ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE LELONG

Extension d'un théorème de Carleman

Annales de l'institut Fourier, tome 12 (1962), p. 627-641

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1962__12__627_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
12 (1962), 627-641.

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE CARLEMAN

par **Pierre LELONG** (Paris).

1. Introduction.

Soit $M_{(\alpha)}$, $0 < M_{(\alpha)} \leqslant +\infty$, une suite de nombres dépendant d'un indice multiple $(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, α_k entiers positifs; on note $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. On se propose de donner d'abord des conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite des majorations :

$$(1) \qquad |f(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant M_{(\alpha)}|z_1^{-\alpha_1}z_2^{-\alpha_2} \ldots z_n^{-\alpha_n}|, \quad \alpha_k \geqslant 0$$

vérifiées par une fonction f analytique dans la région $\Gamma_n : x_k = \mathcal{R}z_k > 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, entraîne $f \equiv 0$. On pose

$$z_k = x_k + iy_k;$$

l'arête de Γ_n est la variété A définie par $x_k = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

A la suite $M_{(\alpha)} = M_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, on associera la fonction

$$(2) \qquad T(r_1, \ldots, r_n) = \sup_{(\alpha)} \frac{r_1^{\alpha_1} \ldots r_n^{\alpha_n}}{M_{(\alpha)}}$$

le sup étant pris pour $r_1, \ldots, r_n$ donnés. Les majorations (1) équivalent au fait que $|f|$ soit borné dans Γ_n et que pour $y = (iy_k) \in A$, $f(y) = \text{lim.sup } f(z)$, $z \in \Gamma_n$, $z \to y \in A$ vérifie la majoration :

$$(3) \qquad \log|f(iy_1, \ldots iy_n)| \leqslant -\log T(|y_1|, \ldots |y_n|).$$

Rappelons que dans le cas $n = 1$, cette considération suffit à donner la solution du problème. En effet la formule de Poisson appliquée au demi-plan Γ_1 donne, d'après (1) :

$$(4)\qquad \log|f(x+iy)| \leqslant \pi^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-\log T(|\eta|)x\,d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}$$

et le résultat classique de T. Carleman en découle, cf. [1] et [4 *a*] : pour $n = 1$, une condition nécessaire et suffisante pour que les majorations (1) déterminent $f \equiv 0$ est la divergence de l'intégrale qui figure au second membre de (4); elle équivaut à la condition de divergence :

$$(5)\qquad I_1 = \int_0^{\infty}(1+r^2)^{-1}\log T(r)\,dr = +\infty$$

Notons que si l'on a $I_1 < \infty$, le second membre de (4) définit une fonction harmonique $g(x, y)$; si g' est sa conjuguée, une solution non nulle du problème est fournie par $f_T = e^{g+ig'}$.

Pour $n \geqslant 2$, et, par exemple, pour $n = 2$, il est clair que (1) entraîne encore sur Γ_2 :

$$(6)\quad \log|f(x_1+iy_1,\ x_2+iy_2)| \leqslant \pi^{-2}\int_A\frac{-\log T(|\eta_1|, |\eta_2|)\,x_1x_2\,d\eta_1\,d\eta_2}{[x_1^2+(y_1-\eta_1)^2]\,[x_2^2+(y_2-\eta_2)^2]}$$

et l'on voit que, pour n quelconque, la divergence de l'intégrale

$$(7)\quad I_n = \int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}(1+r_1^2)^{-1}\ldots(1+r_n^2)^{-1}\log T(r_1, \ldots r_n)\,dr_1\ldots dr_n$$

entraîne que la seule solution de (1), analytique sur Γ_n, soit $f \equiv 0$. Cette condition *suffisante* de détermination est une condition nécessaire dans la famille des fonctions $V(z_1, \ldots z_n)$ harmoniques séparément des z_k sur Γ_n; elle ne l'est pas (¹) dans la famille des fonctions plurisousharmoniques et, a fortiori, dans celle des fonctions $\log|f|$, f analytique, comme on le verra plus loin par un exemple.

On posera, pour $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = r$:

$$(8)\qquad \theta(r) = T(r, \ldots, r) = \sup_{(\alpha)}\frac{r^{|\alpha|}}{M_{(\alpha)}} = \sup_p\frac{r^p}{\mu_p}$$

et $\mu_p = \inf M_{(\alpha)}$ pour $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_n = p$. Le pro-

(¹) L'erreur est commise dans [2] à partir de la page 282.

blème posé est alors résolu par l'énoncé suivant, que nous avions déjà donné dans la note [3 *a*] :

THÉORÈME 1. — *Pour que les majorations* (1), *où* f *est analytique dans* $\Gamma_n : x_k = \Re z_k > 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n$, *déterminent* $f \equiv 0$, *il faut et il suffit que soit divergente l'intégrale*

$$\mathfrak{J} = \int_0^\infty (1 + r^2)^{-1} \log \theta(r)\, dr. \tag{9}$$

On donnera ici une application du théorème à l'étude des classes dérivables de fonctions, en laissant de côté d'autres applications à portée qui concernent notamment le problème des moments à plusieurs variables.

2. Démonstration du théorème 1.

a) Montrons d'abord que $\mathfrak{J} = \infty$ entraîne $f \equiv 0$. Soit Γ'_n la partie de Γ_n définie par

$$x_n = \Re z_n > 0, \qquad z_k = t_k z_n, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

les t_k étant réels et assujettis à vérifier $t_k \geqslant 1$. Considérons

$$\varphi(z_n) = f(t_1 z_n, \ \ldots, \ t_{n-1} z_n, \ z_n)$$

qui est analytique dans le demi-plan $\Re z_n > 0$ et y vérifie pour tout (α) les inégalités :

$$|\varphi(z_n)| \leqslant \mathrm{M}_{(\alpha)} t_1^{-\alpha_1} \ \ldots \ t_{n-1}^{-\alpha_{n-1}} |z_n^{-|\alpha|}| \leqslant \mathrm{M}_{(\alpha)} |z_n|^{-|\alpha|}.$$

Elles équivalent à la majoration :

$$|\varphi(z_n)| \leqslant \inf_p |z_n|^{-p} \Big[\inf_{|\alpha|=p} \mathrm{M}_\alpha \Big] = \inf_p \mu_p |z_n|^{-p}.$$

Le théorème pour $n = 1$, appliqué à $\varphi(z_n)$ entraîne alors $\varphi(z_n) \equiv 0$, c'est-à-dire $f(z_1, \ldots, z_n) = 0$ en tout point de Γ'_n. Soit P un point de coordonnées x_k^0 réelles positives, choisies de manière qu'on ait pour $1 \leqslant k \leqslant n-1 : x_k^0 = t_k x_n^0$, avec $t_k^0 \geqslant 1 + \lambda$, où $\lambda > 0$. Alors Γ'_n contient un voisinage de P dans l'espace R^n des coordonnées réelles. En effet si l'on choisit σ vérifiant $0 < \sigma < \frac{1}{2} \lambda x_n^0$, les points $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n$ pour lesquels on a

$$|x_k - x_k^0| < \sigma, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{10}$$

appartiennent à Γ'_n; la série de Taylor de f de centre P est donc nulle et l'on a $f \equiv 0$ dans Γ_n, ce qui établit la condition suffisante.

b) Dans l'autre sens, remarquons que $\mathfrak{J} < \infty$ assure l'existence d'une fonction $f_\theta(z) \not\equiv 0$, vérifiant dans Γ_1 les majorations

$$(11) \qquad |f_\theta(z)| \leqslant \mu_p |z|^{-p} \quad \text{pour tout } p.$$

Il suffit alors de montrer l'énoncé suivant.

Proposition 1. — *Si* $f(z) \not\equiv 0$ *est analytique pour* $\Re z > 0$ *et vérifie* (11), *alors il existe une constante* $a > 0$ *telle que*

$$(12) \qquad f(z_1 \dots z_n) = a f_\theta(z_1) f_\theta(z_2) \dots f_\theta(z_n)$$

est analytique dans Γ_n, *et y vérifie* (1) *pour tout* (α), $\alpha_k \geqslant 0$.

Pour la démonstration, on est amené à considérer la régularisation convexe des suites $\log M_{(\alpha)}$, $\log \mu_p$. Dans l'espace R^{n+1} des coordonnées $u_1, \dots, u_n, v$, considérons d'abord l'ensemble E de demi-droites définies par

$$u_1 = \alpha_1, \dots, u_n = \alpha_n, \qquad v \geqslant \log M_{(\alpha)}$$

ceci pour tous les indices $(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_k entier positif. Si l'on mène par l'origine $P_{(\alpha)}$ de l'une des demi-droites le plan de coefficients $(\log r_1, \dots, \log r_n, -1)$, son ordonnée à l'origine est

$$v_{(\alpha)} = \log M_{(\alpha)} - \sum_1^n \alpha_k \log r_k$$

et si l'on compare avec (2) on obtient, pour $r_1, \dots, r_n$ donnés :

$$(13) \qquad -\log T(r_1, \dots, r_n) = \inf_{(\alpha)} v_{(\alpha)}.$$

Il en résulte que si E^c est dans R^{n+1} l'enveloppe de convexité de E, $-\log T(r_1, \dots, r_n)$ est l'ordonnée à l'origine du plan tangent à E^c dont les coefficients de direction sont $(\log r_k, -1)$, ce plan laissant E^c dans le demi-espace déterminé par la demi-droite des v positifs. Pour $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ donnés entiers positifs, E^c détermine une demi-droite $v \geqslant \log M^c_{(\alpha)}$ appartenant à E^c; on a évidemment $M^c_{(\alpha)} \leqslant M_{(\alpha)}$: $M^c_{(\alpha)}$ sera dit la régularisée convexe de la suite $M_{(\alpha)}$.

Opérons, ce qui est classique, la même construction sur la suite μ_p à un seul indice : dans l'espace $R^2(u, v)$ on construit l'ensemble e des demi-droites d'abscisses entières positives : $u = p$, $v \geqslant \log \mu_p$, pour tout $p \geqslant 0$, entier. Soit e^c l'enveloppe convexe de e; pour $u = p$, soit $v \geqslant \log \mu_p^c$ la demi-droite déterminée sur e^c. On a $\mu_p^c \leqslant \mu_p$. On a alors :

Proposition 2. — *Soit* $\mu_p = \min\limits_{|\alpha|=p} \mathrm{M}_{(\alpha)}$; *on a entre les régularisées convexes* μ_p^c, $\mathrm{M}_{(\alpha)}^c$ *des deux suites* μ_p, $\mathrm{M}_{(\alpha)}$ *la relation*

$$\mu_p^c = \min_{|\alpha|=p} \mathrm{M}_{(\alpha)}^c \tag{14}$$

En effet si l'on considère l'espace $\mathrm{R}^2(u, v)$ comme projection de l'espace $\mathrm{R}^{n+1}(u_1, \ldots, u_n, v)$, la projection s'écrivant

$$u = u_1 + u_2 \cdots + u_n, \qquad v = v$$

la projection de E est e et la proposition 2 exprime le fait que les enveloppes de convexité E^c et e^c se correspondent par la projection.

Achevons alors la démonstration de la proposition 1 : d'après le théorème 1 pour $n = 1$, il existe une fonction $f_\theta(z) \not\equiv 0$, analytique pour $\mathcal{R}z > 0$, vérifiant (11) pour tout p; elle vérifie alors les majorations équivalentes :

$$|f_\theta(z)| \leqslant \mu_p^c |z|^{-p}, \qquad p = 1, 2, \ldots$$

La fonction définie sur les entiers $p > 0$ par

$$l(p) = \frac{1}{p} \log \mu_p^c, \qquad \text{si} \qquad p \geqslant 1, \qquad \text{et} \qquad l(0) = 0$$

est croissante à partir d'une certaine valeur p_0, et $l(p) \to +\infty$ quand $p \to \infty$. Dans le cas contraire en effet, comme e^c est convexe, on aurait pour $l(p)$ une limite l_0 finie et $l(p) < l_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, pour $p > p_1$. Or on a

$$\log \theta(r) = \sup_p [p \log r - \log \mu_p^c] = \sup p\, [\log r - l(p)]$$

ce qui donnerait $\log \theta(r) = +\infty$ pour $\log r > l_0 + \varepsilon$, en contradiction avec la convergence de $\mathcal{J}$. Il existe donc une certaine valeur p_2, telle qu'on ait pour tout entier $p > p_2$:

$$l(p) = \sup_{q \leqslant p} l(p)$$

Revenons à (12); on a :

$$|f(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant a \mu_{\alpha_1}^c \ldots \mu_{\alpha_n}^c |z_1^{-\alpha_1} \ldots z_n^{-\alpha_n}|$$

Mais pour $|\alpha| > p_2$, on a $\sum\limits_1^n \alpha_k l(\alpha_k) \leqslant l(|\alpha|) \sum\limits_1^n \alpha_k = |\alpha| l(|\alpha|)$.

D'où : $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\mu^c_{\alpha_1} \ldots \mu^c_{\alpha_n})(\mu^c_{|\alpha|})^{-1} \leqslant 1$ pour $|\alpha| > p_2$; On a donc $b = \sup_{(\alpha)} g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) < \infty$. Choisissons $a = b^{-1}$; On a alors :

$$\log |f(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant \log \mu^c_{|\alpha|} - \Sigma\alpha_k \log |z_k|$$

Appliquons alors la proposition 2; il vient :

$$\log |f(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant \inf_{(\alpha)} [\log M^c_{(\alpha)} - \Sigma\alpha_k \log |z_k|]$$

où inf est pris pour tous les indices multiples $(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. La proposition 1 et le théorème 1 sont alors établis.

3. Comparaison de $T(r, \ldots, r_n)$ et de $\theta(r)$.

On a défini $\theta(r) = T(r, \ldots, r)$; plus généralement on a

THÉORÈME 2. — *Soit* $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *un vecteur unitaire de* R^n, *vérifiant* $\lambda_k \geqslant a > 0$. *On pose :* $\theta_{\vec{\lambda}}(r) = T(\lambda_1 r, \ldots, \lambda_n r)$. *Alors on a*

$$\theta(ar) \leqslant \theta_{\vec{\lambda}}(r) \leqslant \theta(r).$$

En effet on a simultanément :

$$\log \theta_{\vec{\lambda}}(r) = \sup_{(\alpha)} \left[|\alpha| \log r + \sum_1^n \alpha_k \log \lambda_k - \log M_{(\alpha)}\right] \leqslant \log \theta(r)$$

$$\log \theta_{\vec{\lambda}}(r) \geqslant \sup_{(\alpha)} [|\alpha| \log r + |\alpha| \log a - \log M_{(\alpha)}] = \log \theta(ar).$$

COROLLAIRE. — *Toutes les fonctions*

$$\theta_{\vec{\lambda}}(r) = T(\lambda_1 r, \ldots, \lambda_n r)$$

où $\vec{\lambda}$ *est un vecteur n'ayant aucune composante nulle, se comportent comme* $\theta(r)$, *en ce qui concerne la convergence ou la divergence de l'intégrale* $\mathcal{J}$.

Comparaison des intégrales I_n *et* $\mathcal{J}$. — *Contre-exemple pour* $n \geqslant 2$. Nous allons construire pour $n = 2$ une suite $M_{p,q}$ telle que $\mathcal{J}$ diverge, tandis que I_2 converge; on établira ainsi que la divergence de I_n n'est plus, pour $n \geqslant 2$, une condition nécessaire pour déterminer $f \equiv 0$ par le problème posé (1).

Remarquons tout d'abord que, si l'on compare les suites $M_{p,q}$ et $M'_{p,q} = (M_{p,q})^s$, $s > 0$, on a :

$$(15)\quad \log T'(r_1, r_2) = \sup_{p,q} [p \log r_1 + q \log r_2 - \log M'_{p,q}] = s \log T(r_1^{1/s}, r_2^{1/s}).$$

D'autre part, considérons la suite particulière $m_n = n^n$ et la fonction associée $\theta_1(r)$; on a :

$$(16)\qquad \log \theta_1(r) = \sup_n [n \log r - n \log n] \sim re^{-1}.$$

Définissons alors la suite $M_{p,q}$, de la manière suivante : $M_{p,q} = f_1(p, q) + f_2(p, q)$, où l'on pose

a) $f_1(p, q) = (p + q)^{p+q}$ si $p = q$; $f_1(p, q) = +\infty$ si $p \neq q$;

b) $f_2(p, q) = +\infty$ si $p = q$; $f_2(p, q) = (p + q)^{2(p+q)}$ si $p \neq q$.

Soit $\mu_n = \inf_{p+q=n} M_{p,q}$. Posons $g_1(n) = n^n = \mu_n$ si n est pair et $g_1(n) = +\infty$ si n est impair. De même définissons

$$g_2(n) = n^{2n} = \mu_n$$

si n est impair et $g_2(n) = +\infty$ si n est pair. On a, en appliquant (15) :

$$(17)\qquad \beta_1(r) = \sup_n \frac{r^n}{g_1(n)} = \sup_p \frac{r^{2p}}{(2p)^{2p}} = \theta_1^2\left(\frac{r}{2}\right),$$

$$(18)\qquad \beta_2(r) = \sup_n \frac{r^n}{g_2(n)} \leqslant \sup_n \frac{r^n}{n^{2n}} = \theta_1^2(\sqrt{r}).$$

D'après (16) et (18) le rapport $\dfrac{\beta_2(r)}{\beta_1(r)}$ tend vers zéro quand r augmente indéfiniment et l'on a

$$\beta_1(r) \leqslant \theta(r) = \sup_n \frac{r^n}{\mu_n} \leqslant \beta_1(r) + \beta_2(r)$$

qui montre

$$\log \theta(r) \sim re^{-1}$$

et la divergence de $\mathcal{J}$. D'autre part on a

$$T(r_1, r_2) \leqslant \sup_{p,q} \frac{r_1^p r_2^q}{f_1(p, q)} + \sup_{p,q} \frac{r_1^p r_2^q}{f_2(p, q)},$$

$$T(r_1, r_2) \leqslant \sup_p \frac{(r_1 r_2)^p}{(2p)^{2p}} + \sup_{p,q} \frac{(r_1 + r_2)^{p+q}}{(p+q)^{2(p+q)}} \leqslant \theta_1^2\left(\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{2}\right) + \theta_1^2(\sqrt{r_1 + r_2})$$

ce qui, compte tenu de (16), montre qu'il existe une constante

$c > 0$, telle qu'on ait pour tout couple (r_1, r_2), $r_1 > 0$, $r_2 > 0$:

$$\log T(r_1, r_2) \leqslant c[\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_1 r_2}]$$

et assure que l'intégrale I_2 est convergente. Ainsi donc

THÉORÈME 3. — *Il existe des suites* $M_{(\alpha)}$, *pour* $n > 1$, *qui rendent convergente l'intégrale* I_n *tandis qu'elles rendent divergente l'intégrale* $\mathcal{J}$.

Remarque. — On a en même temps répondu à la question suivante : existe-t-il des fonctions plurisousharmoniques([2]) V, qui vérifient les majorations

$$(1)' \qquad V(z_1, \ldots, z_n) \leqslant \log M_{(\alpha)} - \sum_1^n \alpha_k \log |z_k|$$

dans Γ_n? On obtient, comme conséquence de l'énoncé précédent :

COROLLAIRES. — I) *La divergence de l'intégrale* $\mathcal{J}$ *est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'existe aucune fonction plurisousharmonique vérifiant* (1)' *dans* Γ_n.

II) *Si* $n \geqslant 2$, *il existe sur l'arête* A *de* Γ_n *des fonctions continues*

$$\psi(\eta_1, \ldots, \eta_n) = -\log T(|\eta_1|, \ldots, |\eta_n|)$$

qui majorent sur A([3]) *une fonction séparément harmonique des* z_k *dans* Γ_n, *mais qui ne majorent aucune fonction plurisousharmonique bornée supérieurement dans* Γ_n.

III) *Soit* P *le polycercle* $|z_k| < 1$, *d'arête* A' : $z_k = e^{i\omega_k}$, $0 \leqslant \omega_k \leqslant 2\pi$. *Il existe des fonctions continues* $\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ *sur* A', *qui tendent vers* $-\infty$ *quand l'un au moins des* ω_k *tend vers* 0 *ou* 2π, *pour lesquelles l'intégrale sur* A' *a une valeur finie, et qui ne majorent sur* A' *aucune fonction plurisousharmonique sur* P.

4. Application aux classes de fonctions dérivables.

A la suite $M_{(\alpha)}$, $0 < M_{(\alpha)} \leqslant +\infty$, nous ferons correspondre une classe $C[M_{(\alpha)}]$ de fonctions dérivables.

([2]) On rappelle que la constante $-\infty$ n'est pas considérée comme appartenant à la classe des fonctions plurisousharmoniques.

([3]) On convient de dire que $V(z_1, \ldots z_n)$ définie sur Γ_n est majorée sur A par la fonction continue $\psi(\eta_1, \ldots \eta_n)$ si $\lim\sup V(z) \leqslant \psi(\eta)$ pour $z_k \to i\eta_k$, $z = (z_k) \in \Gamma$.

DÉFINITION. — *On dira qu'une fonction* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *appartient sur un ensemble* E *à la classe* $C[M_{(\alpha)}]$ *si* f *est indéfiniment dérivable sur* E, *et si les dérivées successives*

$$D^{(\alpha)}f = \frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}}$$

vérifient pour tout (α) *les majorations :*

$$(19) \qquad |D^{(\alpha)}f| \leqslant Ak^{|\alpha|}M_{(\alpha)}$$

les constantes A *et* k *étant relatives à la fonction* $f \in C[M_{(\alpha)}]$.

En admettant éventuellement la valeur $M_{(\alpha)} = +\infty$, on peut supposer que $M_{(\alpha)}$ est défini pour tous les indices (α), $\alpha_k \geqslant 0$, α_k entiers. Le théorème 1 fournit alors une caractérisation des classes $C[M_{(\alpha)}]$ qui ne peuvent contenir de fonction à support compact non vide.

DÉFINITION. — *La classe* $C[M_{(\alpha)}]$ *sera dite une classe de convergence ou de divergence selon que l'intégrale* $\mathcal{J}$ *associée à* $\{M_{(\alpha)}\}$ *par* (8) *et* (9) *converge ou diverge.*

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 4. — 1° *Si* f *appartient à une classe de divergence sur un compact* G *de* R^n *et s'annule ainsi que toutes ses dérivées sur la frontière de* G, *alors on a* $f \equiv 0$ *sur* G.

2° *Si* $C[M_{(\alpha)}]$ *est une classe de convergence, et* G *un compact de* R^n *d'intérieur* $\mathring{G}$ *non vide, il existe une fonction* $f \not\equiv 0$ *dans* $\mathring{G}$, *appartenant à* $C[M_{(\alpha)}]$. *et nulle en dehors de* G.

Pour établir 1° opérons au besoin une translation, de manière que G soit dans la région des coordonnées x_k positives, ce qui ne modifie pas les hypothèses, et posons, $\tilde{f}$ étant obtenu en prolongeant f par les valeurs nulles sur $R^n - G$:

$$(20) \quad F(z_1, \ldots, z_n) = \mathcal{L}\tilde{f} = \int_{R^n} e^{-2\pi\Sigma z_k t_k}\tilde{f}(t_1, \ldots, t_n)\, d\tau(t).$$

On désignera par B une borne supérieure du volume $\tau(G)$ du compact G.

On a alors, pour la transformée de Laplace $\mathcal{L}[D^\alpha \tilde{f}]$:

$$(21) \quad \mathcal{L}[D^{(\alpha)}\tilde{f}] = (-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{|\alpha|}\, z_1^{\alpha_1}, \ \ldots, \ z_n^{\alpha_n}F(z_1, \ \ldots, \ z_n)$$

et l'hypothèse (19) donne, pour $\mathcal{R}z_k \geqslant 0$:

$$(2\pi)^{|\alpha|}|z_1^{\alpha_1}, \ \ldots, \ z_n^{\alpha_n}|\ |F(z_1, \ \ldots, \ z_n)| \leqslant M_{(\alpha)}\int_G d\tau\ (t) \leqslant BM_{(\alpha)}$$

$$(22) \quad |F(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant B(2\pi)^{-|\alpha|}M_{(\alpha)}\,|z_1^{-\alpha_1}, \ \ldots, \ z_n^{-\alpha_n}|.$$

La fonction F est une fonction entière de type exponentiel. D'après (22) la fonction

$$(23) \qquad F_1(z_1, \ldots, z_n) = B^{-1}F\left(\frac{z_1}{2\pi}, \ldots, \frac{z_n}{2\pi}\right)$$

est analytique sur Γ_n, et vérifie sur Γ_n les hypothèses du théorème 1; il en résulte $F_1 \equiv 0$, $C[M_{(\alpha)}]$ étant une classe de divergence. On a donc $\tilde{f} \equiv 0$, ce qui établit 1°.

Pour établir 2°, le compact G étant donné, d'intérieur $\overset{\circ}{G}$ non vide, considérons un pavé

$$(24) \qquad x_k^0 < x_k < x_k^0 + h, \qquad h > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

contenu dans $\overset{\circ}{G}$. D'après le résultat connu pour $n = 1$, il existe une fonction $f_0(x) \not\equiv 0$, indéfiniment dérivable sur $0 \leqslant x \leqslant 1$, dont toutes les dérivées s'annulent pour $x = 0$ et $x = 1$, et qui vérifie les majorations

$$(25) \qquad |f_0^{(p)}(x)| \leqslant c_0 k^p \mu_p;$$

c_0 et k sont des constantes positives et $\mu_p = \inf_{|\alpha|=p} M_{(\alpha)}$ est la suite construite à partir de la suite $M_{(\alpha)}$ supposée donnée, $C[M_{(\alpha)}]$ étant une classe de convergence. A la suite μ_p, associons la suite μ_p^c, régularisée convexe. D'après un résultat connu [4], on a alors, pour tout p :

$$(26) \qquad |f_0^{(p)}(x)| \leqslant c_1 k_1^p \mu_p^c$$

pour des constantes c_1, k_1 positives finies. Définissons alors

$$f_0(x_1, \ldots, x_n) = f_0\left(\frac{x_1 - x_1^0}{h}\right) \times f_0\left(\frac{x_2 - x_2^0}{h}\right) \cdots \times f_0\left(\frac{x_n - x_n^0}{h}\right).$$

D'après (26), on aura :

$$|D^{(\alpha)} f_0(x_2, \ldots, x_n)| \leqslant h^{-|\alpha|} c_1^n k_1^{|\alpha|} \mu_{\alpha_1}^c \ldots \mu_{\alpha_n}^c$$

On opère alors comme plus haut, en remarquant que la convexité du diagramme e^c entraîne à partir d'une certaine valeur la croissance de $l(p) = p^{-1} \log \mu_p^c$, ce qui permet d'écrire pour une certaine constante b, finie :

$$\mu_{\alpha_1}^c . \mu_{\alpha_2}^c \ldots \mu_{\alpha_n}^c \leqslant b \mu_{|\alpha|}^c.$$

[4] Cf. [4, b, théorème 8, p. 63].

On a donc

$$|D^{(\alpha)}f_0(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant bc_1^n(k_1h^{-1})^{|\alpha|}\mu^c_{|\alpha|} \leqslant c_2k_2^{|\alpha|}M_{(\alpha)}$$

où $k_2 = k_1h^{-1}$ et c_2 sont des constantes indépendantes de l'indice (α). Ainsi f_0 appartient à $C[M_{(\alpha)}]$, sans être identiquement nulle dans $\overset{0}{G}$, ce qui établit 2° et achève la démonstration. Notons, en conséquence du théorème 4 :

Corollaire. — *Si f_1 et f_2 appartiennent dans un domaine* D *à une classe de divergence, et si l'on a $f_1 = f_2$ sur un voisinage de la frontière d'un ouvert Ω relativement compact dans* D, $\overline{\Omega} \subset D$, *alors f_1 et f_2 coïncident sur Ω.*

Remarque. — On peut se demander si, $M_{(\alpha)}$ étant une classe de divergence, l'appartenance de f à $C[M_{(\alpha)}]$ dans un voisinage D de l'origine, entraîne nécessairement $f \equiv 0$, quand f et toutes ses dérivées s'annulent à l'origine. Il n'en est rien pour $n \geqslant 2$, on va le montrer par un exemple simple. On considère une fonction $f_1(x_1)$, indéfiniment dérivable, vérifiant pour $-1 \leqslant x_1 \leqslant 1$:

$$\left|\frac{\partial^p f_1}{\partial x_1^p}\right| \leqslant \mu_p$$

la suite μ_p déterminant une classe de divergence. D'autre part on considère une fonction $f_2(x_2) \not\equiv 0$, nulle ainsi que toutes ses dérivées à l'origine, par exemple $f_2(x_2) = \exp\left(-\frac{1}{x_2^2}\right)$ pour $x_2 \neq 0$, $f_2(0) = 0$. Alors

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)\, f_2(x_2)$$

a toutes ses dérivées partielles $D^{p,q}f$ nulles à l'origine et d'autre part, en désignant par M le maximum de $|f_2|$ pour $-1 \leqslant x_2 < 1$, on a dans le carré R : $|x_1| \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant 1$:

$$|D^{p,0}f(x_1, x_2)| \leqslant M\mu_p.$$

Ainsi f appartient bien dans le carré R, à une classe $C[M_{(\alpha)}]$, pour laquelle on a

$$\inf_{r+s=p} M_{r,s} = \mu_p$$

donc à une classe de divergence et l'on a établi de ce fait :

THÉORÈME 5. — *Il existe, pour $n \geqslant 2$, des fonctions appartenant à une classe de divergence* $C[M_{(\alpha)}]$ *dans un voisinage de l'origine, s'annulant ainsi que toutes leurs dérivées à l'origine et non identiquement nulles.*

5. Cas d'une famille d'opérateurs différentiels.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de polynômes $P = P(z_1, \ldots, z_n)$ homogènes; on désigne encore par $\mathcal{F}$ la famille des polynômes de dérivation $P\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$. Pour généraliser le théorème 4, on utilisera la remarque suivante:

PROPOSITION 3. — *Soit* $F(z_1, \ldots, z_n)$ *une fonction entière; si pour* $t = (t_1, \ldots, t_n)$ *fixé,* t_k *réels, on a*

$$F(t_1 u, \ldots, t_n u) = \varphi_t(u) \equiv 0,$$

et cela pour tous les points t *d'un ensemble* e *de mesure positive dans* R^n, *alors on a* $F \equiv 0$.

En effet $F \not\equiv 0$ entraîne que dans le développement

$$F = \sum_0^\infty u^s Q_s(t_1, \ldots, t_n)$$

il y ait un premier polynôme soit Q_m non identiquement nul; alors $Q_m = 0$ définit un ensemble de R^n-mesure nulle [5] dans $R^n(t)$; on aboutit ainsi à une contradiction qui établit l'énoncé.

De là découle.

THÉORÈME 6. — *Soit* $\mathcal{F}$ *une famille de polynômes homogènes; soit* C_P *une constante positive associée à* $P \in \mathcal{F}$, *de manière que si* α *est le degré de* P, *les polynomes* $P' = C_P P$ *engendrent une famille de fonctions plurisousharmoniques*

$$V_P(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{\alpha} \log |P'(z_1, \ldots, z_n)|.$$

[5] Les infinis négatifs de la fonction plurisousharmonique $\log |Q_m|$ possèdent en effet cette propriété, cf. [3, (*d*)], théorème 6, où on établit la sommabilité locale des restrictions à l'espace réel R^n pour une classe plus générale que les fonctions plurisousharmoniques.

localement bornée supérieurement et n'admettant pas la fonction limite $-\infty$, *dans* C^n. *Soit d'autre part une famille* M_P, $0 < M_P \leqslant +\infty$ *de constantes associées aux polynômes* $P \in \mathcal{F}$; *on pose*

$$\theta_{\mathcal{F}}(r) = \sup_{P \in \mathcal{F}} \frac{r^\alpha}{C_P M_P}. \tag{27}$$

On dira qu'une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ *appartient à la classe* $C[M_P]$ *sur un ensemble* E *si il existe des constantes* k, A, *dépendant de* f, *mais non de* $P \in \mathcal{F}$, *de manière que soient vérifiées sur* E *toutes les majorations*

$$\left|P\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\right| \leqslant A k^\alpha M_P.$$

Alors pour que la classe $C[M_P]$, $P \in \mathcal{F}$, *ait la propriété de quasi-analyticité énoncée par le* 1° *du théorème* 4, *il faut et il suffit que l'intégrale*

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty (1 + r^2)^{-1} \log \theta_{\mathcal{F}}(r)\, dr \tag{28}$$

soit divergente.

Pour la démonstration, remarquons que les fonctions $V'(z_1, \ldots, z_n) = \dfrac{1}{\alpha} \log |P(z_1, \ldots, z_n)|$ sont des fonctions plurisousharmoniques dans C^n et, considérées comme fonctions R^{2n}-sousharmoniques, sont de masse bornée sur tout compact. L'aire $\sigma(R)$ de l'ensemble $P = 0$ dans la boule $\|z\| < R$ vérifie en effet

$$\sigma(R) < c(n)\alpha\, R^{2n-2}$$

d'après un résultat établi dans [3, (*c*)]. La masse relative à $\log|P|$ étant proportionnelle à σ, la masse relative à V' a une majoration de la forme $c'(n)\, R^{2n-2}$ dans une boule $\|z\| < R$. On peut alors déterminer les constantes C_P; il suffit, par exemple, de déterminer C_P de manière que la moyenne $\lambda(V, 0{,}1)$ de V sur la sphère $\|z\| = 1$ s'annule, ce qui donne :

$$\log C_P = -\lambda\ [\log\ |P|,\ 0{,}1].$$

Les fonctions $V_P(z_1, \ldots, z_n) = \dfrac{1}{\alpha} \log |C_P P(z_1, \ldots, z_n)|$ sont alors uniformément bornées supérieurement sur tout compact et n'admettent pas la fonction limite $-\infty$.

Le choix des constantes C_P étant fait, posons, comme dans [3, (*d*)] :

$$W(z_1, \ldots, z_n) = \sup_{P \in \mathcal{F}} V_P(z_1, \ldots, z_n)$$
$$W^*(z_1, \ldots, z_n) = \text{rég. sup}\, W(z_1, \ldots, z_n)$$

La fonction W^* est (⁶) plurisousharmonique dans C^n.

Généralisons alors le procédé utilisé dans la démonstration du théorème 1 : soit $F(z_1, \ldots, z_n)$ une fonction entière vérifiant sur Γ_n les majorations

$$(29) \quad |F(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant \frac{M_P}{|P(z_1, \ldots, z)|}, \quad \text{pour} \quad P \in \mathcal{F}.$$

On en déduit, en posant

$$M'_P = C_P M_P,$$
$$\log |F(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant -\sup_{P \in \mathcal{F}} [\log |P'(z_1, \ldots, z_n)| - \log M'_P]$$
$$\log |F(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant -\sup [\alpha W(z_1, \ldots, z_n) - \log M'_P].$$

Mais comme le premier membre est continu, on a aussi, en tout point $z \in \Gamma_n$:

$$\log |F(z)| \leqslant -\sup_{P \in \mathcal{F}} [\alpha W^*(z) - \log M'_P].$$

Soient t_k des nombres réels, positifs. On aura

$$\log |F(t_1 u, \ldots, t_n u)| \leqslant -\sup [\alpha \log |u| + \alpha W^*(t_1, \ldots, t_n) - \log M'_P]$$

l'homogénéité des polynômes se traduisant par

$$W^*(t_k u) = \log |u| + W^*(t_k)$$

Mais W^* étant plurisousharmonique dans C^n est localement sommable (5) sur le sous-espace réel R^n. Si donc on donne à $t_1, \ldots, t_n$ des valeurs réelles positives, il existe $L > -\infty$, tel qu'on ait $W^*(t_1, \ldots, t_n) > L$ pour tous les $t = (t_k)$ d'un ensemble e de R^n-mesure positive dans R^n_+, $(t_k \geqslant 0)$. Fixons $t \in e$; alors on a :

$$\log |F(t_1 u, \ldots, t_n u)| \leqslant -\sup_{P \in \mathcal{F}} [\alpha(\log |u| + L) - \log M'_P]$$
$$(30) \quad \log |F(t_1 u, \ldots, t_n u)| \leqslant -\log \theta_{\mathcal{F}}(l|u|), \quad \text{pour} \quad \mathcal{R}_u \geqslant 0$$

(⁶) On désigne par reg. sup. W (régularisée supérieure) la plus petite majorante semi-continue supérieurement de W.