ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DENIS FEYEL
ARNAUD DE LA PRADELLE

Capacités gaussiennes

Annales de l'institut Fourier, tome 41, nº 1 (1991), p. 49-76
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_1_49_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
41, 1 (1991), 49-76

CAPACITÉS GAUSSIENNES

par D. FEYEL et A. de LA PRADELLE

INTRODUCTION

Nous poursuivons ici l'étude commencée dans [FLP5], [FLP6], [FLP7], en considérant les espaces de Sobolev $W^{rp}(E,\mu)$ pour $r \geq 1$, $p > 1$, où μ est une mesure de Radon gaussienne centrée sur un espace localement convexe E, par exemple la mesure de Wiener. Ces espaces sont définis par récurrence sur r. Notons que pour nous, la différentielle $f'(x,y)$ est définie sur $E \times E$ et non selon l'usage sur $E \times H$ où H désigne l'espace de Cameron-Martin. Cela permet d'éviter l'emploi des puissances tensorielles de H, et de rester plus proche du calcul différentiel classique en dimension finie.

On définit alors les espaces naturels $\mathcal{L}^1(E,c_{rp})$ de fonctions c_{rp}-quasi-continues pour la capacité c_{rp} associée à la norme de $W^{rp}(E,\mu)$, ce qui simplifie l'étude fine de ces fonctions (même en dimension finie). Le théorème d'équivalence de normes de Meyer permet de plonger $W^{rp}(E,\mu)$ dans $L^1(E,c_{rp})$, d'où résulte par exemple que toute forme linéaire ≥ 0 sur $W^{rp}(E,\mu)$ est représentable par une mesure.

Le résultat clef de cet article est le principe des quasi-normes du paragraphe II (théorème 6) montrant la quasi-continuité pour tout (r,p) des semi-normes μ-mesurables et finies μ-presque partout. Entre autres applications, on retrouve la loi du logarithme itéré hors d'un ensemble mince.

Mots-clés : Mesures gaussiennes - Mesure de Wiener - Analyse stochastique - Espaces de Dirichlet - Capacités.
Classification A.M.S. : 31 - 28 - 60.

On démontre que les capacités c_{rp} sont tendues sur les compacts, ce qui simplifie, améliore et corrige nos résultats antérieurs ([FLP6]). Si E est quasi-complet, il en résulte aisément l'existence de fonctions indéfiniment différentiables à support compact (*cf.* 10.d).

On étudie au paragraphe III la notion de quasi-isomorphisme linéaire, qui échange les mesures gaussiennes et les c_{rp}-quasi-continuités. Par exemple, l'espace du bruit blanc est canoniquement quasi-isomorphe à l'espace de Wiener. On a plus généralement des quasi-isomorphismes non canoniques (exemple des séries de Fourier-Wiener). La notion de pseudo-isométrie (application 15.d) permet de montrer que l'espace H de Cameron-Martin est mince.

Au paragraphe IV, on introduit les espaces de Sobolev à valeurs vectorielles ainsi que les espaces de fonctions quasi-continues correspondants. Cela permet par exemple de montrer facilement que les solutions d'E.D.S. ont des versions dont c_{rp}-quasi toute trajectoire est continue.

Cela permet aussi d'aborder au paragraphe V l'étude de la propriété de Nikodym. Toute fonction c_{rp}-quasi-continue possède une propriété de Nikodym plus ou moins forte vis-à-vis de tout sous-espace de Cameron-Martin de dimension finie. A noter que même pour les espaces de Sobolev classiques en dimension finie, ces derniers résultats ne semblent pas connus.

Nous avons ajouté deux appendices : le premier donne une démonstration simplifiée du théorème d'équivalences de normes de Meyer, et l'étend aux fonctions à valeurs dans certains espaces de Banach, ce qui est utile pour les propriétés de Nikodym. Le deuxième appendice précise une propriété plus ou moins connue des espaces lusiniens.

Notons que la formule $(P_t f)' = P_t(f')$ semble inhabituelle, ce qui est dû à ce que dans la partie droite, P_t est appliqué sur l'espace $E \times E$ puisque notre différentielle est définie sur $E \times E$.

Les résultats de ce travail ont été partiellement résumés dans des notes aux Comptes Rendus de Paris ([F2], [FLP5], [FLP7]).

I. RAPPELS DIVERS ET DÉFINITIONS

Une fonction f sur un espace localement convexe E est cylindrique si elle est de la forme $f = \varphi \circ \pi$ où π est linéaire continue de rang fini. Si l'on peut prendre φ à support compact, on dit que f est à base compacte.

Enfin f est dite élémentaire si l'on peut prendre φ de classe C^∞ à support compact.

Si μ est une mesure de Radon bornée sur la tribu borélienne de E, les fonctions élémentaires sont partout denses dans $\mathcal{L}^1(E,\mu)$.

Dans toute la suite, μ désigne une mesure de Radon gaussienne centrée sur un espace localement convexe E.

Si f est élémentaire, on pose

$$f'(x,y) = \mathrm{Lim}_{t\to 0}(f(x+ty) - f(x))/t$$

qui est définie sur $E \times E$ et est linéaire en y. Puis, pour $p \in]1,+\infty[$,

$$\mathrm{var}_p(f) = \int |f'(x,y)|^p d\mu(x)d\mu(y)\,; \qquad e_p(f) = \mathrm{var}_p(f) + \int |f|^p d\mu.$$

On note $W^{1p}(E,\mu)$ le complété abstrait des fonctions élémentaires pour la norme $\|f\|_{1p} = (e_p(f))^{1/p}$. On note aussi $N_p(f)$ la norme usuelle de f dans L^p.

1. Propriétés.

a) *les contractions opèrent sur* $W^{1p}(E,\mu)$ *;*

b) *l'application* $f \to ((x,y) \to f'(x,y))$ *se prolonge par continuité sur* $W^{1p}(E,\mu)$ *à valeurs dans* $L^p(E\times E,\mu\otimes\mu)$ *;*

c) $\mathrm{var}_p(|f|) = \mathrm{var}_p(f)$ *(caractère local);*

d) *si* f *est constante sur* $A \subset E$, *on a* $f'(x,.) = 0$ *pour* μ*-presque tout* $x \in A$*;*

e) $W^{1p}(E,\mu)$ *s'injecte canoniquement dans* $L^p(E,\mu)$.

On obtient les propriétés a) à d) en adaptant les démonstrations des propositions 26 et 29 de [FLP6]. La propriété e) nécessite une démonstration spéciale : si f,φ et ψ sont élémentaires, on a la relation

$$\begin{aligned}\iint &\varphi(x)\psi(y)f'(x,y)d\mu(x)d\mu(y)\\ &= \iint f(x)[\varphi(x)\psi'(y,x) - \psi(y)\varphi'(x,y)]d\mu(x)d\mu(y)\end{aligned}$$

(intégration par parties en dimension finie). Soit f_n une suite de fonctions élémentaires, de Cauchy dans $W^{1p}(E,\mu)$, et tendant vers 0 dans $L^p(E,\mu)$. La formule montre que la limite de la suite f_n' dans $L^p(E\times E,\mu\otimes\mu)$ est nécessairement 0. Par suite $e_p(f_n)$ tend vers 0, et f_n tend vers 0 dans $W^{1p}(E,\mu)$, d'où le e).

On identifiera $W^{1p}(E,\mu)$ à son image canonique dans $L^p(E,\mu)$.

Par récurrence, on définit les espaces $W^{rp}(E,\mu)$, $r \in N$, $p > 1$:

f appartient à $W^{r+1,p}(E,\mu)$ si et seulement si $f \in W^{1p}(E,\mu)$ et $f' \in W^{r,p}(E \times E, \mu \otimes \mu)$.

On pose alors

$$\|f\|^p_{r+1,p} = \|f'\|^p_{r,p} + \int |f|^p d\mu.$$

Il est clair que les $W^{rp}(E,\mu)$ sont des espaces de Banach.

L'espace H' (premier chaos de Wiener) est l'adhérence de E' dans $L^2(\mu)$. On a $N_p(f) = a_p\|f\|_{H'}$ pour toute $f \in H'$, avec

(0) $$a_p^p = 2^{p/2}\Gamma((p+1)/2)/\sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad b_p = a_q$$

où q est l'exposant conjugué de p. Le dual H de H' est l'espace de Cameron-Martin.

Le semi-groupe P_t d'Ornstein-Uhlenbeck associé à μ peut être défini par la formule de Mehler (*cf.* [Me1], pp. 181, [Me2] et [Su]) :

(1) $$P_tf(x) = \int f(xc_t + ys_t)d\mu(y)$$

pour f borélienne ≥ 0, avec $c_t = e^{-t}$, $s_t = \sqrt{(1-c_t^2)}$. La relation $c_t^2+s_t^2 = 1$ montre que pour toute f μ-mesurable, $f(xc_t + ys_t)$ est $\mu\otimes\mu$-mesurable et de même loi que f, de sorte que le théorème de Fubini s'applique au cas $f \geq 0$ où $f \in \mathcal{L}^1(E,\mu)$, et P_tf est μ-mesurable. Nous verrons (th. [5]) que P_tf est en fait beaucoup plus régulière.

2. THÉORÈME (*cf.* [Su]). — *Pour toutes $f \in L^p(E,\mu)$ et $t > 0$, on a $P_tf \in W^{rp}(E,\mu)$ pour tout r. De plus P_t opère en semi-groupe fortement continu de contractions de $W^{rp}(E,\mu)$.*

Démonstration. — On cherche d'abord une constante K telle que

$$\|P_tf\|_{1p} \leq KN_p(f).$$

On a pour f élémentaire :

(2) $$(P_tf)'(x,u) = c_t \int f'(xc_t + ys_t, u)d\mu(y)$$

l'intégration par parties fournit (avec $k_t = c_t/s_t$)

(3)

$$(P_tf)'(x,u) = k_t \int \langle y,u\rangle f(xc_t + ys_t)d\mu(y) = k_t \int \widetilde{u}(y)f(xc_t + ys_t)d\mu(y)$$

où $\widetilde{u} \in H'$ est associé à $u \in H$ par le théorème de représentation de Riesz,

$$|(P_t f)'(x,u)| \leq k_t b_p \|\widetilde{u}\|_{H'} \left[P_t(|f|^p)\right](x)^{1/p} \leq k_t b_p \|u\|_H \left[P_t(|f|^p)\right](x)^{1/p}$$

puis

$$\|(P_t f)'(x)\|_{H'} \leq k_t b_p \left[P_t(|f|^p\right](x)^{1/p}$$

soit

$$\int |(P_t f)'(x,y)|^p d\mu(y) \leq (a_p b_p c_t/s_t)^p P_t(|f|^p)(x)$$

et le résultat par intégration en x (a_p et b_p sont définies plus haut).

Ainsi P_t envoie L^p dans W^{1p}. Notons $\widetilde{P}_t$ le semi-groupe associé à la mesure $\mu \otimes \mu$, on à la relation (évidente) $\widetilde{P}_t(f')(x,u) = (P_t f)'(x,u)$ d'où l'on déduit aussitôt par récurrence sur r que $P_t f$ appartient à $W^{rp}(E,\mu)$.

P_t contracte $W^{rp}(E,\mu)$: c'est évident pour $r = 0$, d'où le résultat par récurrence à l'aide de la relation évidente (mais inhabituelle)

$$(P_t f)' = \widetilde{P}_t(f').$$

Soit $f \in W^{rp}(E,\mu)$, quand $t \to 0$, $P_t f$ et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre r convergent dans $L^p(E,\mu)$, d'où la continuité forte.

II. PRINCIPE DES QUASI-NORMES

3. DÉFINITIONS. — a) *Soit f une fonction ≥ 0 s.c.i. sur E.*

On pose

$$c_{rp}(f) = \mathrm{Inf}\{\|h\|_{rp}/h \geq f,\ h \in W^{rp}(E,\mu)\} \leq +\infty.$$

La convexité uniforme de $W^{rp}(E,\mu)$ assure que la borne inférieure est atteinte dès qu'elle est finie. Comme μ est de Radon, on voit alors aisément que $c_{rp}(\sup_\alpha f_\alpha) = \sup_\alpha c_{rp}(f_\alpha)$ pour tout ensemble filtrant croissant (f_α) de fonctions s.c.i. ≥ 0. Posant alors

$$c_{rp}(g) = \mathrm{Inf}\{c_{rp}(f)/f \text{ s.c.i. } \geq |g|\}$$

pour toute fonction $g : E \to \overline{R}$, on constate que c_{rp} vérifie l'inégalité de convexité dénombrable.

b) *On dit que A est c_{rp}-polaire si $c_{rp}(A) = 0$, que A est p-mince si A est c_{rp}-polaire pour tout $r \geq 0$, et mince s'il est p-mince pour tout $p > 1$.*

Une propriété a lieu c_{rp}-quasi-partout (resp. à peu près partout) si elle a lieu hors d'un ensemble c_{rp}-polaire (resp. mince).

c) *On note $\mathcal{L}^1(E, c_{rp})$ l'adhérence des fonctions cylindriques continues bornées avec la semi-norme c_{rp}.*

L'espace $L^1(E, c_{rp})$ est le quotient de $\mathcal{L}^1(E, c_{rp})$ par le sous-espace des fonctions nulles c_{rp}-quasi-partout. C'est un espace de Banach.

d) *Un ensemble est c_{rp}-quasi-ouvert s'il est de la forme $\{f > 0\}$ avec $f \in \mathcal{L}^1(E, c_{rp})$. Une fonction à valeurs dans un espace topologique est c_{rp}-quasi-continue (resp. à peu près continue) si les ensembles $\{f \in G\}$ pour G ouvert sont c_{rp}-quasi-ouverts (resp. si elle est c_{rp}-quasi-continue pour tout (r, p)).*

4. *Remarques.* — a) Pour l'étude générale des espaces $\mathcal{L}^1(E, c)$, on pourra se reporter à ([F] et [FLP1]). Ces espaces jouent le rôle d'espaces de fonctions continues, en particulier, leurs duals sont des espaces de mesures. Nous verrons plus loin que $W^{rp}(E, \mu)$ s'injecte canoniquement dans $L^1(E, c_{rp})$.

b) Par définition même, tout élément de $\mathcal{L}^1(E, c_{rp})$ est majoré en module par un élément de $W^{rp}(E, \mu)$.

c) L'application $(r, p) \to c_{rp}$ est croissante en chaque variable. En particulier $c_{op} = N_p \leq c_{rp}$.

d) La mesure μ charge tous les c_{rp}-quasi-ouverts non c_{rp}-polaires : il suffit en effet de recopier la fin de la démonstration de la proposition 31 de [FLP6].

5. THÉORÈME. — *Pour $t > 0$, $p > 1$, $r \geq 0$ et f μ-mesurable ≥ 0, posons*

$$P_t^* f(x) = \int^* f(xc_t + ys_t) d\mu(y)$$

et

$$P_{t*} f(x) = \int_* f(xc_t + ys_t) d\mu(y)$$

alors on a $P_t^* f = P_{t*} f$ c_{rp}-quasi-partout. De plus $c_{rp}(P_t f) \leq K N_p(f)$, où K ne dépend que de (t, p, r). Enfin, si $f \in L^p(E, \mu)$, la fonction $P_t f$ est définie hors d'un ensemble p-mince et appartient à $\cap_r \mathcal{L}^1(E, c_{rp})$.

Démonstration. — Si f est élémentaire, on a

$$c_{rp}(P_t f) \leq \|P_t |f|\|_{rp} \leq K N_p(f)$$

où K ne dépend que de (t, p, r). Par densité, ce résultat s'étend à toute fonction cylindriquement mesurable et bornée. Il est clair que chaque mesure $\varepsilon_x P_t$ est de Radon, de sorte que l'inégalité s'étend au cas où f est borélienne bornée. Soit $f \geq 0$, f bornée nulle μ-presque partout, et g borélienne bornée $\geq f$, $\int g d\mu = 0$. On a $P_t^* f \leq P_t g$, et $c_{rp}(P_t g) = 0$, donc $P_t^* f$ est nulle c_{rp}-quasi-partout. Si f est ≥ 0, soit $f_n = \inf(n, f)$. On a $c_{rp}(P_t f_n - P_t f_m) \leq K N_p(f_n - f_m)$. Alors si $N_p(f) < \infty$, la suite $P_t f_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(E, c_{rp})$, de sorte que sa limite simple $P_t f$ appartient à $\mathcal{L}^1(E, c_{rp})$. Par suite l'ensemble $\{P_t f = +\infty\}$ est p-mince.

Si f est seulement ≥ 0, $P_t f$ est c_{rp}-quasi-s.c.i. pour tout (r, p).

Si $f \in L^p(E, \mu)$, on applique ce qui précède à f^+ et f^-.

6. THÉORÈME (principe des quasi-normes). — *Soit q une fonction sous-linéaire ≥ 0, μ-mesurable et finie μ-presque partout. Alors q appartient à $W^{1p}(E, \mu)$ pour tout $p > 1$. De plus q appartient à $\mathcal{L}^1(E, c_{rp})$ pour tout (r, p). Ces propriétés s'étendent à toute fonction f μ-mesurable finie et q-lipschitzienne sur le sous-espace $\{q < +\infty\}$.*

Démonstration. — On applique le résultat de Fernique ([Fr], [Fr2]) à la fonction $q(x) + q(-x)$, donc $q \in \cap_p L^p(\mu)$. Alors $P_t q \in \cap_{rp} \mathcal{L}^1(c_{rp})$ par le théorème 5. On a $P_t^* q(x) = \int^* q(xc_t + ys_t) d\mu(y) \leq c_t q(x) + s_t \int q d\mu$ pour tout x, et de même : $c_t q(x) \leq q(xc_t + ys_t) + q(-ys_t)$, donc

$$c_t q(x) \leq P_t^* q(x) + s_t \int q d\mu.$$

On en déduit d'abord que l'ensemble $Z = \{q = +\infty\}$ est mince. Ensuite $|q - e^t P_t'^* q| \leq e^t s_t \int q d\mu$ converge uniformément vers 0 sur $E \setminus Z$ quand t tend vers 0, donc $q \in \cap_{rp} \mathcal{L}^1(E, c_{rp})$.

Par ailleurs, reprenant la démonstration du théorème 2, on a par densité pour $u \in H$ et pour μ-presque tout x

$$(P_t q)'(x, u) = k_t \int \langle y, u \rangle \left[q(xc_t + ys_t) - q(xc_t) \right] d\mu(y) \tag{4}$$

donc

$$|(P_t q)'(x, u)| \leq c_t a_p \|u\|_H N_p(q)$$

puis

$$\int |(P_t q)'(x, y)|^p d\mu(y) \leq (a_p b_p c_t)^p \int q^p d\mu$$

et

$$N_p((P_t q)') \leq a_p b_p c_t N_p(q).$$

Quand t tend vers 0, on voit que $P_t q$ a une valeur d'adhérence faible dans W^{1p}, nécessairement égale à q, et $q \in W^{1p}(E,\mu)$.

Soit f q-lipschitzienne de rapport α, on a

$$|f(xc_t + ys_t) - f(xc_t)| \leq \alpha q(ys_t)$$

pour x et $y \in E_0 = \{q < +\infty\}$, donc

$$|e^t P_t f(x) - f(x)| \leq \alpha e^t s_t \int q d\mu.$$

Par suite $P_t f$ converge vers f dans $\cap_{rp} \mathcal{L}^1(E, c_{rp})$. On a aussi

$$N_p((P_t f)') \leq \alpha a_p a_q c_t N_p(q),$$

d'où l'on tire comme plus haut $f \in \cap_p W^{1p}(E,\mu)$.

Remarques. — a) Il est amusant de noter qu'en dimension finie cela donne une nouvelle démonstration du résultat selon lequel une semi-norme λ-mesurable sur R^n est toujours continue (λ mesure de Lebesgue).

b) En particulier les translatées μ-mesurables de q sont q-lipschitziennes.

7. LEMME (loi de tout ou rien, *cf.* [Fr2]). — *Soit F un sous-espace μ-mesurable de E. Alors $\mu(F) = 0$ ou $\mu(F) = 1$.*

Démonstration. — Soit φ l'indicatrice de F. Calculons $P_t\varphi$

$$P_t\varphi(x) = \int \varphi(xc_t + ys_t) d\mu(y)$$

pour μ-presque tout x. Si $x \in F$, $\varphi(xc_t + ys_t) = 1$ ou 0 suivant que $y \in F$ ou non. Par suite $P_t\varphi(x) = \mu(F)$ pour presque tout $x \in F$, soit $\varphi P_t \varphi = \mu(F)\varphi$. En faisant tendre t vers 0, on a (continuité du semi-groupe) $\varphi = \mu(F)\varphi$ μ-presque partout, donc $\mu(F) = 0$ ou 1.

COROLLAIRE. — *Soit q une fonction sous-linéaire ≥ 0, μ-mesurable et telle que $q(x) = q(-x)$. Alors on a $q < +\infty$ μ-presque partout ou $q = +\infty$ μ-presque partout.*

Démonstration. — On applique le lemme 7 au sous-espace

$$F = \{q < +\infty\}.$$

8. THÉORÈME. — *Supposons qu'il existe un convexe compact équilibré K tel que $\mu(K) > 0$. Alors il existe une fonction q sous-linéaire s.c.i.*

$\leq +\infty$, $q \in \cap_{r,p}\mathcal{L}^1(E, c_{rp})$, *telle que les ensembles* $\{q \leq t\}$ *soient compacts dans* E, *et telle que pour tout* (r,p) *la* c_{rp}*-capacité de l'ouvert* $G_n = \{q > n\}$ *tende vers 0 quand* $n \to +\infty$.

De plus, $H \cap E$ *est dense dans* H.

Démonstration. — Soit q la jauge de K. L'hypothèse et le corollaire entraînent que q est finie μ-presque partout. D'après le principe des quasi-normes, la fonction $q \in \cap_{rp}\mathcal{L}^1(c_{rp})$ et $c_{rp}(G_n)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Il reste à prouver que $H \cap E$ est dense dans H.

On a $E' \subset H' \subset L^2$, et par transposition $L^2 \to H \to E'^*$. Rappelons (*cf.* [FLP6], prop. 5 et rem. 6), que la composée $i : L^2 \to E'^*$ est en fait à valeurs dans le complété $\widehat{E}$ de E, et est compacte. Soit $u \in L^2$, à support dans l'un des $\{q \leq t\}$, la résultante de la mesure $u\mu$ appartient à E. Toute $u \in L^2(E, \mu)$, est limite d'une suite de telles fonctions, donc $i(u)$ appartient à l'adhérence de $H \cap E$ dans H.

Remarque. — En particulier si E est quasi-complet, l'enveloppe convexe fermée d'un compact est compacte, de sorte que le théorème 8 s'applique puisque μ est une mesure de Radon, et en ce cas, on a même $H \subset E$.

9. THÉORÈME. — *Soit* μ *une mesure de Radon gaussienne centrée sur un espace localement convexe* E. *Alors chaque* c_{rp} *est tendue sur les compacts.*

Démonstration. — On applique le théorème 8 au complété $\widehat{E}$ de E. Par ailleurs, la fonction $p(x) = 0$ pour $x \in E$, $+\infty$ pour $x \in \widehat{E} \backslash E$ est sous-linéaire et μ-mesurable. Appliquons-lui le principe des quasi-normes : l'ensemble $\widehat{E} \backslash E = \{p = +\infty\}$ est mince. Pour tout (r,p), et tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un ouvert ω de $\widehat{E}$ tel que $c_{rp}(\omega) < \varepsilon$, et contenant $\widehat{E} \backslash E$. On a alors $c_{rp}(\omega \cup G_n) < 2\varepsilon$ pour n assez grand, où les G_n sont les ouverts du théorème 8 relatif à $\widehat{E}$. Or le complémentaire de $\omega \cup G_n$ dans $\widehat{E}$ est compact et inclus dans E.

COROLLAIRE. — *Les fonctions continues bornées appartiennent à* $\mathcal{L}^1(E, c_{rp})$.

10. *Applications.* — a) (loi du logarithme itéré, *cf.* [Fu], [T]). Soit E l'espace des trajectoires continues à valeurs dans R, muni de sa topologie naturelle et de la mesure de Wiener μ. Soit X_t la coordonnée d'indice t.

Posons $q_t(\omega) = \mathrm{Sup}_{s\leq t} X_s(\omega)/\sqrt{(2s \operatorname{Log}\operatorname{Log}(1/s))}$. La fonction

$$f = \mathrm{Inf}_t\, q_t$$

vaut 1 μ-presque partout (théorème de Khintchine). On en déduit que q_t est finie μ-presque partout, ce qui permet d'appliquer le principe des quasi-normes, de sorte que f est à peu près continue, donc vaut 1 hors d'un ensemble mince.

b) Soit q_n une suite de semi-normes ($\leq +\infty$). Posons $\underline{q} = \mathrm{Lim\,inf}_n\, q_n$ et $\overline{q} = \mathrm{Lim\,sup}_n\, q_n$. Alors si l'on a $\underline{q} = \overline{q} < +\infty$ μ-presque partout, on a aussi $\underline{q} = \overline{q} < +\infty$ à peu près partout, et $\overline{q}$ est à peu près continue. En effet, on sait déjà que $\overline{q}$ est à peu près continue d'après le théorème ainsi que $q' = \mathrm{Sup}_n\, q_n$. Pour $t > 0$ on a (*cf.* démonstration du théorème 6) $P_t\overline{q} = P_t\underline{q} \leq \mathrm{Lim\,inf}_n\, P_t q_n \leq c_t\underline{q} + s_t N_1(q')$ à peu près partout. En faisant tendre t vers 0, on trouve $\overline{q} \leq \underline{q}$ à peu près partout.

c) (variation quadratique, *cf.* [T]). Mêmes hypothèses qu'au a). On fixe $a > 0$, on considère la suite σ_n des partitions dyadiques de $[0, a]$. Soit $q_n(\omega)$ la racine carrée de la variation quadratique de $X_t(\omega)$ sur σ_n. La suite q_n converge μ-presque partout vers $\sqrt{a}$ (théorème de Lévy). D'après le b) cette suite q_n converge à peu près partout vers $\sqrt{a}$.

d) (précise le résultat de Fernique, ([Fr])). Soit q sous-linéaire μ-mesurable finie μ-presque partout, et soit $p > 0$. Soit $\beta > 0$ tel que $\exp(\beta q^2) \in L^p(\mu)$. Pour α suffisamment petit, et $f = \exp(\alpha q^2)$, on a

$$f'(x, u) = 2\alpha q(x) q'(x, u) f(x) \in L^p(\mu \otimes \mu),$$

de sorte que $f \in W^{1p}(E, \mu)$. Ensuite, on obtient $f \leq P_t[\exp(\alpha e^{2t} q^2)]$, de sorte que pour α assez petit, f est c_{rp}-quasi-continue et majorée par un élément de $\mathcal{L}^1(E, c_{rp})$ donc $f \in \cap_r \mathcal{L}^1(E, c_{rp})$ (*cf.* [F]).

e) Soient S l'espace de L. Schwartz, S' son dual (distributions tempérées), et μ la mesure gaussienne centrée sur S' telle que

$$\int \langle \varphi, T\rangle^2 d\mu(T) = Q(\varphi)$$

où Q est une forme quadratique continue sur S (théorème de Minlos). Alors les c_{rp} sont tendues sur les compacts de S'. En particulier, cela s'applique au cas où μ est le bruit blanc, *i.e.* où $Q(\varphi) = \int \varphi(x)^2 dx$.

f) Si E est quasi-complet, considérons la semi-norme q construite au théorème 8, et soit φ une fonction de classe C^∞ à support compact dans R. Il est clair que la fonction $\varphi \circ P_t q$ appartient à $\cap_{r,p} W^{r,p}(E, \mu)$ pour tout $t \neq 0$, et est à support compact.

III. REPRÉSENTANTS LINÉAIRES

Rappelons ([FLP6], th. 38) que tout élément de H' coïncide μ-presque partout avec une forme linéaire μ-mesurable et réciproquement. On a alors

11. THÉORÈME. — *Toute forme linéaire f μ-mesurable est à peu près continue. De plus, la restriction de f à $H \cap E$ est continue, et $\langle f, u \rangle_H = f(u)$ pour tout $u \in H$.*

Démonstration. — On applique le principe des quasi-normes aux fonctions f^+ et f^-, de sorte que f est à peu près continue. Pour le reste, on invoque les démonstrations des théorèmes 22 et 38 de [FLP6].

Le théorème suivant montre l'invariance des notions quasi-topologiques.

12. THÉORÈME. — *On suppose E lusinien de dimension infinie. Si le support de μ est E, il existe une application linéaire continue injective $\pi : E \to R^N$, telle que $\nu = \pi(\mu)$ soit la mesure gaussienne canonique de R^N, et une application linéaire $\rho : R^N \to E$, ρ à peu près continue, telles que :*

$$\rho \circ \pi = \mathrm{Id}_E \text{ partout sur } E, \text{ et } \pi \circ \rho = \mathrm{Id}_{R^N} \text{ à peu près partout sur } R^N.$$

De plus, si $H \subset E$, ρ et π échangent continûment H et ℓ^2.

Démonstration. — Considérons l'application π de l'appendice II. L'image $\pi(E)$ est un sous-espace vectoriel borélien de R^N portant $\nu = \pi(\mu)$. $R^N \backslash \pi(E)$ est ν-négligeable, donc la fonction valant 0 sur $\pi(E)$ et $+\infty$ ailleurs vaut 0 à peu près partout (principe des quasi-normes) et $R^N \backslash \pi(E)$ est mince. Posons donc $\rho(y) = x$ pour $y = \pi(x)$: ρ est définie sur $\pi(E)$. On prolonge ρ à l'aide d'une base de Hamel. Soit K un compact de E tel que $c_{rp}(E \backslash K) < \varepsilon$: π est un homéomorphisme de K sur $\pi(K)$, donc ρ est c_{rp}-quasi-continue. Enfin π et ρ échangent les c_{rp}-capacités, et évidemment H et ℓ^2.

Nous dirons plus généralement que $\pi : (E, \mu) \to (F, \nu)$ est un *quasi-isomorphisme* si π est linéaire à peu près continue, $\nu = \pi(\mu)$ et s'il existe $\rho : (F, \nu) \to (E, \mu)$ linéaire à peu près continue telles que $\rho \circ \pi = \mathrm{Id}_E$ à peu près partout sur E, et $\pi \circ \rho = \mathrm{Id}_F$ à peu près partout sur F.

13. THÉORÈME. — *Soit B un espace lusinien, et soit π une application linéaire μ-mesurable de E dans B. Alors π est à peu près continue,*

la restriction de π à H_E est continue à valeurs dans H_B (si $H_E \subset E$), et

$$\pi(u) = \int k_u \pi d\mu$$

(intégrale faible) pour $u \in H$, $(k_u(x) = \exp(\langle u, x\rangle - |u|^2/2))$.

Démonstration. — Soit σ l'image de μ par π. L'hypothèse sur π entraîne que σ est une mesure gaussienne centrée sur B. On a alors $\int |\pi|^2 d\mu = \int |x|^2 d\sigma(x) < +\infty$, pour toute semi-norme $|\cdot|$ continue sur B. C'est terminé si H_B est de dimension finie. On peut remplacer B par le support de σ, donc supposer que $B = \text{support}(\sigma)$. Soit $j : B \to R^N$ définie au théorème 12, et soit ρ l'application quasi-inverse. Il est clair que $j \circ \pi$ est μ-mesurable, ses coordonnées sont à peu près continues, donc $j \circ \pi$ est à peu près continue sur E. Mais alors $\rho \circ j \circ \pi$ l'est aussi, mais $\rho \circ j = \mathrm{Id}_E$ à peu près partout, donc π est à peu près continue. La relation $\pi(u) = \int k_u \pi d\mu$ se voit scalairement, d'où la continuité de π sur H.

14. THÉORÈME. — *Soient E lusinien, μ gaussienne centrée sur E, et soit (h_n) une suite de formes linéaires μ-mesurables formant une base orthonormale de H' supposé de dimension infinie. Alors l'application*

$$\pi = (h_n)_{n \in N}$$

est un quasi-isomorphisme de E sur R^N muni de la mesure gaussienne canonique ν.

Démonstration. — Soit (e_n) la base de H duale de (h_n). Considérons la suite définie par $x_n = \Sigma_{p \le n} h_p(x) e_p$. Notons $\widetilde{\pi}$ l'injection linéaire de l'appendice II, et soit E_0 le sous-espace des $x \in E$ tels que $\pi(x_n)$ converge vers $\pi(x)$. Il est clair que les fonctions h_n séparent les points de E_0, de sorte que π est une injection de E_0 dans R^N. Par ailleurs, E_0 porte μ, donc $E \backslash E_0$ est mince (principe des quasi-normes). Il existe un sous-espace F borélien à complémentaire mince sur lequel π est borélienne, comme il résulte de la démonstration du théorème 38 de [FLP6] et du principe des quasi-normes. Sur $F_0 = F \cap E_0$, π est borélienne et injective. Alors $R_0 = \pi(F_0)$ est un sous-espace borélien de R^N qui porte ν, et est donc à complémentaire mince (principe des quasi-normes). On définit alors l'application ρ en prenant π^{-1} sur R_0, et en la prolongeant arbitrairement à R^N à l'aide d'une base de Hamel. L'application $\rho : R^N \to E$ est c_{rp}-quasi-continue pour tout (r, p) grâce au théorème 13.

15. *Applications.* — a) (séries de Fourier-Wiener). Dans le cas où E est un Banach séparable de dimension infinie, et μ gaussienne centrée sur

E qui n'est portée par aucun sous-espace de dimension finie, considérons $(e_n)_{n\in N}$ une base orthonormale de H, et posons pour $x \in R^N$,

$$\rho_n(x) = \Sigma_{1\leq k\leq n} x_k e_k \in E.$$

La suite ρ_n est une martingale vectorielle qui converge ν-presque partout (*cf.* [N] p. 105) vers l'application ρ du théorème 14. Alors la fonction $q(x) = \mathrm{Sup}_n\,|\rho_n(x)|$ est finie à peu près partout sur R^N, la suite ρ_n converge à peu près partout vers ρ, et la suite $|\rho_n - \rho|$ converge vers 0 dans $\mathcal{L}^1(E, c_{rp})$ pour tout (r,p).

b) (bruit blanc). On prend pour E l'espace des distributions tempérées sur $X = [0, +\infty[$, avec la topologie forte ou faible, et μ la mesure gaussienne centrée de covariance $\|\varphi\|^2$ (norme de φ dans $\mathsf{L}^2(X, dx)$ avec $\varphi \in S(X)$, espace de Schwartz). Soit $f \in L^2(X, dx)$, et soit $\check{f}$ l'élément de H' défini par $\langle \check{f}, \omega\rangle = \int f(x)\omega(x)dx$ pour $\omega \in H$. Notons $\tilde{f}$ un représentant linéaire sur E défini au théorème 11. En particulier, si f_t est l'indicatrice de $[0,t]$, il est clair que $\tilde{f}_t$ est un mouvement brownien issu de 0, et $\omega \to (\tilde{f}_t(\omega))_{t>0}$ est un quasi-isomorphisme de E sur $(C([0, +\infty[), \eta)$ où η est la mesure de Wiener. On pourrait généraliser cela à plusieurs dimensions.

c) inversement, d'après la loi du logarithme itéré (*cf.* n° 10), à peu près toute trajectoire brownienne appartient à $S'(R)$. On voit ainsi que l'étude du bruit blanc équivaut canoniquement à celle de l'espace de Wiener.

d) On reprend l'exemple 10.d). Soit V^α la puissance fractionnaire du noyau bessélien (donc $V^{-1} = I - \Delta$). On voit que $T \to T * V^\alpha$ (défini μ-à peu près partout sur S') est un quasi-isomorphisme de (S', μ) sur (S', μ_α) où μ (resp. μ_α) est la mesure du bruit blanc (resp. la mesure de covariance $Q(\varphi) = \int (V^{-\alpha}\varphi)^2 dx$).

e) *pseudo-isométries.* Supposons E lusinien, μ de dimension infinie, et soit r une isométrie de H sur lui-même. Considérons (e_n) une base orthonormale de H, et (ε_n) la base image par r. Soit π_e (resp. π_ε) le quasi-isomorphisme de E sur R^N du théorème 14, et ρ_ε le quasi-isomorphisme inverse. Il est clair que la restriction de $\rho_\varepsilon \circ \pi_e$ à H vaut r. On dit que $\check{r} = \rho_\varepsilon \circ \pi_e$ est la "pseudo-isométrie" de base r. On voit que $\check{r}$ conserve μ, $W^{rp}(E, \mu)$, c_{rp} et toutes les notions quasi-topologiques. Inversement, on peut montrer que tout quasi-isomorphisme π de E sur lui-même tel que $\mu = \pi(\mu)$ est une pseudo-isométrie.

Le résultat suivant est dû à Takeda dans le cas de la mesure de Wiener (communication orale) :

16. PROPOSITION. — *Si E est lusinien, $E \supset H$, et* $\dim H = +\infty$,

H est mince.

Démonstration. — Il suffit évidemment de montrer que la boule unité fermée K de H est mince. Soit θ la mesure d'équilibre de K relative à $W^{rp}(E,\mu)$ (*cf.* [Su]), et soit f la fonction d'équilibre de K. Il est clair que f est invariante par toute pseudo-isométrie. On en déduit que θ aussi est invariante par pseudo-isométrie. Mais θ est portée par K, de sorte que θ est une mesure sur H invariante par les isométries, θ est donc proportionnelle à la mesure de Dirac ε_0, puis $\theta = 0$ puisqu'elle ne charge pas les c_{rp}-polaires. Alors $c_{rp}(K) = 0$ pour tout (r,p).

Remarque. — Si $H \not\subset E$, on remplace E par l'image de $E + H$ dans le complété $\widehat{E}$, donc $H \cap E$ est mince.

IV. REPRÉSENTANTS PRIVILÉGIÉS, FONCTIONS VECTORIELLES

Le problème se pose naturellement de savoir si l'espace $W^{rp}(E,\mu)$ se plonge dans $L^1(c_{rp})$. C'est presque évident pour $p = 2$, ce qui permettrait déjà d'obtenir des résultats analogues à ceux de [FLP6] (où l'on se limitait au cas $p = 2$, $r = 1$). Pour $p \neq 2$, nous appliquerons le théorème de Meyer sur les équivalences de normes.

17. THÉORÈME. — *Toute $f \in W^{rp}(E,\mu)$ est égale μ-presque partout à une fonction $\widetilde{f}$ quasi-continue unique aux c_{rp}-polaires près. De plus l'application $f \to \widetilde{f}$ est une injection continue de $W^{rp}(E,\mu)$ dans $L^1(E,c_{rp})$, et $\widetilde{f}$ est l'unique (classe de) fonction quasi-continue valant f μ-presque partout.*

Démonstration. — Pour $r = 1$, la démonstration est identique à celle de [FLP6], elle résulte de l'inégalité $c_{1p}(\varphi) \leq \|\varphi\|_{1p}$.

Nous montrons maintenant l'existence d'une constante k telle que
$$c_{rp}(\varphi) \leq k\|\varphi\|_{rp}.$$
Soit U le potentiel d'ordre $1/2$ du semi-groupe $e^{-t}P_t$
$$Uf(x) = 1/\sqrt{\pi}\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}P_t f(x)dt$$
(*cf.* appendice I). U^r est un isomorphisme de $L^p(E,\mu)$ sur $W^{rp}(E,\mu)$ (théorème de Meyer). Soit φ une fonction cylindrique suffisamment régulière. On a $\varphi = U^r f$ avec $f \in L^p(\mu)$, donc $|\varphi| \leq U^r|f|$, d'où
$$c_{rp}(\varphi) \leq c_{rp}(U^r|f|) \leq k_1 N_p(f) \leq k\|\varphi\|_{rp}.$$

L'injectivité résulte de ce que les ensembles c_{rp}-polaires sont μ-négligeables. L'unicité de $\tilde{f}$ résulte de la remarque 4.c).

18. APPLICATION (*cf.* aussi [Su]). — *Soit $\widetilde{W}^{rp}(E,\mu)$ l'image de $W^{rp}(E,\mu)$ dans $\mathcal{L}^1(E,c_{rp})$. Si T est une forme linéaire ≥ 0 sur $W^{rp}(E,\mu)$, il existe une unique mesure de Radon $\eta \geq 0$ sur E ayant les propriétés suivantes :*

a) $\widetilde{W}^{rp}(E,\mu) \subset \mathcal{L}^1(E,c_{rp}) \subset \mathcal{L}^1(E,\eta)$

b) $\int \varphi d\eta = T(\varphi)$ *pour toute* $\varphi \in \widetilde{W}^{rp}(E,\mu)$.

On a un résultat analogue en supposant que T est une forme linéaire continue ≥ 0 sur $D_\infty = \cap_{r,p} W^{rp}(E,\mu)$.

Démonstration. — D'après le théorème de Hahn-Banach-Choquet ([Me3], th. T3, p 271), et la remarque 4,a), il existe une forme linéaire λ sur $L^1(c_{rp})$ vérifiant $\lambda(\varphi) \leq T(f)$ pour tous $\varphi \in L^1(c_{rp})$, $f \in W^{rp}(E,\mu)$, $f \geq \varphi$. On en déduit que λ est une forme linéaire ≥ 0 donc continue sur $L^1(c_{rp})$, et que λ prolonge T. De plus, il existe une mesure η unique sur la tribu cylindrique ne chargeant pas les c_{rp}-polaires et vérifiant $\mathcal{L}^1(c_{rp}) \subset \mathcal{L}^1(\eta)$ et $\lambda(\varphi) = \int \varphi d\eta$ pour $\varphi \in \mathcal{L}^1(c_{rp})$. Le prolongement de Radon existe car c_{rp} est tendue sur les compacts. Il reste à voir l'unicité de η sous les conditions a) et b). Pour $\varphi \in \mathcal{L}^1(c_{rp})$, $P_t\varphi$ appartient à $\widetilde{W}^{rp}(E,\mu)$, d'où l'égalité $\int \varphi d\eta = \mathrm{Lim}_{t\to 0} T(P_t\varphi)$.

Soit maintenant T une forme linéaire continue ≥ 0 sur D_∞. Il existe un couple (r,p) tel que T soit continue pour la topologie de $W^{rp}(E,\mu)$. Notons encore T le prolongement continu à W^{rp}, l'égalité $T(f) = \mathrm{Lim}_{t\to 0} T(P_t f)$ montre que T est ≥ 0 sur W^{rp}, et nous ramène au cas précédent. L'unicité de η se démontre de la même manière.

19. DÉFINITION. — *Soit B un espace localement convexe métrisable. On note $\mathcal{L}^1(E,c_{rp},B)$ l'ensemble des $f : E \to B$ ayant les propriétés suivantes :*

a) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $c_{rp}(E\backslash K) < \varepsilon$ et que f soit continue sur K.*

b) *pour toute semi-norme continue p sur B, $p \circ f$ appartient à $\mathcal{L}^1(E,c_{rp})$.*

Si B est normé, on pose $c_{rp}(f) = c_{rp}(|f|)$, en général on définit de même une famille de semi-normes.

On définit alors facilement les espaces $\mathcal{L}^1(E, c_{rp}, B)$ et $L^1(E, c_{rp}, B)$.

20. DÉFINITION. — *Soit B un espace localement convexe métrisable. On note $W^{rp}(E,\mu,B)$ l'espace des $f \in L^p(E,\mu,B)$ telles qu'il existe*

$$g \in W^{r-1,p}(E \times E, \mu \otimes \mu, B)$$

vérifiant (avec la convention $W^{0p} = L^p$) :

$$\textit{pour toute } \varphi \in B', \qquad \varphi \circ f \in W^{rp}(E,\mu) \text{ et } (\varphi \circ f)' = \varphi \circ g.$$

Il est clair que g est unique (g à image séparable). On pose $g = f'$. Si B est un Banach de norme $|\cdot|$, on pose

$$\|f\|_{rp}^p = N_p(f)^p + \|f'\|_{r-1,p}^p$$

où la norme de f' est prise sur $(E \times E, \mu \otimes \mu)$. $W^{rp}(E,\mu,B)$ est un espace de Banach. Si B est seulement métrisable, on définit pareillement des semi-normes qui font de $W^{rp}(E,\mu,B)$ un espace métrisable.

21. PROPOSITION. — *Si B est un espace de Banach et que*

$$f \in W^{1p}(E,\mu,B),$$

alors $|f|$ appartient à $W^{1p}(E,\mu)$, et $\||f|\|_{1,p} \leq \|f\|_{1,p}$.

Démonstration. — On peut supposer B séparable et recopier la démonstration de [FLP6], proposition 52.

22. THÉORÈME. — *Soit $f \in W^{1,p}(E,\mu,B)$ où B est un Fréchet. Il existe $\tilde{f}$ quasi-continue unique telle que $f = \tilde{f}$ μ-presque partout. De plus, l'application $f \to \tilde{f}$ est continue à valeurs dans $L^1(E, c_{1p}, B)$.*

Démonstration. — Si B est un Banach, on a $c_{1p}(|f|) \leq \|f\|_{1p}$ pour $f \in W^{1p}(E,\mu,B)$. On peut alors répéter la démonstration du théorème 54 de [FLP6].

Il s'agit maintenant d'étudier l'existence de représentants c_{rp}-quasi-continus pour les éléments de $W^{rp}(E,\mu,B)$ pour $r > 1$. On n'a plus le théorème de Meyer à notre disposition comme au théorème 17. Nous devons introduire une classe spéciale d'espaces de Fréchet, (dite p-admissibles), ce qui restreint légèrement les résultats annoncés dans notre note [FLP7].

23. DÉFINITION. — *Un espace de Fréchet B est dit p-admissible si le théorème de Meyer est vrai pour l'espace $W^{1p}(R^N,\sigma,B)$ (σ mesure gaussienne canonique), c'est-à-dire si U est un isomorphisme de $L^p(R^N,\sigma,B)$*

sur $W^{1p}(R^N, \sigma, B)$, *où* U *est le potentiel d'ordre* $1/2$ *du semi-groupe* $e^{-t}P_t$ *(cf. appendice I).*

24. PROPOSITION. — a) *Tous les espaces de dimension finie sont* p*-admissibles.*

b) *Le produit de deux espaces* p*-admissibles est* p*-admissible.*

c) *Un sous-espace fermé d'espace* p*-admissible est* p*-admissible.*

d) *Soit* (T, ξ) *un espace mesuré,* ξ *bornée,* $L^p(T, \xi)$ *est* p*-admissible.*

e) *Les espaces de Hilbert (séparables ou non) sont* p*-admissibles.*

f) *Si* (E, μ) *est gaussien et que* B *soit* p*-admissible, alors* $W^{rp}(E, \mu, B)$ *est* p*-admissible.*

Démonstration. — Le a) est simplement le théorème de Meyer. D'autre part, dans la définition de la p-admissibilité, on peut évidemment remplacer (R^N, σ) par (E, μ) où μ est une mesure gaussienne centrée sur un E arbitraire. Les assertions b) et c) sont évidentes.

Soient (T, ξ) un espace mesuré, B un espace p-admissible, et soit f appartenant à $L^p(R^N, \sigma, L^p(T, \xi, B))$. Il existe $F \in L^p(R^N \times T, \sigma \otimes \xi, B)$ telle que $F(x, .) = f(x)$ pour presque tout x. On a $UF(x,t) = \int f(y,t)U(x,dy)$. La fonction $(Uf)_t = UF(., t)$ appartient à $W^{1p}(R^N, \sigma, B)$ car B est admissible, et on a une équivalence de normes $N_p(f_t) \leq c\|(Uf)_t\|_{1,p} \leq c^2 N_p(f_t)$ où c est indépendant de t puisque U est un isomorphisme. On prend la puissance p-ième et on intègre en t d'où le résultat.

e) Il suffit de le montrer pour l'espace H' associé à (R^N, σ), mais cela résulte de c) et d) puisque H' est un sous-espace fermé de $L^p(R^N, \sigma)$.

Reste le f). Grâce à b) et c), on est ramené à la démonstration de d).

Remarque. — En utilisant les résultats de [Bu], et [Pi2], et en reprenant la démonstration de l'appendice, on voit facilement que les espaces de Banach UMD (propriété d'inconditionalité des différences d'une martingale) sont p-admissibles.

25. THÉORÈME. — *On suppose* B p*-admissible. Soit*

$$f \in W^{r,p}(E, \mu, B).$$

Il existe un unique $\widetilde{f} \in L^1(E, c_{rp}, B)$ *telle que* $f = \widetilde{f}$ μ*-presque partout. De plus, l'application* $f \to \widetilde{f}$ *est continue.*

Démonstration. — D'après l'appendice I, prop. 3, U^r est un isomorphisme de $L^p(E,\mu,B)$ sur $W^{rp}(E,\mu,B)$. Alors, pour montrer l'existence de $\widetilde{f}$, il n'y a qu'à raisonner comme au théorème 17. La continuité de $f \to \widetilde{f}$ est évidente.

26. THÉORÈME. — *Même si B n'est pas p-admissible, U^r envoie continûment $L^p(E,\mu,B)$ dans $L^1(E,c_{rp},B)$.*

Démonstration. — Si $|\cdot|$ est une semi-norme continue sur B, on écrit l'inégalité $c_{rp}(U^r f) \leq c_{rp}(U^r|f|) \leq KN_p(f)$ où K ne dépend que de (r,p). On obtient alors le résultat par passage à la limite à partir des éléments f de rang fini.

Application (continuité des trajectoires). — On prend pour (E,μ) l'espace de Wiener, on note W_t la coordonnée d'indice t. On a le

27. THÉORÈME. — *Soit $X_t = \int_0^t \alpha_s dW_s + \int_0^t \beta_s ds$ une intégrale stochastique où les processus prévisibles $t \to \alpha_t$ et $t \to \beta_t$ appartiennent à $L^p(dt, W^{rp}(E,\mu)$. Le processus $t \to X_t$ possède une version $\widetilde{X}_t$ dont c_{rp}-quasi-toute trajectoire est continue. Plus précisément, pour tout $\alpha > 0$, il existe un compact $K \subset E$, tel que $c_{rp}(E\backslash K) < \varepsilon$, et tel que $(t,\omega) \to \widetilde{X}_t(\omega)$ soit continue sur $[0,+\infty[\times K$.*

Enfin, l'application $\omega \to [t \to X_t(\omega)]$ appartient à $W^{rp}(E,\mu,E)$.

Démonstration. — D'abord X_t appartient à $L^p(E,\mu)$ comme il est bien connu, et on peut supposer que μ-presque toute trajectoire est continue. Introduisons donc $f(\omega) = [t \to X_t(\omega)]$. Le lemme de Doob nous dit que $f \in L^p(E,\mu,E)$. Montrons d'abord que $f \in W^{rp}(E,\mu,B)$. Pour $p \geq 2$, on a d'après [FLP6] la formule

$$(8)\quad X_{t'}(\omega,\varpi) = \int_0^t \alpha'_s(\omega,\varpi)dW_s(\omega) + \int_0^t \alpha_s(\omega)dW_s(\varpi) + \int_0^t \beta'_s(\omega,\varpi)ds$$

les trois fonctions α'_s, α_s et β'_s appartiennent à $L^p(dt, L^p(\mu\otimes\mu))$ de sorte que le lemme de Doob montre aussi que X_t appartient à $W^{1p}(E,\mu)$. Toujours d'après [FLP6] la fonction $g(\omega,\varpi) = [t \to X'_t(\omega,\varpi)]$ appartient à $L^2(E\times E, \mu\otimes\mu, E)$. Il est clair qu'en fait $g \in L^p(E\times E,\mu\otimes\mu,E)$. On passe au cas $r = 1$, $1 < p < 2$ par densité. On raisonne ensuite par récurrence sur r.

Ensuite, comme on ignore si l'espace $E = C([0,+\infty[)$ est p-admissible, (on pense que non), on ne peut utiliser directement le théorème 25. On remarque que L^p est p-admissible, il existe donc deux fonctions $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta} \in L^p([0,a] \times E, dt \otimes \mu)$ (a est arbitraire) vérifiant

$$\alpha_t = U_2^r(\widehat{\alpha}_t) \qquad \text{et} \quad \beta_t = U^r(\widehat{\beta}_t)$$

pour dt-presque tout $t \in [0,a]$, où U_2 est la puissance 1/2 de l'opérateur potentiel du semi-groupe $e^{-2t}P_t$ (au lieu de $e^{-t}P_t$ pour U). Posons donc

$$Y_t = \int_0^t \widehat{\alpha}_s dW_s + \int_0^t \widehat{\beta}_s ds.$$

On a une semi-martingale sur $[0,a]$, et l'on vérifie facilement que

$$X_t = U^r Y_t.$$

On retrouve bien sûr le fait que chaque X_t appartient à $W^{rp}(E,\mu)$, mais il y a mieux : posant $h(\omega) = [t \to Y_t(\omega)]$, on constate grâce au lemme de Doob que h appartient à $L^p(E,\mu,C([0,a])$. On a $f = U^r h$ et le théorème 26 permet de conclure. L'existence du compact K ne fait que traduire la c_{rp}-quasi-continuité de f.

Pour terminer ce chapitre, montrons que P_t opère dans $L^1(E, c_{rp}, B)$.

28. LEMME. — *Si B est un Banach séparable, soit T une forme linéaire continue sur $L^1(E, c_{rp}, B)$. Il existe une mesure de Radon $\nu \geq 0$ sur E, appartenant au dual de $L^1(E, c_{rp})$, et une application h faiblement ν-mesurable, bornée et à valeurs dans B', vérifiant*

$$T(f) = \int \langle h(\omega), f(\omega)\rangle d\nu(\omega) \quad \text{pour} \quad f \in \mathcal{L}^1(E, c_{rp}, B).$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{L}^1(E, c_{rp})$, $f \geq 0$. Posons

$$\lambda(f) = \operatorname{Sup}\{|T(g)| \,/\, g \in \mathcal{L}^1(E, c_{rp}, B), |g| \leq f\}.$$

On a $\lambda(f) \leq \|T\| c_{rp}(f) < +\infty$. La relation $\lambda(f_1 + f_2) \geq \lambda(f_1) + \lambda(f_2)$ est évidente. Soit $g \in \mathcal{L}^1(E, c_{rp}, B)$ et $|g| \leq f_1 + f_2$. Posons $g_1 = gf_1/(f_1 + f_2)$ sur $\{f_1 + f_2 > 0\}$, $g_1 = 0$ ailleurs. On vérifie facilement que g_1 est quasi-continue. De plus, la relation $|g_1| \leq f_1$ montre que $g_1 \in \mathcal{L}^1(E, c_{rp}, B)$ (*cf.* [F]). On a alors $|T(g_1)| \leq \lambda(f_1)$, et la relation $\lambda(f_1+f_2) \leq \lambda(f_1)+\lambda(f_2)$. Alors λ est prolongeable en forme linéaire ≥ 0 sur $L^1(E, c_{rp})$, donc représentable par une mesure de Radon $\nu \geq 0$ sur E. On a $|T(g)| \leq \int |g| d\nu$ pour $g \in \mathcal{L}^1(E, c_{rp}, B)$, de sorte que T est continue en topologie induite par $L^1(E, \nu, B)$. On applique alors le théorème de Dunford-Pettis, d'où le résultat.

29. COROLLAIRE. — *Dans $L^1(E, c_{rp}, B)$, les éléments de la forme $f \otimes e$ où $f \in L^1(E, c_{rp})$ et $e \in B$ forment un ensemble total. Cela subsiste si B est un Fréchet séparable.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer Hahn-Banach et le lemme 28.

30. THÉORÈME. — *Pour $t > 0$, P_t envoie $L^p(E, \mu, B)$ dans $\mathcal{L}^1(E, c_{rp}, B)$. De plus, P_t opère en semi-groupe de contractions fortement continu sur $L^1(E, c_{rp}, B)$.*

Démonstration. — On peut évidemment supposer que B est séparable. Si f est élémentaire à valeurs dans B, on a

$$c_{rp}(P_t f) \leq c_{rp}(P_t|f|) \leq c_{rp}(f).$$

La première inégalité montre d'abord que $f \to P_t f$ est prolongeable par continuité sur $L^p(E, \mu, B)$ à valeurs dans $L^1(E, c_{rp}, B)$. Ce prolongement coïncide avec la formule de Mehler pour f bornée. La deuxième inégalité montre que P_t opère en semi-groupe contractant dans $L^1(E, c_{rp}, B)$.

Soit maintenant $f = g \otimes e$ avec $g \in \mathcal{L}^1(E, c_{rp})$ et $e \in B$. On a $P_t f = (P_t g) \otimes e$, de sorte que le corollaire 29 nous ramène à la continuité forte pour $B = R$. Or, si g est élémentaire, $P_t g$ converge uniformément vers g quand t tend vers 0.

V. PROPRIÉTÉS DE NIKODYM

31. LEMME. — *Soient (E, μ) et (F, ν) deux espaces localement convexes munis des mesures gaussiennes centrées μ et ν, et B un espace de Fréchet. Alors on a une injection canonique $W^{r+s,p}(E \times F, \mu \otimes \nu, B) \to W^{sp}(F, \nu, B))$.*

Démonstration. — On peut supposer que B est un espace de Banach de norme $|\cdot|$. Soit f une fonction élémentaire de rang fini sur $E \times F$. Posons $f_x(y) = f(x, y)$. La fonction f_x est élémentaire sur E à valeurs dans $W^{sp}(F, \nu, B))$. Il est clair que $\widetilde{f}$ définie par $\widetilde{f}(x) = f_x$ appartient à $L^p(E, \mu, L^p(F, \nu, B))$, et que $N_p(\widetilde{f}) = N_p(f)$. On a

$$\int |\partial_y f(x,y)(v)|^p d\mu(x) d\nu(y) d\nu(v) \leq \int |f'(x,y)(u,v)|^p d\mu(x) d\nu(y) d\mu(u) d\nu(v)$$

ce qui prouve que $\widetilde{f}$ appartient à $L^p(E, W^{1p}(F, \nu))$ avec $N_p(\widetilde{f}) \leq \|f\|_{1,p}$. Posons $g(x, y, u, v) = \partial_x \partial_y f(x, y, u, o, o, v)$. On trouve $N_p(g) \leq N_p(f'')$

puis $\|\widetilde{f}\|_{1,p} \leq k\|f\|_{2,p}$ où k est une constante ne dépendant que de p. Par densité, on obtient le résultat pour $r = s = 1$. Il suffit ensuite de raisonner par récurrence sur r et s.

32. THÉORÈME. — *Mêmes hypothèses, avec B p-admissible. Alors on a une injection canonique $L^1(E \times F, c_{r+s,p}, B) \to L^1(E, c_{rp}L^1(F, c_{sp}, B))$. De plus, si f est $c_{r+s,p}$-quasi-continue, alors pour c_{rp}-quasi-tout $x \in E$, la section f_x est c_{sp}-quasi-continue.*

Démonstration. — On suppose d'abord que $B = R$. Soit $\varphi(x,y)$ une fonction élémentaire sur $E \times F$. Posons

$$\widetilde{\varphi}(x) = (y \to \varphi(x,y)) \in W^{sp}(F,v) \subset L^1(F,c_{sp}).$$

Il existe une fonction $g \geq |\varphi|$, $g \in W^{r+s,p}(E \times F, \mu \otimes \nu)$ et telle que $c_{r+s,p}(\varphi) = \|g\|_{r+s,p}$. En désignant diverses constantes par la lettre k, on a d'après le lemme 31 (puisque R est admissible par le théorème de Meyer) $\|g\|_{r+s,p} \geq k\|\widetilde{g}\|_{r,p}$. La fonction $\widetilde{g}$ appartient à $W^{rp}(E, \mu, W^{sp}(F,v))$. D'après les théorèmes 17 et 25, il existe une fonction $h \in W^{rp}(E,\mu)$, $h(x) \geq \|\widetilde{g}(x)\|_{s,p}$, et telle que $\|\widetilde{g}\|_{r,p} \geq k\|h\|_{r,p}$. Cela étant, on a

$$|\widetilde{\varphi}(x)| \leq \widetilde{g}(x)$$

pour presque tout x, donc $c_{sp}(\widetilde{\varphi}(x)) \leq \|\widetilde{g}(x)\|_{s,p} \leq h(x)$, et par suite $c_{rp}(\widetilde{\varphi}) \leq \|h\|_{rp} \leq kc_{r+s,p}(\varphi)$, où k est indépendante de φ. Par densité, on obtient l'application canonique.

Soient maintenant φ élémentaire à valeurs dans un Fréchet B, et q une semi-norme continue sur B, on a $(q \circ \varphi)\widetilde{} = q \circ \widetilde{\varphi}$, de sorte que

$$c_{rp}\big[x \to c_{sp}(q \circ \widetilde{\varphi}(x))\big] \leq kc_{r+s,p}(q \circ \varphi)$$

d'après la première partie de la démonstration. Il ne reste plus qu'à raisonner par densité à partir des fonctions φ élémentaires de rang fini (corollaire 29) pour obtenir l'application canonique. C'est une injection : si $\widetilde{\varphi}$ est nulle, la fonction φ est nulle $\mu \otimes \nu$-presque partout, mais $\varphi \in L^1(E \times F, c_{r+s,p}, B)$, donc φ est nulle c_{r+s}-quasi-partout (remarque 4,c)).

Soit maintenant φ c_{rp}-quasi-continue. On se ramène d'abord au cas où B est un Banach, puis au cas où $\varphi \in \mathcal{L}^1(E \times F, c_{r+s,p}, B)$ en composant au besoin par un homéomorphisme de B sur sa boule unité. Il existe une série $\Sigma_n\ \varphi_n$ où les φ_n sont élémentaires, telle que la série $\Sigma_n c_{r+s,p}(\varphi_n) < +\infty$, et $\varphi(x,y) = \Sigma_n \varphi_n(x,y)$ $c_{r+s,p}$-quasi-partout. On a alors $\Sigma_n\ c_{rp}(x \to c_{sp}(\widetilde{\varphi}_n(x))) < +\infty$, donc aussi $\Sigma_n\ c_{sp}(\widetilde{\varphi}_n(x)) < +\infty$ pour c_{rp}-quasi-tout $x \in E$ et φ a les propriétés indiquées.

33. Application. — *Soit (E,μ) comme au théorème 32, et soit F un sous-espace de Cameron-Martin de E (i.e. $F \subset H$) de dimension finie $m < sp$.*

a) *Soient A un ensemble $c_{r+s,p}$-polaire, et $\widetilde{A}$ le saturé de A par les translations parallèles à F. Alors $\widetilde{A}$ est c_{rp}-polaire. En particulier, si A est mince, $\widetilde{A}$ est mince (cf. [Ma]).*

b) *(propriété de Nikodym). Soit f $c_{r+s,p}$-quasi-continue. Alors la fonction $y \to f(x+y)$ est continue pour c_{rp}-quasi-tout $x \in E$. En particulier, si f appartient à $\bigcap_{r,p} W^{rp}(E,\mu,B)$ où B est p-admissible pour tout p, et si f est à peu près continue (cf. n° 3), alors la fonction $y \to f(x+y)$ est de classe C^∞ pour à peu près tout $x \in E$.*

Démonstration. — (*cf.* aussi théorème 47 de [FLP5]), on choisit une base orthonormale (e_i) de F, soit $h_i \in H'$ représentant e_i (théorème de Riesz). On peut supposer (théorème 11) que les h_i sont des formes linéaires sur E à peu près continues. La restriction de h_i à H est continue (th. 11), et $(h_i(e_j) = \delta_{ij}$. Posons alors $r(x) = \Sigma_i h_i(x)e_i$. On a visiblement $r = r^2$. Posons maintenant $s(x) = x - r(x)$; donc s est un projecteur.

On considère maintenant les mesures $\nu = s(\mu)$, $\eta = r(\mu)$. Il est clair que μ est l'image de $\nu \otimes \eta$ par $\pi(x,y) = x+y$. La fonction $y \to f(x+y)$ de l'énoncé est continue pour ν-c_{rp}-quasi-tout $x \in E$ d'après le théorème 32 et le théorème de Sobolev. Or, un ensemble ν-c_{rp} polaire est un ensemble μ-c_{rp} polaire invariant par les translations parallèles à F.

Si maintenant $f \in \bigcap_{rp} W^{rp}(E,\mu,B)$, f a un représentant à peu près continu $\widetilde{f}$ car B est admissible. La fonction $y \to \widetilde{f}(x+y)$ est scalairement de classe C^∞ pour à peu près tout $x \in E$ par le théorème de Sobolev. Il suffit alors d'appliquer le théorème de ([G], cor. 2, p. 178).

On obtient l'énoncé a) en raisonnant de manière analogue sur l'indicatrice de A.

34. *Remarque.* — Si E et F sont lusiniens, on peut montrer que π est pour tout (r,p) un quasi-isomorphisme de $(E \times F, \nu \otimes \eta)$ sur (E,μ).

APPENDICE I

On donne ici une démonstration simplifiée du théorème d'équivalence de normes de Meyer, (*cf.* [Pi1] et [F2]).

On posera

$$k(\theta) = \cos\theta|2\pi \operatorname{Log}\cos^2\theta|^{-1/2} \quad \text{pour } \theta \in]0, \pi/2[.$$

Pour toute fonction borélienne f sur E, on introduit la fonction $R_\theta f$ définie sur $E \times E$ par la formule

$$R_\theta f(x,y) = f(x\cos\theta + y\sin\theta).$$

La fonction $(\theta, x, y) \to R_\theta f(x,y)$ est borélienne, de plus la loi de $R_\theta f$ sous $\mu \otimes \mu$ est la même que celle de f sous μ.

Si f est bornée, on définit pour tout $\varepsilon > 0$

$$T_\varepsilon f = \int_\varepsilon^{\pi 2} (R_\theta f - R_{-\theta} f) k(\theta) d\theta.$$

1. THÉORÈME. — *Soit $p \in]1, +\infty[$, il existe une constante universelle A_p telle que*

(1) $$N_p(T_\varepsilon f) \leq A_p N_p(f)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. De plus, quand ε tend vers 0, $T_\varepsilon f$ converge dans $L^p(\mu \otimes \mu)$.

Démonstration. — On pose $F(\theta, x, y) = R_\theta f(x,y)$ d'où pour tout φ

$$R_\varphi T_\varepsilon f(x,y) = \int_\varepsilon^{\pi_2} \big(F(\varphi + \theta, x, y) - F(\varphi - \theta, x, y)\big) k(\theta) d\theta.$$

On applique le théorème de M. Riesz (*cf.* [Z], p. 253), compte tenu de ce que la fonction $k(\theta) - (\operatorname{cotg}\theta)/\sqrt{2\pi}$ est bornée sur $]0, \pi/2[$, d'où l'inégalité

$$\int_0^\pi |R_\varphi T_\varepsilon f(x,y)|^p d\varphi \leq A_p^p \int_0^\pi |F(\theta, x, y)|^p d\theta$$

pour tout $(x,y) \in E \times E$, où A_p ne dépend que de p. On obtient alors (1) en intégrant en $\mu \otimes \mu$. La convergence pour $\varepsilon \to 0$ a lieu pour f suffisamment régulière et donc par densité pour toute $f \in L^p(E, \mu)$.

2. COROLLAIRE (Théorème de Meyer) (*cf.* [Me1],[Me2]). — *Soit f borélienne bornée sur E; et posons*

$$Uf(x) = 1/\sqrt{\pi} \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} P_t f(x) dt$$

$U = V^{1/2}$ (cf. n° 15) est un isomorphisme de $L^p(E, \mu)$ sur $W^{1,p}(E, \mu)$, et plus généralement de $W^{r,p}(E, \mu)$ sur $W^{r+1,p}(E, \mu)$.

Démonstration. — On a d'abord $N_p(Uf) \leq N_p(f)$. On introduit ensuite pour $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon f(x) = \int_\varepsilon^{\pi/2} k(\theta) tg\theta d\theta \int R_\theta f(x,y) d\mu(y)$$

par le changement de variable $e^{-t} = \cos\theta$, on voit que $U_\varepsilon f$ converge vers Uf dans $L^P(E,\mu)$. Soit u un vecteur de Cameron-Martin, si f est suffisamment régulière

$$(U_\varepsilon f)'(x,u) = \int \langle y,u\rangle d\mu(y) \int_\varepsilon^{\pi/2} R_\theta f(x,y) k(\theta) d\theta$$

que l'on déduit de la formule (3) du théorème 2, puis

$$(U_\varepsilon f)'(x,u) = \int \langle y,u\rangle d\mu(y) \int_\varepsilon^{\pi/2} \left[R_\theta f(x,y) - R_{-\theta} f(x,y)\right] k(\theta) d\theta$$

soit

$$(U_\varepsilon f)'(x,u) = \int \langle y,u\rangle T_\varepsilon f(x,y) d\mu(y).$$

Comme dans la démonstration du théorème 2 du chapitre I, on trouve

$$N_p((U_\varepsilon f)') \leq a_p b_p N_p(T_\varepsilon f)$$

où a_p et b_p sont définis en formule (0).
D'où l'existence de $C_p = 1 + a_p b_p A_p$ telle que

$$(2) \qquad \|U_\varepsilon f\|_{1,p} \leq C_p N_p(f).$$

Quand ε tend vers 0, on voit que $U_\varepsilon f$ a une valeur d'adhérence faible dans $W^{1,p}(E,\mu)$, nécessairement Uf puisque la convergence a lieu dans $L^P(E,\mu)$. L'inégalité (2) subsiste pour Uf.

Montrons l'inégalité

$$(3) \qquad N_p(f) \leq C'_p \|Uf\|_{1,p}$$

pour une constante C'_p convenable. On écrit

$$\int UfUg d\mu + \int\int (Uf)'(Ug)' d(\mu\otimes\mu) = \int fg d\mu$$

pour toutes f et g élémentaires. On obtient

$$\int fg d\mu \leq \|Uf\|_{1p}\|Ug\|_{1q} \leq C_q \|Uf\|_{1p} N_q(g)$$

et l'inégalité (3) avec $C'_p = C_q$. Alors U est un isomorphisme de $L^p(E,\mu)$ sur un sous-espace fermé W_p de $W^{1p}(E,\mu)$. Il reste à prouver que

$$W_p = W^{1p}(E,\mu).$$

D'abord W_p est dense dans $L^p(E,\mu)$ car U est auto-adjoint. Ensuite, soit λ une forme linéaire continue sur $W^{1p}(E,\mu)$, s'annulant sur W_p. On a $\langle \lambda P_t, Uf\rangle = \langle \lambda, UP_t f\rangle = 0$ pour toute $f \in L^p(E,\mu)$, *i.e.* λP_t s'annule sur W_p. Mais λP_t est continue sur $L^p(E,\mu)$ par le théorème 2, et W_p

est dense dans $L^p(E,\mu)$, de sorte que λP_t est nulle sur $L^p(E,\mu)$, *i.e.* $\langle\lambda, P_t f\rangle = 0$ pour toute $f \in L^p(E,\mu)$. Si $f \in W^{1p}(E,\mu)$, on trouve $\langle\lambda, f\rangle = \mathrm{Lim}_{t\to 0}\langle\lambda, P_t f\rangle = 0$, soit $\lambda = 0$. Ainsi W_p est dense dans $W^{1p}(E,\mu)$, et par suite $W_p = W^{1p}(E,\mu)$: U est un isomorphisme de $L^p(E,\mu)$ sur $W^{1p}(E,\mu)$.

Enfin, on a $(Uf)' = \widetilde{U}(f')$ où $\sim$ désigne la notion relative à

$$(E\times E, \mu\otimes\mu).$$

La récurrence sur r montre que U est un isomorphisme de $W^{r,p}(E,\mu)$ sur $W^{r+1,p}(E,\mu)$.

3. PROPOSITION. — *Soit B un espace de Banach p-admissible (cf. définition [23]). Alors pour tout $r \geq 0$, U est un isomorphisme de $W^{rp}(E,\mu,B)$ sur $W^{r+1p}(E,\mu,B)$.*

Démonstration. — On a vu (démonstration de la proposition 24) que U est un isomorphisme de $L^p(E,\mu,B)$ sur $W^{1p}(E,\mu,B)$. Alors comme

$$(Uf)' = \widetilde{U}(f')$$

($\widetilde{U}$ opérateur sur $(E\times E,\mu\otimes\mu)$), on a clairement

$$U(W^{rp}(E,\mu,B)) \subset W^{r+1p}(E,\mu,B).$$

Supposons la proposition vraie jusqu'au rang r, et soit

$$f \in W^{r+1p}(E,\mu,B).$$

Comme B est p-admissible, il existe $g \in L^p(E,\mu,B)$ et tel que $f = Ug$. Mais $f' \in W^{rp}(E\times E,\mu\otimes\mu,B)$ donc il existe

$$F \in W^{r-1p}(E\times E,\mu\otimes\mu,B)$$

telle que $f' = \widetilde{U}(F)$. Soit $\varphi \in B'$, on a $\varphi\circ f = U(\varphi\circ g)$ et $(\varphi\circ f)' = \widetilde{U}(\varphi\circ F)$. Alors $\varphi\circ g \in W^{rp}(E,\mu)$ et $(\varphi\circ g)' = \varphi\circ F$. Cela vaut pour tout $\varphi \in B'$, de sorte que g appartient à $W^{rp}(E,\mu,B)$, et $g' = F$.

APPENDICE II

PROPOSITION. — *Soit E un espace localement convexe lusinien, il existe une injection linéaire continue π de E dans R^N. Si de plus μ est une mesure gaussienne centrée sur E, de support E, et si E est de dimension* *infinie, on peut supposer que $\pi(\mu)$ est la mesure gaussienne canonique de R^N.*

Démonstration. — Soient X un espace polonais, j une bijection continue de X sur E. On rappelle que j^{-1} est borélienne. Soit (ω_n) une base dénombrable de la topologie de X, et f_{rp} une suite double de formes linéaires continues sur E définies de la manière suivante : si $j(\omega_n)$ et $j(\omega_p)$ sont strictement séparables par une $f \in E'$, on prend pour f_{np} l'une de ces formes linéaires, sinon on ne définit pas f_{np}. Montrons qu'elle sépare les points de E. Si a et $b \in E$, $a \neq b$, il existe A et B ouverts convexes dans E et disjoints contenant respectivement a et b. Il existe alors un couple (n, p) tel que $a \in \omega_n \subset A$ et $b \in \omega_p \subset B$. La fonction f_{np} sépare les points a et b. Renumérotons la suite double en une suite unique g_n, on peut alors prendre $\pi = (g_n)_{n \in N}$.

Si μ est gaussienne, on applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la suite (g_n), pour la structure hilbertienne de H', d'où une suite $(h_n) \in E'$. Si l'on pose $\pi = (h_n)_{n \in N}$, on vérifie sans peine que π est un isomorphisme borélien de E sur $\pi(E)$, et que $\pi(\mu)$ est la mesure gaussienne canonique de R^N.

On remarque aussi que les h_n forment une base hilbertienne de H' (raisonner par indépendance puisque H' est un espace de v.a. gaussiennes).

Erratum à l'article [FLP6].

p. 881, prop. 11, ligne 7 : remplacer *E lusinien* par *E lusinien métrisable.*

p. 891, théo. 33 : la démonstration ne vaut que pour E lusinien métrisable.

p. 893, théo. 35 : la proposition 11 n'étant pas applicable, on obtient seulement la régularité de c.

En fait les théorèmes 33 et 35 subsistent grâce au théorème 9 du présent article.

BIBLIOGRAPHIE

[AMa] H. AIRAULT et P. MALLIAVIN, Intégration géométrique sur l'espace de Wiener, Bull. Soc. Math. France, 112, n° 1 (1988).

[BH1] N. BOULEAU et F. HIRSCH, Propriétés d'absolue continuité dans les espaces de Dirichlet et applications aux équations différentielles stochastiques, Lecture Notes in Maths. Springer, n° 1204, 1986.

[BH2] N. BOULEAU et F. HIRSCH, Sur des propriétés du flot d'une équation différentielle stochastique, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., t. 306 (1988), 421–424.

[Bu] D.L. BURKHÖLDER, Martingales and Fourier analysis in Banach spaces, Cours du CIME (1985), Lecture Notes in Maths. Springer, n° 1206.

[DL] J. DENY et J.L. LIONS, Espaces du type de Beppo-Levi, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), (1953), 305-370.

[F] D. FEYEL, Espaces de Banach fonctionnels adaptés, quasi-topologie et balayage, Séminaire Th. du Potentiel Paris n° 3, Lecture Notes in Maths. Springer, n° 681 (1978), 81–102.

[F2] D. FEYEL, Transformations de Hilbert-Riesz, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., t. 310 (1990), 653–655.

[FLP1] D. FEYEL et A. DE LA PRADELLE, Représentation des espaces de Riesz-Banach, Bull. Acad. Royale de Belgique, 5e série, t. LXIV (1978), 340–350.

[FLP2] D. FEYEL et A. DE LA PRADELLE, Espaces de Sobolev sur les ouverts fins, C. R. Acad. Sci. Sér. A Math., t. 280 (1975).

[FLP3] D. FEYEL et A. DE LA PRADELLE, Le rôle des espaces de Sobolev en topologie fine, Séminaire th. du Potentiel Paris n° 2, Lecture Notes in Maths. Springer, n° 563, 1976.

[FLP4] D. FEYEL et A. DE LA PRADELLE, Sur le rôle des espaces adaptés en théorie de l'énergie, C. R. Acad. Sci., t. 282 (1976), 153.

[FLP5] D. FEYEL et A. DE LA PRADELLE, Sur les espaces de Sobolev en dimension infinie, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., t. 307 (1988), 871.

[FLP6] D. FEYEL et A. DE LA PRADELLE, Espaces de Sobolev gaussiens, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. 39, fasc. 4 (1989), 875–908.

[FLP7] D. FEYEL et A. DE LA PRADELLE, Sur les capacités gaussiennes en dimension infinie, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., t. 308 (1989), 489.

[Fr] X. FERNIQUE, Intégrabilité des vecteurs gaussiens, C. R. Acad. Sci. Sér. A Math., t. 270 (1970), 1698.

[Fr2] X. FERNIQUE, Ecole d'été de probabilités de St Flour n° 4, Lecture Notes in Math. Springer, n° 480 (1974).

[Fu] F. FUKUSHIMA, A Dirichlet form on the Wiener space and properties of brownian motion. Colloque de théorie du potentiel, Orsay 1983, Lecture Notes in Maths, n° 1096, Springer.

[G] A. GROTHENDIECK, Espaces vectoriels topologiques, Pub. Sociedade de Mat. de Sao Paulo, 1964.

[Kr] P. KRÉE, Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles, Séminaire Lelong, analyse, 1972-73, p. 142–181 et 1973-74, p. 16–47, Lecture Notes in Maths. Springer, n° 410 et 474.

[Ma] P. MALLIAVIN, Implicit functions in finite corank on the Wiener space, Proc. of Taniguchi intern. Symp. on Stock. anal. Katata, Kyoto, 1982.

[Me1] P.A. MEYER, Note sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, Sém. Proba. XVI, p. 95, Lecture Notes in Maths. Springer, n° 1059, 1984.

[Me2] P.A. MEYER, Transformations de Riesz pour les lois gaussiennes, Sém. Proba. XIX, Lecture Notes in Maths. Springer, n° 1059, 1984.

[Me3] P.A. MEYER, Probabilités et Potentiel, ASI 1318, Hermann, Paris, 1966.

[Pi1] G. PISIER, Riesz transforms : a simpler analytic proof of P.A. Meyer inequality, Sém. Proba. XXII, Lecture Notes in Maths. Springer, n° 1321, 1988.

[Pi2] G. PISIER, Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces, Annals of Mathematics, 115 (1982), 375–392.

[Su] H. SUGITA, Positive generalized Wiener functions and potential theory over abstract Wiener spaces, Osaka J. Math., 25 (1988), 665–696.

[T] M. TAKEDA, (r,p)-capacity on the Wiener space and properties of brownian motion, Z.F.W. Verv. Geb., 68, 1984.

[W] S. WATANABE, Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus, Tata Instit. Bombay, 1984.

[Z] A. ZYGMUND, Trigonometric series, Vol. I, Cambridge University Press, 4e édition, 1977.

Manuscrit reçu le 9 octobre 1990,
révisé le 4 mars 1991.

D. FEYEL & A. de LA PRADELLE,
Laboratoire d'Analyse
Tour 46–0, 4e étage,
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.