ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANCESCO AMOROSO

Sur le diamètre transfini entier d'un intervalle réel

Annales de l'institut Fourier, tome 40, n° 4 (1990), p. 885-911

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_4_885_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
40, 4 (1990), 885-911.

SUR LE DIAMÈTRE TRANSFINI ENTIER D'UN INTERVALLE RÉEL

par Francesco AMOROSO

1. Introduction.

Soient X une partie compacte du plan complexe et $Q \in \mathbf{C}[s]$ un polynôme ; on note $\deg Q$ son degré et $|Q|_{\infty,X}$ sa norme de la convergence uniforme sur X définie par

$$|Q|_{\infty,X} = \max_{s \in X} |Q(s)| .$$

On définit le *diamètre transfini* $t(X)$ comme la borne inférieure des quantités $|Q|_{\infty,X}^{1/\deg Q}$ lorsque Q décrit l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients complexes de degré positif. De même, on définit le *diamètre transfini entier* $t_{\mathbf{Z}}(X)$ comme la borne inférieure des quantités $|Q|_{\infty,X}^{1/\deg Q}$ lorsque Q décrit l'ensemble des polynômes (non nécessairement unitaires) à coefficients entiers de degré positif :

$$t_{\mathbf{Z}}(X) = \inf_{\substack{Q \in \mathbf{Z}[s], \\ \deg Q \geqslant 1}} |Q|_{\infty,X}^{1/\deg Q}.$$

Pour toute partie X on a $t(X) \leqslant t_{\mathbf{Z}}(X)$ avec égalité si X est une partie symétrique par rapport à l'axe réel telle que $t(X) \geqslant 1$ (cf. [L1] p. 57). D'autre part, on sait que, pour un tel X, si $t(X) < 1$ alors $t_{\mathbf{Z}}(X) < 1$ ([L1] lemme 1).

Dans le cas particulier d'un intervalle I réel, la valeur de $t(I)$ est bien connue : elle est égale au quart de sa longueur $\delta(I)$. Et donc $t_{\mathbf{Z}}(I) = \delta(I)/4$ pour $\delta(I) \geqslant 4$. Pour $\delta(I) < 4$, on ne possède que des encadrements pour $t_{\mathbf{Z}}(I)$.

Mots-clés : Approximation diophantienne - Polynômes orthogonaux - Diamètre transfini entier.

Classification A.M.S. : 41A10 - 11H.

Le but de cet article est la démonstration de deux théorèmes (théorème 1, § 6, p. 894 et théorème 2, § 6, p. 897) qui permettent d'obtenir des encadrements pour le diamètre transfini entier de certains intervalles de longueur plus petite que 4. Ces encadrements se présenteront sous la forme

$$\min_T f_I^-(r_0, r_1) \leqslant \log t_Z(I) \leqslant \min_T f_I^+(r_0, r_1)$$

où T est le triangle $\{0 \leqslant r_0, r_1 ; r_0 + r_1 \leqslant 1\}$ et $f_I^-, f_I^+ : T \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ sont deux fonctions continues données explicitement au § 6. Les variables r_0 et r_1 désignent la multiplicité relative (i.e. le rapport : ordre du zéro/degré) d'un polynôme aux extrémités de I. Les valeurs numériques que l'on obtient en calculant les minima (calcul assez rapide sur micro, grâce à la convexité de f_I^-, et f_I^+ (voir § 7)) sont surtout intéressantes lorsque les extrémités sont des nombres rationnels de petit dénominateur. Un tableau de résultats est présenté à la fin du § 7 ; on se borne ici à deux exemples :

$$\begin{aligned} &0{,}4156786 < t_Z([0,1]) < 0{,}4247745, \\ &0{,}0501459 < t_Z([1/5,1/4]) < 0{,}0956727. \end{aligned} \tag{1}$$

Le cas $I = [0,1]$ a été beaucoup étudié dans la littérature, à cause de ses applications au Théorème des Nombres Premiers (cf. [C] et [N1], [N2]). Pour le calcul du diamètre transfini entier de cet intervalle, on utilise le fait que $t_Z([0,1]) = t_Z([0,1/4])^{1/2}$ (voir le corollaire 1, § 6). Les résultats connus jusqu'ici pour la minoration de $t_Z([0,1])$ sont les suivants :

$$t_Z([0,1]) \geqslant \sqrt{2} - 1$$

(Aparicio [A1] et Trigub [T1]) et

$$t_Z([0,1]) \geqslant 0{,}4207263$$

(Aparicio [A2]). Les méthodes utilisées par ces auteurs sont différentes de la nôtre, qui combine l'inégalité de Liouville et la théorie des polynômes orthogonaux. En particulier, le procédé utilisé par Aparicio pour obtenir la dernière minoration ne semble pas s'appliquer simplement à d'autres intervalles. Pour les majorations de t_Z, la méthode employée jusqu'ici consiste à donner explicitement des polynômes petits sur I en choisissant des facteurs de petit degré et en optimisant les exposants. Par exemple, Aparicio démontre l'inégalité

$$t_Z([0,1]) \leqslant 0{,}431469$$

en considérant sur l'intervalle [0,1/4] le polynôme

$$Q(s) = s^5(1-4s)^2(1-5s).$$

Le polynôme $Q(s) = s^{11}(1-4s)^2(1-5s)^2(29s^2-11s+1)$ (toujours sur [0,1/4]) donne la borne $t_{\mathbf{Z}}([0,1]) \leqslant 0{,}4290533$. Cette approche, bien qu'ayant l'avantage de la simplicité, ne donne pas une formule permettant de majorer $t_{\mathbf{Z}}(I)$ pour tout I. La méthode utilisée ici pour la majoration de $t_{\mathbf{Z}}$ reprend une idée de Fekete et utilise à la fois le principe des tiroirs et la théorie des polynômes orthogonaux. Cette méthode, et la minoration de $t_{\mathbf{Z}}$ (th. 1), permet d'établir la formule asymptotique (§ 6 p. 898) :

$$(2)\quad \delta - 2\cdot\delta^2 + O(\delta^3) \leqslant t_{\mathbf{Z}}([0,\delta]) \leqslant \delta - \sqrt{e}\cdot\delta^2 + O(\delta^3) \quad \text{pour} \quad \delta \mapsto 0^+$$

et de donner de résultats qualitatifs sur $t_{\mathbf{Z}}$ (§ 8). En effet, on verra que $t_{\mathbf{Z}}$, vue comme fonction de l'ensemble des intervalles fermés de $\mathbf{R}$ (muni d'une structure métrique par la restriction de la distance d'Hausdorff sur les fermés de $\mathbf{R}$) est continue et localement constante autour des intervalles d'extrémités rationnelles de dénominateurs assez petits.

Je voudrais remercier ici Georges Rhin pour ses conseils et pour ses précieuses suggestions. La première version de ce texte a bénéficié des remarques pertinentes de Michel Langevin. Je lui suis sincèrement reconnaissant.

2. Notations et rappels.

Pour un couple de nombres réels $m = (m_0, m_1)$, on pose $|m| = m_0 + m_1$. Pour tout entier $h \geqslant 0$, on note D_h l'opérateur de dérivation sur $\mathbf{R}[s]$:

$$D_h = \frac{1}{h\,!}\frac{\partial^h}{\partial s^h}.$$

On utilisera plusieurs fois l'inclusion $D_h\mathbf{Z}[s] \subset \mathbf{Z}[s]$. La multiplicité $m_a(Q)$ d'un polynôme Q en un point $a \in \mathbf{R}$ est le plus petit entier $h \geqslant 0$ tel que $D_hQ(a) \neq 0$. Pour un nombre rationnel $a \in \mathbf{Q}$, on note

$$\text{den}\,(a) = \min\{d \in \mathbf{N},\, d\cdot a \in \mathbf{Z}\}$$

son dénominateur. Étant donné un intervalle $I = [a_0, a_1]$, on note par $\delta(I)$ son diamètre usuel $\delta(I) = a_1 - a_0$; on considère les espaces vectoriels

$(n \in \mathbf{N}, m=(m_0, m_1) \in \mathbf{N}^2)$

$$V^I_{n,m} = \{Q \in \mathbf{R}[s], \deg Q \leqslant n,\ m_{a_0}(Q) \geqslant m_0, m_{a_1}(Q) \geqslant m_1\}.$$

On pose $V_{n,m} = V^{[-1,1]}_{n,m}$ et $V_n = V_{n,0}$.

Si $I = [a,b]$ et $J = [\alpha,\beta]$ sont deux intervalles réels, on pose

$$d(I,J) = \max\{|\beta-b|, |\alpha-a|\}.$$

On vérifie que d est équivalente à la restriction de la distance de Hausdorff sur les parties fermées non vides de $\mathbf{R}$.

Les démonstrations utilisent la théorie des polynômes orthogonaux pour laquelle on renvoie à *Orthogonal polynomials* de G. Szëgo ([S]). On rappelle que si $\alpha, \beta > -1$ sont deux nombres réels et $h \geqslant 0$ un entier, l'h-ème polynôme de Jacobi $P_h^{(\alpha,\beta)}$ est défini par les conditions suivantes (cf. [S] § 2.4.1 et § 4.1.1) :

(i) $P_h^{(\alpha,\beta)}$ est un polynôme de degré h à coefficients réels ;

(ii) pour tout entier non négatif $k < h$ on a

$$\int_{-1}^{1} P_h^{(\alpha,\beta)}(s) \cdot s^k (1-s)^\alpha (1+s)^\beta \, ds = 0$$

(relation d'orthogonalité) ;

(iii) $P_h^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{h+\alpha}{h}$.

Les polynômes de Jacobi sont donnés explicitement par la formule de Rodriguez ([S]) 4.3.1.) :

$$(3)\quad (1-s)^\alpha (1+s)^\beta P_h^{(\alpha,\beta)}(s) = (-2)^{-h} D_h\{(1-s)^{h+\alpha}(1+s)^{h+\beta}\}; \quad h = 0, 1, \ldots$$

Une base orthonormée de l'espace V_n par rapport au produit scalaire

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} A \cdot B (1-s)^\alpha (1+s)^\beta \, ds$$

est alors $\{p_h^{(\alpha,\beta)}\}_{h=0,\ldots,n}$, où l'on a posé

$$(4)\quad p_h^{(\alpha,\beta)} = (\langle P_h^{(\alpha,\beta)}, P_h^{(\alpha,\beta)}\rangle)^{-1/2} \cdot P_h^{(\alpha,\beta)} = \left\{\frac{2h+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(h+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(h+\alpha+1)\Gamma(h+\beta+1)}\right\}^{1/2} P_h^{(\alpha,\beta)}.$$

(N. B. : Notre normalisation diffère de celle de [S] 4.3.4 à cause du facteur $1/2 = 1/\delta([-1,1])$ dans le produit scalaire $\langle , \rangle$.)

Particulièrement intéressant est le cas des polynômes de Legendre ($\alpha=\beta=0$). On a

$$(5) \qquad \begin{aligned} P_h(s) &= P_h^{(0,0)}(s) = (-2)^{-h} D_h\{s^h(1-s)^h\} \\ p_h(s) &= p_h^{(0,0)}(s) = (2h+1)^{1/2} P_h(s). \end{aligned}$$

Les polynômes de Legendre admettent la représentation intégrale suivante (Formule de Laplace, [S] 4.8.10)

$$(6) \qquad P_h(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{s + (s^2-1)^{1/2} \cos\theta\}^h \, d\theta$$

valable pour tout nombre complexe s (la détermination de $(s^2-1)^{1/2}$ est arbitraire mais fixée).

Rappelons enfin la démonstration de la propriété extrémale suivante ([S] Théorème 3.1.3) :

PROPOSITION 1. — *Soit Q un polynôme à coefficients complexes satisfaisant*

$$(7) \qquad \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |Q(s)|^2 (1-s)^\alpha (1+s)^\beta \, ds = 1.$$

Alors, pour tout $s_0 \in \mathbf{C}$, on a

$$|Q(s_0)| \leqslant \left(\sum_{h=0}^{\deg Q} |p_h^{(\alpha,\beta)}(s_0)|^2 \right)^{1/2}$$

et la borne est atteinte si et seulement si

$$Q(s) = \varepsilon \left(\sum_{h=0}^{\deg Q} |p_h^{(\alpha,\beta)}(s_0)|^2 \right)^{-1/2} \cdot \sum_{h=0}^{\deg Q} \overline{p_h^{(\alpha,\beta)}(s_0)} p_h^{(\alpha,\beta)}(s)$$

avec $|\varepsilon| = 1$.

Démonstration. — Soit $n = \deg Q$ et écrivons Q sur la base $\{p_0^{(\alpha,\beta)}, \ldots, p_n^{(\alpha,\beta)}\}$ de $V_n \otimes_{\mathbf{R}} \mathbb{C}$:

$$Q = \lambda_0 p_0^{(\alpha,\beta)} + \cdots + \lambda_n p_n^{(\alpha,\beta)}.$$

La condition (7) équivaut à

$$\sum_{h=0}^{n} |\lambda_h|^2 = 1$$

et donc on déduit de l'inégalité de Cauchy

$$|Q(s_0)| \leqslant \left(\sum_{h=0}^{n} |\lambda_h|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{h=0}^{n} |p_h^{(\alpha,\beta)}(s_0)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{h=0}^{n} |p_h^{(\alpha,\beta)}(s_0)|^2\right)^{1/2}.$$

Enfin, la borne est atteinte si et seulement si $\lambda_h = c \cdot \overline{p_h^{(\alpha,\beta)}(s_0)}$ pour $h = 0, \ldots, n$, où c satisfait

$$|c|^2 \cdot \sum_{h=0}^{n} |p_h^{(\alpha,\beta)}(s_0)|^2 = 1.$$

3. Définitions équivalentes de t_Z.

Rappelons tout d'abord le lemme facile suivant (cf. [L2]) :

LEMME 1. — *Soit m_n une suite de nombres réels positifs vérifiant $m_{p+q}^{p+q} \leqslant m_p^p \cdot m_q^q$ pour tout couple (p,q) d'entiers. Alors, m_n converge vers* $\inf m_n$.

Soit X une partie compacte de $\mathbf{C}$, symétrique par rapport à l'axe réel ; la suite

$$t'_n = t'_n(X) = \inf_{\substack{Q \in \mathbf{Z}[s],\ Q \neq 0 \\ \deg Q \leqslant n}} |Q|_{\infty,X}^{1/n}$$

vérifie les hypothèses du lemme et converge donc vers sa borne inférieure :

$$t' = \lim t'_n = \inf t'_n = \inf_{\substack{Q \in \mathbf{Z}[s] \\ Q \neq 0}} \inf_{n \geqslant \deg Q} |Q|_{\infty,X}^{1/n}.$$

Deux cas se présentent :

• ou il existe un polynôme Q à coefficients entiers pour lequel $|Q|_{\infty,X} \leqslant 1$ et alors

$$\inf_{\substack{Q \in \mathbf{Z}[s] \\ Q \neq 0}} \inf_{n \geqslant \deg Q} |Q|_{\infty,X}^{1/n} = \inf_{Q \in \mathbf{Z}[s]} |Q|_{\infty,X}^{1/\deg Q} = t_{\mathbf{Z}}(X)$$

• ou, pour tout polynôme $Q \in \mathbf{Z}[s]$, on a $|Q|_{\infty,X} \geqslant 1$ et donc t' converge vers 1.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer dans l'introduction, pour une partie compacte X, symétrique par rapport à l'axe réel, dont le diamètre transfini est plus petit que 1, on a $t_{\mathbf{Z}}(X) \leqslant 1$. Donc $t_{\mathbf{Z}}(X) = \lim t'_n$.

Maintenant, supposons que $X = I$ soit un intervalle réel et considérons la suite

$$t_n = t_n(I) = \inf_{\substack{Q \in \mathbf{Z}[s],\, Q \neq 0 \\ \deg Q \leqslant n}} |Q|_{2,I}^{1/n},$$

où l'on a posé

$$|Q|_{2,I} = \left(\frac{1}{\delta(I)} \int_I |Q(s)|^2 \, ds \right)^{1/2}.$$

L'inégalité évidente $|Q|_{2,I} \leqslant |Q|_{\infty,I}$, jointe à la majoration (cf. lemme 5 p. 20)

$$|Q|_{\infty,I} \leqslant (1 + \deg Q)^{1/2} \cdot |Q|_{2,I},$$

nous assure que les suites t_n et t'_n ont la même limite :

$$t_{\mathbf{Z}}(I) = \lim t'_n(I). \tag{8}$$

4. Diamètre transfini d'une image réciproque.

La proposition suivante m'a été rappelée par Michel Langevin :

PROPOSITION 2. — *Soit P un polynôme à coefficients entiers de degré $d > 0$, de coefficient dominant $c > 0$. Alors, pour toute partie compacte X du plan, on a*

$$(t_{\mathbf{Z}}(X)/c)^{1/d} \leqslant t_{\mathbf{Z}}(P^{-1}(X)) \leqslant t_{\mathbf{Z}}(X)^{1/d}.$$

Démonstration. — Soit Q un polynôme à coefficients entiers de degré n. On obtient la majoration en écrivant

$$|Q \circ P|_{\infty, P^{-1}(X)} = |Q|_{\infty, X}.$$

Pour la minoration, on considère le résultant $R(s) = \text{Rés}_t (s - P(t), Q(t)) \in \mathbf{Z}[s]$, que l'on écrit sous la forme

$$c^n \prod_i Q(t)$$

où t décrit — avec respect des éventuelles multiplicités — l'ensemble $P^{-1}(s)$.

En choisissant pour P le polynôme $P(s) = s + n$, puis $P(s) = s(a+b-s)$, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.

$$t_{\mathbf{Z}}([a,b]) = t_{\mathbf{Z}}([a+n, b+n]), \qquad a, b \in \mathbf{R}\ ;\ n \in \mathbf{Z}\ ;$$
$$t_{\mathbf{Z}}([a,b])^2 = t_{\mathbf{Z}}([ab, \{(a+b)/2\}^2]), \qquad a, b \in \mathbf{R}\ ;\ a + b \in \mathbf{Z}.$$

Par exemple, $t_{\mathbf{Z}}([0, 1/4])^2 = t_{\mathbf{Z}}([0,1])$.

5. Une estimation.

LEMME 2. — *Soient a, b, n trois entiers satisfaisants $|b| \leqslant a \leqslant n$, et posons $\alpha = a/n$, $\beta = b/n$. Alors,*

$$\sum_{h=a}^{n} \log \binom{2h}{h-b} = \left[\log 2 - \frac{(1-\beta)^2}{2} \log (1-\beta) - \frac{(1+\beta)^2}{2} \log (1+\beta) + \frac{(\alpha-\beta)^2}{2} \log (\alpha-\beta) + \frac{(\alpha+\beta)^2}{2} \log (\alpha+\beta) - \alpha^2 \log 2\alpha \right] \cdot n^2 + O(n \log n).$$

Démonstration. — En utilisant la formule de Stirling, on trouve

$$\sum_{h=a}^{n} \log \binom{2h}{h-b} = \left[\log 2 - \frac{(1-\beta)^2}{2} \log (1-\beta) - \frac{(1+\beta)^2}{2} \log (1+\beta) - (h+b) \log (h+b) \right] + O(n \log n)$$
$$= \sum_{h=a}^{n} \left[(h-b) \log \frac{2h}{(h-b)} + (h+b) \log \frac{2h}{(h+b)} \right] + O(n \log n).$$

La formule de sommation partielle ([HW], th. 421, p. 346), avec

$$f(t) = \log \frac{2t}{t-b} \qquad \text{et} \qquad c_h = \begin{cases} 0, & \text{si } h < a; \\ h-b, & \text{si } a \leqslant h \leqslant n, \end{cases}$$

entraîne

$$\sum_{h=a}^{n} (h-b) \log \frac{2h}{(h-b)} = \sum_{h \leqslant n} c_h \cdot f(h) = \left(\sum_{h \leqslant n} c_h \right) \cdot f(n) - \int_a^n \left(\sum_{h \leqslant t} c_h \right) \cdot f(t)\, dt$$

$$= \left(\sum_{h=a}^{n} (h-b) \right) \cdot f(n) - \int_a^n \left(\sum_{a \leqslant h \leqslant t} (h-b) \right) \cdot f'(t)\, dt$$

$$= \left(\sum_{h=a-b}^{n-b} h \right) \cdot f(n) - \sum_{h=0}^{a-b-1} \cdot (f(n) - f(a)) - \int_a^n \left(\sum_{0 \leqslant h \leqslant t-b} h \right) \cdot f'(t)\, dt$$

$$= \left[-\frac{(1-\beta)^2}{2} \log \frac{2}{1-\beta} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{2} \log \frac{2\alpha}{\alpha-\beta} \right] \cdot n^2 + \int_a^n \frac{(t-b)^2}{2} \cdot \frac{b}{t(t-b)}\, dt + O(n \log n)$$

$$= \left[-\frac{(1-\beta)^2}{2} \log \frac{2}{1-\beta} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{2} \log \frac{2\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{\beta}{2}(1-\alpha) - \frac{\beta^2}{2} \log \frac{1}{\alpha} \right] \cdot n^2 + O(n \log n).$$

Remplaçant b par $-b$ on obtient

$$\sum_{h=a}^{n} (h+b) \log \frac{2h}{(h+b)} = \left[-\frac{(1+\beta)^2}{2} \log \frac{2}{1+\beta} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{2} \log \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{2}(1-\alpha) - \frac{\beta^2}{2} \log \frac{1}{\alpha} \right] \cdot n^2 + O(n \log n).$$

Donc

$$\sum_{h=a}^{n} \log \binom{2h}{h-b} = \left[-\frac{(1-\beta)^2}{2} \log \frac{1-\beta}{2} - \frac{(1+\beta)^2}{2} \log \frac{1+\beta}{2} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{2} \log \frac{2\alpha}{\alpha-\beta} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{2} \log \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} + \beta^2 \log \alpha \right] \cdot n^2 + O(n \log n)$$

$$= \left[\log 2 - \frac{(1-\beta)^2}{2} \log (1-\beta) - \frac{(1+\beta)^2}{2} \log (1+\beta) + \frac{(\alpha-\beta)^2}{2} \log (\alpha-\beta) + \frac{(\alpha+\beta)^2}{2} \log (\alpha+\beta) - \alpha^2 \log 2\alpha \right] \cdot n^2 + O(n \log n).$$

6. Encadrements.

THÉORÈME 1. — *Soit* $I = [a_0, a_1] \subset \mathbf{R}$ *un intervalle d'extrémités rationnelles de dénominateurs bornés respectivement par* d_0, d_1 *et de diamètre* $\delta = \delta(I) \leqslant 4$. *Alors, pour tout polynôme* $Q \in \mathbf{Z}[s]$ *on a*

$$\log |Q|_{2,I} \geqslant f_I^- \left(\frac{m_{a_0}(Q)}{\deg Q}, \frac{m_{a_1}(Q)}{\deg Q} \right) \cdot \deg Q + O(\log \deg Q),$$

où la fonction f_I^- *est définie sur le triangle* $T = \{r \in \mathbf{R}^2, 0 \leqslant r_0, r_1; |r| = r_0 + r_1 \leqslant 1\}$ *par la formule*

$$f_I^-(r) = \log \delta + \max \{ -(1-r_0) \log d_0 \delta + h(r_0, r_1), \\ -(1-r_1) \log d_1 \delta + h(r_1, r_0) \}$$

avec

$$h(r) = \frac{1}{2}(1-|r|) \log (1-|r|) - \frac{1}{2}(1+|r|) \log (1+|r|) \\ + \frac{1}{2}(1+r_1-r_0) \log (1+r_1-r_0) - \frac{1}{2}(1+r_0-r_1) \log (1+r_0-r_1) \\ + 2r_0 \log (2r_0).$$

En particulier,

$$t_Z(I) \geqslant \exp \left(\inf_T f_I^-(r) \right) := t_I^-.$$

Enfin, si $a_0 \in \mathbf{Q}$ (resp. $a_1 \notin \mathbf{Q}$), *les résultats ci-dessus restent vrais si l'on pose* $d_0 = +\infty$ (resp. $d_1 = +\infty$).

Démonstration. — Soit $Q \in \mathbf{Z}[s]$ et notons n son degré, m_i sa multiplicité en a_i $(i = 0, 1)$ et $m = (m_0, m_1)$. Considérons les applications linéaires

$$f_{n,m,i}^I : V_{n,m}^I \to \mathbf{R} \\ \tilde{Q} \to D_{m_i} \tilde{Q}(a_i), \qquad i = 0, 1.$$

Soit $\lambda_{n,m,i}^I$ la norme de $f_{n,m,i}^I$; on a

$$|D_{m_i} Q(a_i)| \leqslant \lambda_{n,m,i}^I \cdot |Q|_{2,I}, \qquad i = 0, 1.$$

Maintenant, on utilise l'inégalité de Liouville ; $d_i^{n-m_i}|D_{m_i}Q(a_i)|$ est un entier strictement positif (car la multiplicité de Q en a_i est égale à m_i), donc $\geqslant 1$. Par conséquent,

$$|Q|_{2,I} \geqslant (\lambda^I_{n,m,i})^{-1} d_i^{-(n-m_i)}, \qquad i = 0, 1. \tag{9}$$

Pour calculer $\lambda^I_{n,m,i}$ on peut supposer $I = [-1,1]$, car $\|f^I_{n,m,i}\| = \|f^{[-1,1]}_{n,m,i}\| \cdot (\delta(I)/2)^{-m_i}$, puis se limiter à $\lambda = \lambda^{[-1,1]}_{n,m,1}$, car $\|f^{[-1,1]}_{n,m,0}\| = \|f^{[-1,1]}_{n,(m_1,,m_0),1}\|$. Maintenant, on utilise la proposition 1 : pour tout polynôme $Q = (1+s)^{m_0}(1-s)^{m_1}R(s) \in V_{n,m}$ on a

$$\frac{|R(1)|}{|Q|_{2,[-1,1]}} \leqslant \left(\sum_{h=0}^{n-m} |p_h^{(2m_1,2m_0)}(1)|^2 \right)^{1/2}$$

et cette inégalité est optimale. Donc

$$\lambda = \left(\sum_{h=0}^{n-m} |p_h^{(2m_1,2m_0)}(1)|^2 \right)^{1/2}.$$

On calcule λ à l'aide de la formule 4.5.8 de [S] :

$$\lambda = 2^{-m_1} \cdot \left[\binom{n+m_0-m_1+1}{n-|m|} \binom{n+|m|}{2m_0} \cdot (n+|m|+1) \right]^{1/2}$$

d'où

$$\lambda^I_{n,m,i} = \begin{cases} \left[\binom{n+m_0-m_1+1}{n-|m|} \binom{n+|m|}{2m_0} \cdot (n+|m|+1) \right]^{1/2} \cdot \delta(I)^{-m_i}, & \text{si } i = 0; \\ \left[\binom{n+m_1-m_0+1}{n-|m|} \binom{n+|m|}{2m_1} \cdot (n+|m|+1) \right]^{1/2} \cdot \delta(I)^{-m_i}, & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

A l'aide du lemme 2 et la dernière ligne, on déduit de (9), en posant $r_i = m_i/n$, $i = 0, 1$,

$$\begin{aligned} \log |Q|_{2,I} \geqslant \Big\{ & r_0 \log \delta - \frac{1}{2}\Big[(1+r)\log(1+r) - (1+r_1-r_0)\log(1+r_1-r_0) \\ & - (1+r_0-r_1)\log(1+r_0-r_1) \Big] - \frac{1}{2}\Big[(1+r_0-r_1)\log(1+r_0-r_1) \\ & - (1-r)\log(1-r) - 2r_0 \log(2r_0) \Big] - (1-r_0)\log d_0 \Big\} \cdot n + O(\log n) \\ = & [r_0 \log \delta - (1-r_0)\log d_0 + h(r_0, r_1)] \cdot n + O(\log n). \end{aligned}$$

De la même façon, on trouve

$$\log |Q|_{2,I} \geqslant [r_1 \log \delta - (1-r_1) \log d_1 + h(r_1, r_0)] \cdot n + O(\log n),$$

ce qui prouve la première partie du théorème 1. Pour montrer la minoration de $t_Z(I)$, il suffit d'utiliser $t_Z(I) = \lim t_n(I)$ (cf. 8).

COROLLAIRE 2. — *Soient* $I = [a_0, a_1]$, d_0 *et* d_1 *comme dans le théorème* 1. *Alors, on a*

$$t_Z(I) \geqslant \max \left\{ \frac{4\delta}{(1+\sqrt{1+4\delta d_0})^2}, \frac{4\delta}{(1+\sqrt{1+4\delta d_1})^2} \right\}.$$

Si $a_0 \notin \mathbf{Q}$ (resp. $a_1 \notin \mathbf{Q}$), *le résultat ci-dessus reste vrai si l'on pose* $d_0 = +\infty$ (resp. $d_1 = +\infty$).

Démonstration. — Posons

$$h_0 = r_0 \log \delta - (1-r_0) \log d_0 + h(r_0, r_1);$$
$$h_1 = r_1 \log \delta - (1-r_1) \log d_1 + h(r_1, r_0).$$

On vérifie sans peine que

$$\min_T h_0 = \min_{\substack{r_1=0 \\ 0 \leqslant r_0 \leqslant 1}} h_0 = \log \frac{4\delta}{(1+\sqrt{1+4\delta d_0})^2}$$

et pareillement

$$\min_T h_1 = \min_{\substack{r_0=0 \\ 0 \leqslant r_1 \leqslant 1}} h_1 = \log \frac{4\delta}{(1+\sqrt{1+4\delta d_1})^2}. \tag{10}$$

Donc

$$t_Z(I) \geqslant \exp\left(\min_T \max \{h_0, h_1\} \right) \geqslant \exp\left(\max \{ \min_T h_0, \min_T h_1 \} \right)$$
$$\geqslant \max \left\{ \frac{4\delta}{(1+\sqrt{1+4\delta d_0})^2}, \frac{4\delta}{(1+\sqrt{1+4\delta d_1})^2} \right\}.$$

Remarque. — Pour $I = [0, 1/4]$, on déduit du corollaire ci-dessus l'inégalité

$$t_Z([0, 1/4]) \geqslant (\sqrt{2}-1)^2$$

et donc, grâce au corollaire 1, le résultat d'Aparicio et Trigub : $t_Z([0,1]) \geqslant \sqrt{2} - 1$.

THÉORÈME 2. — *Soient* $I = [a_0, a_1]$, d_0, d_1, δ *et* T *comme dans le théorème* 1. *Considérons les fonctions* ρ, $f_I^+ : T \to \mathbf{R}$ *définies par*

$$\rho(r) = -\frac{1}{1-|r|}\left[|r| \log 2 - \frac{(1-|r|)^2}{4}\log(1-|r|) - \frac{(1+|r|)^2}{4}\log(1+|r|) \right.$$
$$- \frac{(1+r_1-r_0)^2}{4}\log(1+r_1-r_0) - \frac{(1+r_0-r_1)^2}{4}\log(1+r_0-r_1)$$
$$\left. + r_0^2 \log(2r_0) + r_1^2 \log(2r_1) \right],$$

$$f_I^+(r) = \log\sqrt{t(I)} + r_0 \log d_0 \sqrt{\delta} + r_1 \log d_1 \sqrt{\delta} + \rho(r).$$

Alors, pour tout entier $n > 0$ *et pour tout couple* $m = (m_0, m_1)$ *d'entiers* $\geqslant 0$ *avec* $|m| = m_0 + m_1 \leqslant n$, *il existe un polynôme* $Q \in V_{n,m}^I \cap \mathbf{Z}[s]$ *tel que*

$$\log |Q|_{2,I} \leqslant f_I^+\left(\frac{m_0}{n}, \frac{m_1}{n}\right) \cdot n + O(\log n).$$

En particulier,

$$t_Z(I) \leqslant \exp\left(\min_T f_I^+(r) \right) := t_I^+.$$

Si $a_0 \notin \mathbf{Q}$, *les résultats ci-dessus restent vrais en posant* $d_0 = +\infty$ *(et donc* $f_I^+(r) = +\infty$ *si* $r_0 \neq 0$*). De même, si* $a_1 \notin \mathbf{Q}$ *on pose* $d_1 = +\infty$. *Enfin, si* a_0, $a_1 \notin \mathbf{Q}$, *on retrouve la majoration* $t_Z(I) \leqslant \sqrt{t(I)}$, *établie par Fekete* [F] (*voir aussi* [Sa]).

Démonstration. — Considérons l'ellipsoïde

$$E_{n,m}^I = \left\{ Q \in V_{n-|m|}, \frac{1}{\delta}\int_{a_0}^{a_1} Q(s)(s-a_0)^{2m_0}(a_1-s)^{2m_1}\, ds \leqslant 1 \right\}$$

où l'on a identifié l'espace vectoriel $V_{n-|m|}$ à $R^{n-|m|+1}$ via sa base canonique $\{1, s, \ldots, s^{n-|m|}\}$ sur $\mathbf{R}$. Grâce au théorème de Minkowski, on va montrer l'existence d'un nombre réel $\lambda = \lambda_{n,m}^I$ tel que pour tout $\mu \geqslant \lambda$,

$$\mu E_{n,m}^I \cap \mathbf{Z}^{n-|m|+1} \neq \{0\}.$$

Pour ce faire, on calcule le volume de $E_{n,m}^I$. Tout d'abord, on se ramène au cas $I = [-1, 1]$, car, grâce à l'homothétie $x_h \mapsto (\delta/2)^{|m|+h} x_h$, on a

$$\mathrm{Vol}\,(E_{n,m}^I) = \mathrm{Vol}\,(E_{n,m}^{[-1,1]}) \cdot \prod_{h=0}^{n-|m|} (2/\delta)^{h+|m|}.$$

Ensuite, on considère sur l'espace $V_{n-|m|}$ la structure euclidienne donnée par le produit scalaire

$$\langle A,B\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} A\cdot B(1+s)^{2m_0}(1-s)^{2m_1}\,ds\,; \qquad A\,,\ B\in V_{n-|m|}\,.$$

Comme on l'a déjà fait remarquer dans le § 2, une base orthonormée de $V_{n-|m|}$ est donnée par les polynômes

$$p_h^{(2m_1,2m_0)}=\left\{\frac{2(h+|m|)+1}{2^{2|m|}}\cdot\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(h+2|m|+1)}{\Gamma(h+m_1+1)\Gamma(h+m_0+1)}\right\}^{1/2} P_h^{(2m_1,2m_0)}\,,$$

$h=0,\ldots,n-|m|$. Le volume de $E_{n,m}^{[-1,1]}$ est alors $c_{n-|m|+1}\cdot|A_{n,m}|$ où $|A_{n,m}|$ est le déterminant de la matrice de passage $A_{n,m}$ de la base $1, s, \ldots, s^{n-|m|}$ de $V_{n-|m|}$ à la base $p_0,\ldots,p_{n-|m|}$ et $c_N=\dfrac{2\pi^{N/2}}{N\Gamma(N/2)}$ est le volume de la sphère unitaire dans R^N. La matrice $A_{h,m}^I$ étant triangulaire supérieure, la valeur du déterminant est donnée par le produit des coefficients dominants $\mathrm{lc}\,(p_h)$ des polynômes p_h, que l'on calcule en utilisant (4) et la formule de Rodriguez (3) :

$$\mathrm{lc}\,(p_h) = 2^{-h-|m|}\left[\binom{2(h+|m|)}{h}\binom{2(h+|m|)}{h+2m_0}(2h+2|m|+1)\right]^{1/2}.$$

Donc

$$\mathrm{Vol}\,(E_{n,m}^I) = c_{n-|m|+1}\prod_{h=|m|}^{n}\delta^{-h}\left[\binom{2h}{h-|m|}\binom{2h}{h+m_0-m_1}(2h+1)\right]^{1/2}.$$

A l'aide du lemme 2 (utilisé deux fois : en premier, avec $a=b=|m|$ et en second, avec $a=|m|, b=m_0-m_1$), on déduit de la dernière ligne, en posant $r_i=m_i/n_i$, $i=1,2$:

$$\log \mathrm{Vol}\,(E)=\sum_{h=|m|}^{n}\left[-h\log\delta+\frac{1}{2}\log\binom{2h}{h-|m|}+\frac{1}{2}\log\binom{2h}{h+m_0-m_1}\right]+O(n\log n)$$

$$=\left\{-\frac{1-|r|^2}{2}\log\delta+\frac{1}{2}\left[\log 2-\frac{(1-|r|)^2}{2}\log(1-|r|)-\frac{(1+|r|)^2}{2}\log(1+|r|)+|r|^2\log(2|r|)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left[\log 2-\frac{(1-r_0+r_1)^2}{2}\log(1+r_1-r_0)-\frac{(1+r_0-r_1)^2}{2}\log(1+r_0-r_1)\right.\right.$$

$$+\frac{(2r_1)^2}{2}\log(2r_1)+\frac{(2r_0)^2}{2}\log(2r_0)-|r|^2\log(2|r|)\Big]\Big\}\cdot n^2+O(n\log n)$$

$$=\Big\{-\frac{1-|r|^2}{2}\log\delta+\log 2-\frac{(1-|r|)^2}{4}\log(1-|r|)-\frac{(1+|r|)^2}{4}\log(1+|r|)$$

$$-\frac{(1+r_1-r_0)^2}{4}\log(1+r_1-r_0)-\frac{(1+r_0-r_1)^2}{4}\log(1+r_0-r_1)$$

$$+r_0^2\log(2r_0)+r_1^2\log(2r_1)\Big\}\cdot n^2+O(n\log n)$$

$$=-(1-|r|)\left(\frac{1+|r|}{2}\log\delta-\log 2+\rho(r)\right)\cdot n^2+O(n\log n).$$

Le théorème de Minkowski et l'estimation de $\mathrm{Vol}(E)$ obtenue nous assurent qu'il existe un polynôme

$$\tilde{Q}_n^r(s)=\sum_{h=0}^{n-|m|}q_h s^h(s-a_0)^{m_0}(a_1-s)^{m_1}\not\equiv 0$$

avec $q_h\in\mathbf{Z}$ tel que

$$(11)\quad \log|\tilde{Q}_n^r|_{2,I}\leqslant-\frac{1}{n-|m|+1}\log(\mathrm{Vol}(E))+\log 2$$

$$=\left(\frac{1+|r|}{2}\log\delta-\log 2+\rho(r)\right)\cdot n+O(\log n).$$

Pour achever la démonstration de la première partie du théorème 2, il suffit de considérer le polynôme

$$Q_n^r(s)=\mathrm{den}\,(a_0)^{m_0}\,\mathrm{den}\,(a_1)^{m_1}\tilde{Q}_n^r(s)\in\mathbf{Z}[s]$$

et de majorer $\log|Q_n^r|_{2,I}$ à l'aide de (11) :

$$\log|Q_n^r|_{2,I}\leqslant(r_0\log d_0+r_1\log d_1+\frac{1+|r|}{2}\log\delta-\log 2+\rho(r))\cdot n+O(\log n)$$

$$=(\log\sqrt{t(I)}+r_0\log d_0\sqrt{\delta}+r_1\log d_1\sqrt{\delta}+\rho(r))\cdot n+O(\log n).$$

Enfin, la deuxième partie découle de $t_{\mathbf{Z}}(I)=\lim t_n(I)$ (cf. 8).

Preuve des encadrements (1). — Les théorèmes 1 et 2 et un calcul machine montrent que

$$0{,}17278874<t_{\mathbf{Z}}([0,1/4])<0{,}18043338,$$

$$0{,}0501459<t_{\mathbf{Z}}([1/5,1/4])<0{,}0956727$$

d'où (1), car (cf. corollaire 1)

$$t_Z([0,1]) = t_Z([0,1/4])^{1/2}.$$

Preuve de la formule (2). – Pour obtenir la minoration, il suffit d'utiliser le corollaire 1, car

$$\frac{4\delta}{(1+\sqrt{1+4\delta})^2} = \delta - 2\cdot\delta^2 + O(\delta^3) \qquad \text{pour} \qquad \delta \mapsto 0^+.$$

Pour obtenir la majoration, on emploie le théorème 2 :

$$t_Z([0,\delta]) \leqslant \min_{0\leqslant r_0\leqslant 1} \exp(f_I^+(r_0,0)) \leqslant \exp(f_I^+(1-2\sqrt{e}\cdot\delta,0))$$
$$= \delta(1-\sqrt{e}\cdot\delta+O(\delta^2)) \qquad \text{pour} \qquad \delta\mapsto 0^+.$$

7. Convexité des fonctions f^+ et f^-.

L'objet des propositions suivantes est de décrire les intervalles I d'extrémités rationnelles pour lesquels les fonctions f_I^+ et f_I^- admettent un minimum à l'intérieur du triangle $T = \{r \in \mathbf{R}^2, 0\leqslant r_0, r_1; |r\leqslant 1\}$.

LEMME 3. – *Soient* I, d_0, d_1, h *et* f_I^- *comme dans le théorème* 1. *Posons*

$$h_0 = r_0\log\delta - (1-r_0)\log d_0 + h(r_0,r_1);$$
$$h_1 = r_1\log\delta - (1-r_1)\log d_1 + h(r_1,r_0).$$

Alors, la fonction h_0 (*resp.* h_1) *est strictement convexe sur* $T_0 = T\backslash\{r_0=0\}$ (*resp.* $T_1 = T\backslash\{r_1=0\}$).

En particulier, $f_I^- = \max\{h_0,h_1\}$ *est strictement convexe sur* $T_0\cap T_1$.

Démonstration. – Pour des raisons de symétrie, il suffit de vérifier que h_0 est strictement convexe sur T_0. Posons

$$\lambda = (1-|r|)\cdot(1+|r|)\cdot(1+r_1-r_0)\cdot(1+r_0-r_1).$$

Pour la matrice Hessien de h_0, on vérifie

$$H = \begin{pmatrix} H_{0,0} & H_{0,1} \\ H_{1,0} & H_{1,1} \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{r_0(1-r_0^2+r_1^2)}{\lambda}+\dfrac{1}{r_0} & \dfrac{r_1(1-r_1^2+r_0^2)}{\lambda} \\ \dfrac{r_1(1-r_1^2+r_0^2)}{\lambda} & \dfrac{r_0(1-r_0^2+r_1^2)}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Pour tout $r \in \mathring{T}$,

$$H_{0,0} = 2 \cdot \left\{ \frac{r_0(1-r_0^2+r_1^2)}{\lambda} + \frac{1}{r_0} \right\} > 0$$

$$\text{Det}\,(H) = 4/\lambda > 0\,;$$

donc, h_0 est strictement convexe sur $\mathring{T}$. Ensuite, on vérifie qu'il en est de même des restrictions de h_0 aux côtés $r_1 = 0$ et $|r| = 1$.

PROPOSITION 3. — *Associons à chaque intervalle* $I = [a_0, a_1]$, *avec* a_0, $a_1 \in Q$, *le point* $P_I \in \mathbf{R}^2$ *de coordonnées*

$$x_I = \text{den}\,(a_0)\delta(I), \qquad y_I = \text{den}\,(a_1)\delta(I).$$

Alors,

i) *la fonction* f_I^- *atteint son minimum en un seul point* $r^- = (r_0^-, r_1^-) = r_I^- \in T$;

ii) $|r^-| < 1$;

iii) *si* $x_I > y_I - \sqrt{y_I}$ *et* $y_I > x_I - \sqrt{x_I}$, *le point* r^- *est situé à l'intérieur de* T;

iv) *si* $y_I \leqslant x_I - \sqrt{x_I}$ (*resp.* $x_I \leqslant y_I - \sqrt{y_I}$), *alors* $r_0^- = 0$ (*resp.* $r_1^- = 0$).

Démonstration. — Soient h_0 et h_1 comme dans le lemme 3. Tout d'abord, on a

$$\frac{\partial h_i}{\partial r_j} \to +\infty \qquad \text{pour} \qquad |r| \to 1, \qquad i = 1,2\,; \quad j = 0,1$$

et donc le minimum de f_I^- est atteint pour $|r| < 1$.

Supposons $y_I > x_I - \sqrt{x_I}$ et $x_I > y_I - \sqrt{y_I}$, i.e.

$$\frac{4\delta}{(1+\sqrt{1+4\delta\, d_1})^2} < \frac{1}{d_0} \qquad \text{et} \qquad \frac{4\delta}{(1+\sqrt{1+4\delta\, d_0})^2} < \frac{1}{d_1}.$$

Si f_I^- atteint son minimum en $\bar{r} = (0,t)$, on en déduit, utilisant (10) et le fait que $h_0(0,\cdot) \equiv \log 1/d_0$,

$$h_1(\bar{r}) = \log \frac{4\delta}{(1+\sqrt{1+4\delta\, d_1})^2} < \log \frac{1}{d_0} = h_0(\bar{r}).$$

Par ailleurs, on vérifie que $\frac{\partial h_0}{\partial r_0} \to -\infty$ pour $r_0 \to 0$, et donc, à l'aide de la dernière ligne et de la continuité de h_0, h_1, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $h_1(\varepsilon,t) < h_0(\varepsilon,t) < h_0(\bar{r})$. On en déduit $f_I^-(\varepsilon,t) < f_I^-(\bar{r})$, ce qui est absurde. De la même façon, on démontre que le minimum de f_I^- n'est pas atteint sur le côté $r_1 = 0$. Donc, en utilisant la stricte convexité de f_I^- sur $\mathring{T}$ (lemme 3), on trouve que la fonction f_I^- atteint son minimum en un seul point r_I^- situé à l'intérieur de T.

Supposons maintenant $y_I < x_I - \sqrt{x_I}$ et soit $\bar{r} = (0,t)$ le seul point du triangle T où la fonction h_1 atteint son minimum (voir la ligne (10) et le lemme 3). On a

$$\min_T h_1 = h_1(\bar{r}) = \log \frac{4\delta}{(1+\sqrt{1+4\delta\, d_1})^2} > \log \frac{1}{d_0} = h_0(\bar{r}).$$

En particulier, les restrictions des fonctions f_I^- et h_1 au côté $r_0 = 0$ de T sont égales et donc le lemme 3 nous assure que f_I^-, restreinte à $T_1 = T\backslash\{r_1 = 0\}$, est convexe. En utilisant la continuité de h_0, h_1, on trouve un voisinage U de $\bar{r}$ dans T_1 tel que, pour tout $r \in U$, on a $h_1(r) > h_0(r)$, ce qui implique $f_I^-(r) = h_1(r)$ sur U. Donc, $\bar{r}$ est un minimum local de f_I^- restreinte à T_1 et on déduit de la convexité de cette fonction que $\bar{r}$ est le seul point où f_I^- atteint son minimum. La même conclusion est valable si $y_I = x_I - \sqrt{x_I}$, car f_I^-, vue comme fonction des paramètres d_0, d_1 et $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$, est continue.

Enfin, si $x_I \leqslant y_I - \sqrt{y_I}$, les mêmes arguments montrent que la fonction f_I^- atteint son minimum en un seul point $r_I^- \in]0,1[\times \{0\}$.

LEMME 4. — *La fonction f_I^+ définie dans le théorème 2 est strictement convexe.*

Démonstration. — Tout d'abord, on vérifie sans peine que les restrictions de f_I^+ aux côtés du triangle T sont convexes. Ensuite, pour montrer la convexité de f_I^+ sur $\mathring{T}$, il suffit de montrer que la matrice Hessien H de la fonction $\varphi(d,s) = f_I^+((s-d)/2, (s+d)/2)$ est définie positive pour $0 < |d| < s < 1$. On vérifie que

$$H = \frac{2}{(1-s)^3} \begin{pmatrix} (1-s)^2\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right) & (1-s)\left(\frac{1+d}{2}b - \frac{1-d}{2}c\right) \\ (1-s)\left(\frac{1+d}{2}b - \frac{1-d}{2}c\right) & -2a + \frac{(1+d)^2}{2}b + \frac{(1-d)^2}{2}c \end{pmatrix},$$

où l'on a posé

$$a = \log \frac{2}{1+s}, \qquad b = \log \frac{1+d}{s+d}, \qquad c = \log \frac{1-d}{s-d}.$$

Pour achever la démonstration, il reste à montrer que $\operatorname{Det} H = bc - a(b+c) > 0$. Pour ce faire, on utilise l'inégalité

$$\log(1-x)\log(1-y) - [\log(1-x)+\log(1-y)] \cdot \log\left(1-\frac{xy}{x+y}\right) > 0, \qquad 0<x, y<1$$

(avec $x=(1-s)/(1+d)$ et $y = (1-s)/(1-d)$), ce qui est une conséquence du lemme général :

$$\text{« si } f(x) = \sum_{i\geqslant 1} c_i x^i,\ c_i \geqslant 0,$$

alors

$$\frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)} \leqslant f\left(\frac{xy}{x+y}\right) \text{ avec } x,\ y \geqslant 0. \text{ »}$$

Remarque. — On déduit du lemme que la fonction f_I^+ atteint son minimum en un seul point, r_I^+. De plus, si $r_I^+ \in \mathring{\mathbf{T}}$, alors r_I^+ est le seul point de minimum local de f_I^+.

PROPOSITION 4. — Associons à chaque intervalle $I = [a_0, a_1]$, avec $a_0,\ a_1 \in \mathbf{Q}$, le point $P_I \in \mathbf{R}^2$ de coordonnées

$$x_I = \operatorname{den}(a_0)\sqrt{\delta(I)}, \qquad y_I = \operatorname{den}(a_1)\sqrt{\delta(I)}$$

situé dans le premier quadrant, au-dessus de l'hyperbole $\{xy=1\}$. Ensuite, posons pour $t \in]0,1[$:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{(1-t)^2}\left\{\log 2 - \frac{(1-t)^2}{2}\log(1-t) - \frac{(1+t)^2}{2}\log(1+t) + t^2\log(2t)\right\},$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{(1-t)^2}\left\{\log 2 + \frac{(1-t)^2}{2}\log(1-t) - \frac{(3-t)(1+t)}{2}\log(1+t) + (2-t)t\log(2t)\right\}.$$

Alors, si le minimum de f_I^+ dans le triangle T est pris en $r+ = r_I^+$, on a :

i) $|r^+| < 1$;

ii) $r_0^+ = 0$ si et seulement si x_I, $y_I \geqslant 2$ ou s'il existe $t \in]0,1[$ tel que $x_I \geqslant \exp \varphi_1(t)$ et $y_I = \exp \varphi_2(t)$;

iii) $r_1^+ = 0$ si et seulement si x_I, $y_I \geqslant 2$ ou s'il existe $t \in]0,1[$ tel que $x_I = \exp \varphi_2(t)$ et $y_I \geqslant \exp \varphi_1(t)$.

Démonstration. — Posons $f = f_I^+$, $r^+ = r_I^+$, $x = x_I$ et $y = y_I$. Tout d'abord, on a $\dfrac{\partial f}{\partial r_i} \to + \infty$ pour $|r| \to 1$, $j = 0, 1$ et donc $|r^+| < 1$. Ensuite, on vérifie que

$$\frac{\partial f}{\partial r_0}(0,t) = - \varphi_1(t) + \log x, \qquad \frac{\partial f}{\partial r_1}(0,t) = - \varphi_2(t) + \log y.$$

On a $r_0^+ = 0$ si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial r_0}(r^+) \geqslant 0$ et si r^+ est le point de minimum de f restreinte au côté $r_0 = 0$.

• *Premier cas :* $y < 2$. Dans ce cas

$$\frac{\partial f}{\partial r_1}(0,0) = - \varphi_2(0) + \log y < 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial r_1}(0,t) \to + \infty \quad \text{pour} \quad t \to 1$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (r_1)^2}(0,t) > 0, \qquad \forall t \in]0,1[.$$

Donc $r^+ = (0,t)$ si et seulement si

$$0 = \frac{\partial f}{\partial r_1}(0,t) = - \varphi_2(t) + \log y,$$

et

$$0 \leqslant \frac{\partial f}{\partial r_0}(0,t) = - \varphi_1(t) + \log x.$$

On en déduit $r_0^+ = 0 \Leftrightarrow \exists t \in]0,1[$, $x \geqslant \exp \varphi_1(t)$, $y = \exp \varphi_2(t)$.

• *Deuxième cas :* $y \geqslant 2$. On a $f(0,0) < f(0,t)$ pour tout $t \in]0,1[$, donc $r_0^+ = (0,t)$ si et seulement si $t = 0$ et

$$0 \leqslant \frac{\partial f}{\partial r_0}(0,0) = -\varphi_1(0) + \log x = -\log 2 + \log x.$$

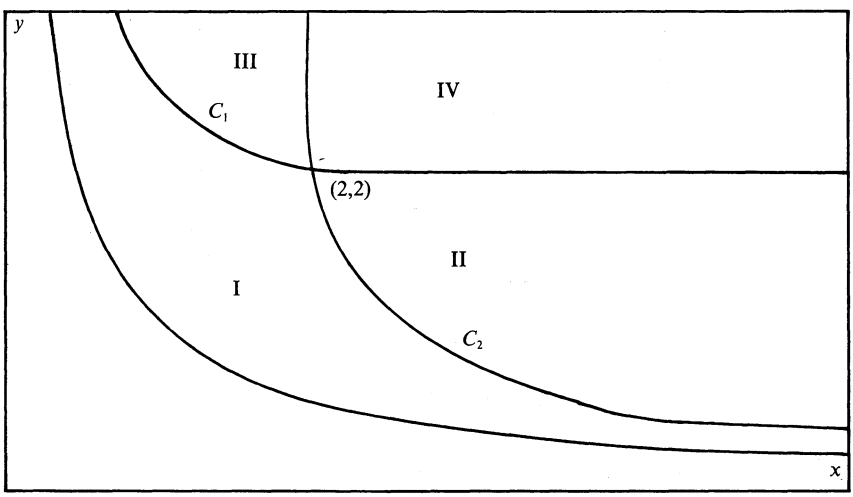
On en déduit que $r_0^+ = 0$ si et seulement si $x \geqslant 2$.

Pour achever la démonstration de ii), il suffit de remarquer que $\varphi_2(t) < \log 2$ pour tout $t \in]0,1[$. Enfin, la démonstration de (iii) est semblable à celle de ii).

Considérons la courbe paramétrique

$$C_1 := \{(\exp \varphi_1(t), \exp \varphi_2(t)),\ t \in (0,1)\}$$

et son image C_2 obtenue par symétrie par rapport à la bissectrice $\{x=y\}$. La partie du premier quadrant située au-dessus de l'hyperbole $xy = 1$ est alors découpée en quatre zones délimitées par les courbes C_1 et C_2, l'hyperbole elle-même et les demi-droites $\{x=2, y\geqslant 2\}$ et $\{x\geqslant 2, y=2\}$, comme le montre la figure suivante :



D'après la proposition 4 on voit que, si P_I est dans la zone 1, le minimum r^+ de la fonction f_I^+ est à l'intérieur de T. Par contre, si P_I appartient à la deuxième zone (resp. troisième zone), le minimum est atteint en $r_0 = 0$ (resp. en $r_1 = 0$). Enfin, si P_I est dans la zone 4, le minimum est pris pour $r = (0,0)$.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de r_I^-, $t_Z(I)^-$, r_I^+ et $t_Z(I)^+$ pour quelques intervalles $I = [a_0, a_1]$:

I	r_I^-	t_I^-	r_I^+	t_I^+
[0, 1/2]	(0,557945, 0,150932)	0,27334798	(0,416988, 0,161180)	0,29069307
[0, 1/3]	(0,643852, 0,096466)	0,21095904	(0,512735, 0,115376)	0,22210898
[0, 1/4]	(0,699724, 0,070584)	0,17278874	(0,580893, 0,090000)	0,18043337
[0, 1/5]	(0,739811, 0,055409)	0,14665213	(0,632079, 0,073829)	0,15220315
[0, 2/5]	(0,620173, 0,000000)	0,23443556	(0,417503, 0,000194)	0,26155850
[0, 1/6]	(0,770199, 0,045446)	0,12752602	(0,672005, 0,062608)	0,13173675
[0, 1/10]	(0,842389, 0,025980)	0,08408791	(0,771000, 0,038980)	0,08592011
[0, 1/12]	(0,864186, 0,021250)	0,07190912	(0,800693, 0,032801)	0,07324779
[0, 5/12]	(0,612372, 0,000000)	0,24040821	(0,405513, 0,000000)	0,26920790
[0, 1/15]	(0,887138, 0,016600)	0,05909715	(0,833591, 0,026503)	0,06000011
[0, 4/15]	(0,695608, 0,000000)	0,17951767	(0,524243, 0,000000)	0,19414326
[0, 7/15]	(0,5900624 0,000000)	0,25736784	(0,375255, 0,000000)	0,29127331
[0, 1/20]	(0,911907, 0,012060)	0,04558513	(0,869277, 0,020081)	0,04612155
[0, 3/20]	(0,790569, 0,000000)	0,11696312	(0,666479, 0,000000)	0,12262640
[0, 7/20]	(0,645497, 0,000000)	0,21543809	(0,451935, 0,000000)	0,23768419
[1/3, 1/2]	(0,326997, 0,515737)	0,11954914	(0,201655, 0,352523)	0,17181856
[1/3, 2/5]	(0,536294, 0,357611)	0,06153947	(0,375632, 0,186028)	0,10832409
[1/3, 3/5]	(0,478302, 0,133319)	0,11603212	(0,043193, 0,000000)	0,25699230
[1/3, 4/5]	(0,388186, 0,058689)	0,14677405	(0,000000, 0,000000)	0,34145503
[1/4, 1/2]	(0,150933, 0,557947)	0,13667399	(0,032894, 0,204685)	0,23640379
[1/4, 1/3]	(0,387065, 0,494635)	0,07255604	(0,220241, 0,327502)	0,12313371
[1/4, 2/3]	(0,156413, 0,398753)	0,14177085	(0,000000, 0,002953)	0,32273462
[1/4, 2/5]	(0,456941, 0,309858)	0,08036980	(0,046212, 0,010485)	0,10266565
[2/5, 1/2]	(0,258875, 0,619553)	0,08230163	(0,134425, 0,469302)	0,12578497
[1/5, 1/3]	(0,264591, 0,593303)	0,08423303	(0,045246, 0,170992)	0,17500114
[1/5, 1/4]	(0,416244, 0,488183)	0,05014593	(0,2300925 0,314191)	0,09567263
[1/5, 2/5]	(0,353553, 0,353553)	0,08284271	(0,000000, 0,000000)	0,22360680

8. Propriétés analytiques de t_Z.

Comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, ce paragraphe est consacré à l'étude des propriétés analytiques de t_Z, vue comme fonction de l'ensemble des intervalles fermés réels. Une première propriété (évidente) est la suivante : t_Z est une fonction d'ensemble *monotone*, c'est-à-dire $t_Z(X) \leqslant t_Z(Y)$ pour toute partie compacte $X \subset Y$ du plan complexe. Le résultat que l'on va établir maintenant est la continuité de t_Z.

LEMME 5. — *Soient n un entier positif, $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle de longueur δ et Q un polynôme de degré $\leqslant n$. Alors,*

$$\frac{|Q(s)|}{(2n+1)|Q|_{2,I}} \leqslant 2x(s) + 1 + 2\sqrt{x(s)(x(s)+1)},$$

où l'on a posé $x(s) = \operatorname{dist}(s,I)/\delta$.

Démonstration. — Appelons a, b les extrémités de I; En remplaçant Q par $Q([(b-a)/2]t+[(b+a)/2])$ on peut supposer $I = [-1,1]$. On utilise alors la proposition 1 :

$$\frac{|Q(s)|}{|Q|_{2,I}} \leqslant \left(\sum_{h=0}^{n} |p_h(s)|^2\right)^{1/2},$$

en majorant $|p_h(s)| = \sqrt{2h+1}\cdot|P_h(s)|$ (cf. (5)) à l'aide de la formule de Laplace (6) :

$$|P_h(s)| \leqslant \max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} |s+\sqrt{s^2-1}\cos\theta|^h \leqslant \begin{cases} 1, & \text{si } s\notin[-1,1]; \\ |s|+\sqrt{s^2-1}, & \text{si } s\notin[-1,1] \end{cases}$$

$$= \operatorname{dist}(s,I) + 1 + \sqrt{\operatorname{dist}(s,I)[\operatorname{dist}(s,I)+2]}$$

$$= 2x(s) + 1 + 2\sqrt{x(s)\,(x(s)+1)}.$$

THÉORÈME 3. — *Pour tout couple d'intervalles $I, J \subset \mathbf{R}$ on a*

$$\frac{t_{\mathbf{Z}}(J)}{t_{\mathbf{Z}}(I)} \leqslant 2\frac{d(I,J)}{\delta(I)} + 1 + 2\sqrt{\frac{d(I,J)}{\delta(I)}\left(\frac{d(I,J)}{\delta(I)}+1\right)}.$$

En particulier, $t_{\mathbf{Z}}$ est 1/2-hölderienne.

Démonstration. — Soit $k > 1$; il existe $Q \in \mathbf{Z}[s]$ tel que

$$|Q|_{\infty,I}^{1/\deg Q} \leqslant k t_{\mathbf{Z}}(I).$$

Quitte à remplacer Q par une de ses puissances, on peut supposer que $1 + \deg Q \leqslant k^{\deg Q}$. Le lemme ci-dessus donne l'estimation qui permet de conclure

$$|Q|_{\infty,J}^{1/\deg Q} \leqslant \left[2\frac{d(I,J)}{\delta(I)} + 1 + 2\sqrt{\frac{d(I,J)}{\delta(I)}\left(\frac{d(I,J)}{\delta(I)}+1\right)}\right]\cdot k^2 t_{\mathbf{Z}}(I).$$

Ceci établi, on va prouver que $t_{\mathbf{Z}}$ est localement constante autour d'intervalles d'extrémités rationnelles de dénominateurs assez petits.

LEMME 6. — *Soient $n \geqslant m$ deux entiers positifs avec $m/n \geqslant r > 0$, $I = [a_0, a_1] \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $Q \in V^I_{n,(0,m)}$ un polynôme. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de r tel que, pour tout $s \in \mathbf{R}$ avec $|s - a_n| < \varepsilon\delta(I)$, on ait*

$$|Q(s)| \leqslant \sqrt{(n+1)^2 - m^2} \cdot 2^{1-n} |Q|_{2,I}.$$

Démonstration. — On suppose $I = [-1, 1]$. La proposition 1 donne

$$\frac{|Q(s)|}{|Q|_{2,[-1,1]}} \leqslant |1-s|^m \left(\sum_{h=0}^{n-m} |p_h^{(2m,0)}(s)|^2 \right)^{1/2}.$$

On calcule $|p_h^{(2m,0)}(s)| = (2h+2m+1)^{1/2} 2^{-m} \cdot |P_h^{(2m,0)}(s)|$ (cf. (4)) à l'aide de la formule de Rodriguez (3) :

$$\begin{aligned}
|p_h^{(2m,0)}(s)| &= (2h+2m+1)^{1/2} 2^{-m} |1-s|^{-2m} 2^{-h} \cdot |D_h\{(1-t)^{h+2m}(1+t)^h\}_{|t=s}| \\
&= (2h+2m+1)^{1/2} 2^{-h-m} |1-s|^{-2m} \\
&\qquad \cdot |D_h\{[(t-s)+(s-1)]^{h+2m}[(1+s)+(t-s)]^h\}_{|t=s}| \\
&= (2h+2m+1)^{1/2} 2^{-h-m} |1-s|^{-2m} \\
&\qquad \cdot \left| D_h \left\{ \sum_{i=0}^{h+2m} \sum_{j=0}^{h} \binom{h+2m}{i} \binom{h}{j} (t-s)^i (s-1)^{h+2m-i} \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. (s+1)^j (t-s)^{h-j} \right\}_{|t=s} \right| \\
&= (2h+2m+1)^{1/2} 2^{-h-m} |1-s|^{-2m} \\
&\qquad \cdot \left| \sum_{j=0}^{h} \binom{h+2m}{j} \binom{h}{j} (s-1)^{h+2m-j} (s+1)^j \right| \\
&\leqslant (2h+2m+1)^{1/2} 2^{-h-m} \cdot \left[\sum_{j=0}^{h} \binom{h+2m}{j} \binom{h}{j} |s-1|^{h-j} |s+1|^j \right] \\
&\leqslant (2h+2m+1)^{1/2} 2^{-h-m} 2^{h+2m} (|s-1| + |s+1|)^h \\
&= (2h+2m+1)^{1/2} 2^m (|s-1| + |s+1|)^h.
\end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon = \varepsilon(r) > 0$ tel que

$$|1-s|^r \cdot 2^r (|s-1| + |s+1|)^{1-r} < 1/2$$

pour $|1-s| < \varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{|Q(s)}{|Q|_{2,[-1,1]}} &\leqslant 2\sqrt{(n+1)^2 - m^2} \cdot [2^{m/n} (|s-1| + |s+1|)^{1-m/n} |1-s|^{m/n}]^n \\
&\leqslant 2\sqrt{(n+1)^2 - m^2} \cdot 2^{1-n} \quad \text{pour} \quad |1-s| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

THÉORÈME 4. — *Soit* $I = [a_0, a_1]$ *un intervalle. Alors, si* $a_1 \in \mathbf{Q}$ *et* $\operatorname{den}(a_1) t_{\mathbf{Z}}(I) < 1$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que, pour tout intervalle* $J = [a_0, a_1]$ *avec* $|b_1 - a_1| < \varepsilon$, *on ait* $t_{\mathbf{Z}}(J) = t_{\mathbf{Z}}(I)$.

De même, si $a_0 \in \mathbf{Q}$ *et* $\operatorname{den}(a_0) t_{\mathbf{Z}}(I) < 1$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que, pour tout intervalle* $J = [b_0, a_1]$ *avec* $|b_0 - a_0| < \varepsilon$, *on ait* $t_{\mathbf{Z}}(J) = t_{\mathbf{Z}}(I)$.

En particulier, *si les extrémités de* I *sont rationnelles de dénominateurs bornés par* d_0, d_1 et $\max\{d_0, d_1\} t_{\mathbf{Z}}(I) < 1$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que, pour tout intervalle* J *avec* $d(I,J) < \varepsilon$, on ait $t_{\mathbf{Z}}(J) = t_{\mathbf{Z}}(I)$. *Autrement dit,* $t_{\mathbf{Z}}$ est localement constante autour de I.

Démonstration. — Il suffit de prouver la première assertion. Soient $k \in]1, (\operatorname{den}(a_1) t_{\mathbf{Z}}(I))^{-1}[$ et $Q \in \mathbf{Z}[s]$ tels que $|Q|_{\infty,I}^{1/\deg Q} \leqslant k t_{\mathbf{Z}}(I)$. Quitte à remplacer Q par une de ses puissances, on peut supposer le degré de Q aussi grand que l'on veut. Le théorème 1 montre alors que la multiplicité de Q en a_1 est supérieure à $\rho \cdot \deg Q$, où ρ est un nombre positif ne dépendant pas de Q. On déduit du lemme 6 l'existence de $\varepsilon_1 > 0$ tel que $|Q(s)|^{1/\deg Q} \leqslant k^2 t_{\mathbf{Z}}(I)$ pour $a_1 < s < a_1 + \varepsilon_1$, ce qui prouve l'énoncé pour les intervalles J contenant I.

Soit maintenant $J = [a_0, b_0] \subset I$ et choisissons, pour $k \in]1, (\operatorname{den}(a_1) t_{\mathbf{Z}}(I))^{-1}[$, un polynôme $Q \in \mathbf{Z}[s]$ tels que $|Q|_{\infty,J}^{1/\deg Q} \leqslant k t_{\mathbf{Z}}(J)$. Ici encore, on peut supposer le degré de Q aussi grand que l'on veut. Si $|b_1 - a_1|$ est plus petit que $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(I) > 0$, on déduit du lemme 5 que $|Q|_{\infty,I}^{1/\deg Q} < \operatorname{den}(a_1)^{-1}$, et donc le théorème 1 nous assure que $m_{a_1}(Q) \geqslant \rho \cdot \deg Q$, avec $\rho = \rho(I) > 0$. On applique alors le lemme 6 : $|Q|_{\infty,[b_1 a_1]} < |Q|_{\infty,I}$ si $|b_1 - a_1| < \varepsilon_2' = \varepsilon_2'(I)$. Donc $|Q|_{\infty,J} = |Q|_{\infty,I}$, d'où encore $t_{\mathbf{Z}}(J) = t_{\mathbf{Z}}(I)$.

DÉFINITION. — *Nous dirons qu'un intervalle* I *est* un intervalle constant *(pour* $t_{\mathbf{Z}}$*) si* $t_{\mathbf{Z}}$ *est localement constant autour de* I.

Soit I un intervalle d'extrémités rationnelles ; le théorème 4 joint au théorème 2 permet d'expliciter des conditions suffisantes, en termes de $\delta(I)$ et des dénominateurs des extrémités de I, afin que I soit un intervalle constant. Sans développer ici ces conditions, on en énonce d'autres plus faciles à expliciter. Supposons donc $I = [a_0, a_1]$ avec $a_0, a_1 \in \mathbf{Q}$ et posons comme d'habitude $d_i = \operatorname{den}(a_i)$, $i = 1, 2$ et $\delta = \delta(I)$. La suite de polynômes :

$$Q_n(s) = [d_0^{d_1} d_1^{d_0} (s - a_0)^{d_1} (a_1 - s)^{d_0}]^n \in \mathbf{Z}[s]$$

permet de vérifier que

$$t_{\mathbf{Z}}(I) \leqslant |Q_n|_{\infty,I}^{1/\deg Q} = \frac{\delta d_0 d_1}{d_0 + d_1}.$$

En utilisant le théorème 4, on en tire le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2. — *Soit I un intervalle de diamètre δ et d'extrémités rationnels de dénominateurs bornés par d_0 et d_1. Si $\delta \max\{d_0, d_1\} d_0 d_1 \leqslant d_0 + d_1$, alors I est un intervalle constant.*

Exemples.

- Les intervalles $I_n = [0, n/d]$ $(n, d \in \mathbf{N})$ sont constants pour $n < 1 + 1/d$.
- Soient p_0, p_1, d_0, d_1 quatre entiers avec d_0, $d_1 \geqslant 1$ et $p_1 d_0 - p_0 d_1 = 1$; alors, $I = [p_0/d_0, p_1/d_1]$ est constant.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] E. APARICIO, Metodos para el calculo approximado de la desviacion diopantea uniforme minima a cero en un segmento, Revista Matematica Hispano-Americana, 4 Serie, t. XXXVIII, No 6 (1978), 259-270.

[A2] E. APARICIO, New bounds for the uniform Diophantine deviation from zero in [0,1] and [0,1/4], Proceedings of the sixth conference of Portuguese and Spanish mathematiciens, Part I (Santander 1979), 289-291.

[C] G. V. CHUDNOVSKY, Number Theoretic Applications of Polynomials with Rational Coefficients Defined by Extremality Conditions, Arithmetic and Geometry, Vol. I, ed. M. Artin and J. Tate, Birkhäuser. Progress in Math. 35, 1983, 61-105.

[F] O. FERGUSON, Approximation by polynomials with integral coefficients, AMS, Providence, 1980.

[HW] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, An introduction to the theory of numbers, 5e édition, Oxford University Press, 1984.

[L1] M. LANGEVIN, Calculs explicites de constantes de Lehmer, Sém. Th. élém. et Anal. des Nombres 1986/1987, Publ. math. d'Orsay, 52-67.

[L2] M. LANGEVIN, Solution et histoire d'un problème de Favard, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1986/1987, éd. C. Goldstein, Birkhäuser, Progress in Math., 75 (1989), 221-269.

[N1] M. NAIR, On Chebyshev-type inequality for primes, The American Mathematical Monthly, 89, No 2 (1982), 126-129.

[N2] M. NAIR, A new method in elementary prime number theory, J. London Math. Soc., (2), 25 (1982), 385-391.

[R] G. RHIN, Diamètre transfini et mesures d'irrationalité des logarithmes, Communication personnelle.

[Sa] I. N. SANOV, Function with integral parameters, deviating the last from zero (en russe), Leningrad. Gos. Univ. Ucen. Zap., Ser. Mat. Nauk, 111 (1949), 32-46.

[S] G. SZEGÖ, Orthogonal polynomials, AMS, Providence, 1975.

[T] R. M. TRIGUB, Approximations of functions with Diophantine conditions by polynomials with integral coefficients (en russe), Metric questions of the theory of functions and mappings, Naukova Dumka Publishing House, Kiev, No. 2 (1971), 267-333.

Manuscrit reçu le 9 juillet 1990,

révisé le 29 novembre 1990.

Francesco AMOROSO,

Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri 7
56100 Pisa (Italia)
et
U.R.A. 763 du CNRS « Problèmes diophantiens »
Université de Paris VI
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05 (France).