M. AUBRY
JEAN-MICHEL LEMAIRE

Sur certaines équivalences d'homotopies

Annales de l'institut Fourier, tome 41, n° 1 (1991), p. 173-187
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_1_173_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
41, 1 (1991), 173-187

SUR CERTAINES ÉQUIVALENCES D'HOMOTOPIES

par M. AUBRY et J.-M. LEMAIRE

---

1. Prologue.

Le point de départ de cet article est la question suivante, qui fut posée à l'un de nous[1] : existe-t-il des applications d'un espace dans lui-même qui induisent l'identité sur les groupes d'homotopie et sur les groupes d'homologie (entière) et qui ne soient pas homotopes à l'identité?

Donnons tout de suite un exemple – qui est sans doute le plus simple possible – répondant à cette question. Prenons l'espace $S^3 \times S^3$. C'est un groupe topologique, donc pour tout espace Z l'ensemble des classes d'homotopie (pointées) $[Z, S^3 \times S^3] = [Z, S^3]^2$ est un groupe : en particulier

$$S^3 \times S^3, S^3 \times S^3 = [S^3 \times S^3, S^3]^2$$

est un groupe (non commutatif); or la structure du groupe $[S^3 \times S^3, S^3]$ est bien connue :

1.1. PROPOSITION. — *Le groupe $[S^3 \times S^3, S^3]$ est isomorphe à l'extension centrale de $\mathbb{Z}^2$ par $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ classée par le générateur de $H^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.*

Preuve. — La suite de Barratt-Puppe associée à la cofibration :

$$S^3 \vee S^3 \xrightarrow{j} S^3 \times S^3 \xrightarrow{p} S^6$$

Mots-clés : Modèle de Quillen - Complexes de Poincaré - Equivalences d'homotopie.
Classification A.M.S. : 55P62 - 57P10 - 55P10.

(1) Cette question a été posée au deuxième auteur par V. Srinivas, pendant l'école d'été "K-théorie et applications" organisée par le CIMPA et l'Union Mathématique Africaine à Ibadan (Nigéria) en août 1987.

donne lieu à une suite exacte courte de groupes :

$$(*) \qquad 1 \leftarrow [S^3 \vee S^3, S^3] \xleftarrow{j^*} [S^3 \times S^3, S^3] \xleftarrow{p^*} [S^6, S^3] \leftarrow 1.$$

En effet, j^* admet une section ensembliste car toute application $(g_1, g_2) : X \vee Y \to S$ dans un groupe topologique S s'étend à $X \times Y$ par $m \circ (g_1 \times g_2)$, où $m : S \times S \to S$ est la multiplication de S. L'injectivité de p^* s'obtient en continuant la suite de Barratt-Puppe :

$$[S^6, S^3] \longleftarrow [S^4 \vee S^4, S^3] \longleftarrow [\Sigma(S^3 \times S^3), S^3]$$

et en observant que la flèche de droite est surjective car $\Sigma(S^3 \times S^3) \sim S^4 \vee S^4 \vee S^6$.

A présent le foncteur $H_3(\cdot, \mathbb{Z})$ établit un isomorphisme $[S^3 \vee S^3, S^3] \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$. D'autre part, $[S^6, S^3] = \pi_6(S^3) \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Le groupe $[S^3 \times S^3, S^3]$ est donc une extension de $\mathbb{Z}^2$ par $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Comme ce groupe est nilpotent de classe 2 d'après le théorème de G. Whitehead ([W]), 3.6. Chap. X), son sous-groupe dérivé est central; on sait de plus [Sa] qu'un générateur de $p^*\pi_6(S^3)$ est le commutateur $p_1 p_2 p_1^{-1} p_2^{-1}$, où p_1 et $p_2 : S^3 \times S^3 \to S^3$ sont les projections. Il en résulte que $p^*\pi_6(S^3)$ est contenu dans le centre et que $[S^3 \times S^3, S^3]$ est l'extension centrale de $\mathbb{Z}^2$ par $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ classée par le générateur de $H^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. □

Notons $+$ la loi de composition du groupe $[S^3 \times S^3, S^3 \times S^3]$ et 1 l'identité de $S^3 \times S^3$.

1.2. PROPOSITION. — *Les 144 éléments de la forme* $1 + \alpha \circ p \in [S^3 \times S^3, S^3 \times S^3]$, *où* α *parcourt* $[S^6, S^3 \times S^3]$, *induisent l'identité sur les groupes d'homologie et sur les groupes d'homotopie.*

Preuve. — La suite $(*)$ montre que tous ces éléments ont la même restriction à $S^3 \vee S^3$, à savoir l'inclusion $j : S^3 \vee S^3 \to S^3 \times S^3$, qui induit l'identité sur le H_3 ; comme l'algèbre $H_*(S^3 \times S^3; \mathbb{Z})$ est engendrée en degré 3, l'application $1 + \alpha \circ p$ induit l'identité sur $H_*(S^3 \times S^3; \mathbb{Z})$ pour tout α. En homotopie, on a $\pi_*(1 + \alpha \circ p) \circ \pi_*(j) = \pi_*(j)$, et comme $\pi_*(j)$ est surjective, $\pi_*(1 + \alpha \circ p)$ est l'identité. □

2. Equivalences d'homotopie qui induisent l'identité sur le $(n-1)$-squelette.

Si l'on analyse l'exemple précédent, on peut le généraliser comme suit : considérons un CW-complexe X de dimension n avec une seule cellule de dimension n : c'est le cône d'une application $f : S^{n-1} \to Y$ où Y est le $(n-1)$-squelette de X. On a alors la coaction $\gamma : X \to X \vee S^n$, qui consiste à pincer le bord d'une petite boule dans la n-cellule, et qui définit une action de $\pi_n(X)$ sur $[X, X]$ par la composée

$$X \xrightarrow{\gamma} X \vee S^n \xrightarrow{(g,\alpha)} X \qquad g \in [X, X],\ \alpha \in \pi_n(X)$$

que nous noterons $g + \alpha$. Si j est l'inclusion de Y dans X, on a encore $(g + \alpha) \circ j \sim g \circ j$ pour tout α. Réciproquement, si $g, g' \in [X, X]$ ont des restrictions à Y homotopes, il existe $\alpha \in \pi_n(X)$ tel que $g' \sim g + \alpha$.

Soit $I_n(X)$ l'orbite de l'identité 1 de X sous l'action de $\pi_n(X)$; l'application $1^+ : \pi_n(X) \to I_n(X)$ définie par $1^+(\alpha) = 1 + \alpha$ est donc une surjection. On peut préciser la description de $I_n(X)$ comme suit : soit $\Sigma_* Y = S^1 \times X/S^1 \times *$, soit $[\Sigma_* Y, X]^j$ le groupe des homotopies (relatives au point de base) de l'inclusion $j : Y \to X$ avec elle-même, et soit enfin $\Sigma_{1,f} : [\Sigma_* Y, X]^j \to \pi_n(X)$ l'application définie de la manière suivante : soit $w_f : S^n \to X \cup_Y Y \times I \cup_Y X$ l'application d'attachement de la cellule de dimension $(n + 1)$ du cylindre $X \times I$; on pose $\forall H \in [\Sigma_* Y, X]^j$, $\Sigma_{1,f}(H) = (1, H, 1) \circ w_f$.

On a alors la :

2.1. Proposition ([Ba], Prop. 8.16). — *$\Sigma_{1,f}$ est un homomorphisme de groupes, et l'application $1^+ : \pi_n(X) \to I_n(X)$ induit une bijection $\pi_n(X)/\operatorname{Im}(\Sigma_{1,f}) \to I_n(X)$.*

Comme $\pi_n(X)$ est abélien, cette bijection induit une structure de groupe abélien sur $I_n(X)$, que nous noterons $I_n(X)_+$, de sorte que l'on a la suite exacte de groupes :

$$[\Sigma_* Y, X]^j \xrightarrow{\Sigma_{1,f}} \pi_n(X) \xrightarrow{1^+} I_n(X)_+ \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

On notera que la structure de groupe de $I_n(X)_+$ n'est pas en général induite par la composition. On vérifie en effet immédiatement que :

$$\forall f, g \in [X, X],\ \forall \alpha \in \pi_n(X),\ g \circ (f + \alpha) \sim g \circ f + g_*(\alpha)$$

de sorte que

$$\forall \alpha, \beta \in \pi_n(X),\ (1 + \alpha) \circ (1 + \beta) \sim 1 + \alpha + (1 + \alpha)_*(\beta) \tag{2.3}$$

et le second membre est en général distinct de $1 + \alpha + \beta$.

Supposons à présent vérifiées les hypothèses suivantes :

(2.4*a*) $\quad H_*(X; \mathbb{Z}) = H_*(Y; \mathbb{Z}) \oplus \widetilde{H}_*(S^n; \mathbb{Z})$, *i.e.* l'application d'attachement est nulle en homologie, (2.4b) le générateur de $H^n(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est décomposable.

Ces hypothèses sont automatiquement vérifiées si X a le type d'homotopie d'une variété compacte 1-connexe de dimension n, qui n'est pas rationnellement une sphère. Alors les éléments de $I_n(X)$ induisent l'identité sur les groupes d'homologie, et sont donc des équivalences d'homotopie.

Dans le cas où $X = S^3 \times S^3$, pour lequel nous avons vu que $I_6(X) \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2$, l'hypothèse suivante était en outre satisfaite :

(2.4c) $\pi_*(j) : \pi_*(Y) \to \pi_*(X)$ est surjective.

Cette hypothèse additionnelle assure que les éléments de $I_n(X)$ induisent aussi l'identité sur les groupes d'homotopie de X, et par conséquent (2.3) montre que la structure de groupe de $I_n(X)_+$ est alors induite par la composition des applications.

Les hypothèses (2.4 a,b,c) sont vérifiées par les produits de sphères. Par suite, si P est un produit de sphères de dimension N, les éléments de $I_N(P)$ induisent l'identité en homologie et en homotopie et forment un groupe abélien pour la composition.

Plus généralement, l'hypothèse (2.4c) est "presque" vérifiée par la plupart des variétés (compactes, 1-connexes, sans bord) :

2.5. THÉORÈME ([HL]). — *Soit X un complexe de Poincaré 1-connexe dont la cohomologie rationnelle $H^*(X;\mathbb{Q})$ n'est pas engendrée par un seul générateur d'algèbre. Alors $\pi_*(j)$ a un conoyau fini.*

En d'autres termes, tout complexe de Poincaré *rationnel* 1-connexe (dont la cohomologie rationnelle n'est pas engendrée par un seul générateur d'algèbre) vérifie les hypothèses (2.4 a,b,c). Il est donc naturel de chercher à calculer le groupe I_N d'un tel complexe à l'aide des modèles algébriques de l'homotopie rationnelle. Le résultat est remarquablement simple, au moins dans le cas d'un espace formel (*cf.* [DGMS], [F]) :

2.6. PROPOSITION. — *Soit X un complexe de Poincaré rationnel 1-connexe de dimension N, qui n'est pas une sphère rationnelle; si X est formel, alors $I_N(X) = 0$.*

La démonstration de cette proposition occupe le paragraphe 3 ci-après.

Si X est une variété compacte 1-connexe sans bord, ou plus généralement un complexe de Poincaré sur $\mathbb{Z}$, son rationalisé X_0 satisfait donc

$I_N(X_0) = 0$ (nous supposons une fois pour toutes que X_0 n'est pas une sphère rationnelle). La suite exacte (de groupes nilpotents ou abéliens) (2.2) se localise, et par conséquent

$$I_N(X_0)_+ = I_N(X)_+ \otimes \mathbb{Q}.$$

Nous pouvons donc conclure :

2.7. THÉORÈME. — *Si X a le type d'homotopie rationnelle d'un complexe de Poincaré formel, 1-connexe de dimension N, qui n'est pas rationnellement une sphère, le groupe $I_N(X)$ est fini.*

3. Démonstration de la proposition 2.6.

On démontre le théorème à l'aide des modèles minimaux de Quillen en passant par l'algèbre enveloppante et en utilisant les propriétés de la différentielle liées à la dualité de Poincaré.

Rappelons d'abord que Quillen [Q] a construit un foncteur $\lambda : \underline{\mathcal{T}} \to \underline{\mathrm{DGL}}$ de la catégorie des espaces topologiques rationnels 1-connexes vers la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie différentielles graduées connexes. Ce foncteur est une équivalence de catégorie entre les catégories d'homotopie associées.

La catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie différentielles graduées connexes admet des modèles minimaux :

3.1. THÉORÈME ([Ba-L]). — *Pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre de Lie différentielle graduée connexe (L, ∂), il existe une $\mathbb{Q}$-algèbre de Lie différentielle graduée libre connexe $(\mathbb{L}(V), d)$ à différentielle décomposable ($d = d_2 + d_3 + \cdots$, où $d_i(V)$ est une combinaison linéaire de crochets de longueur i) et un quasi-isomorphisme $\varphi : (\mathbb{L}(V), d) \to (L, \partial)$. De plus, $(\mathbb{L}(V), d)$ est unique à isomorphisme près.*

Soit X un espace 1-connexe, le modèle minimal $(L(V), d)$ de λX s'appelle le modèle de Quillen et vérifie les propriétés suivantes :

(a) V est isomorphe à la désuspension de l'homologie réduite de X :

$$V \cong s^{-1}\operatorname{Hom}(\widetilde{H}^*(X;\mathbb{Q}),\mathbb{Q}) \cong s^{-1}\widetilde{H}_*(X;\mathbb{Q}).$$

(b) la partie quadratique de la différentielle est donnée par le produit de l'algèbre $\widetilde{H}^*(X;\mathbb{Q})$: on trouvera une formule explicite en (3.5) ci-après.

(c) deux espaces 1-connexes ont le même type d'homotopie rationnelle ssi leurs modèles de Quillen sont isomorphes dans DGL.

Rappelons enfin ([DGMS]) qu'un espace 1-connexe est dit formel si l'algèbre de ses cochaînes rationnelles est quasi-isomorphe à sa cohomologie. Une définition équivalente est :

3.2. DÉFINITION. — *Un espace rationnel X est dit formel si son modèle de Quillen est quasi-isomorphe à une algèbre de Lie différentielle graduée $(\mathbb{L}(V), d)$ où d est purement quadratique (i.e. $dV \subset [V, V]$).*

Pour l'équivalence de ces deux définitions *cf.* [T], [F]. □

La démonstration du théorème utilise en outre les trois lemmes suivants :

3.3. LEMME. — *Soit $L = (\mathbb{L}(V); d)$ une algèbre de Lie différentielle graduée libre et g', g'' des endomorphismes de L. On note sV la suspension de l'espace vectoriel V : chaque élément sv de sV correspond à un unique élément v de V et $|sv| = |v| + 1$.*

Si $V = V_{<i} \oplus V_i$ et si $g', g'' : L \to L$ vérifient $g'|_{V_{<i}} = g''|_{V_{<i}}$, alors les homotopies de g' vers g'' relatives à $V_{<i}$ sont en bijection avec l'ensemble des morphismes de DGL

$$G : \big(\mathbb{L}(V_{<i} \oplus sV_{<i} \oplus V_i' \oplus V_i'' \oplus sV_i), D \longrightarrow L$$

tels que $G|_{V_{<i}} = g'|_{V_{<i}} = g''|_{V_{<i}}$, $G|_{V_i'} = g'|_{V_i}$ et $G|_{V_i''} = g''|_{V_i}$. La différentielle D est définie par $\begin{cases} D|_V = d \\ D(sv) = -S(dv) \text{ si } |v| < i \\ D(sv) = v'' - v' - S(dv) \text{ si } |v| = i \end{cases}$ *où S est la dérivation de $\mathbb{L}(V_{<i} \oplus sV_{<i})$ qui prolonge s.*

Preuve. — *cf.* [AL]. □

3.4. LEMME. — *Soit H une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée vérifiant la dualité de Poincaré par rapport au générateur linéaire μ de dimension N, alors il existe une base linéaire homogène de H dont les éléments sont les $(\xi_i)_{i \in I \cup J}$, $(\xi_i^*)_{i \in I \cup K}$ indexés par les ensembles I, J, K, vérifiant les propriétés $I \cap J = \emptyset = I \cap K$ et*

1) pour tout $i \in I$, $\xi_i \in H^{<N/2}$, $\xi_i^* \in H^{>N/2}$ et $\xi_i \xi_j^* = \delta_{ij}\mu$ pour tous $i, j \in I$ tels que $|\xi_i| + |\xi_j^*| = N$

(δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker, $|\xi_i|$ le degré de ξ_i).

2) i) *Si* $N = 1[2]$, *alors* $J = K = \emptyset$.

ii) *Si* $N = 0[4]$, *alors* $K = \emptyset$; *pour tout* $j \in J$, $|\xi_j| = N/2$ *et il existe un* $\alpha_j \in \mathbb{Q} - \{0\}$ *tel que* $\xi_i \cdot \xi_j = \alpha_{ij}\delta_{ij}\mu$ *pour tous* $i, j \in J$.

iii) *Si* $N = 2[4]$, *alors* $J = K$; *pour tout* $j \in J$, $|\xi_j| = N/2 = |\xi_j^*|$ *et* $\xi_i \cdot \xi_j^* = \delta_{ij}\mu$ *pour tous* $i, j \in J$.

Preuve. — Appliquer simplement la définition de la dualité de Poincaré; le cas 2)ii) (resp. 3)iii)) décrit l'existence d'une base orthogonale (resp. symplectique) de $H^{N/2}$. □

3.5. LEMME. — *Soit* γ *l'injection canonique* $\mathbb{L}(X) \subset T(X) = U\mathbb{L}(X)$ *où* $\mathbb{L}(X)$ *est la* $\mathbb{Q}$*-algèbre de Lie libre engendrée par le* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel* X *et* $T(X)$ *son algèbre enveloppante. Le morphisme linéaire* π *défini sur* $T(X)$ *par*

$$\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \frac{1 + |x_n|}{n + |x_1| + \cdots + |x_n|} \operatorname{ad} x_1 \circ \cdots \circ \operatorname{ad} x_{n-1}(x_n), \qquad x_i \in X,\ i = 1, \ldots, n$$

est une rétraction de γ. *De plus, si* $\mathbb{L}(X)$ *est munie d'une différentielle quadratique, et* $T(X)$ *de la différentielle induite, alors* π *est un morphisme différentiel.*

Preuve. — Rappelons d'abord que la représentation adjointe

$$\operatorname{ad} : \mathbb{L}(X) \to \operatorname{Der}(\mathbb{L}(X)) \subset \operatorname{End}(X))$$

définit une structure de $T(X)$-module sur $\mathbb{L}(X)$, qui vérifie $\gamma(u).v = [u, v]$ pour tous $u, v \in \mathbb{L}(X)$. On remarque ensuite que l'inclusion $X \subset \mathbb{L}(X)$ induit des isomorphismes canoniques d'espaces vectoriels gradués :

$$\operatorname{Der}(\mathbb{L}(X)) = \operatorname{Hom}(X, \mathbb{L}(X)) = \operatorname{Hom}^{T(X)}(T(X) \otimes X, \mathbb{L}(X)) = \operatorname{Hom}^{T(X)}(T^+(X), \mathbb{L}(X)).$$

Soit j un homomorphisme de degré 0 de X dans $\mathbb{L}(X)$; les isomorphismes ci-dessus prolongent j respectivement en un homomorphisme $T(X)$-linéaire $J : T^+(X) \to \mathbb{L}(X)$ et en une dérivation η de $\mathbb{L}(X)$ de degré 0; on a

$$J(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \operatorname{ad} x_1 \circ \cdots \circ \operatorname{ad}_{n-1}(j(x_n)).$$

Remarquons enfin que $J\gamma$ est une dérivation de degré 0 : en effet

$$J\gamma([u, v]) = J\big(\gamma u.\gamma v - (-1)^{|u|\cdot|v|}\gamma v.\gamma u\big) = [u, J\gamma v] - (-1)^{|u|\cdot|v|}[v, J\gamma u] = [u, J\gamma v] + [v, J\gamma u].$$

Or, il est clair que η et $J\gamma$ ont même restriction à X, à savoir j; donc $J\gamma = \eta$.

Si $J\gamma$ est inversible, $(J\gamma)^{-1} \circ J$ est évidemment une rétraction linéaire de γ. En particulier, si l'on prend $\forall x \in X$, $j(x) = (1+|x|)\cdot x$, comme $J\gamma$ est une dérivation il vient $J\gamma(u) = (n+|u|)\cdot u$ pour tout $u \in \mathbb{L}(X)$ homogène de longueur de crochet n, d'où $(J\gamma)^{-1} \circ J = \pi$ et le résultat.

Supposons enfin $\mathbb{L}(X)$ munie d'une différentielle quadratique δ, dont nous notons encore δ le prolongement à $T(X)$; vérifions que π commute à δ. Comme $\pi = (J\gamma)^{-1} \circ J$, il suffit de montrer que J commute à δ, puisque γ commute à δ par définition. Pour cela, on observe d'abord que $J\delta - \delta J$ est une application $T(X)$-linéaire de degré -1 de $T(X)$ dans $\mathbb{L}(X)$: on a en effet

$$\forall x \in X,\ \forall w \in T(X),\ \ J\delta(x.w) = J(\delta x.w) + (-1)^{|x|}J(x.\delta w) = [\delta x, Jw] + (-1)^{|x|}[x, J\delta w]$$

et

$$\delta J(x.w) = \delta[x, Jw] = [\delta x, Jw] + (-1)^{|x|}[x, \delta J w],$$

soit

$$(J\delta - \delta J)(x.w) = (-1)^{|x|}[x, (J\delta - \delta J)w].$$

Il suffit donc de montrer que la restriction de $J\delta - \delta J$ à X est nulle. Or, en posant $\forall x \in X$, $\delta x = \Sigma[y,z]$, il vient $J\delta x = J\gamma\Sigma[y,z] = (2+|y|+|z|)\cdot\Sigma[y,z]$ et $\delta J x = \delta j x = (|x|+1)\cdot\Sigma[y,z]$, d'où le résultat puisque $|x| - 1 = |y| + |z|$. □

3.6. — Nous pouvons à présent démontrer la proposition 2.6. Nous supposons que le $(N-1)$-squelette de X n'est pas un point, car dans ce cas le théorème est trivial.

Soit μ la classe fondamentale de la cohomologie H. L'espace X admet un modèle minimal de Quillen $L = (\mathbb{L}(W), \delta)$, où $W = s^{-1}\operatorname{Hom}(H, \mathbb{Q})$ et δ est une différentielle quadratique. D'après le lemme 3.4, il existe une base linéaire (ξ_i), $i \in [1, \ldots, n]$ de H, avec une involution $* : [1, \ldots, n] \to [1, \ldots, n]$ telle que pour $i, j \in [1, \ldots, n]$ avec $|\xi_i| + |\xi_{j^*}| = N$, $\xi_i\xi_{j^*} = \alpha_{ij}\delta_{ij}\mu$.

On posera $\alpha_{ii} = \alpha_i$ et on remarque dès à présent que α_i et α_{i^*} sont reliés par la formule $\alpha_i = (-1)^{|\xi_i||\xi_{i^*}|}\alpha_{i^*}$.

Posons $W = V \oplus m\mathbb{Q} = \Big(\underset{i}{\oplus}\, x_i\mathbb{Q}\Big) \oplus m\mathbb{Q}$, la base m, (x_i) étant la désuspension de la base duale de $\mu, (\xi_i)$. La différentielle de m dans L est donc

$$\delta m = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{|x_i|}\frac{1}{2}\alpha_i[x_i, x_{i^*}].$$

Il s'agit alors de montrer que si a est un cycle de L de degré $N-1$ (leur ensemble est noté Z_{N-1}), l'application g définie par $g_{|V} = \mathrm{id}_{|V}$, $g(m) = m + a$ est homotope à l'identité. Comme par hypothèse, la différentielle δ est quadratique, c'est-à-dire homogène de degré $+1$ pour la longueur de crochet, on peut écrire $a = \sum_{t\geq 2} a_t$ où a_t est un cycle homogène de longueur de crochet $t \geq 2$. Désignant par g_t l'automorphisme de L défini par $g_{t|V} = \mathrm{id}_{|V}$, $g_t(m) = m + a_t$, on vérifie immédiatement que g est la composée des g_t (dans un ordre arbitraire) : on peut donc supposer sans restriction que a est homogène de longueur de crochet $t \geq 2$.

D'après le lemme 3.3, il suffit de construire un morphisme

$$F : (\mathbb{L}(V \oplus sV \oplus m'\mathbb{Q} \oplus m''\mathbb{Q} \oplus sm\mathbb{Q}), D) \longrightarrow L$$

tel que $F_{|V} = \mathrm{id}_{|V}$, $F(m') = m$ et $F(m'') = m + a$.

Ecrivons d'abord (de façon unique!) :

$$\gamma a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \otimes r_i \in T(V)$$

où $r_i \in V^{\otimes t-1}$.

Définissons F par $F(sx_{i^*}) = \dfrac{|r_i| + t - 1}{|x_i| + |r_i| + t}\pi(r_i)$ et $F(sm) = 0$.

Montrons que F commute aux différentielles.

Commençons par vérifier la commutation sur sm. Par définition de F et d'après le lemme 3.5, on a :

$$\pi\gamma a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \big[x_i, Fsx_{i^*}\big].$$

De plus :

$$\begin{aligned} FDsm &= F(m'' - m' - S\delta m) \quad \text{(lemme 3.3)} \\ &= a - FS\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|x_i|}\frac{1}{2}\alpha_i[x_i, x_{i^*}]\Big) \\ &= a - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{|x_i|}\frac{1}{2}\alpha_i\big[Fsx_i, x_{i^*}\big] - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\big[x_i, Fsx_{i^*}\big]. \end{aligned}$$

Le premier terme de la somme peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|x_i|}\frac{1}{2}\alpha_{i^*}(-1)^{(|x_i|+1)(|x_{i^*}|+1)}(-1)^{|x_{i^*}|(|x_j|+1)+1}\left[x_{i^*}, Fsx_{(i^*)^*}\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\alpha_{i^*}\left[x_{i^*}, Fx_{(i^*)^*}\right].$$

Comme $*$ est une bijection, la dernière expression s'écrit en fait :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\alpha_i[x_i, Fsx_{i^*}].$$

D'où $\delta F(sm) = FD(sm)$.

On doit aussi vérifier la commutation sur les générateurs x_i, ou de façon équivalente sur x_{i^*}, soit $0 = (\delta F - FD)sx_{i^*}$ pour tout i.

On a évidemment $0 = \delta\gamma a$; on en déduit :

$$0 = \delta\gamma a = \delta\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i x_i \otimes r_i) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{|x_i|}\alpha_i x_i \otimes \delta r_i + \sum_{i=1}^{n}\alpha_k \delta x_k \otimes r_k.$$

Soit C_{ij}^k les constantes de structure de l'algèbre de cohomologie définies par :

$$\xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^{n} C_{ij}^k \xi_k.$$

Alors dans $T(W)$:

$$\delta x_k = \sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{|x_i|}C_{ij}^k x_i \otimes x_j.$$

Alors en sommant d'abord sur i

$$\alpha_k\delta x_k \otimes r_k = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{|x_i|}x_i \otimes \Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_k C_{ij}^k x_j \otimes r_k\Big).$$

Ainsi :

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|x_i|}x_i \otimes \Big(\alpha_i\delta r_i + \sum_{j,k=1}^{n}\alpha_k C_{ij}^k x_j \otimes r_k\Big) = 0,$$

ce qui, dans une algèbre tensorielle, est équivalent à :

$$\alpha_i\delta r_i + \sum_{j,k=1}^{n}\alpha_k C_{ij}^k x_j \otimes r_k = 0$$

pour tout i (et c'est pour pouvoir effectuer cette "simplification" que nous sommes passés par l'algèbre tensorielle).

D'où par application de π :

$$\alpha_i \delta F s x_{i^*} + \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_k C_{ij}^k \left[x_i, F s x_{k^*}\right] = 0.$$

Notons P_i le premier membre de cette égalité. Nous allons transformer l'expression de P_i.

Un calcul facile montre d'abord que

$$C_{ik^*}^{j^*} = (-1)^{(|x_j|+1)(x_{k^*}|+1)} \alpha_k C_{ij}^k (\alpha_{j^*})^{-1}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_k C_{ij}^k \left[x_j, F s x_{k^*}\right] &= \sum_{k^*,j^*=1}^{n} \alpha_{j^*} C_{ik^*}^{j^*} \left[x_{k^*}, F s x_j\right] \\ &= \sum_{k^*,j^*=1}^{n} \alpha_{j^*} C_{ik^*}^{j^*} (-1)^{(|x_{k^*}||(x_j+1)+1)|} \left[F s x_j, x_{k^*}\right] \\ &= \sum_{k^*,j^*=1}^{n} (-1)^{|x_j|} \alpha_k C_{ij}^k \left[F s x_i, x_{k^*}\right] \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} (-1)^{|x_j|} \alpha_k C_{ij}^k \left[F s x_i, x_{k^*}\right]\end{aligned}$$

puisque $*$ est une bijection.

Et par conséquent :

$$P_i = \alpha_i \delta F s x_{i^*} + \sum_{j,k=1}^{n} (-1)^{|x_j|} \frac{1}{2} \alpha_k C_{ij}^k F S[x_j, x_{k^*}].$$

Exprimons enfin δx_{i^*}. On remarque d'abord comme plus haut que $C_{jk^*}^{i^*} = \alpha_k C_{ij}^k (\alpha_i)^{-1}$.

Ainsi

$$\delta x_{i^*} = \sum_{j,k^*=1}^{n} (-1)^{|x_j|} (\alpha_i)^{-1} \alpha_k C_{ij}^k [x_j, x_{k^*}].$$

Compte tenu de l'expression de la différentielle D (cf. lemme 3.3), on obtient :

$$0 = P_i = \alpha_i (\delta F s x_{i^*} - F D s x_{i^*}).$$

Ce qui achève la démonstration. $\square$

4. Epilogue.

4.1. — La démonstration ci-dessus s'inspire de celle de Stasheff [St]. En fait, telle qu'elle est formulée en [St], cette démonstration comporte des erreurs :

a) l'expression dans l'algèbre de Lie libre de l'isomorphisme cherché est ambiguë et ne permet donc pas de conclure à la commutation aux différentielles.

C'est pour résoudre cette difficulté que nous travaillons dans l'algèbre enveloppante.

b) La récurrence sur la longueur des crochets ne fonctionne pas si l'on ne suppose pas le $(N-1)$-squelette formel.

Nous ignorons si l'énoncé est encore vrai dans le cas non formel.

De fait, mutatis mutandis, notre démonstration permet de trouver le théorème de Stasheff sous la forme affaiblie suivante :

4.2. THÉORÈME. — *Le type d'homotopie rationnelle d'un complexe de Poincaré rationnel dont le $(N-1)$-squelette est formel est entièrement déterminé par son algèbre de cohomologie rationnelle. En d'autres termes, un complexe de Poincaré rationnel dont le $(N-1)$-squelette est formel est lui-même formel.*

4.3. — Remarquons enfin que la proposition 2.6 est fausse si l'on n'impose plus à X d'être un complexe de Poincaré. Considérons ainsi l'espace $X = (S^5 \times S^5) \vee S^5 \vee S^6$. Avec les notations ci-dessus, $Y = S^5 \vee S^5 \vee S^5 \vee S^6$ et les conditions (2.4a) et (2.4b) de l'introduction sont évidemment satisfaites. On voit aisément que (2.4c) est vraie par la formule de Hilton-Milnor. Soient i, j, k, ℓ les inclusions respectives des quatre sphères dans X. Le produit de Whitehead $w = [k, 1]$ engendre un facteur $\mathbb{Z}$ dans $\pi_{10}(X)$. En utilisant le modèle de Quillen, on montre facilement que $\pi_{10}(X) \otimes \mathbb{Q} = I_{10}(X)_+ \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. On obtient ainsi un exemple d'espace admettant une infinité d'applications dans lui-même qui induisent l'identité en homologie et en homotopie.

BIBLIOGRAPHIE

[AL] M. AUBRY, J.-M. LEMAIRE, Homotopies d'algèbres de Lie et de leurs algèbres enveloppantes, Actes Louvain-La-Neuve, (1986), Lectures Notes in Math. 1318 Springer Verlag, Berlin, New-York, (1988), 26–30.

[Ba] H.J. BAUES, Algebraic Homotopy, Cambridge University Press, 1989.

[BaL] H.J. BAUES, J.-M. LEMAIRE, Minimal Models in Homotopy Theory, Math. Ann., 225 (1977), 219–242.

[Bo] N. BOURBAKI, Groupes et Algèbres de Lie, Chap. II, Algèbres de Lie libres, Hermann, Paris, 1972.

[DGMS] P. DELIGNE , P. GRIFFITHS, J. MORGAN, D. SULLIVAN, Real Homotopy Theory of Kähler Manifolds, Invent. Math., 29 (1975), 245–274.

[F] Y. FÉLIX, Espaces formels et π-formels, Actes Luminy 1982, Astérisque, n° 113–114 (1984), 96–108.

[HL] S. HALPERIN, J.-M. LEMAIRE, Suites inertes dans les algèbres de Lie graduées, Math. Scand., 61 (1987), 39–67.

[Q] D. QUILLEN, Rational Homotopy Theory, Ann. of Math., 90 (1969), 205–295.

[Sa] H. SAMELSON, Groups and Spaces of Loops, Comm. Math. Helv., 28 (1954), 278–287.

[St] J. STASHEFF, Rational Poincaré Duality Spaces, III. J. Math., 27, n° 1 (1983), 104–109.

[T] D. TANRE, Homotopie rationnelle : Modèles de Chen, de Quillen, de Sullivan, Lectures Notes in Math. 1025, Springer Verlag, Berlin, New-York, 1983.

[W] G. WHITEHEAD, Elements of Homotopy Theory, Springer, Berlin, 1978.

Manuscrit reçu le 17 septembre 1990,
révisé le 12 février 1991.

ADDENDUM

A

SUR CERTAINES ÉQUIVALENCES D'HOMOTOPIES

par M. AUBRY & J.-M. LEMAIRE

Après l'acceptation définitive de cet article, nous avons eu connaissance de l'article de R.N. Umble [U]. L'auteur y démontre le théorème de Stasheff [St] dans le cas général (non formel) à l'aide d'une suite spectrale construite par filtration de l'algèbre de Lie différentielle graduée des dérivations $(\mathrm{Der}\, L, \overline{\delta})$; on a noté $\overline{\delta} = [\delta, .]$ où (L, δ) est le modèle minimal de Quillen du complexe de Poincaré.

De manière analogue, un argument de suite spectrale appliqué à $(\mathrm{Der}\, L, \overline{\delta})$ permet de démontrer notre théorème 2.7 en toute généralité à partir du cas formel. Nous pouvons donc énoncer :

2.7'. THÉORÈME. — *Soit X un espace qui a le type d'homotopie rationnelle d'un complexe de Poincaré, 1-connexe de dimension N, et qui n'est pas rationnellement une sphère. Alors le groupe $I_N(X)$ est fini.*

Preuve. — On reprend les notations de (3.6) : L est librement engendré par $W = V \oplus m\mathbb{Q}$ et on cherche à prouver que tout automorphisme g de L tel que $g|V = \mathrm{id}_V$ et $g(m) = m + a$ ($a \in L$ est donc un cycle) est homotope à l'identité.

Posons $g = \mathrm{id} + \partial$. Alors $\log g = \partial - \dfrac{\partial^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{\partial^n}{n} + \ldots$ est une dérivation de degré 0 du complexe $(\mathrm{Der}\, L, \overline{\delta})$. Comme $\partial^2 = 0$, on a en fait $\log g = \partial$ et ∂ est une dérivation; de plus par hypothèse ∂ est un cycle dans $(\mathrm{Der}\, L, \overline{\delta})$.

D'autre part, à toute homotopie G définie comme dans le lemme 3.3, on peut associer une dérivation $\mathcal{G} \in \mathrm{Der}_1 L$ (on pose $\mathcal{G}(w) = F(sw)$, $w \in W$) et les deux assertions suivantes sont alors équivalentes :

i) G réalise une homotopie entre id et $\mathrm{id} + \partial$

ii) $\mathcal{G}$ a pour bord ∂ dans le complexe $(\mathrm{Der}\, L, \overline{\delta})$: $\overline{\delta}(\mathcal{G}) = [\delta, \mathcal{G}] = \partial$.

On est donc ramené à montrer :

(*) Etant donné un cycle $a \in L$, la dérivation $\partial \in \mathrm{Der}_0 L$ définie par $\partial|V = 0$ et $\partial m = a$ est un bord du complexe $(\mathrm{Der}\, L, \overline{\delta})$.

Pour cela rappelons qu'on peut filtrer $L = \mathbb{L}(W)$ par la longueur des crochets; soit $(F^p L)_{p \geq 0}$ cette filtration (décroissante); on définit alors une filtration de $\mathrm{Der} L \cong \mathrm{Hom}(W, L)$ par $F^p\mathrm{Der}\, L \cong \mathrm{Hom}(W, F^{p+1}L)$. La suite spectrale associée a pour terme $E^1_{p,q} = (F^p\mathrm{Der}\, L / F^{p+1}\mathrm{Der}\, L)_{p+q}$; la différentielle d^1 est la partie quadratique de la différentielle $\overline{\delta}$. Notons que cette différentielle est de bidegré $(1, -2)$ et que d^r est de bidegré $(r, -r-1)$. Comme $W_i = 0$ si $i < 1$ ou $i > N-1$, on voit que $E^1_{p,q}$ est nul en dehors du domaine défini par les conditions $p \geq 0$, $q \geq -N+2$ et $q \leq p(N-2)+N-4$. Ceci assure la convergence de la suite spectrale vers $H_{p+q}(\mathrm{Der}\, L, \overline{\delta})$.

La différentielle ∂ définit un élément non nul $\partial_1 \in E^1_{1,-1}$; le théorème 2.7 exprime que ∂_1 est un bord au niveau E^1, donc ∂ est un bord dans Der L.

Donc 2.7' est une conséquence de 2.7.

Remarque. — On peut également établir 2.7 comme Umble, en utilisant la suite spectrale associée à une filtration "cellulaire" de Der L (cf. [U]).

BIBLIOGRAPHIE

[St] J. STASHEFF, Rational Poincaré dulaity spaces, Ill. J. of Math., 27, n°1 (1983), 104–109.

[U] R.N. UMBLE, Homotopy conditions that determine rational homotopy type, J. of Pure & Applied Algebra, 60 (2) 1989), 205–217.

Manuscrit reçu le 19 avril 1991.

M. AUBRY & J.-M. LEMAIRE,
Laboratoire de Mathématiques
U.R.A. C.N.R.S. n° 168
Université de Nice
Parc Valrose
F-06034 Nice Cedex.