantes:

$$\begin{aligned} G_\infty: T(V) \otimes \hat{V} \otimes T(V) &\rightarrow T(V) \text{ comme } T(V)\text{-bimodule différentiel} \\ G_n: T(V) \otimes \hat{M}_n \otimes T(V) &\rightarrow T(V)/T^{>n}(V) \text{ comme } T(V)\text{-bimodule différentiel} \\ G_\infty: T(W) \otimes \hat{W} \otimes T(W) &\rightarrow T(W) \text{ comme } T(W)\text{-bimodule différentiel} \\ G_{n+p}: T(W) \otimes \hat{M}_{n+p} \otimes T(W) &\rightarrow T(W)/T^{>n+p}(W) \text{ comme } T(W)\text{-bimodule différentiel.} \end{aligned}$$

3.6. THÉORÈME. — $\text{biMcat}(T(V), \partial) + e_k(T(U)) \leq \text{biMcat}(T(V) \otimes T(U)) \leq \text{biMcat}(T(V)) + \text{biMcat}(T(U)).$

Démonstration. — Seule la première inégalité nécessite une preuve.

Si $e_k(T(U)) = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que $e_k(T(U)) = p < +\infty$ et posons

$$\text{biMcat}(T(V) \otimes T(U)) = n + p.$$

Comme $\text{biMcat}(T(V) \otimes T(U)) \geq e_k(T(U) \otimes T(V)) \geq e_k(T(U)) = p$, on a $n \geq 0$; il nous suffit alors de démontrer que $\text{biMcat}(T(V)) \leq n$. Mais $e_k(T(U)) = p$ signifie qu'il existe une classe de cohomologie $\bar{x}$ dans $H^*(T(U))$ représentée par un cycle x dans $T^{\geq p}(U)$.

Pour démontrer que $\text{biMcat}(T(V)) \leq n$, nous définissons deux morphismes de $T(V)$ -bimodules différentiels à savoir :

$$\eta : T(V) \otimes \hat{M}_n \otimes T(V) \rightarrow T(W) \otimes \hat{M}_{n+p} \otimes T(W) \text{ de degré } |x|$$

et

$$q : T(W) \rightarrow T(V) \text{ de degré } -|x|$$

tels que la composée $q \circ R \circ \eta$ vérifie $q \circ R \circ \eta(1 \otimes 1 \otimes 1) = 1$ et $q \circ R \circ \eta(1 \otimes sv \otimes 1) = 0$ pour tout v dans V ; R étant la rétraction $R : T(W) \otimes \hat{M}_{n+p} \otimes T(W) \rightarrow T(W)$ fournie par l'hypothèse $\text{biMcat}(T(V) \otimes T(U)) \leq n + p$ qui est aussi un morphisme de $T(V)$ -bimodules différentiels. Remarquons au passage que $T(V) \otimes T(U)$ et $T(V) \otimes H^*(T(U))$ sont, bien entendu, des $T(V)$ -bimodules différentiels.

1^{re} étape : Construction de η_1 :

$$T(V) \otimes \hat{V} \otimes T(V) \rightarrow T(W) \otimes \hat{W} \otimes T(W).$$

Notons π le quasi-isomorphisme surjectif d'algèbres différentielles $\pi : T(W) \rightarrow T(V) \otimes T(U)$ (c'est aussi un quasi-isomorphisme de $T(V)$ -bimodules). On bigradue $T(V) \otimes \hat{V} \otimes T(V)$ et $T(W) \otimes \hat{W} \otimes T(W)$ en posant

$$\begin{aligned} V &= V^{1,*}, & sV &= sV^{0,*}, & sU &= sU^{0,*}; \\ U &= U^{1,*}, & s^{-1}(sV \otimes sU) &= s^{-1}(sV \otimes sU)^{1,*}, \\ & & sV \otimes sU &= sV \otimes sU^{0,*}. \end{aligned}$$

Filtrons ensuite $T(V) \otimes \hat{V} \otimes T(V)$ et $T(W) \otimes \hat{W} \otimes T(W)$ par le premier degré et $T(V) \otimes T(U)$ par le poids des mots.

Définissons $\eta_0 : T(V) \otimes \hat{V} \otimes T(V) \rightarrow T(V) \otimes T(U)$ par

$$\begin{aligned}\eta_0(1 \otimes 1 \otimes 1) &= 1 \oplus x \\ \eta_0(1 \otimes sv \otimes 1) &= 0, \quad \forall v \in V.\end{aligned}$$

Montrons que η commute aux différentielles :

$$\begin{aligned}\eta_0 d(1 \otimes sv \otimes 1) &= \eta_0(v \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes v - S(\partial v)) \\ &= (-1)^{|v||x|} v \otimes x - (-1)^{|v||x|} v \otimes x = 0 = d\eta_0(1 \otimes sv \otimes 1).\end{aligned}$$

$\eta_0 F_m(T(V) \otimes \hat{V} \otimes T(V)) \subset F_{m+p}(T(V) \otimes T(U))$. En appliquant le lemme 3.7 ci-dessus, et puisque $\pi \circ G_\infty$ est un quasi-isomorphisme surjectif qui préserve les filtrations, il existe

$\eta_1 : T(V) \otimes \hat{V} \otimes T(V) \rightarrow T(W) \otimes \hat{W} \otimes T(W)$, morphisme de $T(V)$ bimodules différentiels, de degré $|x|$ tel que :

- (i) $\pi \circ G_\infty \circ \eta_1 = \eta_0$
- (ii) $\eta_1 F_m \subset F_{m+p}$; cette deuxième condition implique que pour tout ψ dans $V^{\otimes n+1}$ et v dans V , $G_{n+p}(\psi \otimes \eta_0(1 \otimes sv \otimes 1)) = 0$.

2^e étape : Prolongement de η_1 .

On prolonge η_1 en un morphisme de $T(V)$ -bimodules différentiels de degré $|x|$ noté η .

$\eta : T(V) \otimes \hat{M}_n \otimes T(V) \rightarrow T(W) \otimes \hat{M}_{n+p} \otimes T(W)$ de la manière suivante :

$$\eta = \eta_1 \text{ sur } T(V) \otimes \hat{V} \otimes T(V)$$

$\forall \psi \in V^{\otimes n+1}$ on pose $\eta(1 \otimes s\psi \otimes 1) = (-1)^{|\psi||x|} W_{n+p+1}^{-1}(\psi \otimes x)$ où W_{n+1} est l'isomorphisme

$$W_{n+1} : T(V) \otimes M_n \rightarrow T^{>n+p+1}(V)$$

vérifions que η commute aux différentielles :

$$\begin{aligned}d\eta(1 \otimes s\psi \otimes 1) &= (-1)^{|\psi||x|} \psi \otimes x \otimes 1 \otimes 1 - W_{n+p+1}^{-1}(\partial\psi \otimes x). \\ \eta d(1 \otimes s\psi \otimes 1) &= \eta(\psi \otimes 1 \otimes 1 - W_{n+1}^{-1}(\partial\psi)) \\ &= (-1)^{|\psi||x|} \psi \otimes x \otimes 1 \otimes 1 - W_{n+1}^{-1}(\partial\psi \otimes x); \end{aligned}$$

ce qui montre que η commute aux différentielles sur M_n .

On définit enfin η sur $M_n \otimes sv$ par récurrence.

Soit n_0 le degré minimal de V ; considérons $s\psi \otimes sv$ où $\psi = \psi_1 \dots \psi_{n+1}$ tel que $|\Psi_i| = |v| = n_0$; on a $\partial\psi = \partial v = 0$ puisque ∂ est minimale.

$$\begin{aligned} d(1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1) &= \psi \otimes sv \otimes 1 - (-1)^t \psi_1 \\ &\quad \otimes s(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_{n+1} \otimes v) \otimes 1 + (-1)^{|\psi|} \otimes s\psi \otimes v \\ \eta d(1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1) &= (-1)^{|\psi|+|x|} \psi \otimes \eta(1 \otimes sv \otimes 1) \\ &\quad - (-1)^c \psi_1 \otimes W_{n+1}^{-1}(\psi_2 \otimes \dots \otimes \psi_{n+1} \otimes v \otimes x) + (-1)^b s(\psi \otimes x) \otimes v \end{aligned}$$

où $t = |\psi_2| + \dots + |\psi_{n+1}|$, $c = |\psi| + |x| + |v| + |x| + |\psi_1|$ et $b = |\psi| + |\psi| + |x|$ d'après l'étape 1,

$$\eta(1 \otimes sv \otimes 1) \in F_p T(W) \otimes \hat{W} \otimes T(W)$$

et comme $\psi \in V^{\otimes n+1}$ on a $G_{n+p}((-1)^{|\psi|+|x|} \psi \otimes \eta(1 \otimes sv \otimes 1)) = 0$; par conséquent $G_{n+1} \eta d(1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1) = 0$.

Mais $d\eta(d(1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1)) = 0$ car η commute aux différentielles sur $T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV \oplus M] \otimes T(V)$; de sorte que $\eta d(1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1)$ est un cycle dans $\text{Ker } G_{n+p}$ qui est acyclique; il existe donc $\beta \in \text{Ker } G_{n+p}$ tel que $d\beta = \eta d(1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1)$ et on pose $\eta(1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1) = \beta$; et η commute aux différentielles.

Supposons avoir construit η sur tout élément $1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1$ tel que $|1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1| < m$, η commute aux différentielles et $\eta(1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1) \in \text{Ker } G_{n+p}$ soit $1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1$ tel que $|1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1| = m$.

Si on pose $\psi = \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_{n+1}$ $X = |\psi_2| + \dots + |\psi_{n+1}|$

$$\partial v = \sum_I v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{k_k}, \quad a(j) = |v_{i_1}| \otimes \dots \otimes |v_{i_{j-1}}|$$

$$\begin{aligned} D_{n+1}(1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1) &= \psi \otimes sv \otimes 1 - (-1)^x \psi_1 \otimes s(\psi_2 \otimes \dots \otimes \psi_{n+1} \otimes v) \otimes 1 \\ &\quad + (-1)^{|\psi|} 1 \otimes s\psi \otimes v - (w'_{n+1})^{-1}(\partial\psi) \otimes sv \otimes 1 \\ &\quad + \sum_I (-1)^{|\psi|} 1 \otimes s\psi \otimes sv_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \\ &\quad + \sum_{I \atop j=2}^{k-1} \sum (-1)^{|\psi|+a(j)} (w'_{n+1})^{-1}(\psi \otimes v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_{j-1}}) \otimes sv_{i_j} \otimes v_{i_{j+1}} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \\ &\quad + \sum_I (-1)^{|\psi|+a(k)} (w'_{n+1})^{-1}(\psi \otimes v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_{k-1}}) \otimes sv_{i_k} \otimes 1 \end{aligned}$$

$d\eta d(1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1) = 0$ car η commute aux différentielles sur

$$T(V) \otimes [\mathbf{k} \oplus sV \oplus M \oplus (M \oplus sV)^{\leq m}] \otimes T(V)$$

et

$$G_{n+p}\eta(d1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1) = 0$$

d'après l'étape 1 de l'hypothèse de récurrence ; $\text{Ker } G_{n+p}$ étant acyclique, il existe donc $\beta \in \text{Ker } G_{n+p}$ tel que $d\beta = \eta d(1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1)$; on pose donc $\eta(1 \otimes s\psi \otimes sv \otimes 1) = \beta$; η commute aux différentielles. On prolonge η en un morphisme de $T(V)$ -bimodules différentiels de degré $|x|$.

3^e étape : Construction de $q : T(W) \rightarrow T(V)$ morphisme de $T(V)$ -bimodules de degré $-|x|$.

Posons $H^*(T(U)) = \mathbf{k} \cdot x \oplus S$ et prenons la forme linéaire P définie par $P(x) = 1$ et $P(s) = 0$ pour tout s dans S ; alors $\bar{P} = \text{Id } P : T(V) \otimes H^*(T(U)) \rightarrow T(V)$ est un morphisme de $T(V)$ -modules différentiels à gauche.

Montrons que $\bar{P}$ est un morphisme de $T(V)$ -bimodules.

Soient $V_1, V_2 \in T(V)$; il suffit de vérifier que

$$\bar{P}((V_1 \otimes x) \cdot V_2) = (-1)^a V_1 \otimes V_2 ;$$

en effet

$$\begin{aligned} \bar{P}((V_1 \otimes x) \cdot V_2) &= (-1)^w \bar{P}(V_1 \otimes V_2 \otimes x)w = |V_2||x| \\ &= (-1)^p V_1 \otimes V_2 = (-1)^g V_1 \otimes V_2 \end{aligned}$$

où $a = |V_1||x|$, $p = |V_2||x| + |V_1||x| + |V_2||x|$ et $g = |V_1||x|$.

Posons $T(U) = Z(T(U)) \oplus K$ où $Z(T(U))$ désigne les cycles de $T(U)$ et définissons un morphisme de $T(V)$ -bimodules :

$\theta : T(V) \otimes T(U) \rightarrow T(V) \otimes H^*(T(U))$ par

$$\theta(1 \otimes a) = \begin{cases} (1 \otimes \bar{a}) & \text{si } a \in Z(T(U)) \\ 0 & \text{si } a \in K \end{cases}$$

θ commute bien aux différentielles.

Posons enfin $q = \bar{P} \circ \theta$.

4^e étape : Rétraction.

Par hypothèse, $\text{biMcat}(T(V) \otimes T(U)) \leq n + p$; c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de $T(W)$ -bimodules :

$$\varphi : T(W) \otimes \hat{M} \otimes T(W) \rightarrow T(W) \text{ vérifiant}$$

$$\varphi(1 \otimes 1 \otimes 1) = 1$$

$$\varphi(1 \otimes sv \otimes 1) = 0 \text{ pour tout } w \text{ dans } W.$$

Posons enfin $r = q \circ \pi \circ p \circ \eta$; c'est un morphisme de $T(V)$ -bimodules $T(V) \otimes \hat{M} \otimes T(V) \rightarrow T(V)$; on a

$$\begin{aligned} r(1 \otimes 1 \otimes 1) &= q \circ \pi \circ p \circ \eta(1 \otimes 1 \otimes 1) = q \circ \pi \circ p(x \otimes 1 \otimes 1) \\ &= q \circ \pi(x \otimes 1 \otimes 1) = q(1 \otimes x) = 1. \end{aligned}$$

$$r(1 \otimes sv \otimes 1) = q \circ \pi \circ p \circ \eta(1 \otimes sv \otimes 1) = q \circ \pi(\eta_1(1 \otimes sv \otimes 1)).$$

Mais $\pi \circ \eta_1(1 \otimes sv \otimes 1) = 0$ et donc $r(1 \otimes sv \otimes 1) = 0$; c'est-à-dire que r est bien la rétraction cherchée.

Soient A dans $\mathbf{k}\text{-ADG}_1^*$ et K , M et N des A -modules à gauche filtrés; c'est-à-dire que chaque objet est muni d'une filtration F_p décroissante vérifiant $dF_p \subset F_{p+1}$.

3.7. LEMME (*). — *Étant donné un diagramme de A -modules différentiels filtrés*

$$\begin{array}{ccc} & & K \\ & \nearrow g & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

tel que :

- (1) $f(F_p M) \subset F_{p+m} N$ et $\pi(F_p K) \subset F_p N$.
- (2) M est A -quasi-libre minimal.
- (3) Pour tout p , la restriction $F_p(K) \rightarrow F_p(N)$ est surjective.
- (4) Le gradué $E^0(I)$ associé au noyau I de π est acyclique.
- (5) Pour tout n , il existe $\varphi(n)$ tel que $F_p(K^n) = 0$ pour $p > \varphi(n)$.

Alors il existe $g : M \rightarrow K$ morphisme de A -modules différentiels tel que

$$g(F_p M) \subset F_{p+m}(K) \quad \text{et} \quad \pi \circ g = f.$$

Démonstration. — Posons $M = A \otimes X$ où X est un $\mathbf{k}$ -espace vectoriel gradué: on raisonne par récurrence sur une base $(a_i)_{i \in I}$ de X ; soit $a_i \in F_p$ tel que g soit déjà défini sur da_i et $gda_i \in F_{p+m} K$; on a $\pi gda_i = fda_i = df(a_i)$; d'après l'hypothèse (3), il existe $u_i \in F_{p+m}(K)$ tel que $\pi(u_i) = a_i$. L'élément $du_i - gda_i \in F_{p+m+1}(K)$; son image dans E_{p+m+1} est un cycle donc un bord par l'hypothèse (4); il existe

(*) Ce lemme m'a été communiqué par Y. Félix.

$b_i^1 \in F_{p+m+1}(I)$ tel que $db_i^1 - du_i + gda_i \in F_{p+m+2}(K)$. La trace de cet élément dans E_{p+2}^0 est un cycle donc un bord ; il existe donc $b_i^2 \in F_{p+m+1}(I)$ tel que $db_i^2 - (db_i^1 - du_i + gda_i) \in F_{p+m+3}(K)$; on réitère le procédé et d'après l'hypothèse (5), si $n = |a_i|$, il existe $\varphi(n)$ tel que la composante de da_i dans $F_p(K)$ est nulle pour $p > \varphi(n)$. On obtient donc $gda_i = d(-u_i \pm b_i^1 \pm b_i^2 \pm \dots \pm b_i^{\varphi(n)-1})$; on pose alors

$$ga_i = -u_i \pm b_i^1 \pm b_i^2 \pm \dots \pm b_i^{\varphi(n)-1} \in F_{p+m}(K),$$

de plus $dga_i = gda_i$ et $\pi \circ g = f$: d'où le lemme. $\square$

3.8. PROPOSITION (Invariance par extension de corps). — Soient $k \subset K$ une extension de corps et A dans $K\text{-ADG}_1$; alors

$$\text{biMcat}_K(A) = \text{biMcat}_k A.$$

Démonstration. — On reprend mot pour mot la démonstration du théorème 3-2 de [18]. $\square$

4. T -modèle libre minimal d'un T -modèle libre minimal tronqué.

Soit $(X, *)$ un espace topologique pointé simplement connexe ayant le type d'homotopie d'un c.w. complexe de type fini : dans [11] T. Ganéa définit par récurrence une suite de fibrations homotopiques (p_n) de la manière suivante : p_0 est la fibration de base X , d'espace total EX (l'espace des chemins de X d'origine $*$) de fibre ΩX . L'espace des lacets de X en $*$

$$\Omega X \xrightarrow{i_0} EX \sim * \xrightarrow{p_0} X;$$

on pose $F(0) = \Omega X$ et $X(0) = *$; l'écriture $X \sim Y$ signifie que X et Y ont le même type d'homotopie.

Si on suppose la $n^{\text{ième}}$ fibration construite

$$\Omega X \xrightarrow{i_n} X(n) \xrightarrow{p_n} X,$$

en considérant $\bar{p}_{n+1} : X(n) \cup CF(n) \rightarrow X$ l'extension de p_n au cône de l'inclusion i_n de la fibre dans $X(n)$ qui envoie le cône $CF(n)$ sur le point de base $*$, et en transformant par le procédé usuel $\bar{p}_{n+1}$ en fibration, on obtient p_{n+1} . On sait de plus que $F(n)$ a le type d'homotopie

du joint itéré $n + 1$ fois de ΩX qu'on note

$$\Omega X^{*(n+1)} = \Omega X * \dots * \Omega X \quad (n+1 \text{ copies}).$$

Cette construction peut être schématisée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \Omega X & \xrightarrow{i_0} & EX & \sim * & \xrightarrow{p_0} & X \\ & & \downarrow j_1 & & & \parallel \\ \Omega X * \Omega X & \xrightarrow{i_1} & \Sigma \Omega X & = X(1) & \xrightarrow{p_1} & X \\ & & \downarrow j_2 & & & \parallel \\ & & \dots & & & \parallel \\ & & \downarrow j_n & & & \parallel \\ \Omega X^{*(n+1)} & \xrightarrow{i_n} & X(n) & \xrightarrow{p_n} & & X \end{array}$$

4.1. DÉFINITION. — $X(n)$ est le $n^{\text{ième}}$ espace de Ganéa de X et la catégorie de Lusternik-Schnirelmann de X notée $\text{cat}(X)$ est le plus petit entier naturel n tel que p_n admet une section homotopique. S'il n'existe de section pour aucun n , $\text{cat}(X)$ est infini.

Cette définition est équivalente à celle plus courante donnée par Lusternik et Schnirelmann et à celle introduite par G. W. Whitehead dans [26].

Observons que le fibré homotopique :

$$\Omega(\Omega X^{*(n+1)}) \xrightarrow{\Omega(i_n)} \Omega X(n) \xrightarrow{\Omega(p_n)} \Omega X$$

admet une section qui est :

$$\Omega(j_n \circ \dots \circ j_2) \circ \alpha_{\Omega X} \quad \text{où} \quad \alpha_{\Omega X} : \Omega X \rightarrow \Omega \Sigma \Omega X$$

est l'adjointe de l'identité : $\Omega X(n)$ a par conséquent le type d'homotopie du produit $\Omega X \times \Omega(\Omega X^{*(n+1)})$.

En prenant l'homologie à coefficients dans une corps $\mathbf{k}$ de caractéristique quelconque, on obtient la suite exacte courte d'algèbres de Hopf cocommutatives :

$$\mathbf{k} \rightarrow H * (\Omega(\Omega X^{*(n+1)})) \xrightarrow{\Omega(i_n)*} H * \Omega X(n) \xrightarrow{\Omega(p_n)*} H * \Omega X \rightarrow \mathbf{k}$$

qui donne l'isomorphisme de $\mathbf{k}$ -espaces vectoriels gradués

$$H * \Omega X(n) \cong H * \Omega X \otimes H * (\Omega(\Omega X^{*(n+1)}))$$

qui est en fait un isomorphisme de $H * \Omega X$ -modules à gauche et de $H * (\Omega(\Omega X^{*(n+1)}))$ comodules à droite.

Soit $(T(V), \partial)$ le T -modèle libre minimal de $(X, *)$; on sait que V est isomorphe à $s^{-1}(\overline{H * \Omega X})'$ où la notation U' désigne le dual de U et s^{-1} l'opérateur de désuspension.

On a ainsi :

$$\begin{aligned} H * \Omega X(n) &\cong (\mathbf{k} \oplus sV') \otimes H * (\Omega(\Omega X^{*(n+1)})) \\ &\cong (\mathbf{k} \oplus sV') \otimes T(U) \quad \text{avec} \quad U = s^{n-1}(s^{-1}V')^{\otimes n+1} \end{aligned}$$

ce qui donne l'isomorphisme de $\mathbf{k}$ -espaces vectoriels

$$s^{-1}(\overline{H * \Omega X(n)})' \cong V \oplus s^{-1}(sV \otimes T^+(s^2 V^{\otimes n+1}) \oplus s^{-1}T^+(s^2 V^{\otimes n+1})).$$

Posons $W_n = s^{-1}(sV \otimes T^+(s^2 V^{\otimes n+1}) \oplus s^{-1}T^+(s^2 V^{\otimes n+1}))$. Soit $(T(V), \partial)$ un T -modèle minimal. Nous nous proposons de montrer que le T -modèle minimal du quotient $(T(V)/T^{>n}(V), \partial)$, $n \geq 1$ est $(T(V \oplus W_n), D)$, où la différentielle D sera explicitée ci-dessous.

4.2. LEMME. — Soit $(T(V), 0)$ une algèbre tensorielle sans différentielle ; on a l'isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$\begin{aligned} s^{-1}(\overline{H * \Omega(T(V)/T^{>n}(V), 0)})' \\ \cong V \oplus s^{-1}(sV \otimes T^+(s^2 V^{\otimes n+1}) \oplus s^{-1}T^+(s^2 V^{\otimes n+1})) \end{aligned}$$

où Ω désigne le foncteur dual de la cobar construction.

Démonstration. — L'espace vectoriel V étant de dimension finie en chaque degré, nous l'identifions une fois pour toutes à son dual V' . Notons $B(\infty) = T(sV \oplus sV^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus sV^{\otimes n} \dots)$, muni de la différentielle d définie par :

$$\begin{aligned} d(s(v_1 \otimes \dots \otimes v_j)) &= (-1)^{|v_1|} s v_1 \otimes s(v_2 \otimes \dots \otimes v_j) \\ &\quad + 1 (-1)^{|v_1| + |v_2|} s(v_1 \otimes v_2) \otimes s(v_3 \otimes \dots \otimes v_j) + \dots \\ &\quad + (-1)^{|v_1| + \dots + |v_{j-1}|} s(v_1 \otimes \dots \otimes v_{j-1}) \otimes s v_j. \end{aligned}$$

$B(n) = T(sV \oplus sV^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus sV^{\otimes n})$ et remarquons que

$$\Omega(T(V)/T^{>n}(V)) = B(n).$$

On bigradue $B(\infty)$ en posant : $sV^{\otimes j} = (sV^{\otimes j})^{j-1,*}$, $j \geq 1$. La différentielle d est alors de bidegré $(-1, 0)$.

Il résulte de la proposition (4-2-12) de [20] que l'algèbre $H_{*,*}B(n)$ est un $H_{0,*}B(\infty)$ module libre à gauche, concentrée en des degrés multiples de $n-1$. Plus précisément on a la formule suivante pour le Tor : pour tout $p > 0$; on a l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \text{Tor}_{p,*,*}^{H_{*,*}B(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) &= \text{Tor}_{p,0,*}^{H_{0,*}B(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \oplus (s^{-1})^{n-1} \text{Tor}_{p+n,0,*}^{H_{0,*}B(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \\ &= (sV)^{\otimes p} \oplus (s^{-1})^{n-1} (sV)^{\otimes n+p} = (sV)^{\otimes p} \oplus s^{p+1} V^{\otimes n+p} \end{aligned}$$

car $H_{*,*}B(\infty)$ est concentré en premier degré 0 et que $H_{0,*}B(\infty) = H_{0,*}B(n)$. L'espace vectoriel ci-dessus étant concentré en premiers degrés 0 et $n-1$ on en déduit que l'algèbre $H_{*,*}B(n)$ est engendrée en premiers degrés 0 et $n-1$.

Remarquons que $H_{0,*}B(\infty) = \mathbf{k} \oplus sV$ et considérons la suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow B(n) \rightarrow B(\infty) \rightarrow B(\infty)/B(n) \rightarrow 0$$

on a, pour tout $k > 0$, $sH_{k+1,*}B(\infty)/B(n) = H_{k,*}B(n)$ mais $(B(\infty)/B(n))_{n,*} = T(sV) \otimes sV^{\otimes n+1} \otimes T(sV)$.

Filtrons ensuite $T(sV) \otimes sV^{\otimes n+1} \otimes T(sV)$ par le poids en sV , on a

$$\begin{aligned} F_0 B(\infty)/B(n) &= sV^{\otimes n+1} \\ F_0 B(\infty)/B(n) &= sV \otimes sV^{\otimes n+1} \oplus sV^{\otimes n+1} \otimes sV, \end{aligned}$$

il est clair que tout élément de $B(\infty)/B(n)$ est un cycle. Remarquons de plus que tout élément de $F_{\geq 2} B(\infty)/B(n)$ est un bord ; en effet soient

$$sv_1 \otimes s(v_2 \otimes \dots \otimes v_{n+2}) \otimes sv_{n+3}$$

et

$$sv_1 \cdot sv_2 \dots sv_j \otimes s(v_{j+1} \otimes \dots \otimes v_{j+n+1})$$

dans $F_{\geq 2} B(\infty)/B(n)$, on a

$$sv_1 \otimes s(v_2 \otimes \dots \otimes v_{n+2}) \otimes sv_{n+3} = (-1)^{|v_1|} \bar{d}s(v_1 \otimes \dots \otimes v_{n+2}) \cdot sv_{n+3}$$

et

$$\begin{aligned} sv_1 \cdot sv_2 \dots sv_j \otimes s(v_{j+1} \otimes \dots \otimes v_{j+n+1}) \\ = (-1)^{|v_1|} \bar{d}s(v_1 \otimes v_2) \otimes sv_3 \otimes sv_j \otimes s(v_{j+1} \otimes \dots \otimes v_{j+n+1}), \end{aligned}$$

où $\bar{d}$ est la différentielle quotient.

Observons d'une part que les éléments de $F_0 B(\infty)/B(n)$ ne peuvent pas être des bords car d est décomposable et d'autre part que si un élément de $sV \otimes sV^{\otimes n+1}$ est un bord, il ne peut être que le bord d'un élément de $sV^{\otimes n+2}$; mais un tel élément a aussi une composante non nulle dans $sV^{\otimes n+1} \otimes sV$; autrement dit

$$\begin{aligned} (1) \quad H_{n-1,*} B(n) &= s^2 V^{\otimes n+1} \oplus sV \otimes s^2 V^{\otimes n+1} \\ &= s^2 V^{\otimes n+1} \oplus s^2 V^{\otimes n+1} \otimes sV. \end{aligned}$$

L'algèbre $\mathbf{k} \oplus sV$ ayant un produit trivial, les isomorphismes (1) sont des isomorphismes de $(\mathbf{k} \oplus sV)$ -modules à gauche et à droite.

Soient A une algèbre graduée et W un A -module à gauche et à droite, nous notons $T_A(W)$ la A -algèbre tensorielle sur W : nous avons alors un morphisme d'algèbres $T_{H_{0,*}(B(n))}(H_{n-1,*} B(n)) \rightarrow H_{*,*} B(n)$ qui est l'identité $H_{0,*} B(n) \oplus H_{n-1,*} B(n)$; ce morphisme est surjectif car il est surjectif sur les générateurs ($H_{*,*} B(n)$ est engendrée en premiers degrés 0 et $n-1$).

Montrons qu'il est bijectif; pour cela, nous comparons les séries de Poincaré de $T_{H_{0,*}(B(n))}((H_{n-1,*} B(n)))$ et de $H_{*,*} B(n)$: d'après la proposition A-2-4 de [20]

$$\begin{aligned} P(H_{*,*} B(n))^{-1}(u, v) \\ &= 1 + \sum_{p \geq 1} (-1)^p P(\text{Tor}_{p,0,*}^{H_{0,*} B(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{k})(u, v)) \\ &\quad + \sum_{p \geq 1} (-1)^p P(s^{n1} \text{Tor}_{p,0,*}^{H_{0,*} B(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{k})(u, v)) \\ &= 1 + \sum_{p \geq 1} (-1)^p u P(P(V)(v)) P + \sum_{p \geq 1} (-1)^p u^2 (P(V)(v))^{n+p} \\ &= \sum_{p \geq 0} (-1)^p u P(P(V)(v)) P + \sum_{p \geq 1} (-1)^p u^2 (P(V)(v))^{n+p} \\ &= 1/(1 + u \cdot P(V)(v)) - u^2 (P(V)(v))^n + 1/(1 + u \cdot P(V)(v)) \end{aligned}$$

et donc

$$P(H_{*,*} B(n))(u, v) = (1 + u P(V)(v)) / (1 - u^2 (P(V)(v))^{n+1}).$$

De l'autre côté, on a l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$T_{H_{0,*}(B(n))}(H_{n-1,*}B(n)) = H_{0,*}B(n) \otimes T(s^2 V^{\otimes n+1})$$

et on a

$$\begin{aligned} P(T_{H_{0,*}(B(n))}(H_{n-1,*}B(n)))(u,v) &= P(H_{0,*}B(n))(u,v) \cdot P(T(s^2 V^{\otimes n+1}))(u,v) \\ &= (1 + uP(V)(v)) \cdot P(T(s^2 V^{\otimes n+1}))(u,v) \end{aligned}$$

d'après le corollaire (A-2-5) de [20]

$$P(T_{H_{0,*}(B(n))}((H_{n-1,*}B(n)))(u,v) = (1 + uP(V)) \cdot (1/(1 - u^2(P(V)(v))n + 1)).$$

Ce qui montre donc que $H_{*,*}B(n) = H_{*,*}\Omega(T(V)/T^{>n}(V))$ est isomorphe à $T_{H_{0,*}(B(n))}((H_{n-1,*}B(n)))$ et par conséquent on a le lemme. $\square$

Considérons l'algèbre tensorielle $T(V \oplus W_n)$ dont la multiplication sera notée par un point, et introduisons pour simplifier l'écriture, les notations suivantes :

4.3. Notations. — Soient $U_1, \dots, U_{m+1} \in V^{\otimes n+1}$, $v, v_1, \dots, v_p \in V$ et $x, y \in T(V \oplus W_n)$.

On pose :

$$\begin{aligned} [x \cdot s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \dots \otimes s^2 U_m) \perp (sU_{m+1} \cdot y) &= x \cdot s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \dots \otimes s^2 U_{m+1}) \cdot y \\ [x \cdot s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \dots \otimes s^2 U_m) \perp (sU_{m+1} \cdot y) & \\ &= x \cdot s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \dots \otimes s^2 U_{m+1}) \cdot y \end{aligned}$$

si on écrit :

$$U_{m+1} = u_{m+1}^1 \otimes \dots \otimes u_{m+1}^{n+1}$$

$$\text{et} \quad x_i = \begin{cases} v_i & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ u_{m+1}^{i-p} & \text{pour } p < i \leq n + p + 1. \end{cases}$$

On définit alors :

$$\begin{aligned} (v_1 \cdot \dots \cdot v_p) \perp sU_{m+1} &= s^{-1}(sx_1 \otimes s^2(x_2 \otimes \dots \otimes x_{n+2})) \cdot x_{n+3} \cdot \dots \cdot x_{n+p+1} \\ &+ x_1 \cdot s^{-1}(sx_2 \otimes s^2(x_3 \otimes \dots \otimes x_{n+3})) \cdot x_{n+4} \cdot \dots \cdot x_{n+p+1} \\ &+ x_1 \cdot \dots \cdot x_{p-1} \cdot s^{-1}(sx_p \otimes s^2 U_{m+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [x \cdot s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot (v_1 \cdot \cdots \cdot v_p)] \perp (sU_{m+1} \cdot y) \\
& = x \cdot s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m \otimes s^2(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1})) \cdot x_{n+2} \cdot \cdots \cdot x_{n+p+1} \cdot y \\
& + x \cdot s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot [(v_1 \cdot \cdots \cdot v_p) \perp (sU_{m+1})] \cdot y \\
& [x \cdot s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot (v_1 \cdot \cdots \cdot v_p)] \perp (sU_{m+1} \cdot y) \\
& = x \cdot s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m \otimes s^2(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1})) \cdot x_{n+2} \cdot \cdots \cdot x_{n+p+1} \cdot y \\
& + x \cdot s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot [(v_1 \cdot \cdots \cdot v_p) \perp (sU_{m+1})] \cdot y.
\end{aligned}$$

On impose ensuite à $\perp$ d'être $\mathbf{k}$ -bilinéaire.

Pour $U_i \in V^{\otimes n+1}$, $U_i = u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^{n+1}$, nous écrirons souvent :

$$U_i = U^i \otimes u_i^{n+1} \quad \text{où} \quad U^i \in V^{\otimes n} \quad \text{et} \quad u_i^{n+1} \in V.$$

Posons :

$$\begin{aligned}
W_n^p &= s^{-1}T^p(s^2 V^{\otimes n+1}) \oplus s^{-1}(sV \otimes T^p(s^2 V^{\otimes n+1})) \\
&= {}_1W_n^p \oplus {}_2W_n^p.
\end{aligned}$$

Soient $\delta_0, \delta_1 : T(V \oplus W_n) \rightarrow T(V \oplus W_n)$ les deux dérivations définies sur les générateurs par :

$$\delta_0 v = \delta_1 v = 0, \quad \forall v \in V$$

$$\delta_0 s U_1 = \delta_0 s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1) = 0, \quad \forall U_1 \in V^{\otimes n+1}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 s U_1 &= U_1 \in T(V); \quad \delta_1 s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1) \\
&= -(-1)^{|v|} v \cdot s U_1 + s(v \otimes U_1) \cdot u_1^{n+1}
\end{aligned}$$

pour $v \in V$, $U_1, U_2 \in V^{\otimes n+1}$:

$$\begin{aligned}
\delta_0 s^{-1}(s^2 U_1 \otimes s^2 U_2) &= (-1)^{|U_1|} s U_1 \cdot s U_2 \\
\delta_0 s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes s^2 U_2) &= -(-1)^{|v|+|U_1|} s^{-1}(sv \otimes s U_1) \cdot s U_2 \\
\delta_1 s^{-1}(s^2 U_1 \otimes s^2 U_2) &= \delta s U_1 \perp s U_2 \\
\delta_1 s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes s^2 U_2) &= \delta_1 s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1) \perp s U_2.
\end{aligned}$$

Plus généralement, si l'on a $U_1, \dots, U_{m+1} \in V^{\otimes n+1}$ pour $m \geq 2$ et $v \in V$:

$$\begin{aligned}
\delta_0 s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_{m+1}) &= (-1)^{|U_1|+\cdots+|U_m|} s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot s U_{m+1} \\
&+ \delta_0 s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp s U_{m+1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_0 s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_{m+1}) \\
&= -(-1)^{|v|+|U_1|+\cdots+|U_m|} s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot s U_{m+1} \\
&+ \delta_0 s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp s U_{m+1}.
\end{aligned}$$

$$\delta_1 s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_{m+1}) = \delta_1 s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp s U_{m+1}.$$

$$\delta_1 s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_{m+1}) = \delta_1 s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp s U_{m+1}.$$

4.4. Remarques. — Pour $m \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \delta_0 s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_{m+1}) \in \bigoplus_{p=1}^m {}_1 W_n^{1 \cdot 1} W_n^{m+1-p} \\
 \text{(ii)} \quad & \delta_0 s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_{m+1}) \in \bigoplus_{p=1}^m {}_2 W_n^p \cdot {}_1 W_n^{m+1-p} \\
 \text{(iii)} \quad & \delta_1 s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_{m+1}) \in T^+(V) \perp\!\!\!\perp T^+(W_n^{\leq m}) \\
 \text{(iv)} \quad & \delta_1 s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_{m+1}) \in \bigoplus_{p=1}^m {}_2 W_n^p \cdot {}_1 W_n^{m+1-p} \\
 & \oplus V \cdot {}_1 W_n^m \oplus {}_1 W_v^m \cdot V.
 \end{aligned}$$

Si on note $D_0 : T(V \oplus W_n) \rightarrow T(V \oplus W_n)$ la dérivation $D_0 = \delta_0 + \delta_1$, on a de manière immédiate, pour $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 D_0 s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_{m+1}) &= (-1)^{|U_1| + \cdots + |U_m|} s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot s U_{m+1} \\
 &\quad + D_0 s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp s U_{m+1} \cdot \\
 D_0 s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_{m+1}) &= -(-1)^{|v_1| + |U_1| + \cdots + |U_m|} s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot s U_{m+1} \\
 &\quad + D_0 s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp s U_{m+1} \cdot
 \end{aligned}$$

4.5. Remarques. — (i) On bigradue $T(V \oplus W_n)$ en posant :

$$V = V^{1,*} \quad {}_1 W_n^m = ({}_1 W_n^m)^{m \cdot (n+1),*} \quad \text{et} \quad {}_2 W_n^m = ({}_2 W_n^m)^{1 \cdot m \cdot (n+1),*}.$$

(ii) Si on filtre $T(V \oplus W_n)$ par le premier degré, D_0 ne modifie pas la longueur des mots.

Considérons $\omega : sV^{\otimes n+1} \cdot T(V) \rightarrow T^{\geq n+1}(V)$ défini par

$$s\psi \cdot \Phi \rightarrow \psi \cdot \Phi$$

ω est un isomorphisme de $\mathbf{k}$ -espaces vectoriels gradués.

Soit $\psi : T(V \oplus W_n) \rightarrow T(V)/T^{>n}(V)$ le morphisme d'algèbres défini par :

$$\begin{aligned}
 \psi(v) &= p(v), \quad \forall v \in V \\
 \psi(x) &= 0, \quad \forall x \in W_n
 \end{aligned}$$

où $p : T(V) \rightarrow T(V)/T^{>n}(V)$ est la projection naturelle.

Soit enfin $\delta: T(V \oplus W_n) \rightarrow T(V \oplus W_n)$ la dérivation de degré un définie sur les générateurs par :

$$\begin{aligned}\delta v &= -\partial v, \quad \forall v \in V, \quad \delta sU_1 = \omega^{-1}(\partial U_1), \quad \forall U_1 \in V^{\otimes n+1} \\ \delta s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1) &= -[\partial v \perp sU_1 + (-1)^{|v|} v \perp \delta sU_1].\end{aligned}$$

Plus généralement, pour $U_1, \dots, U_{m+1} \in V^{\otimes n+1}$, $m \geq 1$, et $v \in V$:

$$\begin{aligned}\delta s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \dots \otimes s^2 U_{m+1}) &= \delta s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \dots \otimes s^2 U_m) \perp sU_{m+1} \\ &\quad - (-1)^{|U_1| + \dots + |U_m|} s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \dots \otimes s^2 U_m) \perp \delta sU_{m+1} \\ \delta s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \dots \otimes s^2 U_{m+1}) &= \delta s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \dots \otimes s^2 U_m) \perp sU_{m+1} \\ &\quad - (-1)^{|v| + |U_1| + \dots + |U_m|} s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \dots \otimes s^2 U_m) \perp \delta sU_{m+1}.\end{aligned}$$

Considérons la dérivation $D = D_0 - \delta: T(V \oplus W_n) \rightarrow T(V \oplus W_n)$; on se propose de montrer que D est une différentielle.

Signalons que pour $y \in W_n^{m+1}$, $\delta y \in T^+(V) \perp\!\!\!\perp T^+(W_n^{\leq m+1})$.

4.6. PROPOSITION. — (i) $D^2 = 0$.

(ii) $(T(V \oplus W_n), D)$ est le T -modèle libre minimal de $(T(V)/T^{>n}(V), \partial)$.

Démonstration. — ∂ étant une différentielle sur $T(V)$, il est évident que $D^2 v = 0$, $\forall v \in V$.

Remarquons que $DsU_1 = (\omega - \omega^{-1} \partial \omega)(sU_1)$, d'où $D^2 sU_1 = 0$, $\forall U_1 \in V^{\otimes n+1}$.

La différentielle sur $T(V) \otimes {}_1 W_n^1 \otimes T(V)$ s'écrit : $D = \omega - \omega^{-1} \partial \omega$.

Soient $w_2: T(V) \otimes {}_2 W_n^1 \otimes T(V) \rightarrow T(V) \otimes {}_1 W_n^1 \otimes T(V)$ le morphisme de $T(V)$ -bimodules de degré 1 défini par : pour tout v dans V et U dans $V^{\otimes n+1}$

$$w_2(s^{-1}(sv \otimes s^2 U)) = -(-1)^{|v|} v \cdot sU + s(v \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_n) \cdot u_{n+1}$$

où $U = u_1 \otimes \dots \otimes u_n \otimes u_{n+1}$; w_2 est injectif.

Soient $v_1, \dots, v_p \in V$ et $U \in V^{\otimes n+1}$

$$w_2(v_1 \dots v_p \perp sU) = -(-1)^{|v_1| + \dots + |v_p|} (v_1 \dots v_p) \cdot sU + \omega^{-1}(v_1 \dots v_p \cdot U)$$

par un calcul direct, on vérifie que :

$$\begin{aligned}Dw_2(v_1 \dots v_p \perp sU) &= -(-1)^{|v_1| + \dots + |v_p|} \partial(v_1 \dots v_p) \cdot sU + v_1 \cdot \dots \cdot v_p \omega^{-1}(\partial U) \\ &\quad + (-1)^{|v_1| + \dots + |v_p|} \partial(v_1 \dots v_{p-1}) \cdot s(v_p \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_n) \cdot u_{n+1} \\ &\quad - v_1 \cdot \dots \cdot v_{p-1} \omega^{-1}(\partial v_p U) - (-1)^{|v_p|} (v_1 \dots v_{p-1}) \cdot \omega^{-1}(v_p \cdot \partial U) \\ &= -w_2(\partial(v_1 \dots v_p) \perp sU) + (-1)^{|v_1| + \dots + |v_p|} (v_1 \dots v_p) \perp \omega^{-1}(\partial U)\end{aligned}$$

de sorte que la différentielle D sur $T(V) \otimes {}_2W_n^1 \otimes T(V)$ s'écrit : $D = w_2 - (w_2)^{-1}Dw_2$; en particulier on a :

$$\begin{aligned}
 (*) \quad D(v_1 \cdots v_p \perp sU) \\
 = - (-1)^{|v_1| + \cdots + |v_p|} \partial(v_1 \cdots v_p) \cdot sU + \omega^{-1}(v_1 \cdots v_p U) \\
 + (\partial(v_1 \cdots v_p) \perp sU) = (-1)^{|v_1| + \cdots + |v_p|} (v_1 \cdots v_p) \perp \omega^{-1}(\partial U)
 \end{aligned}$$

et $D^2 = 0$ sur ${}_2W_n^1$ puisque $D^2 = 0$ sur $T(V) \otimes {}_1W_n^1 \otimes T(V)$.

Soient $v_1, \dots, v_p \in V$ et $U_i \in V^{\otimes n+1}$; $U_i = u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^n \otimes u_i^{n+1}$ on pose

$$(**) \quad x_i = \begin{cases} v_i & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ u_i^{i-p} & \text{pour } p < i \leq n + p + 1. \end{cases}$$

Supposons que $D^2 = 0$ sur $V \oplus W_n^{\leq m}$, et considérons $y_1, y_2 \in W_n^{m+1}$:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m \otimes s^2U_{m+1}), \quad y_2 = s^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_{m+1}) \\
 Ds^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_{m+1}) &= (-1)^{|U_1| + \cdots + |U_m|} s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \cdot sU_{m+1} \\
 &\quad + Ds^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1} \\
 &\quad - (-1)^{|U_1| + \cdots + |U_m|} s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp \delta sU_{m+1} \\
 Ds^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_{m+1}) \\
 &= - (-1)^{|v| + |U_1| + \cdots + |U_m|} s^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \cdot sU_{m+1} \\
 &\quad + Ds^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1} \\
 &\quad + (-1)^{|v| + |U_1| + \cdots + |U_m|} s^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp \delta sU_{m+1}.
 \end{aligned}$$

Calculons $D[Ds^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1}]$ et

$$D[Ds^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1}].$$

Les termes $(\delta_1 - \delta)s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m)$ et

$$(\delta_1 - \delta)s^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m)$$

sont des sommes de termes de la forme $x \cdot s^{-1}w_q \cdot v_1 \dots v_p$ où $x \in T(V \oplus W^{\leq m})$, et $s^{-1}w_q \in W_n^q$, avec $0 \leq q \leq m$ et $v_i \in V$.

$$\begin{aligned}
 D[x \cdot s^{-1}w_q \cdot v_1 \dots v_p] \perp sU_{m+1} \\
 = D(x \cdot s^{-1}(w_q \otimes s^2(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}))) \cdot x_{n+2} \cdot \cdots \cdot x_{n+p+1} \\
 + D(x \cdot s^{-1}w_q) \cdot [(x_1 \cdots x_p) \perp sU_{m+1}] \\
 - (-1)^{|x| + |w_q|} x \cdot s^{-1}w_q \cdot D[(x_1 \cdots x_p) \perp sU_{m+1}].
 \end{aligned}$$

Dans la formule qui précède, on a utilisé la notation (**).

En appliquant (*) on montre de façon directe l'égalité :

$$\begin{aligned} D[x \cdot s^{-1}w_q \cdot v_1 \dots v_p] \perp sU_{m+1} &= D[x \cdot s^{-1}w_q \cdot v_1 \otimes \dots \otimes v_p] \perp sU_{m+1} \\ &\quad - (-1)^{|x|+|w_q|+|v_1|+\dots+|v_p|} (x \cdot s^{-1}w_q \cdot v_1 \dots v_p) \perp \delta sU_{m+1} \\ &\quad - (-1)^{|x|+|w_q|+|v_1|+\dots+|v_p|} x \cdot s^{-1}w_q \cdot v_1 \dots v_p \cdot sU_{m+1} \end{aligned}$$

et par conséquent on a les formules :

$$\begin{aligned} D[(\delta_1 - \delta)s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1}] &= D[(\delta_1 - \delta)s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_m)] \perp sU_{m+1} \\ &\quad + (-1)^{|U_1|+\dots+|U_m|} (\delta_1 - \delta)s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_m) \perp \delta sU_{m+1} \\ &\quad - (-1)^{|U_1|+\dots+|U_m|} (\delta_1 - \delta)s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_m) \cdot sU_{m+1} \\ D[(\delta_1 - \delta)s^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1}] &= D[(\delta_1 - \delta)s^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_m)] \perp sU_{m+1} \\ &\quad - (-1)^{|v|+|U_1|+\dots+|U_m|} (\delta_1 - \delta)s^{-1}(v \otimes s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_m) \perp \delta sU_{m+1} \\ &\quad + (-1)^{|v|+|U_1|+\dots+|U_m|} (\delta_1 - \delta)s^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_m) \cdot sU_{m+1}. \end{aligned}$$

Calculons ensuite :

$$D[\delta_0 s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1}]$$

et

$$D[\delta_0 s^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1}].$$

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} D[\delta_0 s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1}] &= D[(-1)^{|U_1|} sU_1 \cdot s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_{m+1}) \\ &\quad + (-1)^{|U_1|+|U_2|} s^{-1}(s^2U_1 \otimes s^2U_2) \cdot s^{-1}(s^2U_3 \otimes \dots \otimes s^2U_{m+1}) \\ &\quad - (-1)^{|U_1|+\dots+|U_{m-1}|} s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_{m-1}) \cdot s^{-1}(s^2U_m \otimes s^2U_{m+1})]. \end{aligned}$$

Observons ensuite que :

$$\begin{aligned} D[(-1)^{|U_1|+\dots+|U_p|} s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_p) \cdot s^{-1}(s^2U_{p+1} \otimes \dots \otimes s^2U_{m+1})] &= (-1)^{|U_1|+\dots+|U_p|} Ds^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_p) \cdot s^{-1}(s^2U_{p+1} \otimes \dots \otimes s^2U_{m+1}) \\ &\quad - s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_p) \cdot Ds^{-1}(s^2U_{p+1} \otimes \dots \otimes s^2U_{m+1}) \\ &= (-1)^{|U_1|+\dots+|U_p|} [Ds^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_p) \cdot s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_m)] \perp sU_{m+1} \\ &\quad - (-1)^{|U_{p+1}|+\dots+|U_m|} s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_p) \cdot s^{-1}(s^2U_{p+1} \otimes \dots \otimes s^2U_m) \cdot sU_{m+1} \\ &\quad - s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_p) \cdot (Ds^{-1}(s^2U_{p+1} \otimes \dots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1}) \\ &\quad + (-1)^{|U_{p+1}|+\dots+|U_m|} s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_p) \cdot s^{-1}(s^2U_{p+1} \otimes \dots \otimes s^2U_m) \perp \delta sU_{m+1}. \end{aligned}$$

Mais alors, en posant

$$\alpha = -s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_p) \cdot (Ds^{-1}(s^2U_{p+1} \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1}),$$

on a

$$\alpha = -[s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_p) \cdot Ds^{-1}(s^2U_{p+1} \otimes \cdots \otimes s^2U_m)] \perp sU_{m+1},$$

sauf si $p = m - 1$, et dans ce cas :

$$\begin{aligned} \alpha &= -s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_{m-1}) \cdot [(U_m - \delta sU_m) \perp sU_{m+1}] \\ &= -[s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_{m-1}) \cdot U_m] \perp sU_{m+1} \\ &\quad + s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \cdot U_{m+1} \\ &\quad + [s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_{m+1}) \cdot \delta sU_m] \perp sU_{m+1} \end{aligned}$$

de sorte qu'on a en définitive :

$$\begin{aligned} D[\delta_0 s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1}] \\ &= (-1)^{|U_1| + \cdots + |U_m|} \delta_0 s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp \delta sU_{m+1} \\ &\quad - (-1)^{|U_1| + \cdots + |U_m|} \delta_0 s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \cdot sU_{m+1} \\ &\quad + s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \cdot U_{m+1} \\ &\quad + D[\delta_0 s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1}]. \end{aligned}$$

De manière analogue, on montre que :

$$\begin{aligned} D[\delta_0 s^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1}] \\ &= -(-1)^{|v| + |U_1| + \cdots + |U_m|} \delta_0 s^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp \delta sU_{m+1} \\ &\quad + (-1)^{|v| + |U_1| + \cdots + |U_m|} \delta_0 s^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \cdot sU_{m+1} \\ &\quad + s^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \cdot U_{m+1} \\ &\quad + D[\delta_0 s^{-1}(sv \otimes s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1}]. \end{aligned}$$

En additionnant tout ce qui précède pour chaque cas approprié, et en appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} D[Ds^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp sU_{m+1}] \\ &= (-1)^{|U_1| + \cdots + |U_m|} Ds^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \perp \delta sU_{m+1} \\ &\quad + s^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \cdot U_{m+1} \\ &\quad - (-1)^{|U_1| + \cdots + |U_m|} Ds^{-1}(s^2U_1 \otimes \cdots \otimes s^2U_m) \cdot sU_{m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D[Ds^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp sU_{m+1}] \\
&= -(-1)^{|v|+|U_1|+\cdots+|U_m|} Ds^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp \delta sU_{m+1} \\
&+ s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot U_{m+1} \\
&- (-1)^{|v|+|U_1|+\cdots+|U_m|} Ds^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot sU_{m+1}.
\end{aligned}$$

Calcul des autres termes :

$$D[-(-1)^{|U_1|+\cdots+|U_m|} s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp \delta sU_{m+1}]$$

et

$$D[-(-1)^{|v|+|U_1|+\cdots+|U_m|} s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp \delta sU_{m+1}]$$

se calculent directement. On montre sans difficulté qu'en effet on a :

$$\begin{aligned}
& D[-(-1)^{|U_1|+\cdots+|U_m|} s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp \delta sU_{m+1}] \\
&= -s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot \delta sU_{m+1} \\
&- (-1)^{|U_1|+\cdots+|U_m|} Ds^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp \delta sU_{m+1} \\
&+ s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp \omega^{-1}(\partial^2 U_{m+1})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& D[-(-1)^{|v|+|U_1|+\cdots+|U_m|} s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp \delta sU_{m+1}] \\
&= -s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot \delta sU_{m+1} \\
&+ (-1)^{|v|+|U_1|+\cdots+|U_m|} Ds^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp \delta sU_{m+1} \\
&+ s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp w^{-1}(\partial^2 U_{m+1}).
\end{aligned}$$

On écrit finalement les quantités :

$$\begin{aligned}
& D^2 s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_{m+1}) \\
&= (-1)^{|U_1|+\cdots+|U_m|} Ds^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot sU_{m+1} \\
&- s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot (U_{m+1} - \delta sU_{m+1}) \\
&+ D[Ds^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp sU_{m+1}] \\
&- D[s^{-1}(s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp \delta sU_{m+1}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D^2 s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_{m+1}) \\
&= -(-1)^{|v|+|U_1|+\cdots+|U_m|} Ds^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot sU_{m+1} \\
&- s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \cdot (U_{m+1} - \delta sU_{m+1}) \\
&+ D[Ds^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp sU_{m+1}] \\
&+ D[s^{-1}(sv \otimes s^2 U_1 \otimes \cdots \otimes s^2 U_m) \perp \delta sU_{m+1}]
\end{aligned}$$

dans lesquelles on fait les remplacements adéquats pour conclure que : $D^2y_1 = D^2y_2 = 0$.

(ii) D est évidemment décomposable et ψ commute aux différentielles.

Filtrons $\text{Ker } \psi$ par la longueur des mots, c'est-à-dire posons :

$$F_m \text{Ker } \psi = \{\text{mots de } \text{Ker } \psi \text{ de longueur supérieure ou égale à } m+n+1\}.$$

$$F_0 \text{Ker } \psi = \text{Ker } \psi.$$

On a $DF_m \subset F_m$ car D est décomposable. La filtration $F_m \text{Ker } \psi$ définit une suite spectrale (E^m, d^m) du premier quadrant qui converge vers $H^*(\text{Ker } \psi)$. La partie de D ne modifiant pas strictement la longueur des mots est D_0 . On en déduit que le terme E^1 de cette suite spectrale est $H^*(\text{Ker } \psi)$ lorsque $\partial = 0$; et dans ce cas, d'après le lemme 4.5 ci-dessous, $\text{Ker } \psi$ est acyclique, c'est-à-dire que $E^1 = 0$, et donc ψ est un quasi-isomorphisme. $\square$

4.7. LEMME. — Lorsque $\partial = 0$, $(T(V \oplus W_n), D)$ est le T -modèle libre minimal de $(T(V)/T^{>n}(V), 0)$.

Démonstration. — On sait d'après le lemme 4.1 que le T -modèle libre minimal de $(T(V)/T^{>n}(V), 0)$ est de la forme $T(V \oplus W_n, d)$. En remarquant que tout quasi-isomorphisme de but une algèbre sans différentielle est surjectif, et d'après le lemme 0.10, il existe : $G : (T(V \otimes W_n), D_0) \rightarrow (T(V \oplus W_n), d)$, morphisme d'algèbres différentielles, faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (T(V \otimes W_n), d) & \xrightarrow{f} & (T(V)/T^{>n}(V), 0) \\ \uparrow G & \searrow \psi & \\ (T(V \otimes W_n), D_0) & & \end{array}$$

Il nous suffit de montrer que le morphisme QG induit sur les indécomposables est injectif.

Soit $v \in V$, $x \in T(V)$, $U_1 \in V^{\otimes n+1}$; posons $G(v) = a + x$ avec a indécomposable et x décomposable; on a $\psi(v) = v$, c'est-à-dire que $a = 0$ entraîne $v = 0$ et QG est injective sur V .

Filtrons $T(V)$ et $T(V \oplus W_n)$ par la longueur des mots; le morphisme $T(G)$ induit sur les gradués associés par G est injectif puisque $Q(G)$ est injectif sur V . Le terme $D_0 s U_1$ est non nul dans $T^{n+1}(V)$ et donc $Q(G)(D_0 s U_1)$ est non nul dans $T^{n+1}(V \oplus W_n)$; autrement dit $G(s U_1)$

contient un facteur indécomposable non nul de la forme sU avec U dans $V^{\otimes n+1}$; supposons que $Q(G)(sU_1+v) = 0$ avec v dans V : posons $G(v) = a + x$ et $G(sU_1) = b + y$ où x et y sont décomposables; on a $f(a) = v$ et $f(b+y) = 0$, c'est-à-dire que $f(b)$ est décomposable: par conséquent $sU_1 = v = 0$, ce qui montre que $Q(G)$ est injective sur $V \oplus sV^{\otimes n+1}$.

Le terme $D_0(s^{-1}(sv \otimes s^2U_1))$ contient un facteur quadratique et par le même raisonnement que plus haut, on montre que $Q(G)(s^{-1}(sv \otimes s^2U_1))$ est non nul et qu'il contient un facteur indécomposable dont la différentielle est dans $T^2(V \oplus W_n)$; comme l'image par $Q(G)$ d'un élément de $V \oplus sV^{\otimes n+1}$ ne peut pas contenir de tel facteur, on en déduit que $Q(G)$ est injective sur $V \oplus W_n^1$.

Supposons $Q(G)$ injective sur $V \oplus W_n^{\leq p}$ avec $p \geq 1$, et soient $U_1, \dots, U_{p+1} \in V^{\otimes n+1}$, $v \in V$.

On a

$$D_0s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_{p+1}) = (-1)^{|U_1|+\dots+|U_p|}s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_p) \cdot sU_{p+1} \\ + D_0s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_p) \perp sU_{p+1}.$$

La différentielle de $s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_{p+1})$ contient un terme quadratique non nul; par le même raisonnement que ci-dessus on montre que $Q(G)(s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_{p+1}))$ est non nul. Soit x dans $V \oplus W_n^{\leq p}$ tel que $Q(G)(s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_{p+1}) + x) = 0$: on a alors les parties quadratiques de $D_0s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_{p+1})$ et de D_0x qui ont la même image par $T(G)$ (au signe près), le morphisme induit par G lorsqu'on filtre $T(V \oplus W_n^{\leq p})$ et $T(V \oplus W_n)$ par la longueur des mots: or $TQ(G)$ est injectif et D_0x ne contient pas de facteur dans ${}_1W_n^p \cdot sV^{\otimes n+1}$ et donc $s^{-1}(s^2U_1 \otimes \dots \otimes s^2U_{p+1}) = x = 0$. En reprenant le même raisonnement sur ${}_2W_n^{p+1}$ on montre que $Q(G)$ est injective. $\square$

5. Catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'une algèbre de cochaînes.

On se propose, à travers ce qui suit, de montrer l'égalité $\text{Acat}_k(T(V), \partial) = \text{biMcat}_k(T(V), \partial)$; pour ce faire on exploite la technique introduite par K. Hess dans [16].

Posons $W_n = \bigoplus W_n^{p,*}$, $p \geq 1$, où $*$ désigne le degré cohomologique, et comme signalé en section 4

$$W_n^{p,*} = [s^{-1}Tp(s^2V^{\otimes n+1}) \oplus s^{-1}(sV \otimes Tp(s^2V^{\otimes n-1}))^*];$$

ordonnons la famille $\{W_n^{(p,k)}\}_{(p,k)}$ par l'ordre lexicographique.

$T(V \oplus W_n)^{\geq n+1}$ étant l'idéal des mots de longueur supérieure ou égale à $n + 1$, nous avons : $\text{Ker } \psi = T(V \oplus W_n)^{\geq n+1}$.

Supposons qu'on a un morphisme de $T(V)$ -bimodules différentiels : $r : (T(V \oplus W_n), D) \rightarrow (T(V), \partial)$ tel que $r|T(V) = \text{Id}$ (car $(T(V \oplus W_n), D)$ est une extension libre de $T(V)$ comme $T(V)$ -bimodule différentiel); on a alors pour toute application $\mathbf{k}$ -linéaire φ de degré zéro $\varphi : W_n^{<(p,k)} \rightarrow T(V \oplus W_n)$

1) un morphisme d'algèbres :

$$\rho : T(V \oplus W_n^{<(p,k)}) \rightarrow T(V \oplus W_n)$$

2) une application $\mathbf{k}$ -linéaire :

$$\theta : T(V \oplus W_n^{<(p,k)}) \rightarrow T(V)$$

définis par

$$\rho|T(V) = \text{Id}; \quad \theta|T(V) = 0$$

$$\rho(x) = r\varphi(x), \quad \forall x \in W_n^{<(p,k)}$$

$$\theta(x) = \theta(x) - \varphi(x), \quad \forall x \in W_n^{<(p,k)}$$

θ se prolonge de la manière suivante : soit $X = x_1 \cdots x_q$ avec $x_i \in V \oplus W_n^{<(p,k)}$, si x_t est le premier facteur de X qui est dans $W_n^{<(p,k)}$ (c'est-à-dire $x_1, \dots, x_{t-1} \in T(V)$), on pose

$$\theta(X) = x_1 \cdots x_{t-1} \cdot \theta(x_t) \cdot \rho(x_{t+1} \cdots x_q).$$

5.1. PROPOSITION. — *S'il existe $\varphi : W_n \rightarrow T(V \oplus W_n)$, homogène de degré zéro vérifiant :*

$$(5.2) \quad D\varphi(x) = \rho Dx - \theta Dx, \quad \forall x \in W_n$$

alors

$$\text{biMcat}_{\mathbf{k}}(T(V), \partial) = \text{Acat}_{\mathbf{k}}(T(V), \partial).$$

Démonstration. — Supposons φ définie sur $W_n^{<(p,k)}$ telle que (5.2) soit vérifiée; de par sa définition, D est stable sur $T(V \oplus W_n^{<(p,k)})$; ce qui donne un sens au terme de droite de (5.2).

Montrons que :

$$a) \quad r \circ \theta = 0 \text{ sur } T(V \oplus W_n^{<(p,k)})$$

$$b) \quad \rho D = \partial \rho \text{ sur } T(V \oplus W_n^{<(p,k)})$$

$$c) \quad \theta D = D\theta \text{ sur } T(V \oplus W_n^{<(p,k)}).$$

$$a) \quad \theta x = 0, \quad \forall x \in T(V) \text{ et donc } r \circ \theta(x) = 0 \text{ sur } T(V).$$

Soit $X = x_1 \cdots x_q$ tel que $x_i \in V \oplus W_n^{<(p,k)}$;

$$\theta(X) = x_1 \cdots x_{t-1} \cdot \theta(x_t) \cdot \rho(x_{t+1} \cdots x_q) \quad \text{où} \quad x_1, \dots, x_t \in T(V).$$

$r \circ \theta(X) = x_1 \cdots x_{t-1} \cdot r\theta(x_t) \cdot \rho(x_{t+1} \cdots x_q)$ car r est un morphisme de $T(V)$ -bimodules. Il suffit donc de montrer que :

$$r \circ \theta(x) = 0, \quad \forall x \in W_n^{<(p,k)}.$$

Soit $x \in W_n^{<(p,k)}$:

$$r \circ \theta(x) = r[\rho(x) - \varphi(x)] = \rho(x) - \rho(x) = 0.$$

b) Il est évident que $\rho D = D\rho$ sur $T(V)$; ρ étant un morphisme d'algèbres, il suffit de vérifier l'égalité sur les générateurs.

Soit $x \in W_n^{<(p,k)}$:

$$\partial \rho(x) = \partial r\varphi(x) = r(D\varphi(x)) = r[\rho Dx - \theta Dx] = \rho Dx.$$

c) Soit $x \in T(V)$, on a $D\theta x = \theta Dx = 0$ car $Dx \in T(V)$.

Supposons que $x \in W_n^{<(p,k)}$:

$$D\theta(x) = D\rho(x) - D\varphi(x) = \rho Dx - \rho Dx + \theta Dx = \theta Dx.$$

Soit $X = x_1 \cdots x_q$ tel que $\theta(X) = x_1 \cdots x_{t-1} \cdot \theta(x_t) \cdot \rho(x_{t+1} \cdots x_q)$.

$$\begin{aligned} D\theta(X) &= D(x_1 \cdots x_{t-1}) \cdot \theta(x_t) \cdot \rho(x_{t+1} \cdots x_q) \\ &\quad + (-1)^{|x_1| + \cdots + |x_{t-1}|} x_1 \cdots x_{t-1} \cdot \theta(Dx_t) \cdot \rho(x_{t+1} \cdots x_q) \\ &\quad + (-1)^{|x_1| + \cdots + |x_t|} x_1 \cdots x_{t-1} \cdot \theta(x_t) \cdot \partial \rho(x_{t+1} \cdots x_q) \\ &= \theta(D(x_1 \cdots x_{t-1}) \cdot x_t \cdot \rho(x_{t+1} \cdots x_q)) \\ &\quad + (-1)^{|x_1| + \cdots + |x_{t-1}|} \theta(x_1 \cdots x_{t-1} Dx_t \cdot \rho(x_{t+1} \cdots x_q)) \\ &\quad + (-1)^{|x_1| + \cdots + |x_t|} \theta(x_1 \cdots x_{t-1} \cdot x_t \cdot \partial \rho(x_{t+1} \cdots x_q)) \\ &= \theta(DX). \end{aligned}$$

Le point b) montre que ρ commute aux différentielles ; par conséquent, et compte tenu la construction de ρ , $Mcat(T(V), \partial) \geq Acat(T(V), \partial)$; en revenant à la définition, on a l'égalité voulue. $\square$

5.3. THÉORÈME. — Soit $(T(V), \partial)$ un T -modèle minimal connexe et 1-connexe, de type fini : alors

$$biMcat(T(V), \partial) = Acat(T(V), \partial).$$

Démonstration. — Il nous suffit de construire un morphisme de k -espaces vectoriels gradués homogène de degré zéro

$$\varphi : W_n \rightarrow T(V \oplus W_n) \text{ vérifiant (5.2).}$$

Nous le faisons par récurrence sur (p, k) .

Posons $\varphi = \text{Id}$ sur W_n^1 ; par conséquent :

$$\forall x \in W_n^1, \quad \rho(x) = r(x) \quad \text{et} \quad \theta(x) = r(x) - x = (r - \text{Id})x$$

r et Id étant $T(V)$ -bilinéaires, $\rho = r$ et $\theta = r - \text{Id}$ sur $T(V \oplus W_n^1)$, de sorte que :

$$\begin{aligned} D\varphi(x) &= Dx = r(Dx) - (r - \text{Id})Dx \\ &= \rho Dx - \theta Dx; \end{aligned}$$

c'est-à-dire que (5.2) est vérifiée.

Supposons φ définie sur $W_n^{<(p,k)}$ vérifiant (5.2) et soit $y \in W_n^{(p,k)}$, $p \geq 1$.

$$Dy = (\delta_0 + \delta_1 - \delta)y$$

$$D_0 = \delta_0 + \delta_1;$$

$$\begin{aligned} (\delta_1 - \delta)y &\in T^+(V) \perp\!\!\!\perp T^+(W_n^{<(p,k)}) \oplus (T(V))^{\geq n+1} \oplus W_n^{(p, i < k)} \cdot T^+(V) \\ \delta_0 y &\in T^2(W_n^{<(p,k)}); \quad Dy \in T(V \oplus W_n^{<(p,k)}) \end{aligned}$$

posons $\alpha = \rho Dy - \theta Dy$.

$D\alpha = \rho D^2 y - \theta D^2 y = 0$, car θ commute aux différentielles sur $T(V \oplus W_n^{<(p,k)})$.

Il s'agit de montrer que α est somme de mots de longueur supérieure ou égale à $n + 1$.

$$Dy = \gamma_1(y) + \gamma_2(y) + \gamma_3(y) + \gamma_4(y)$$

avec :

$$\gamma_1(y) \in T(V)^{\geq n+1}$$

$$\gamma_2(y) \in T^+(V) \perp\!\!\!\perp T^+(W_n^{<(p,k)})$$

$$\gamma_3(y) \in W_n^{<(p,k)} \cdot T^+(V)$$

$$\gamma_4(y) \in T^{\geq 2}(W_n^{<(p,k)})$$

$$\gamma_2(y) \in T^+(V) \perp\!\!\!\perp T^+(W_n^{<(p,k)})$$

$$a) (\rho - \theta)\gamma_1(y) = \rho\gamma_1(y) = \gamma_1(y) \in T(V)^{\geq n+1}.$$

b) Posons $\gamma_2(y) = \sum_q x_1 \cdot \dots \cdot x_t \cdot x_{t+1} \cdot \dots \cdot x_q$ avec $x_t \in W_n^{<(p,k)}$ et $x_1, \dots, x_{t-1} \in T(V)$.

$$\begin{aligned} (\rho - \theta)\gamma_1(y) &= \\ \sum_q [x_1 \cdot \dots \cdot x_{t-1} \cdot \rho(x_t) \cdot \rho(x_{t+1} \cdot \dots \cdot x_q) \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_{t-1} \theta(x_t) \cdot \rho(x_{t+1} \cdot \dots \cdot x_q)] \\ &= \sum_q [x_1 \cdot \dots \cdot x_{t-1} \cdot \varphi(x_t) \cdot \rho(x_{t+1} \cdot \dots \cdot x_q) \in T(V \oplus W_n^{<(p,k)})^{\geq n+1}. \end{aligned}$$

c) Écrivons $\gamma_3(y) = X \cdot A$ où $(X \in W_n^{<(p,i < k)})$ et $A \in T^+(V)$:

$$\begin{aligned} (\rho - \theta)(X \cdot A) &= \rho(X) \cdot A - \theta(X) \cdot A \\ &= \varphi(X) \cdot A \in T(V \oplus W_n^{<(p,k)})^{\geq n+1}. \end{aligned}$$

d) Le terme $\gamma_4(y) = \sum_i x_i z_i$, $x_i, z_i \in W_n^{<(p,k)}$

$$\begin{aligned} (\rho - \theta)\left(\sum_i x_i z_i\right) &= \sum_i [\rho(x_i) \cdot \rho(z_i) - \theta(x_i) \cdot \rho(z_i)] \\ &= \sum_i \rho(x_i) \cdot \rho(z_i) \in T(V \oplus W_n^{<(p,k)})^{\geq n+1}. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi montré que α est un cycle dans $\text{Ker } \psi$ qui est acyclique; il existe donc $\beta \in T(V \oplus W_n)^{\geq n+1}$ tel que $D\beta = \alpha$, et nous posons alors $\varphi(y) = b$, de sorte que (2.1) est vérifié, d'où le théorème.

5.4. COROLLAIRE. — Soit $\mathbf{k} \subset K$ une extension de corps. Pour toute K -algèbre différentielle A connexe et 1-connexe de type fini, on a :

$$\text{Acat}_{\mathbf{k}} A = \text{Acat}_K A. \quad \square$$

Si le corps est de caractéristique p , on omettra l'indice $\mathbf{k}$ et on écrira dorénavant Acat_p , et on a :

5.5. COROLLAIRE. — Soient (A, d) et (B, δ) deux $\mathbf{k}$ -algèbres différentielles connexes et 1-connexes de type fini, on a :

$$\text{Acat}_p A + \mathbf{e}_{\mathbf{k}} B < \text{Acat}_p A \otimes B \leq \text{Acat}_p A + \text{Acat}_p B. \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. F. ADAMS and P. HILTON, On the chain algebra of a loop space, *Comment. Math. Helv.*, 20 (1955), 305-330.
- [2] H. BAUES, *Algebraic homotopy*, Cambridge University Press, 1988.
- [3] H. BAUES and J. M. LEMAIRE, Minimal models in homotopy theory, *Math. Ann.*, 225 (1977), 219-242.
- [4] P. BOULLAY, F. KIEFFER, M. MAJEWSKY, M. STELZER, H. SCHEERER, M. UNSOLD, E. VOGT, Tame homotopy theory via differential forms, preprint n° 223 Freie Universitat Berlin (1986).
- [5] J. P. DOERANE, Type d'homotopie mod p des espaces de Ganéa, Prépublication n° 116, Institut de Mathématiques Pures et Appliquées, Université Catholique de Louvain (1987).
- [6] Y. FÉLIX and S. HALPERIN, Rational L-S category and its applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 273 (1982), 1-37.
- [7] Y. FÉLIX, S. HALPERIN et J. C. THOMAS, L-S catégorie et suite spectrale de Milnor-Moore ("une nuit dans le train"), *Bull. Soc. Math. France*, 111 (1983), 89-96.
- [8] Y. FÉLIX, S. HALPERIN et J. C. THOMAS, Gorenstein spaces, *Adv. in Math.*, 71 (1988), 92-112.
- [9] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J. M. LEMAIRE and J. C. THOMAS, Mod p loop space homology, *Invent. Math.*, 95 (1989), 247-262.
- [10] R. H. FOX, On the Lusternik-Schnirelmann category, *Ann. Math.*, 53 (1979), 333-370.
- [11] T. GANEA, Lusternik-Schnirelmann category and cocategory, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 10 (3) (1960), 639-823.
- [12] T. GANEA, Lusternik-Schnirelmann category and strong category, *Illinois J. Math.*, 12 (1968), 421-432.
- [13] S. HALPERIN and J. M. LEMAIRE, Notions of category in differential algebras, *Lecture Notes*, 1318 (1988), 138-154.
- [14] S. HALPERIN, Lectures on minimal models, *Mémoires de la S.M.F.*, (1983).
- [15] S. HALPERIN, Rational fibrations, minimal models and fibrings of homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 244 (1978), 199-223.
- [16] K. HESS, A proof of Ganéa's conjecture for rational spaces, Ph.D. Thesis M.I.T. Cambridge (1988).
- [17] E. IDRISSE, Quelques contre-exemples pour la catégorie d'une algèbre de cochaînes, *Annales de l'Institut Fourier*, 41-4 (1991), 989-1003.
- [18] B. JESSUP, Rational Lusternik-Schnirelmann category, fibrations and a conjecture of Ganéa, Ph.D. thesis, Univ. of Toronto (1987).
- [19] J. M. LEMAIRE et F. SIGRIST, Sur les invariants d'homotopie liés à la L-S catégorie, *Comment. Math. Helv.*, 56 (1981), 103-122.

- [20] J. M. LEMAIRE, Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets, Lecture Notes, Springer-Verlag, 422 (1974).
- [21] J. M. LEMAIRE, Modèles minimaux pour les algèbres de chaînes, Publications de Lyon, 13 (1976), 13-26.
- [22] J. M. LEMAIRE, Sur le type d'homotopie rationnelle des espaces de Ganéa, Astérisque, 113-114 (1984), 238-247.
- [23] L. LUSTERNIK et L. SCHNIRELMANN, Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels, Hermann, Paris, 1934.
- [24] D. SULLIVAN, Infinitesimal computations in topology, Inst. des Hautes Études Sc. Publ. Math., 47 (1978), 269-331.
- [25] D. TANRÉ, Homotopie rationnelle : modèles de Chen, Quillen, Sullivan, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1025 (1983).
- [26] G. W. WHITEHEAD, Elements of homotopy theory, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, 61 (1978).

Manuscrit reçu le 18 mai 1990,
révisé le 27 novembre 1991.

Bitjong NDOMBOL,
Laboratoire de Mathématiques
U.A. C.N.R.S. N° 168
Université de Nice
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2 (France)
et
Département des Mathématiques
Faculté des Sciences
Yaoundé (Cameroun).